

6ª edición

Cálculo

Robert A. Adams

PEARSON
Addison Wesley

Cálculo

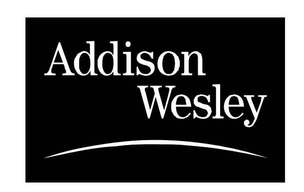


Sexta edición

Robert A. Adams
University of British Columbia

Traducción:
Inés Portillo García
Universidad Pontificia de Comillas

Revisión técnica:
Javier Portillo García
Universidad Politécnica de Madrid



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • Reading, Massachusetts • Harlow, England

Datos de catalogación bibliográfica

CÁLCULO
Robert A. Adams

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2009

ISBN: 978-84-7829-089-5

Materia: 517 – Cálculo

Formato 195 × 250 mm Páginas: 1240

CÁLCULO
Robert A. Adams

ISBN: 978-84-7829-089-5

Depósito legal: M.

Equipo editorial:
Editor: Miguel Martín-Romo
Técnico editorial: Marta Caicoya

Equipo de producción:
Director: José Antonio Clares
Técnico: Irene Iriarte

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación, S.A.

Composición COPIBOOK
Impreso por:

IMPRESO EN ESPAÑA - *PRINTED IN SPAIN*

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos



A Anne



Contenido

Prólogo

Cuando un libro de texto alcanza su sexta edición, sus lectores han llegado a ciertas expectativas que un autor no puede ignorar. El objetivo de este texto sigue siendo presentar el cálculo de una forma clara, coherente y legible, y sobre todo de manera que sus lectores lo encuentren *interesante*. La creación de un libro completo ha sido también un objetivo; es mejor cubrir muchos contenidos en el entendimiento de que los profesores y los estudiantes deberán saltarse algunos, que no considerar suficientes contenidos para cubrir las necesidades de usuarios con intereses y formación previa muy diversos. Dos temas periféricos que estaban presentes en la cuarta edición y se omitieron en la quinta, concretamente, introducciones muy breves a las series de Fourier (Sección 9.9) y a las funciones de variable compleja (Apéndice II) se han recuperado a petición de algunos usuarios que lamentaron mucho su desaparición.

Esta edición tiene pocos cambios en el orden de presentación de los contenidos. Se ha añadido algún material (véase la lista posterior), y no se ha eliminado nada significativo. No obstante, los procesos habituales de reescritura y ajuste fino de la presentación y un pequeño cambio en el tamaño de las páginas han tenido como resultado un número de páginas significativamente inferior. Los principales cambios en el texto son pocos, y se enumeran a continuación:

- Se ha incluido un capítulo completo (Capítulo 17) sobre Ecuaciones Diferenciales, que ha reabsorbido parte del material de EDs diseminado previamente por todo el texto, por ejemplo, las soluciones de EDs basadas en series del Capítulo 9. Sin embargo, algunos aspectos elementales de EDs como la solución de ecuaciones separables de primer orden y ecuaciones lineales, que son buenas aplicaciones de la integración, y la solución de ecuaciones lineales de segundo orden de coeficientes constantes, cuyas soluciones se basan en recetas y utilizan las funciones exponenciales y trigonométricas, quedan en las Secciones 7.9 y 3.7, respectivamente. En los lugares adecuados del Capítulo 17, se hace referencia a estas secciones.
- Se han añadido varias páginas nuevas sobre probabilidad discreta al comienzo de la Sección 7.8 (Probabilidad). Aunque el propósito de esta sección es ilustrar el uso de la integración al estudiar la probabilidad, los conceptos básicos de probabilidad se presentan mejor comenzando con el caso discreto.
- La utilización de Maple para manejar vectores, matrices y funciones con valores vectoriales hace uso ahora de los nuevos paquetes «LinearAlgebra» y «VectorCalculus». Esto simplifica grandemente las cosas. Afecta a los capítulos desde el 10 en adelante y ha tenido como consecuencia la reescritura completa de la Sección 10.7.
- Se ha añadido al Capítulo P (Preliminares) una nueva sección sobre polinomios y funciones racionales.
- Las Secciones 4.7 (Aproximaciones Lineales) y especialmente la 4.8 (Polinomios de Taylor) han sufrido cambios considerables en la notación y la presentación. Además, la

Sección 9.6 (Series de Taylor y de Maclaurin) han tenido muchos cambios y han absorbido lo que antes era una sección separada revisando la Fórmula de Taylor. Ahora el enfoque completo del Teorema de Taylor está más unificado, aunque todavía está dividido entre los Capítulos 4 y 9.

Además de todo lo anterior, se han realizado numerosos pequeños cambios locales aquí y allá para mejorar el texto. Se han eliminado algunos ejemplos confusos o se han sustituido por otros más apropiados. Se han eliminado algunos ejercicios y se han añadido otros. Se han añadido algunas figuras nuevas y se han mejorado algunas otras. Se han cambiado algunas notaciones. Los intervalos abiertos se escriben ahora (a, b) del nuevo; aunque lógico, no parece adecuado. El proceso de hacer que el libro sea más agradable a los lectores sigue en curso y se basa en buena parte en los comentarios de los propios lectores.



Al estudiante

Cuando recibí mi primer curso de cálculo, no había un libro de texto prescrito, sino un libro denominado *Calculus Made Easy* que se recomendaba a todos aquellos que necesitábamos algo más que los apuntes tomados durante las clases. Compré el libro, esperando que sería como indicaba su título y que me facilitaría el aprendizaje del cálculo. No fue así.

¿Es el cálculo una materia muy difícil? No, realmente no, pero algunas veces se lo parece a los estudiantes, especialmente al principio, debido a las nuevas ideas y técnicas que se utilizan, y porque el éxito del aprendizaje del cálculo depende de tener una base muy sólida en las matemáticas previas (álgebra, geometría y trigonometría), sobre la que se pueda construir. Es conveniente revisar el material previo del Capítulo P (Preliminares) incluso si el profesor no lo menciona en clase. Al aprender cálculo dispondremos de herramientas muy útiles para analizar problemas en numerosos campos de interés, especialmente los que se consideran «científicos». Merece la pena adquirir estas herramientas, pero, como toda tarea que merece la pena, ésta requiere mucho esfuerzo de nuestra parte. No existe libro ni profesor que puedan evitar este requisito.

Al escribir este libro he intentado organizar el material de forma que resulte tan fácil como sea posible, pero no a expensas de «barrer las dificultades reales bajo la alfombra». Encontraremos que algunos conceptos son difíciles de entender cuando se presentan por primera vez. Cuando sea así, *debemos releer* el material despacio, si es necesario varias veces; *pensar sobre él*; formular preguntas para realizar a los estudiantes más experimentados, a nuestro tutor o a nuestro profesor. No hay que retrasarlo. Es importante resolver los problemas tan pronto como sea posible. Si no se entiende una cosa hoy, tampoco entenderemos cómo se aplica mañana. Las matemáticas son una «disciplina lineal»; construyen una idea basándose en la anterior.

Resolver ejercicios es la mejor forma de profundizar en nuestra comprensión del cálculo, y de convencernos de que lo hemos entendido. Este libro contiene numerosos ejercicios; demasiados para intentar resolverlos todos. Algunos de ellos son ejercicios directos, que nos ayudarán a desarrollar nuestras propias destrezas en cálculo. Sin embargo, son más importantes los problemas que ayudan a desarrollar las habilidades de razonamiento y la forma de aplicar las técnicas aprendidas a situaciones concretas. En algunos casos habrá que planificar la forma de resolver un problema que requiera varios «pasos» diferentes antes de llegar a la respuesta. Otros ejercicios están diseñados para ampliar la teoría desarrollada en el texto y mejorar, por tanto, nuestra comprensión de los conceptos del cálculo.

Los ejercicios varían grandemente en dificultad. En general, los más difíciles aparecen hacia el final de la serie de ejercicios, pero la serie completa no está graduada estrictamente de esta forma porque los ejercicios sobre un tema específico tienden a agruparse. Algunos ejercicios de las series regulares se marcan con un asterisco *. Este símbolo indica que el ejercicio es *o bien* algo más teórico *o* algo más difícil que la mayoría. Los que son más teóricos no tienen por qué ser difíciles; algunas veces son bastante fáciles. La mayoría de los problemas en la sección de

Problemas Avanzados, que forma parte del *Repaso del Capítulo* al final de la mayoría de los capítulos, tienen mayor dificultad, aunque en general no estén marcados con un *.

No hay que desanimarse si no podemos hacer *todos* los ejercicios. Algunos son de hecho muy difíciles, y sólo unos pocos estudiantes dotados serán capaces de resolverlos. Sin embargo, debemos ser capaces de realizar una amplia mayoría de ellos. Algunos requerirán mucho más esfuerzo que otros. Cuando encontramos dificultades con los problemas, es conveniente proceder como sigue:

1. Lea y vuelva a leer el problema hasta entender exactamente la información que se da y qué hay que calcular o qué hay que hacer.
2. Si es apropiado, dibuje un diagrama ilustrando las relaciones entre las magnitudes involucradas en el problema.
3. Si es necesario, introduzca símbolos para representar las magnitudes del problema. Utilice letras apropiadas (por ejemplo, V para volúmenes, t para el tiempo). No creamos necesario utilizar x e y para todo.
4. Desarrolle un plan de ataque. Esto es en general la parte más difícil. Busque relaciones conocidas; intente reconocer modelos; vuelva sobre los ejemplos desarrollados en la sección actual o en algunas secciones previas relevantes; intente descubrir posibles conexiones entre el problema bajo estudio y otros que se han visto anteriormente. ¿Se puede simplificar el problema realizando suposiciones adicionales? Si se puede resolver una versión simplificada, ello puede ayudarnos a decidir qué hacer con el problema dado: ¿se puede dividir el problema en varios casos, siendo cada uno de ellos un problema más simple? Al leer los ejemplos del texto, esté atento para descubrir métodos que puedan resultar útiles más adelante en otros contextos.
5. Intente seguir los pasos de su plan. Si tenemos problemas con alguno o varios de ellos, puede ser necesario modificar el plan.
6. Al llegar al resultado de un problema, pregúntese siempre si es *razonable*. Si no lo es, busque para determinar los lugares donde se puede haber cometido un error.

Las respuestas de la mayoría de los ejercicios con numeración impar se proporcionan al final del libro. Las excepciones son los ejercicios que no tienen respuestas cortas, por ejemplo «Demuestre que.» o «Pruebe que.», que son problemas donde la respuesta es la solución completa. Hay disponible un Manual de Soluciones para el Estudiante que contiene soluciones detalladas a los ejercicios con numeración par.

Además de los asteriscos utilizados para marcar los problemas más difíciles o teóricos, los símbolos siguientes se utilizan para marcar ejercicios de equipos especiales:

❖ Ejercicios pertenecientes a ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial (no se utiliza en secciones que están completamente dedicadas a EDs).

Problemas que requieren el uso de una calculadora. A menudo se necesitará una calculadora científica. Algunos de sus problemas pueden requerir una calculadora programable.

Problemas que requieren un *software* de gráficos por ordenador en un ordenador personal.

Problemas que requieren el uso de un ordenador. En general requerirán *software* de matemáticas por ordenador (por ejemplo, Maple o Mathematica) o bien un programa de hoja de cálculo (por ejemplo, Lotus 123, Excel de Microsoft o Quattro Pro).



Al profesor

Como sugiere su título, este libro pretende cubrir todo el material en programas de cálculo de tres o cuatro semestres, con funciones reales de una sola variable real (cálculo diferencial en los Capítulos 1-4 y cálculo integral en los Capítulos 5-8), así como funciones vectoriales de una sola variable real (en el Capítulo 11), funciones reales de varias variables reales (en los Capítulos 12-14), y funciones vectoriales de varias variables reales (en los Capítulos 15-16). El Capítulo 9 está dedicado a las secuencias y las series y su posición es más bien arbitraria. El Capítulo 10 contiene material básico necesario sobre vectores y geometría en el espacio tridimensional, y es de utilidad, aunque no absolutamente esencial, para la comprensión del material multivariable subsiguiente. La materia que se incluye es muy amplia para incluirla en cualquier curso. Se debe seleccionar qué material incluir y cuál omitir, teniendo en cuenta la formación previa y las necesidades de los estudiantes.

En la Universidad de British Columbia, donde el autor lleva enseñando 34 años, el cálculo se divide en cuatro trimestres; los dos primeros se ocupan del cálculo de una sola variable (Capítulos 1-9); el tercero trata las funciones de varias variables (parte del Capítulo 10, y los Capítulos 12-14), y es seguido por menos estudiantes, y el cuarto se ocupa del cálculo vectorial (parte del Capítulo 10, y los Capítulos 11, 15-16) y es seguido por un número relativamente reducido de estudiantes, principalmente de ciencias matemáticas, físicas e ingeniería. En ninguno de estos cursos hay suficiente tiempo como para tratar todo el material; siempre se omiten algunas secciones. Sin embargo, la amplia selección de temas y aplicaciones proporciona a los estudiantes una experiencia de aprendizaje rica y variada a los estudiantes.

El texto está diseñado para cursos de cálculo general, especialmente para los estudiantes de ciencias e ingeniería. La mayor parte del material requiere sólo un conocimiento previo razonable en álgebra y geometría analítica (*véase* el Capítulo P, Preliminares, donde se revisa este material). Sin embargo, alguna materia opcional es más sutil y/o teórica, y está dirigida principalmente a los estudiantes más duros.



Agradecimientos

Las primeras cinco ediciones de este texto se han utilizado para la impartición de clases en cursos de ciencias en general, de ingeniería y de matemáticas en la Universidad de British Columbia. Estoy agradecido a muchos colegas y estudiantes, tanto de la UBC como de muchas otras instituciones donde se han utilizado estos libros, por su apoyo y sus comentarios y sugerencias de utilidad.

Al preparar esta edición he recibido sugerencias de varios revisores que han proporcionado nuevas perspectivas y direcciones a mi trabajo. Estoy especialmente agradecido a las siguientes personas:

Pekka Alestalo	Universidad Tecnológica de Helsinki	Finlandia
Helge Dahle	Universidad de Bergen	Noruega
Marius Irgens	Universidad Noruega de Ciencia y Tecnología	Noruega
Michael Lamoureaux	Universidad de Calgary	Canadá
Tom Lindstrom	Universidad de Oslo	Noruega
Marlene McCallum	Universidad de Carleton	Canadá
Graene Pettet	Universidad Tecnológica de Queensland	Australia
Viena Statna	Universidad de Calgary	Canadá
Martin Stynes	Universidad Nacional de Irlanda, Cork	Irlanda
Brian Wetton	Universidad de British Columbia	Canadá
Eric Woolgar	Universidad de Alberta	Canadá
Frank Zorzitto	Universidad de Waterloo	Canadá

Finalmente, deseo agradecer a los departamentos de ventas y *marketing* de todas las divisiones mundiales de Addison Wesley (actualmente Pearson Canada) por hacer que las ediciones anteriores tuvieran tanto éxito, y en particular al departamento editorial y de producción de Toronto, a Meaghan Ealey, Michael Kelley, Kelly Torrance, Dave Ward y Mary Ann McCutcheon, por su ayuda y apoyo, y a Betty R. Robinson por su cuidadosa copia y edición del manuscrito inicial.

Yo escribí el volumen utilizando TEX y PostScript bajo Linux-Mandrake, y generé todas las figuras en PostScript utilizando el paquete de *software* matemático MG desarrollado por mi colega Robert Israel y por mí mismo.

La eliminación de errores y oscuridades del texto es siempre un proceso en curso y asintótico; felizmente, cada edición es mejor que la anterior. No obstante, algunas imperfecciones siempre quedan, y quedaré agradecido a los lectores que me las hagan saber o que me proporcionen sugerencias para mejoras futuras.

R. A. A.
Vancouver, Canadá
Abril 2005
`adms@math.ubc.ca`



¿Qué es el cálculo?

Al principio del siglo XVII el matemático alemán Johannes Kepler analizó un amplio número de observaciones astronómicas realizadas por el astrónomo danés Tycho Brahe y concluyó que los planetas se movían alrededor del sol en órbitas elípticas. Él no sabía por qué. Cincuenta años más tarde, el matemático y físico inglés Isaac Newton lo resolvió.

¿Por qué los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del sol? ¿Por qué los vientos de los huracanes giran en espiral en sentido contrario a las agujas del reloj en el hemisferio Norte? ¿Cómo se pueden predecir los efectos de los cambios de los tipos de interés en la economía y en los mercados de valores? ¿Cuándo desaparecerá suficiente material radiactivo para permitir un manejo seguro? ¿Cómo afectan las corrientes oceánicas calientes del Pacífico ecuatorial al clima del este de Norteamérica? ¿Cuánto tiempo permanece la concentración de un medicamento en sangre en niveles efectivos? ¿Cómo se propagan las ondas de radio por el espacio? ¿Por qué una epidemia se extiende cada vez más rápido y después se ralentiza? ¿Cómo puedo asegurar que el puente que acabo de diseñar no será destruido por una tormenta?

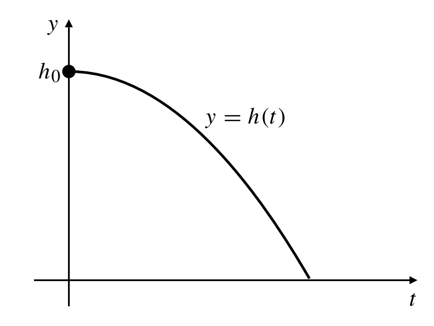
Estas y muchas otras cuestiones de interés e importancia en nuestro mundo se relacionan directamente con nuestra capacidad de analizar el movimiento y la forma en que las magnitudes cambian con respecto al tiempo o a otra magnitud. El álgebra y la geometría son herramientas útiles para describir relaciones entre magnitudes *estáticas*, pero en ellas no intervienen conceptos apropiados para describir cómo *cambia* una magnitud. Para hacer esto necesitamos nuevas operaciones matemáticas que van más allá de las operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación y división y del cálculo de potencias y raíces. Necesitamos operaciones que midan la forma en que varían magnitudes relacionadas.

El cálculo proporciona las herramientas para describir el movimiento cuantitativamente. Presenta dos nuevas operaciones denominadas *diferenciación* e *integración* que, como la suma y la resta, son opuestas entre sí; lo que hace la diferenciación, lo deshace la integración.

Por ejemplo, consideremos el movimiento de una roca que cae. La altura (en metros) de la roca t segundos después de que se lanza desde una altura h_0 es una función $h(t)$ dada por

$$h(t) = h_0 - 4.9t^2$$

La gráfica de $y = h(t)$ se muestra en la figura siguiente:



El proceso de diferenciación hace posible obtener una nueva función, que denotaremos $h'(t)$, y denominaremos *derivada* de h con respecto a t, que representa la *velocidad de cambio* de la altura de la roca, es decir, su velocidad en metros/segundo:

$$h'(t) = -9.8t$$

Al contrario, si conocemos la velocidad de la roca que cae en función del tiempo, la integración permite obtener la función altura $h(t)$.

El cálculo fue inventado de manera independiente y de forma algo diferente por dos matemáticos del siglo XVII: Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibnitz. La motivación de Newton era un deseo de analizar el movimiento de objetos móviles. Utilizando su cálculo pudo formular sus leyes del movimiento y de la gravitación y *concluir a partir de ellas* que los planetas debían moverse alrededor del sol en órbitas elípticas.

Muchas de las más fundamentales e importantes «leyes de la naturaleza» se expresan convenientemente en forma de ecuaciones en las que intervienen velocidades de cambio de magnitudes. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones diferenciales*, y las técnicas para su estudio y resolución están en el corazón del cálculo. En el ejemplo de la roca que cae la ley apropiada es la Segunda Ley de Newton del Movimiento:

$$\text{fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

La *aceleración* (-9.8m/s^2) es la velocidad de cambio (la *derivada*) de la velocidad, que es a su vez la velocidad de cambio (la *derivada*) de la función altura.

Una buena parte de las matemáticas se relacionan indirectamente con el estudio del movimiento. Vemos las *rectas* o las *curvas* como objetos geométricos, pero los antiguos griegos las veían como trayectorias trazadas por puntos en movimiento. No obstante, el estudio de las curvas requiere conceptos geométricos como tangencia o área. El problema de la diferenciación está estrechamente relacionado con el problema geométrico de obtener rectas tangentes; de forma similar, la integración está relacionada con el problema geométrico de calcular áreas de regiones con fronteras curvas.

Tanto la diferenciación como la integración se definen en función de una nueva operación matemática denominada **límite**. El concepto de límite de una función se desarrollará en el Capítulo 1. Ése será el comienzo real del estudio del cálculo. En el capítulo denominado Preliminares revisaremos algunos conocimientos previos de álgebra y geometría necesarios para el desarrollo del cálculo.

CAPÍTULO P

Preliminares

«Nos enseñaban a beber y a escupir, naturalmente —replicó la Falsa Tortuga—, y luego las diversas ramas de la Aritmética: a fumar, a reptar, a mutilar y sobre todo a dimitir».

Lewis Carroll (Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898)
de *Alicia en el País de las Maravillas*

Introducción En este capítulo preliminar se revisan las cosas más importantes que hay que saber para introducirse en el cálculo. Se consideran los números reales, los sistemas de coordenadas cartesianas en el plano, las ecuaciones que representan líneas rectas, círculos y parábolas, las funciones y sus representaciones gráficas, y en particular, las funciones polinómicas y trigonométricas.

En función de los conocimientos preliminares de cálculo que se posean, se puede estar familiarizado con estos temas o no. Si es así, bastará con leer por encima este capítulo para refrescar nuestros conocimientos anteriores. Si no es así, este capítulo deberá estudiarse con detalle.

P.1 Los números reales y la recta real

El Cálculo se basa en las propiedades del sistema de los números reales. Los **números reales** se expresan mediante decimales. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 5 &= 5.00000\ldots \\ -\tfrac{3}{4} &= -0.750000\ldots \\ \tfrac{1}{3} &= 0.3333\ldots \\ \sqrt{2} &= 1.4142\ldots \\ \pi &= 3.14159\ldots \end{aligned}$$

En todos los casos anteriores los puntos suspensivos ... indican que la secuencia de dígitos decimales no finaliza nunca. En el caso de los tres primeros números anteriores, el patrón que siguen los dígitos es obvio. Por tanto, podemos saber cuáles serán los dígitos siguientes. En el caso de $\sqrt{2}$ y π no hay un patrón obvio. Los números reales se pueden representar geométricamente como puntos en una recta que se denomina **recta real**, como se muestra en la Figura P.1. Para indicar tanto la recta real como el sistema de los números reales se utiliza el símbolo $\mathbb{R}$.

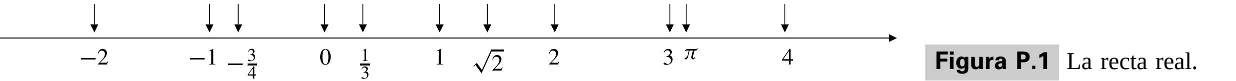


Figura P.1 La recta real.

Las propiedades del sistema de los números reales se pueden clasificar en tres categorías: propiedades algebraicas, propiedades de orden y completitud. Ya estamos familiarizados con las *propiedades algebraicas*. Más o menos significan que los números reales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto por cero), dando como resultado más números reales, y que las reglas de la aritmética son válidas.

Las *propiedades de orden* de los números reales se refieren al orden en que dichos números aparecen en la recta real. Si x está a la izquierda de y significa que «x es menor que y» o que «y es mayor que x». Lo anterior se puede expresar simbólicamente como $x < y$ o $y > x$, respectivamente. La desigualdad $x \leqslant y$ significa que bien $x < y$ o bien $x = y$. Las propiedades de orden de los números reales se resumen en las siguientes *reglas de las desigualdades*:

El símbolo $\Longrightarrow$ significa «implica»

Reglas de las desigualdades

Si a, b y c son números reales, entonces:

1. $a < b \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + c$
2. $a < b \quad \Longrightarrow \quad a - c < b - c$
3. $a < b$ y $c > 0 \quad \Longrightarrow \quad ac < bc$
4. $a < b$ y $c < 0 \quad \Longrightarrow \quad ac > bc$; en particular, $-a > -b$
5. $a > b \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{a} > 0$
6. $0 < a < b \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

Las Reglas 1-4 y la 6 (si $a > 0$) siguen siendo válidas cambiando $<$ y $>$ por $\leqslant$ y $\geqslant$.

Nótense especialmente las reglas para multiplicar (o dividir) una desigualdad por un número. Si el número es positivo, la desigualdad se mantiene. Si es negativo, la desigualdad se invierte.

La propiedad de *completitud* del sistema de los números reales es más sutil y difícil de comprender. Una forma de enunciarla es la siguiente: Si A es un conjunto cualquiera de números reales que contiene al menos un número, y existe un número real y con la propiedad de que $x \leqslant y$ para todo x perteneciente al conjunto A, entonces existe un número *y mínimo* que cumple esa propiedad. Más o menos, esto significa que la recta real no contiene agujeros ni saltos. A todo punto de dicha recta le corresponde un número real. En nuestro estudio del cálculo no hará falta considerar mucho la completitud. Se utiliza generalmente para demostrar ciertos resultados importantes, en concreto, los Teoremas 8 y 9 del Capítulo 1 (estas demostraciones se incluyen en el Apéndice III, pero en general no son necesarias en cursos elementales de cálculo, sino más bien en cursos avanzados de análisis matemático). Sólo necesitaremos utilizar la propiedad de completitud en el Capítulo 9, en el estudio de las series infinitas.

El conjunto de los números reales tiene algunos subconjuntos especialmente importantes:

(i) Los **números naturales**, o **enteros positivos**, es decir, los números 1, 2, 3, 4, ...

(ii) Los **números enteros**, es decir, los números 0, ± 1, ± 2, ± 3, ...

(iii) Los **números racionales**, es decir, números que se pueden expresar en forma de una fracción m/n, siendo m y n dos enteros, y $n \neq 0$.

Precisamente, los números racionales son números reales cuyo desarrollo decimal puede:

(a) Finalizar, es decir, que termina con una secuencia de infinitos ceros, por ejemplo, $3/4 = 0.750000$.

(b) Repetirse, es decir, que finaliza con una cadena de dígitos que se repite indefinidamente. Por ejemplo, $23/11 = 2.090909... = 2.\overline{09}$ (la barra indica el patrón de dígitos que se repiten).

Los números reales que no son racionales se denominan *números irracionales*.

Ejemplo 1 Demuestre que los números (a) $1.323232... = 1.\overline{32}$ y (b) $0.3405405405... = 0.3\overline{405}$ son números racionales, expresándolos como cociente de dos enteros.

Solución

(a) Sea $x = 1.323232...$ Entonces, $x - 1 = 0.323232...$ y

$$100x = 132.323232... = 132 + 0.323232... = 132 + x - 1$$

Por tanto, $99x = 131$ y $x = 131/99$.

(b) Sea $y = 0.3405405405...$ Entonces $10y = 3.405405405...$ y $10y - 3 = 0.405405405...$ Además,

$$10\,000y = 3405.405405405... = 3405 + 10y - 3$$

Por tanto, $9990y = 3402$ e $y = 3402/9990 = 63/185$. ∎

El conjunto de los números racionales posee las mismas propiedades algebraicas y de orden que el de los números reales, pero no tiene la propiedad de completitud. Por ejemplo, no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. Por tanto existiría un hueco en la recta de los números racionales en el lugar que debería ocupar $\sqrt{2}$ [1]. Como la recta real no tiene «huecos», es el lugar ideal para el estudio de los límites y, por tanto, del cálculo.

[1] ¿Cómo sabemos que $\sqrt{2}$ es un número irracional? Supongamos lo contrario, es decir, que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces $\sqrt{2} = m/n$, siendo m y n dos enteros y $n \neq 0$. Supongamos adicionalmente que la fracción m/n ha sido ya reducida, es decir, que ya se han cancelado los factores comunes en el numerador y en el denominador. Debería cumplirse que $m^2/n^2 = 2$, y por tanto $m^2 = 2n^2$, que es un entero par. Por tanto, m debe ser par (el cuadrado de un entero par es siempre par). Como m es par, se puede expresar en la forma $m = 2k$, siendo k un entero. Tenemos entonces que $4k^2 = 2n^2$ y $n^2 = 2k^2$, que es par. Por tanto, n debe ser también par. Esto contradice el hecho de que $\sqrt{2}$ se puede expresar como una fracción irreducible m/n, ya que si es así, m y n no podrían ser ambos pares. Por tanto, no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

Intervalos

Un subconjunto de la recta real se denomina **intervalo** si contiene al menos dos números y contiene también todos los números reales que existen entre dos cualesquiera de sus elementos. Por ejemplo, el conjunto de los números reales x tales que $x > 6$ es un intervalo, pero el conjunto de los números reales y tales que $y \neq 0$ no es un intervalo (¿por qué?). Consta de dos intervalos.

Si a y b son números reales tales que $a < b$, entonces:

(i) El **intervalo abierto** desde a hasta b, representado por (a, b), está formado por todos los números reales x que cumplen que $a < x < b$.

(ii) El **intervalo cerrado** desde a hasta b, representado por $[a, b]$, está formado por todos los números reales x que cumplen que $a \leqslant x \leqslant b$.

(iii) El **intervalo semiabierto** $[a, b)$ está formado por todos los números reales x que cumplen que $a \leqslant x < b$.

(iv) El **intervalo semiabierto** $(a, b]$ está formado por todos los números reales x que cumplen que $a < x \leqslant b$.

Estos intervalos se muestran en la Figura P.2. Nótese el uso de puntos vacíos para indicar los extremos de los intervalos que no están incluidos en éstos, y el uso de puntos rellenos cuando los extremos están incluidos en los intervalos. Los límites de los intervalos se denominan **extremos**.

Los intervalos de la Figura P.2 son **intervalos finitos**, y todos tienen como longitud $b - a$. Los intervalos pueden tener también longitud infinita, y en ese caso se habla de **intervalos infinitos**. La Figura P.3 muestra algunos ejemplos de intervalos infinitos. Nótese que la recta real $\mathbb{R}$ es en sí un intervalo, que se indica como $(-\infty, \infty)$. El símbolo ∞ («infinito») no representa ningún número real, por lo que no está permitido que pueda ser un extremo del intervalo.

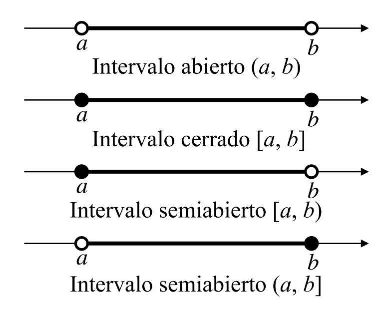


Figura P.2 Intervalos finitos.

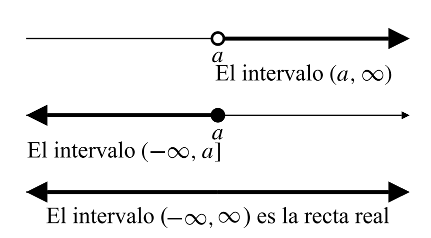


Figura P.3 Intervalos infinitos.

Ejemplo 2 Resuelva las siguientes desigualdades. Exprese los conjuntos solución en forma de intervalos y dibújelos.

(a) $2x - 1 > x + 3$ (b) $-\dfrac{x}{3} \geqslant 2x - 1$ (c) $\dfrac{2}{x-1} \geqslant 5$

Solución

(a) $2x - 1 > x + 3$ Se suma 1 en ambos miembros.

$2x > x + 4$ Se resta x en ambos miembros.

$x > 4$ La solución es el conjunto $(4, \infty)$.

(b) $-\dfrac{x}{3} \geqslant 2x - 1$ Se multiplican ambos miembros por -3.

$x \leqslant -6x + 3$ Se suma $6x$ en ambos miembros.

$7x \leqslant 3$ Se dividen los dos miembros por 7.

$x \leqslant \dfrac{3}{7}$ La solución es el intervalo $(-\infty, 3/7]$.

(c) Se pasa el 5 del segundo miembro al primero y se simplifica, expresando la desigualdad de una forma equivalente:

$$\frac{2}{x-1} - 5 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2-5(x-1)}{x-1} \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{7-5x}{x-1} \geqslant 0$$

La fracción $\dfrac{7-5x}{x-1}$ no está definida en $x = 1$, y vale 0 en $x = 7/5$. Entre esos números, toma valores positivos si el numerador y el denominador tienen el mismo signo, y valores negativos si tienen distinto signo. Es sencillo organizar la información de los signos en la tabla siguiente:

x		1		7/5	
$7-5x$	+	+	+	0	−
$x-1$	−	0	+	+	+
$(7-5x)/(x-1)$	−	indef	+	0	−

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad es en este caso el intervalo (1, 7/5].

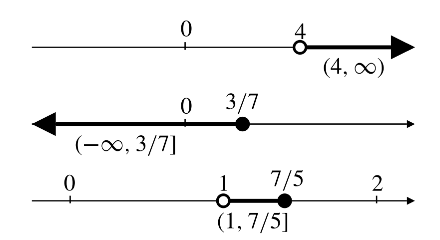


Figura P.4 Intervalos del Ejemplo 2.

El símbolo $\Longleftrightarrow$ significa «si y sólo si» o «es equivalente a». Si A y B son dos sentencias, entonces $A \Longleftrightarrow B$ significa que, si una de ellas es verdadera, la otra necesariamente también lo es, por lo que ambas deben ser verdaderas, o ambas falsas.

Algunas veces es necesario resolver sistemas de dos o más desigualdades que se deben satisfacer simultáneamente. De momento, resolveremos cada desigualdad por separado y buscaremos qué números pertenecen a la intersección de los conjuntos solución.

Ejemplo 3 Resuelva los sistemas de desigualdades:

(a) $3 \leqslant 2x + 1 \leqslant 5$ (b) $3x - 1 < 5x + 3 \leqslant 2x + 15$

Solución

(a) Utilizando la técnica del Ejemplo 2, se puede resolver la desigualdad $3 \leqslant 2x + 1$, obteniéndose $2 \leqslant 2x$ y $x \geqslant 1$. De forma similar, la desigualdad $2x + 1 \leqslant 5$ produce $2x \leqslant 4$ y $x \leqslant 2$. Por tanto, la solución del sistema (a) es el intervalo cerrado [1, 2].

(b) Se resuelven las dos desigualdades como sigue:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 1 &< 5x + 3 \\ -1 - 3 &< 5x - 3x \\ -4 &< 2x \\ -2 &< x \end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\begin{aligned} 5x + 3 &\leqslant 2x + 15 \\ 5x - 2x &\leqslant 15 - 3 \\ 3x &\leqslant 12 \\ x &\leqslant 4 \end{aligned}\right.$$

Por tanto, el conjunto solución es el intervalo $(-2, 4]$. ■

La resolución de inecuaciones de segundo grado se basa en la resolución de las correspondientes ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo 4 **Inecuaciones de segundo grado**

Resuelva:

(a) $x^2 - 5x + 6 < 0$ (b) $2x^2 + 1 > 4x$

Solución

(a) El trinomio $x^2 - 5x + 6$ se puede factorizar en el producto $(x - 2)(x - 3)$, que será negativo sólo cuando uno (y sólo uno) de los factores sea negativo. Como $x - 3 < x - 2$, eso ocurre cuando $x - 3 < 0$ y $x - 2 > 0$. Por tanto, debe cumplirse que $x < 3$ y $x > 2$, y la solución es entonces el intervalo abierto $(2, 3)$.

(b) La inecuación $2x^2 + 1 > 4x$ es equivalente a $2x^2 - 4x + 1 > 0$. La ecuación de segundo grado correspondiente, $2x^2 - 4x + 1 = 0$, es de la forma $Ax^2 + Bx + C = 0$, y se resuelve aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado (*véase* la Sección P.6):

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo que la inecuación dada se puede expresar en la forma:

$$\left(x - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(x - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) > 0$$

Esto se cumple si los factores del miembro izquierdo son ambos positivos o ambos negativos simultáneamente. Por tanto, debe cumplirse que $x < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ o que $x > 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$. El conjunto solución es la *unión* de los intervalos $\left(-\infty, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cup \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty\right)$.

Nótese el uso del símbolo $\cup$ para indicar la **unión** de intervalos. Un número real pertenece a una unión de intervalos si pertenece al menos a uno de los intervalos. Necesitaremos también considerar la intersección de intervalos. Un número real pertenece a una **intersección** de intervalos si pertenece a *todos* los intervalos. Para indicar la intersección se utilizará el símbolo $\cap$. Por ejemplo,

$$[1, 3) \cap [2, 4] = [2, 3) \quad \text{donde} \quad [1, 3) \cup [2, 4] = [1, 4]$$

Ejemplo 5 Resuelva la desigualdad $\frac{3}{x-1} < -\frac{2}{x}$ y represente el conjunto solución.

Solución Podríamos pensar en multiplicar por $x(x - 1)$ para eliminar las fracciones de la inecuación, pero esto requeriría considerar tres casos por separado (¿cuáles son?). En lugar de esto, combinaremos las dos fracciones en una sola:

$$\frac{3}{x-1} < -\frac{2}{x} \iff \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x} < 0 \iff \frac{5x-2}{x(x-1)} < 0$$

Examinaremos los signos de los tres factores de la fracción izquierda para determinar dónde es negativa dicha fracción:

x		0		2/5		1	
$5x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{5x - 2}{x(x - 1)}$	$-$	indef	$+$	0	$-$	indef	$+$

El conjunto solución de la inecuación dada es la unión de esos dos intervalos, es decir, $(-\infty, 0) \cup \cup (2/5, 1)$. *Véase* la Figura P.5.

0 2/5 1

La unión $(-\infty, 0) \cup (2/5, 1)$

Figura P.5 El conjunto solución del Ejemplo 5.

El valor absoluto

El **valor absoluto** o **módulo** de un número x, que se escribe $|x|$ (y se lee «valor absoluto de x»), se define mediante la fórmula

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Las líneas verticales del símbolo $|x|$ se denominan **barras de valor absoluto**.

Ejemplo 6 $|3| = 3, \quad |0| = 0, \quad |-5| = 5$

Nótese que $|x| \geqslant 0$ para todo número real x, y que $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$. Algunas personas encuentran confuso decir que $|x| = -x$ cuando x es negativo, pero es correcto, ya que en este caso $-x$ es positivo. El símbolo $\sqrt{a}$ siempre indica la raíz cuadrada *no negativa* de a, por lo que una definición alternativa de $|x|$ sería $|x| = \sqrt{x^2}$.

Es importante recordar que $\sqrt{a^2} = |a|$. No debe escribirse $\sqrt{a^2} = a$, a menos que se sepa que $a \geqslant 0$.

Geométricamente, $|x|$ representa la distancia (no negativa) desde x hasta 0 en la recta real. De forma más general $|x - y|$ representa la distancia (no negativa) entre los puntos x e y de la recta real, ya que esta distancia es la misma que la del punto $x - y$ al 0 (*véase* la Figura P.6):

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{si } x \geqslant y \\ y - x, & \text{si } x < y \end{cases}$$

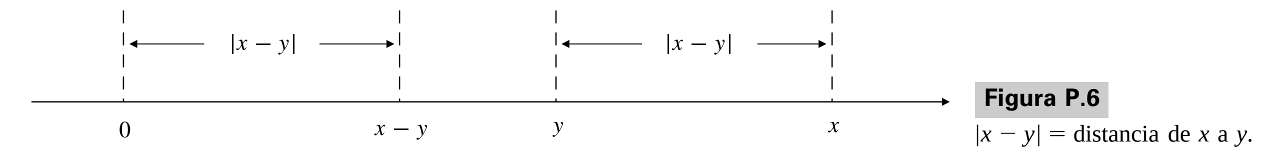


Figura P.6 $|x - y| =$ distancia de x a y.

La función valor absoluto posee las siguientes propiedades:

Propiedades del valor absoluto

1. $|-a| = |a|$. El valor absoluto de un número y de su negativo es el mismo.
2. $|ab| = |a||b|$ y $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$. El valor absoluto del producto (o cociente) de dos números es el producto (o cociente) de sus valores absolutos.
3. $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$ (**desigualdad del triángulo**). El valor absoluto de una suma o diferencia de dos números es menor o igual que la suma de sus valores absolutos.

Las dos primeras propiedades se pueden comprobar considerando separadamente los casos que resultan de que tanto a como b pueden ser positivos o negativos. La tercera propiedad se deduce de las dos anteriores ya que $\pm 2ab \leqslant |2ab| = 2|a||b|$. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} |a \pm b|^2 &= (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ &\leqslant |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

Y tomando la raíz cuadrada (positiva) de ambos miembros se obtiene que $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$. Este resultado se denomina «desigualdad del triángulo», ya que se sigue del hecho geométrico de que la longitud de cualquier lado de un triángulo no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Por ejemplo, si suponemos que los números 0, a y b de la recta real son los vértices de un «triángulo» degenerado, entonces las longitudes de los lados de dicho triángulo son $|a|$, $|b|$ y $|a - b|$. El triángulo es degenerado porque todos sus vértices están en la misma línea recta.

Ecuaciones e inecuaciones con valores absolutos

La ecuación $|x| = D$ (siendo $D > 0$) tiene dos soluciones, $x = D$ y $x = -D$, es decir, los dos puntos de la recta real que están a una distancia D del origen. Las ecuaciones e inecuaciones con valores absolutos se pueden resolver algebraicamente dividiéndolas en casos de acuerdo con la definición de valor absoluto, pero a menudo se pueden resolver también geométricamente interpretando los valores absolutos como distancias. Por ejemplo, la inecuación $|x - a| < D$ expresa que la distancia desde x hasta a es menor que D, y por tanto x debe estar entre $a - D$ y $a + D$ (o, lo que es lo mismo, a debe estar entre $x - D$ y $x + D$). Si D es un número positivo, entonces,

$$\begin{aligned} |x| = D &\iff \text{o } x = -D \text{ o } x = D \\ |x| < D &\iff -D < x < D \\ |x| \leqslant D &\iff -D \leqslant x \leqslant D \\ |x| > D &\iff \text{o } x < -D \text{ o } x > D \end{aligned}$$

De forma más general,

$$\begin{aligned} |x - a| = D &\iff \text{o } x = a - D \text{ o } x = a + D \\ |x - a| < D &\iff a - D < x < a + D \\ |x - a| \leqslant D &\iff a - D \leqslant x \leqslant a + D \\ |x - a| > D &\iff \text{o } x < a - D \text{ o } x > a + D \end{aligned}$$

Ejemplo 7 Resuelva: (a) $|2x + 5| = 3$ (b) $|3x - 2| \leqslant 1$

Solución

(a) $|2x + 5| = 3 \iff 2x + 5 = \pm 3$. Por tanto, o bien $2x = -3 - 5 = -8$ o bien $2x = 3 - 5 = -2$. Las soluciones son $x = -4$ o $x = -1$.

(b) $|3x - 2| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant 3x - 2 \leqslant 1$. Resolvemos la pareja de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{r} -1 \leqslant 3x - 2 \\ -1 + 2 \leqslant 3x \\ 1/3 \leqslant x \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{r} 3x - 2 \leqslant 1 \\ 3x \leqslant 1 + 2 \\ x \leqslant 1 \end{array}\right\}$$

Por tanto, la solución es el intervalo $[1/3, 1]$. ■

Observación Veamos cómo se podría haber resuelto geométricamente el apartado (b) del Ejemplo 7, interpretando las inecuaciones como distancias:

$$|3x - 2| = \left|3\left(x - \frac{2}{3}\right)\right| = 3\left|x - \frac{2}{3}\right|$$

Por tanto, la inecuación expresa que

$$3\left|x - \frac{2}{3}\right| \leqslant 1 \qquad \text{o} \qquad \left|x - \frac{2}{3}\right| \leqslant \frac{1}{3}$$

Esto indica que la distancia de x a $2/3$ no debe ser mayor que $1/3$. Las soluciones de x deben estar entonces entre $1/3$ y 1, ambos extremos incluidos (*véase* la Figura P.7).

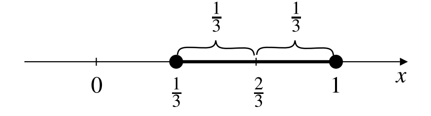


Figura P.7 El conjunto solución del Ejemplo 7(b).

Ejemplo 8 Resuelva la ecuación $|x + 1| = |x - 3|$.

Solución La ecuación dice que x está equidistante de -1 y 3. Por tanto, x es el punto intermedio entre -1 y 3. Es decir, $x = (-1 + 3)/2 = 1$. De otra manera, la ecuación dada dice que o bien $x + 1 = x - 3$ o bien $x + 1 = -(x - 3)$. La primera de las dos ecuaciones no tiene solución, y la segunda tiene como solución $x = 1$. ■

Ejemplo 9 ¿Qué valores satisfacen la inecuación $\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 3$?

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned} \left|5 - \frac{2}{x}\right| < 3 \iff & -3 < 5 - \frac{2}{x} < 3 && \text{Se resta 5 en cada miembro.} \\ & -8 < -\frac{2}{x} < -2 && \text{Se divide cada miembro por } -2. \\ & 4 > \frac{1}{x} > 1 && \text{Se toman inversos.} \\ & \frac{1}{4} < x < 1 \end{aligned}$$

En los cálculos anteriores hemos manejado un sistema de dos inecuaciones simultáneamente, en lugar de separarlas en dos inecuaciones como hemos hecho en ejemplos anteriores. Nótense las diversas reglas de manejo de inecuaciones que se han empleado aquí. Al multiplicar una inecuación por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad. También se cambia el sentido al tomar inversos en los dos miembros de una inecuación si son positivos. Por tanto, la inecuación dada se cumple para todo x perteneciente al intervalo abierto (1/4, 1). ■

Ejercicios P.1

En los Ejercicios 1 y 2, exprese el número racional mediante la repetición de los dígitos decimales. Utilice una barra sobre el conjunto de dígitos que se repiten.

1. $\frac{2}{9}$ **2.** $\frac{1}{11}$

En los Ejercicios 3 y 4, exprese los números en forma de fracción irreducible de enteros.

3. $0.\overline{12}$ **4.** $3.2\overline{7}$

5. Expresse los números racionales 1/7, 2/7, 3/7 y 4/7 mediante repetición de dígitos decimales (utilice una calculadora para obtener tantos dígitos decimales como sea posible). ¿Se puede observar algún tipo de pauta? Intente predecir cómo serán las expresiones de las fracciones 5/7 y 6/7, y compruebe sus predicciones.

6. ¿Pueden dos decimales diferentes representar el mismo número? ¿Qué número representa $0.999... = 0.\overline{9}$?

En los Ejercicios 7-12, obtenga el conjunto de todos los números reales x que satisfacen la condición dada, expresándolos como un intervalo o unión de intervalos.

7. $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 5$ **8.** $x < 2$ y $x \geqslant -3$

9. $x > -5$ o $x < -6$ **10.** $x \leqslant -1$

11. $x > -2$ **12.** $x < 4$ o $x \geqslant 2$

En los Ejercicios 13-26, resuelva las inecuaciones dadas, expresando la solución como un intervalo o unión de intervalos.

13. $-2x > 4$ **14.** $3x + 5 \leqslant 8$

15. $5x - 3 \leqslant 7 - 3x$ **16.** $\frac{6 - x}{4} \geqslant \frac{3x - 4}{2}$

17. $3(2 - x) < 2(3 + x)$ **18.** $x^2 < 9$

19. $\frac{1}{2 - x} < 3$ **20.** $\frac{x + 1}{x} \geqslant 2$

21. $x^2 - 2x \leqslant 0$ **22.** $6x^2 - 5x \leqslant -1$

23. $x^3 > 4x$ **24.** $x^2 - x \leqslant 2$

25. $\frac{x}{2} \geqslant 1 + \frac{4}{x}$ **26.** $\frac{3}{x - 1} < \frac{2}{x + 1}$

Resuelva las ecuaciones de los Ejercicios 27-32.

27. $|x| = 3$ **28.** $|x - 3| = 7$

29. $|2t + 5| = 4$ **30.** $|1 - t| = 1$

31. $|8 - 3s| = 9$ **32.** $\left|\frac{s}{2} - 1\right| = 1$

En los Ejercicios 33-40, escriba los intervalos definidos por las inecuaciones dadas.

33. $|x| < 2$ **34.** $|x| \leqslant 2$

35. $|s - 1| \leqslant 2$ **36.** $|t + 2| < 1$

37. $|3x - 7| < 2$ **38.** $|2x + 5| < 1$

39. $\left|\frac{x}{2} - 1\right| \leqslant 1$ **40.** $\left|2 - \frac{x}{2}\right| < \frac{1}{2}$

En los Ejercicios 41 y 42, resuelva las inecuaciones dadas interpretándolas como aseveraciones sobre distancias en la recta real.

41. $|x + 1| > |x - 3|$ **42.** $|x - 3| < 2|x|$

43. No caiga en la trampa de aceptar que $|-a| = a$. ¿Para qué números reales es cierta la anterior ecuación? ¿Para qué números es falsa?

44. Resuelva la ecuación $|x - 1| = 1 - x$.

45. Demuestre que la inecuación

$$|a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$$

se cumple para todos los números reales a y b.

P.2 Coordenadas cartesianas del plano

La posición de cualquier punto del plano se puede medir con respecto a dos rectas reales perpendiculares entre sí que se cruzan en el origen. Estas líneas se denominan **ejes coordenados** del plano. Generalmente (pero no siempre), denominaremos eje x a una de esas rectas y la dibujaremos horizontalmente, con los números x creciendo hacia la derecha. La otra recta se denominará eje y, y la dibujaremos verticalmente, con los números y creciendo hacia arriba. El punto de intersección de los ejes coordenados (es decir, el punto donde x e y valen ambas cero) se denomina **origen**, y se representa frecuentemente mediante la letra O.

Sea P un punto cualquiera del plano. Dibujemos una recta perpendicular al eje x que pasa por el punto P. Si a es el valor de x donde la recta corta al eje x, se dice que a es la **coordenada *x*** del punto P. Análogamente, la **coordenada *y*** de P es el valor de y donde la línea perpendicular al eje y que pasa por P corta a dicho eje y. El **par ordenado** (a, b) se denomina **pareja de coordenadas**, o **coordenadas cartesianas**, del punto P. Utilizaremos la notación $P(a, b)$ para indicar simultáneamente el punto P y sus coordenadas (a, b) (*véase* la Figura P.8). Nótese que la coordenada x es la que se pone en primer lugar en la pareja de coordenadas. Existe una correspondencia uno a uno entre las parejas de coordenadas y los puntos del plano. Todo punto posee una pareja de coordenadas única y cada pareja de coordenadas determina un único punto. El conjunto formado por los ejes de coordenadas y las parejas de coordenadas se denomina **sistema de coordenadas cartesianas** del plano, debido al filósofo del siglo XVII René Descartes, que creó la geometría analítica (de coordenadas). Cuando se incorpora este sistema de coordenadas, el plano pasa a denominarse **plano cartesiano**. Nótese que se utiliza la misma notación (a, b) para indicar las coordenadas cartesianas de un punto en el plano y para indicar un intervalo abierto en la recta real. Esto, sin embargo, no debe ser fuente de confusiones dado que el significado exacto estará claro por el contexto.

La Figura P.9 muestra las coordenadas de algunos puntos del plano. Nótese que todos los puntos del eje x tienen 0 como coordenada y. Para indicar esos puntos, generalmente escribiremos sólo su coordenada x. De forma similar, los puntos del eje y tienen $x = 0$, y los podemos etiquetar utilizando únicamente su coordenada y.

Los ejes de coordenadas dividen el plano en cuatro regiones denominadas **cuadrantes**. Los cuadrantes se numeran del I al IV, como se muestra en la Figura P.10. El **primer cuadrante** es el superior derecho. Las dos coordenadas de los puntos pertenecientes al primer cuadrante son números positivos. Los números pertenecientes al cuadrante III tienen ambas coordenadas negativas. En el cuadrante II sólo la coordenada y es positiva, y en el cuadrante IV sólo la coordenada x es positiva.

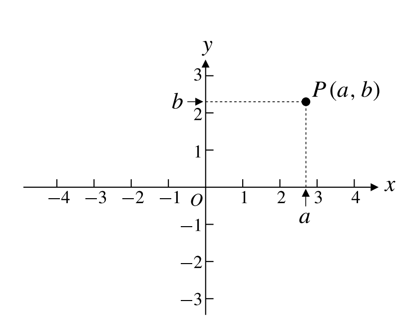


Figura P.8 Los ejes coordenados y un punto P con coordenadas (a, b).

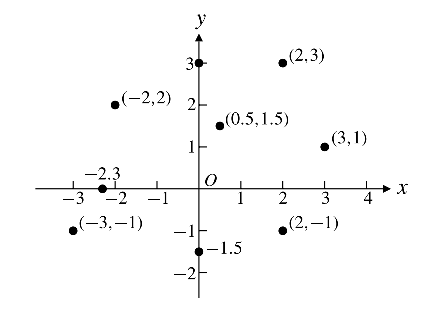


Figura P.9 Algunos puntos con sus coordenadas.

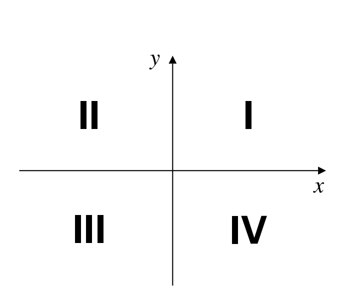


Figura P.10 Los cuatro cuadrantes.

Escalas de los ejes

Al dibujar datos en el plano coordenado o al pintar fórmulas cuyas variables tienen diferentes unidades de medida, no es necesario utilizar la misma escala en los dos ejes de coordenadas. Si, por ejemplo, se dibuja la altura en función del tiempo de una piedra que cae, no hay ninguna razón que obligue a poner la marca que indica 1 en el eje de las alturas a la misma distancia del origen que la marca que indica 1 en el eje de tiempos.

Cuando se dibujan funciones cuyos valores no representan medidas físicas, y cuando se dibujan figuras en el plano coordenado para estudiar su geometría o sus propiedades trigonométricas, es habitual hacer iguales las escalas de los dos ejes coordenados. La unidad de distancia mide entonces lo mismo en el eje horizontal y en el eje vertical. Como en el caso de un mapa topográfico o de un dibujo a escala, los segmentos de rectas de la misma longitud aparentarán tenerla en el dibujo, y los ángulos que parezcan iguales lo serán en realidad. Algunos resultados geométricos que obtendremos posteriormente, como la relación entre las pendientes de dos líneas perpendiculares, sólo son válidas si se utilizan escalas iguales en los dos ejes.

Los ordenadores y las calculadoras gráficas son otra cosa. Las escalas horizontales y verticales en las gráficas generadas por esos dispositivos son en general diferentes, por lo que las distancias, las pendientes y los ángulos resultan distorsionados. Las circunferencias pueden parecer elipses, y los cuadrados pueden parecer rectángulos o incluso paralelogramos. Los ángulos rectos pueden parecer agudos u obtusos. Estas circunstancias requieren un cuidado especial al interpretar lo que vemos. El software de ordenador de alta calidad para dibujo de gráficos cartesianos permite generalmente al usuario compensar estos problemas de escala ajustando la *relación de aspecto* (relación entre la escala vertical y la horizontal). Algunas pantallas de ordenador también admiten un ajuste limitado. Al utilizar software de gráficos, es conveniente ajustar nuestra configuración particular de hardware/software de forma que los diámetros vertical y horizontal de un círculo dibujado parezcan iguales.

Incrementos y distancias

Cuando una partícula se mueve de un punto a otro, los cambios netos en sus coordenadas se denominan incrementos. Se calculan restando las coordenadas del punto inicial de las coordenadas del punto final. Un **incremento** en una variable es el cambio neto en los valores de dicha variable. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el incremento de x es $\Delta x = x_2 - x_1$.

Ejemplo 1 Calcule los incrementos de las coordenadas de una partícula que se desplaza desde $A(3, -3)$ hasta $B(-1, 2)$.

Solución Los incrementos (*véase* la Figura P.11) son:

$$\Delta x = -1 - 3 = -4 \quad \text{y} \quad \Delta y = 2 - (-3) = 5$$

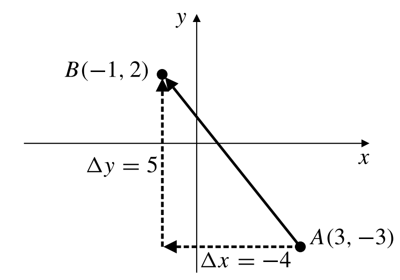


Figura P.11 Incrementos en x e y.

Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos del plano, el segmento de recta PQ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo PCQ, como muestra la Figura P.12. Los lados PC y CQ de dicho triángulo tienen longitudes

$$|\Delta x| = |x_2 - x_1| \quad \text{y} \quad |\Delta y| = |y_2 - y_1|$$

que son respectivamente la *distancia horizontal* y la *distancia vertical* entre P y Q. Por el Teorema de Pitágoras, la longitud de PQ es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos longitudes anteriores.

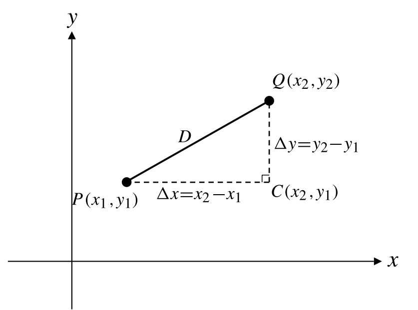


Figura P.12 La distancia de P a Q es $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Fórmula de la distancia entre dos puntos del plano

La distancia D entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es

$$D = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 2 La distancia desde $A(3, -3)$ hasta $B(-1, 2)$ en la Figura P.11 es

$$\sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41} \text{ unidades}$$

Ejemplo 3 La distancia desde el origen $O(0, 0)$ hasta un punto $P(x, y)$ es

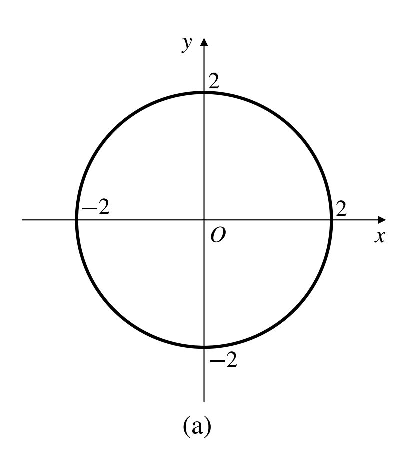
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Gráficas

La **gráfica** de una ecuación (o inecuación) que relaciona las variables x e y es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (o inecuación).

Ejemplo 4 La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ representa todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al origen es $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2$. Esos puntos están sobre una **circunferencia** de radio 2 centrada en el origen. Esta circunferencia es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ (*véase* la Figura P.13(a)).

Ejemplo 5 Los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la inecuación $x^2 + y^2 \leqslant 4$ están todos a una distancia $\leqslant 2$ del origen. La gráfica de esta inecuación es, por tanto, el disco de radio 2 centrado en el origen (*véase* la Figura P.13(b)).



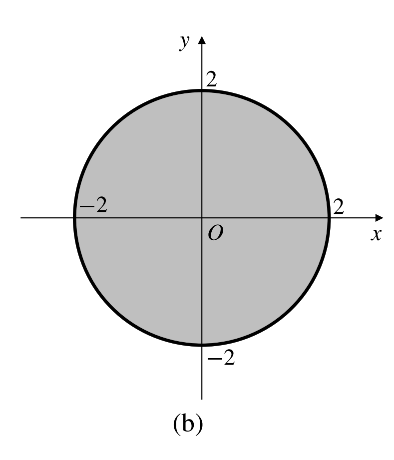


Figura P.13
(a) La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.
(b) El disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

Ejemplo 6 Considere la ecuación $y = x^2$. Algunos puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación son (0, 0), (1, 1), (−1, 1), (2, 4) y (−2, 4). Estos puntos (y todos los demás que cumplen la ecuación) se encuentran sobre una curva que se denomina **parábola** (*véas*e la Figura P.14).

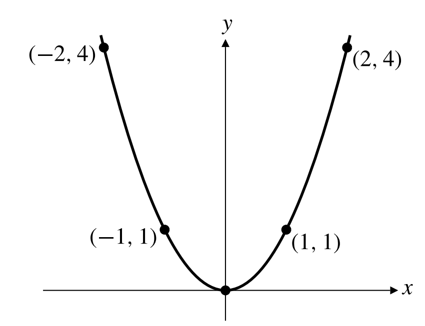


Figura P.14 La parábola $y = x^2$.

Líneas rectas

Dados dos puntos del plano, $P_1(x_1,\ y_1)$ y $P_2(x_2,\ y_2)$, denominaremos a los incrementos $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ **desplazamiento** y **elevación**, respectivamente, entre P_1 y P_2. Dos puntos como éstos determinan siempre una única **línea recta** (a menudo denominada simplemente **recta**) que pasa por ambos. La denominaremos recta P_1P_2.

Cualquier recta no vertical en el plano tiene siempre la propiedad de que la relación

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

toma el *mismo valor* para dos puntos cualesquiera $P_1(x_1,\ y_1)$ y $P_2(x_2,\ y_2)$ de la recta (*véase* la Figura P.15). La constante $m = \Delta y/\Delta x$, en una recta no vertical, se denomina **pendiente**.

Ejemplo 7 La pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(3,\ -3)$ y $B(-1,\ 2)$ es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-3)}{-1-3} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

La pendiente de una recta nos indica su dirección y su tasa (o velocidad) de crecimiento (o decrecimiento). Una recta de pendiente positiva va creciendo hacia la derecha, mientras que una recta con pendiente negativa va decreciendo hacia la derecha. Cuanto mayor sea el valor ab-

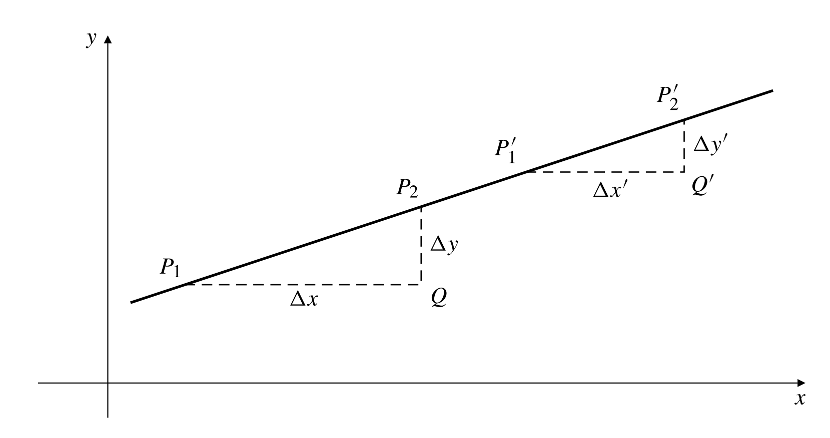


Figura P.15 $\Delta y/\Delta x = \Delta y'/\Delta x'$ porque los triángulos P_1QP_2 y $P_1'Q'P_2'$ son semejantes.

soluto de la pendiente, más acusado es el crecimiento o el decrecimiento. Dado que Δx vale cero en una recta vertical, no podemos formar el cociente *n*, la pendiente de la recta vertical está *indefinida*.

La dirección de una recta se puede medir también mediante un ángulo. La **inclinación** de una recta se define como el mínimo ángulo, medido en sentido contrario al de las agujas del reloj, formado entre la dirección positiva del eje x y la recta. El la Figura P.16, el ángulo ϕ (la letra griega «phi») es la inclinación de la recta L. La inclinación ϕ de cualquier recta cumple que $0^{\text{o}} \leqslant \phi \leqslant 180^{\text{o}}$. La inclinación de una recta horizontal es de 0^{o} y la de una recta vertical, de 90^{o}.

Suponiendo que se usa la misma escala en los dos ejes coordenados, la relación entre la pendiente m de una recta no vertical y su inclinación se muestra en la Figura P.16:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \phi$$

(La función trigonométrica tan se define en la Sección P.7).

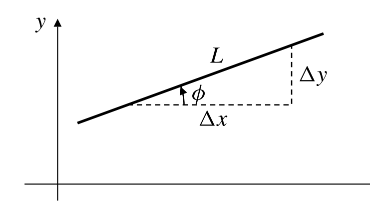


Figura P.16 La recta L tiene una inclinación de ϕ.

Las rectas paralelas tienen la misma inclinación. Si no son verticales deberán tener, por tanto, la misma pendiente. Lo contrario también es cierto: dos rectas con la misma pendiente tienen la misma inclinación y, por tanto, son paralelas.

Si dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares, sus pendientes m_1 y m_2 cumplen la relación $m_1 m_2 = -1$, por lo que la pendiente de una de ellas es el *inverso cambiado de signo* de la pendiente de la otra:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

(Este resultado asume también que los dos ejes coordenados tienen la misma escala). Para verlo, observemos en la Figura P.17 que

$$m_1 = \frac{AD}{BD} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{AD}{DC}$$

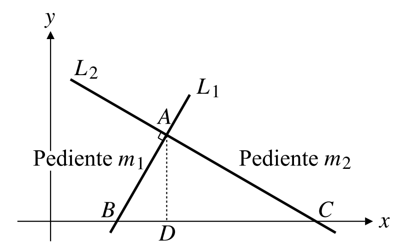


Figura P.17 $\triangle ABD$ es similar a $\triangle CAD$.

Como $\triangle ABD$ es similar a $\triangle CAD$, tenemos que $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{DC}{AD}$ y, por tanto,

$$m_1 m_2 = \left(\frac{DC}{AD}\right)\left(-\frac{AD}{DC}\right) = -1$$

Ecuaciones de la recta

Las líneas rectas son figuras particularmente simples, y sus ecuaciones correspondientes son también simples. Todos los puntos de una recta vertical que pasan por el punto a en el eje x tienen sus coordenadas x iguales a a. Por tanto, la ecuación de esa recta es $x = a$. Análogamente, $y = b$ es la ecuación de una recta horizontal que corta al eje y en b.

Ejemplo 8 Las ecuaciones de las rectas horizontal y vertical que pasan por el punto (3, 1) (*véase* la Figura P.18) son, respectivamente, $y = 1$ y $x = 3$.

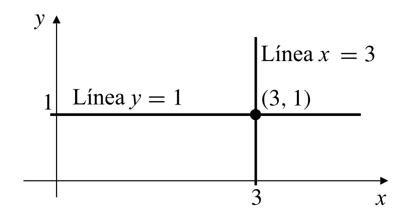


Figura P.18 Las rectas $y = 1$ y $x = 3$.

Para escribir la ecuación de una recta no vertical L, es suficiente conocer su pendiente m y las coordenadas de un punto de dicha recta, $P_1(x_1, y_1)$. Si $P(x, y)$ es otro punto cualquiera de la recta, entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

por lo que

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{o} \quad y = m(x - x_1) + y_1$$

La ecuación

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Se denomina **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1), y tiene pendiente m.

Ejemplo 9 Obtenga la ecuación de la recta de pendiente -2 que pasa por el punto (1, 4).

Solución Sustituimos $x_1 = 1$, $y_1 = 4$ y $m = -2$ en la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, con lo que se obtiene

$$y = -2(x - 1) + 4 \quad \text{o} \quad y = -2x + 6$$

Ejemplo 10 Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, -1)$ y (3, 5).

Solución La pendiente de la recta es $m = \dfrac{5 - (-1)}{3 - 1} = 3$. Podemos utilizar ahora esta pendiente junto con uno cualquiera de los dos puntos dados para obtener la ecuación de la recta. Si se usa el punto $(1, -1)$, se obtiene

$$y = 3(x - 1) - 1, \qquad \text{que se simplifica en} \quad y = 3x - 4$$

Si se usa el punto (3, 5) se obtiene

$$y = 3(x - 3) + 5, \qquad \text{que se simplifica también en} \quad y = 3x - 4$$

En cualquier caso, la ecuación de la recta es $y = 3x - 4$.

La coordenada y del punto donde una recta no vertical corta al eje y se denomina **ordenada en el origen** (*véase* la Figura P.19). Análogamente, la **abscisa en el origen** de una recta no horizontal es la coordenada x del punto donde la recta corta al eje x. Una recta de pendiente m y ordenada en el origen b pasa por el punto $(0, b)$, por lo que su ecuación es

$$y = m(x - 0) + b \qquad \text{o, más simple,} \quad y = mx + b$$

Una recta con pendiente m y abscisa en el origen a pasa por el punto $(a, 0)$, por lo que su ecuación es

$$y = m(x - a)$$

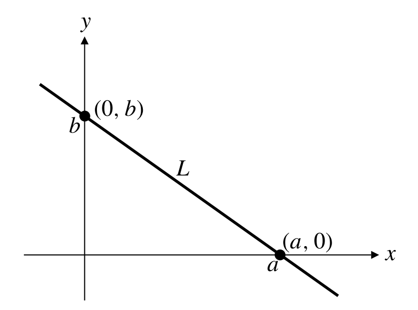


Figura P.19 La recta L tiene ordenada en origen b y abscisa en el origen a.

La ecuación $y = mx + b$ se denomina **ecuación explícita** de la recta de pendiente m y ordenada en el origen b.

La ecuación $y = m(x - a)$ es la ecuación de la recta de pendiente m y abscisa en el origen a.

Ejemplo 11 Calcule la pendiente, la ordenada en el origen y la abscisa en el origen de la recta cuya ecuación es $8x + 5y = 20$.

Solución Despejando y de la ecuación obtenemos

$$y = \frac{20 - 8x}{5} = -\frac{8}{5}x + 4$$

Comparando la expresión anterior con la forma explícita general $y = mx + b$, puede verse que la pendiente de la recta es $m = -8/5$ y la ordenada en el origen es $b = 4$.

Para calcular la abscisa en el origen se hace $y = 0$ en la ecuación de la recta y se despeja x, con lo que se obtiene $8x = 20$, o $x = 5/2$. Por tanto, la abscisa en el origen es $a = 5/2$. ■

La ecuación $Ax + By = C$ (donde A y B no son simultáneamente cero) se denomina **ecuación lineal general** en x e y porque su gráfica es siempre una línea recta, y la ecuación de cualquier recta se puede expresar de esa forma.

Muchas magnitudes de interés se relacionan mediante ecuaciones lineales. Una vez que conocemos que la relación entre dos variables es lineal, dicha relación se puede obtener a partir de cualquier pareja de valores que se correspondan, de la misma forma que hemos obtenido la ecuación de una recta conocidos dos puntos cualesquiera de ella.

Ejemplo 12 La relación entre la temperatura en grados Fahrenheit (F) y grados Celsius (C) es una ecuación de la forma $F = mC + b$. El agua se congela a $F = 32^{o}$ o $C = 0^{o}$, y hierve a $F = 212^{o}$ o $C = 100^{o}$. Por tanto,

$$32 = 0m + b \qquad \text{y} \qquad 212 = 100m + b$$

por lo que $b = 32$ y $m = (212 - 32)/100 = 9/5$. Entonces, la relación se expresa mediante la ecuación lineal

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \qquad \text{o} \qquad C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

■

Ejercicios P.2

En los Ejercicios 1-4, una partícula se mueve desde A hasta B. Calcule los incrementos netos Δx e Δy de las coordenadas de las partículas. Calcule también la distancia desde A hasta B.

1. $A(0, 3)$, $B(4, 0)$ **2.** $A(-1, 2)$, $B(4, -10)$

3. $A(3, 2)$, $B(-1, -2)$ **4.** $A(0.5, 3)$, $B(2, 3)$

5. Una partícula inicia su movimiento en el punto $A(-2, 3)$ y el cambio en sus coordenadas es $\Delta x = 4$ y $\Delta y = -7$. Calcule su nueva posición.

6. Una partícula llega al punto $(-2, 2)$ después de que sus coordenadas tengan un cambio de $\Delta x = -5$ y $\Delta y = 1$. ¿Cuál fue su posición original?

Describa los gráficos de las ecuaciones e inecuaciones de los Ejercicios 7-12.

7. $x^2 + y^2 = 1$ **8.** $x^2 + y^2 = 2$

9. $x^2 + y^2 \leqslant 1$ **10.** $x^2 + y^2 = 0$

11. $y \geqslant x^2$ **12.** $y < x^2$

En los Ejercicios 13-14, calcule la ecuación de (a) la recta vertical y (b) la recta horizontal que pasa por los puntos dados.

13. $(-2, 5/3)$ **14.** $(\sqrt{2}, -1.3)$

En los Ejercicios 15-18, escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m.

15. $P(-1, 1)$, $m = 1$ **16.** $P(-2, 2)$, $m = 1/2$

17. $P(0, b)$, $m = 2$ **18.** $P(a, 0)$, $m = -2$

En los Ejercicios 19 y 20, indique si el punto P está por encima, por debajo o sobre la recta dada.

19. $P(2, 1)$, $2x + 3y = 6$ **20.** $P(3, -1)$, $x - 4y = 7$

En los Ejercicios 21-24, escriba la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados.

21. $(0, 0)$, $(2, 3)$ **22.** $(-2, 1)$, $(2, -2)$

23. $(4, 1)$, $(-2, 3)$ **24.** $(-2, 0)$, $(0, 2)$

En los Ejercicios 25-26, escriba la ecuación de la recta con pendiente m y ordenada en el origen b.

25. $m = -2$, $b = \sqrt{2}$ **26.** $m = -1/2$, $b = -3$

En los Ejercicios 27-30, calcule la ordenada en el origen, la abscisa en el origen y la pendiente de las rectas dadas, y dibuje sus gráficas.

27. $3x + 4y = 12$ **28.** $x + 2y = -4$

29. $\sqrt{2x} - \sqrt{3y} = 2$ **30.** $1.5x - 2y = -3$

En los Ejercicios 31 y 32, obtenga las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto P y (a) son paralelas a o (b) son perpendiculares a las rectas dadas.

31. $P(2, 1), \quad y = x + 2$ **32.** $P(-2, 2), \quad 2x + y = 4$

33. Calcule el punto de intersección de las rectas

$$3x - 4y = -6 \quad \text{y} \quad 2x - 3y = 13$$

34. Calcule el punto de intersección de las rectas

$$2x + y = 8 \quad \text{y} \quad 5x - 7y = 1$$

35. Dada una recta que no sea horizontal ni vertical, ni pase por el origen, demuestre que su ecuación se puede escribir en la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, siendo a su abscisa en el origen y b su ordenada en el origen.

36. Determine la abscisa y la ordenada en el origen y dibuje la gráfica de la recta $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$.

37. Calcule la ordenada en el origen de la recta que pasa por los puntos (2, 1) y (3, -1).

38. Una recta pasa por los puntos (-2, 5) y (k, 1), y su abscisa en el origen vale 3. Calcule k.

39. El coste de imprimir x copias de un folleto es de C €, siendo $C = Ax + B$ para ciertos valores de las constantes A y B. Si imprimir 10 000 copias vale 5000 € e imprimir 15 000 copias vale 6000 €, ¿cuánto costará imprimir 100 000 copias?

40. **(Fahrenheit vs. Celsius)** En el plano FC, dibuje la gráfica de la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ que relaciona las temperaturas en grados Celsius y Fahrenheit que vimos en el Ejemplo 12. Dibuje en la misma gráfica la recta cuya ecuación es $F = C$. ¿Existe alguna temperatura para la cual un termómetro graduado en grados Celsius marque lo mismo que un termómetro graduado en grados Fahrenheit? Si es así, calcule dicha temperatura.

Geometría

41. Demuestre, calculando las longitudes de sus tres lados, que el triángulo que tiene como vértices los puntos $A(2, 1)$, $B(6, 4)$ y $C(5, -3)$ es isósceles.

42. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$ y $C(2, 0)$ es equilátero.

43. Demuestre que los puntos $A(2, -1)$, $B(1, 3)$ y $C(-3, 2)$ son tres vértices de un cuadrado y calcule el cuarto vértice.

44. Calcule las coordenadas del punto medio del segmento P_1P_2, entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

45. Calcule las coordenadas del punto que en un segmento entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está a dos tercios del recorrido desde P_1 a P_2.

46. El punto P está en el eje x y el punto Q está en la recta $y = -2x$. El punto (2, 1) es el punto medio del segmento PQ. Calcule las coordenadas del punto P.

En los Ejercicios 47 y 48, interprete la ecuación como una aseveración sobre distancias y determine así la gráfica de la ecuación.

47. $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 4$

48. $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$

49. ¿Para qué valor de k es la recta $2x + ky = 3$ perpendicular a la recta $4x + y = 1$? ¿Para qué valor de k son ambas rectas paralelas?

50. Obtenga la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2) y por el punto de intersección de las rectas $x + 2y = 3$ y $2x - 3y = -1$.

P.3 Gráficas de ecuaciones cuadráticas

En esta sección se revisan los círculos, parábolas, elipses e hipérbolas, cuyas gráficas representan ecuaciones cuadráticas de dos variables.

Circunferencias y discos

La **circunferencia** de **centro** C y **radio** a está forma por el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia a del punto C.

La distancia del punto $P(x, y)$ al punto $C(h, k)$ es $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$, por lo que la ecuación de la circunferencia de radio $a > 0$ y centro $C(h, k)$ es

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = a$$

La ecuación anterior se puede expresar de una forma más simple elevando al cuadrado ambos miembros.

Ecuación estándar de una circunferencia

La ecuación de la circunferencia de radio $a > 0$ y centro (h, k) es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

En particular, la ecuación de la circunferencia de radio a centrada en el origen (0, 0) es

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Ejemplo 1 La circunferencia de radio 2 y centro el punto (1, 3) (*véase* la Figura P.20) tiene la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

Ejemplo 2 La circunferencia cuya ecuación es $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 7$ está centrada en el punto $(-2, 1)$ y su radio es $\sqrt{7}$ (*véase* la Figura P.21).

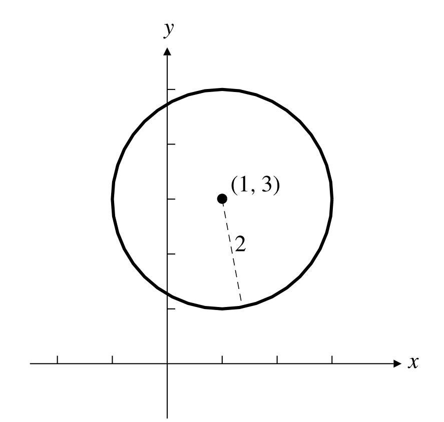


Figura P.20 La circunferencia de ecuación $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

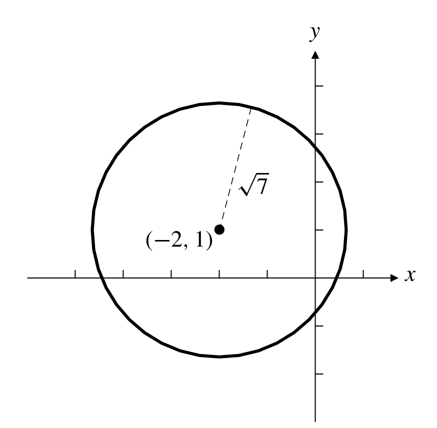


Figura P.21 La circunferencia de ecuación $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 7$.

Si se desarrollan los cuadrados de la ecuación estándar $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ y se agrupan todas las constantes en el miembro derecho de la ecuación, resulta

$$x^2 - 2hx + y^2 - 2ky = a^2 - h^2 - k^2$$

Una ecuación cuadrática de la forma

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c$$

puede representar una circunferencia, un único punto, o ningún punto en absoluto. Para saber en qué caso estamos, se completan los cuadrados del miembro izquierdo. Como $x^2 + 2ax$ son los dos primeros términos del desarrollo del cuadrado $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, para completar el cuadrado del término en x se suma a^2 a los dos miembros de la ecuación (nótese que a^2 es *el*

cuadrado de la mitad del coeficiente de x). Análogamente, se suma b^2 en los dos miembros para completar el cuadrado en y. Entonces, la ecuación queda

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = c + a^2 + b^2$$

Si $c + a^2 + b^2 > 0$, el gráfico corresponde a una circunferencia de centro $(-a, -b)$ y radio $\sqrt{c + a^2 + b^2}$. Si $c + a^2 + b^2 = 0$, la gráfica sólo consta del punto $(-a, -b)$. Si $c + a^2 + b^2 < 0$, la gráfica no contiene ningún punto.

Ejemplo 3 Calcule el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$.

Solución Obsérvese que $x^2 - 4x$ son los dos primeros términos del desarrollo del binomio $(x - 2)^2 = x^2 - 4x - 4$, y que $y^2 + 6y$ son los dos primeros términos del cuadrado $(y + 3)^2 = y^2 + 6y + 9$. Por tanto, hay que sumar $4 + 9$ en ambos miembros, con lo que se obtiene

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 3 + 4 + 9 \qquad \text{o} \qquad (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Por tanto, la ecuación representa una circunferencia de centro $(2, -3)$ y radio 4. ■

El conjunto de todos los puntos *dentro* de una circunferencia se denomina **interior** de la circunferencia, o **disco abierto**. El conjunto de todos los puntos que están *fuera* de una circunferencia se denomina **exterior** de la circunferencia (*véase* la Figura P.22). El interior de una circunferencia junto con la propia circunferencia se denomina **disco cerrado**, o simplemente **disco**. La inecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 \leqslant a^2$$

representa el disco de radio $|a|$ centrado en (h, k).

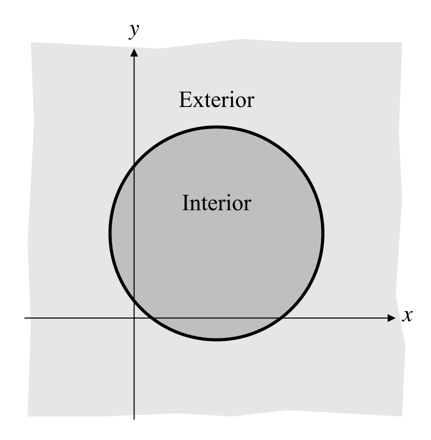


Figura P.22 Interior de la circunferencia (sombreado) y exterior de la circunferencia (sin sombrear).

Ejemplo 4 Identifique las gráficas de

(a) $x^2 + 2x + y^2 \leqslant 8$ (b) $x^2 + 2x + y^2 < 8$ (c) $x^2 + 2x + y^2 > 8$

Solución Completando el cuadrado en la ecuación $x^2 + y^2 + 2x = 8$:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 8 + 1$$
$$(x + 1)^2 + y^2 = 9$$

puede verse que la ecuación representa una circunferencia de radio 3 centrada en $(-1, 0)$. La inecuación (a) representa el disco (cerrado) con el mismo centro y radio (*véase* la Figura P.23). La inecuación (b) representa el interior de la circunferencia (o disco abierto). La inecuación (c) representa el exterior de la circunferencia.

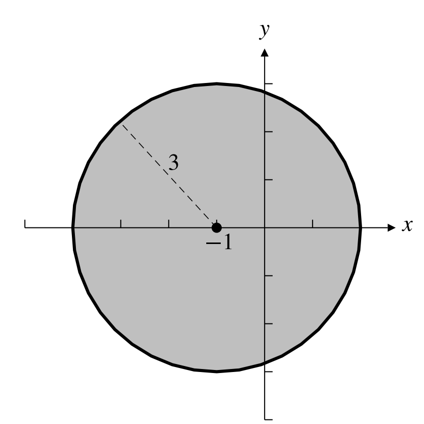


Figura P.23 El disco $x^2 + y^2 + 2x \leqslant 8$.

Ecuaciones de parábolas

Una **parábola** es una curva del plano cuyos puntos están a la misma distancia de un punto fijo F y de una recta L que no pasa por F. El punto F se denomina **foco** de la parábola, y la recta L **directriz** de la parábola. La recta perpendicular a L que pasa por F se denomina **eje** de la parábola, y el punto V donde se encuentran la parábola y su eje se denomina **vértice**.

Obsérvese que el vértice V de una parábola está equidistante del foco F y del punto de la directriz L más cercano a F. Si la directriz es horizontal o vertical, y el vértice está en el origen, la ecuación de la parábola será particularmente simple.

Ejemplo 5 Calcule la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F(0, p)$ y cuya directriz es la recta L de ecuación $y = -p$.

Solución Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola. Entonces (*véase* la Figura P.24) las distancias de P a F y al punto más cercano Q de la recta L se expresan

$$PF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2py + p^2}$$
$$PQ = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{y^2 + 2py + p^2}$$

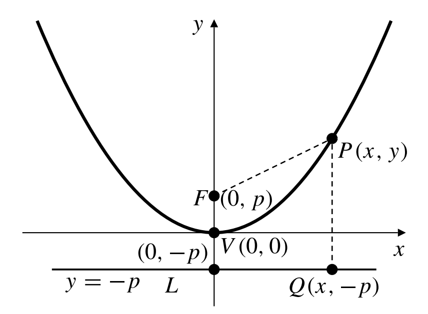


Figura P.24 La parábola $4py = x^2$, con foco $F(0, p)$ y directriz $y = -p$.

Como P está en la parábola, $PF = PQ$, y por tanto los cuadrados de las distancias deben ser también iguales:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

Simplificando,

$$x^2 = 4py \qquad \text{o} \qquad y = \frac{x^2}{4p} \qquad \text{(denominada } \textbf{forma estándar}\text{)}$$

La Figura P.24 ilustra la situación para $p > 0$. La parábola se abre hacia arriba y es simétrica respecto a su eje, el eje y. Si $p < 0$, el foco $(0, p)$ estará por debajo del origen y la directriz $y = -p$ estará por encima del origen. En este caso la parábola se abrirá hacia abajo en vez de hacia arriba.

La Figura P.25 muestra varias parábolas con ecuaciones de la forma $y = ax^2$, para valores de a positivos y negativos.

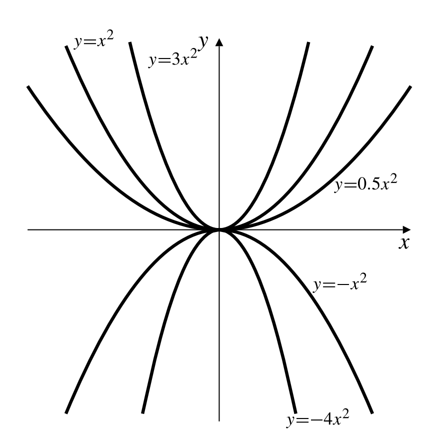


Figura P.25 Algunas parábolas de la forma $y = ax^2$.

Ejemplo 6 La ecuación de la parábola con foco $(0, 1)$ y directriz $y = -1$ es $y = x^2/4$ o $x^2 = 4y$ (se toma $p = 1$ en la ecuación estándar).

Ejemplo 7 Calcule el foco y la directriz de la parábola $y = -x^2$.

Solución La ecuación dada se ajusta a la forma estándar $y = x^2/(4p)$ para $4p = -1$. Por tanto, $p = -1/4$. El foco está en el punto $(0, -1/4)$, y la directriz es la recta $y = 1/4$.

Intercambiando los papeles de x e y en el proceso anterior de obtención de la ecuación estándar se puede demostrar que la ecuación

$$y^2 = 4px \qquad \text{o} \qquad x = \frac{y^2}{4p} \qquad \text{(ecuación estándar)}$$

representa una parábola con foco en el punto $(p, 0)$ y directriz la recta vertical $x = -p$. El eje es el eje x.

Propiedades de reflexión de las parábolas

Una de las principales aplicaciones de las parábolas es su uso como reflectores de luz y de ondas radioeléctricas. Los rayos que parten del foco de la parábola se reflejan formando un rayo paralelo a su eje, como muestra la Figura P.26. De la misma forma, todos los rayos que lleguen a una parábola paralelos a su eje se reflejarán concentrándose en el foco. Esta propiedad es la razón por la que los telescopios y reflectores utilizan espejos parabólicos y por la que los radiotelescopios y las antenas de microondas tienen forma parabólica. En la Sección 8.1 examinaremos más detenidamente esta propiedad de las parábolas.

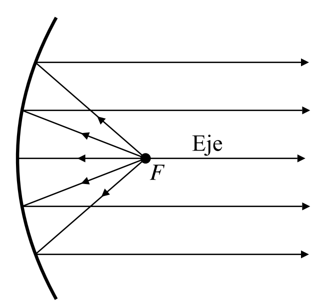


Figura P.26 Reflexión en una parábola.

Escalado de una gráfica

La gráfica de una ecuación se puede comprimir o expandir horizontalmente sustituyendo x por un múltiplo de x. Si a es un entero positivo, al sustituir en una ecuación x por ax se multiplican por un factor $1/a$ las distancias horizontales en la gráfica de la ecuación (*véase* la Figura P.27). Al sustituir y por ay se multiplican las distancias verticales de la misma forma.

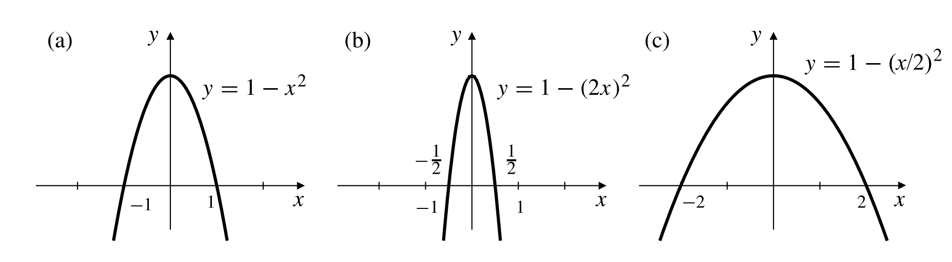


Figura P.27 Escalado horizontal:
(a) Gráfica de $y = 1 - x^2$.
(b) Gráfica de (a) comprimida horizontalmente.
(c) Gráfica de (a) expandida horizontalmente.

Puede parecernos sorprendente que, como las circunferencias, las parábolas sean figuras geométricas *similares*. Pueden tener tamaños diferentes, pero todas tienen la misma forma. Se puede cambiar el *tamaño* de una gráfica que representa a una ecuación en x e y, conservando su forma, aplicando el mismo factor de escala a ambas coordenadas. Si se aplica un factor de escala a la ecuación $4py = x^2$, sustituyendo x e y por $4px$ y $4py$, respectivamente, se obtiene $4p(4py) = (4px)^2$, o $y = x^2$. Por tanto, la parábola general $4py = x^2$ tiene la misma forma que la parábola concreta $y = x^2$, como se ilustra en la Figura P.28.

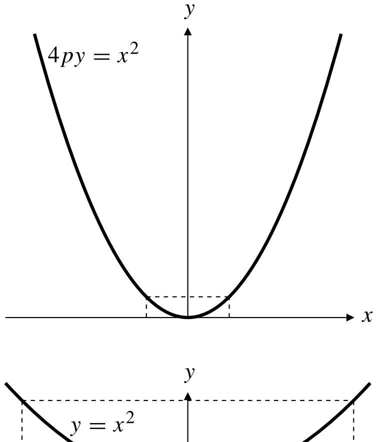


Figura P.28 Las dos parábolas son similares. Compárense las partes dentro de los rectángulos.

Desplazamiento de una gráfica

La gráfica de una ecuación (o inecuación) se puede desplazar horizontalmente c unidades sustituyendo x por $x - c$, o verticalmente sustituyendo y por $y - c$.

Desplazamientos

Para desplazar una gráfica c unidades a la derecha se sustituye en la ecuación o inecuación x por $x - c$ (si $c < 0$, el desplazamiento será a la izquierda).

Para desplazar una gráfica c unidades hacia arriba se sustituye en la ecuación o inecuación y por $y - c$ (si $c < 0$, el desplazamiento será hacia abajo).

Ejemplo 8 La gráfica de $y = (x - 3)^2$ es la de la parábola $y = x^2$ desplazada 3 unidades a la derecha. La gráfica de $y = (x + 1)^2$ es la de la parábola $y = x^2$ desplazada 1 unidad a la izquierda (*véase* la Figura P.29(a)).

Ejemplo 9 La gráfica de $y = x^2 + 1$ (o $y - 1 = x^2$) es la de la parábola $y = x^2$ desplazada 1 unidad hacia arriba. La gráfica de $y = x^2 - 3$ (o $y - (-3) = x^2$) es la de la parábola $y = x^2$ desplazada 3 unidades hacia abajo (*véase* la Figura P.29(b)).

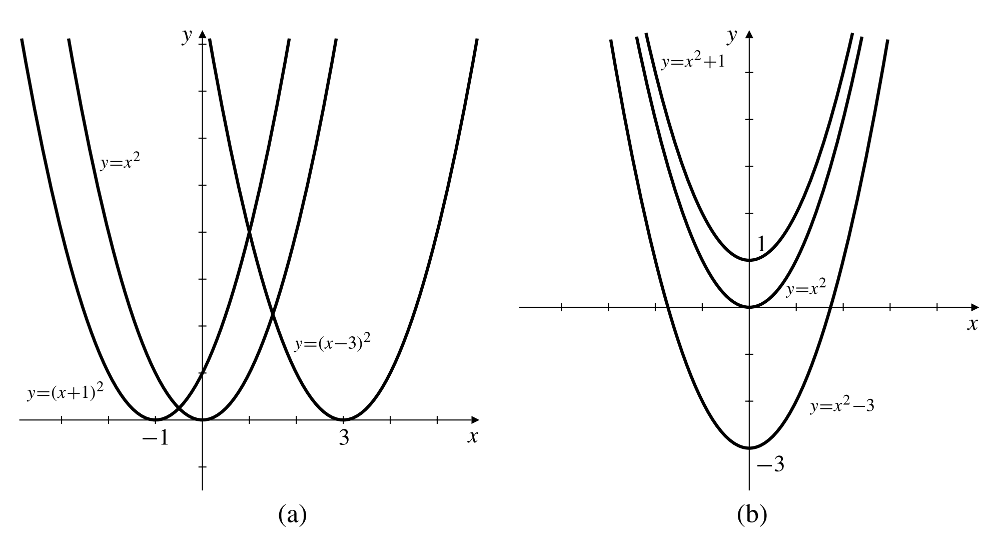


Figura P.29 (a) Desplazamientos horizontales de $y = x^2$.
(b) Desplazamientos verticales de $y = x^2$.

Ejemplo 10 La circunferencia de ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$, con centro en (h, k) y radio a, se puede obtener desplazando la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ de radio a centrada en el origen h unidades hacia la derecha y k unidades hacia arriba. Estos desplazamientos corresponden a sustituir x por $x - h$ e y por $y - k$.

La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola cuyo eje es paralelo al eje y. La parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. Para obtener el vértice (h, k) basta con completar el cuadrado y escribir la ecuación en la forma $y = a(x - h)^2 + k$.

Ejemplo 11 Describa la gráfica de $y = x^2 - 4x + 3$.

Solución La ecuación $y = x^2 - 4x + 3$ representa una parábola que se abre hacia arriba. Para calcular su vértice y su eje completamos el cuadrado:

$$y = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1, \qquad \text{por tanto,} \quad y - (-1) = (x-2)^2$$

Es decir, la curva es la parábola $y = x^2$ desplazada 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo. Por tanto, su vértice es el punto $(2, -1)$ y su eje es la recta $x = 2$. Como el foco de $y = x^2$ es el punto $(0, 1/4)$, el foco de la parábola del ejemplo es el punto $(0 + 2, 1/4 - 1)$ o $(2, -3/4)$ (*véase* la Figura P.30).

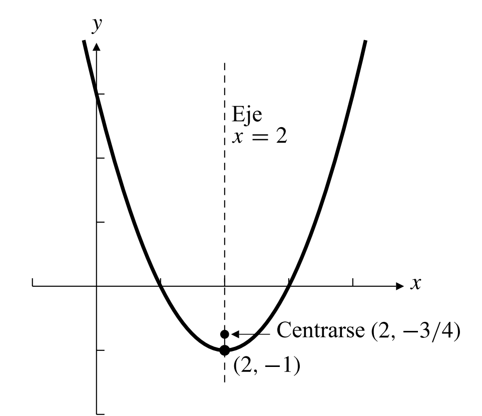


Figura P.30 La parábola $y = x^2 - 4x + 3$.

Elipses e hipérbolas

Si a y b son dos números positivos, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

representa un curva denominada **elipse**, inscrita en el rectángulo $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ (¿por qué?). Si $a = b$, la elipse se convierte en una circunferencia de radio a centrada en el origen. Si $a \neq b$, la elipse es una circunferencia que ha sido deformada aplicando un factor de escala diferente en las dos direcciones coordenadas.

La elipse está centrada en el origen, y pasa por los cuatro puntos $(a, 0)$, $(0, b)$, $(-a, 0)$ y $(0, -b)$ (*véase* la Figura P.31). Los segmentos entre $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, y entre $(0, -b)$ y $(0, b)$ se denominan **ejes principales** de la elipse. El más largo de los dos se denomina **eje mayor** y el más corto, **eje menor**.

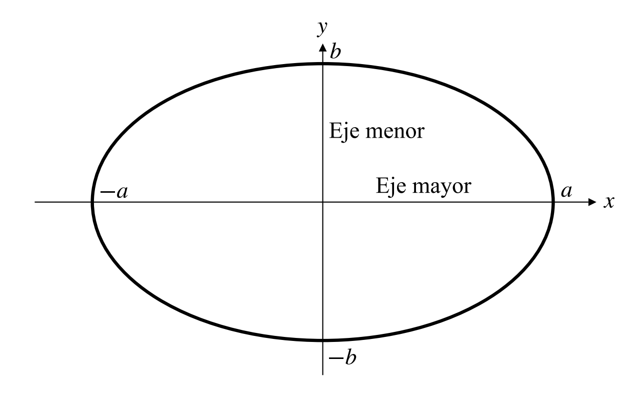


Figura P.31 La elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ejemplo 12 La ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ representa una elipse cuyo eje mayor va desde $(-3, 0)$ hasta $(3, 0)$, y cuyo eje menor va desde $(0, -2)$ hasta $(0, 2)$.

La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

representa una curva denominada **hipérbola**, con centro en el origen y que pasa por los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ (*véase* la Figura P.32). La curva tiene dos partes (que se denominan **ramas**). Cada rama se aproxima a dos rectas (denominadas **asíntotas**), a medida que se aleja del origen. Las ecuaciones de las asíntotas son

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

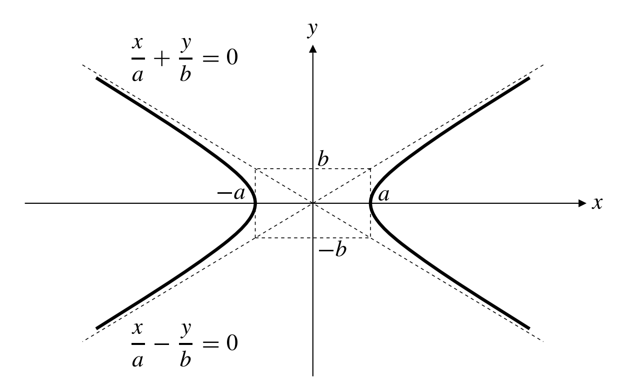


Figura P.32 La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sus asíntotas.

La ecuación $xy = 1$ representa una hipérbola que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ y cuyas asíntotas son los ejes coordenados. Es, de hecho, la hipérbola $x^2 - y^2 = 2$, rotada 45º alrededor del origen en sentido contrario al de las agujas del reloj (*véase* la Figura P.33). Este tipo de hipérbolas se denominan **hipérbolas rectangulares**, ya que la intersección de sus asíntotas forma ángulos rectos.

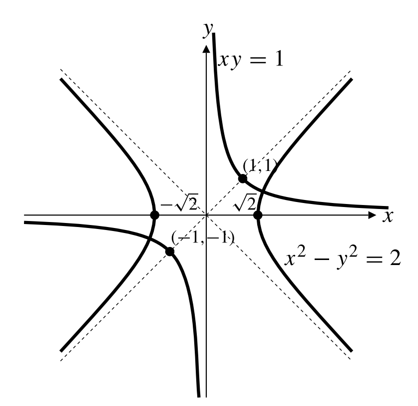


Figura P.33 Dos hipérbolas rectangulares.

En el Capítulo 8 estudiaremos con más detalle las elipses e hipérbolas.

Ejercicios P.3

En los Ejercicios 1-4, escriba la ecuación de la circunferencia de centro C y radio r.

1. $C(0, 0)$, $r = 4$ **2.** $C(0, 2)$, $r = 2$

3. $C(-2, 0)$, $r = 3$ **4.** $C(3, -4)$, $r = 5$

En los Ejercicios 5-8, calcule el centro y el radio de las circunferencias cuyas ecuaciones se proporcionan.

5. $x^2 + y^2 - 2x = 3$ **6.** $x^2 + y^2 + 4y = 0$

7. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ **8.** $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$

Describa las regiones definidas por las inecuaciones o parejas de inecuaciones de los Ejercicios 9-16.

9. $x^2 + y^2 > 1$ **10.** $x^2 + y^2 < 4$

11. $(x + 1)^2 + y^2 \leqslant 4$ **12.** $x^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4$

13. $x^2 + y^2 > 1$, $x^2 + y^2 < 4$

14. $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $(x + 2)^2 + y^2 \leqslant 4$

15. $x^2 + y^2 < 2x$, $x^2 + y^2 < 2y$

16. $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4$, $x + y > 1$

17. Escriba una inecuación que represente el interior de la circunferencia de centro $(-1, 2)$ y radio $\sqrt{6}$.

18. Escriba una inecuación que represente el exterior de la circunferencia de centro $(2, -3)$ y radio 4.

19. Escriba una pareja de inecuaciones que representen la parte del interior de la circunferencia de centro (0, 0) y radio $\sqrt{2}$ que está a la derecha de la recta vertical que pasa por el punto (1, 0).

20. Escriba una pareja de inecuaciones que representen el exterior de la circunferencia de centro (0, 0) y radio 2 que está en el interior de la circunferencia de centro (1, 3) que pasa por el origen.

En los Ejercicios 21-24, escriba la ecuación de la parábola cuyos ejes y directrices se proporcionan.

21. Foco: (0, 4) Directriz: $y = -4$

22. Foco: $(0, -1/2)$ Directriz: $y = 1/2$

23. Foco: (2, 0) Directriz: $x = -2$

24. Foco: $(-1, 0)$ Directriz: $x = 1$

En los Ejercicios 25-28, calcule los focos y directrices de las parábolas definidas por las ecuaciones, y dibuje una gráfica con las parábolas, sus focos y sus directrices.

25. $y = x^2/2$ **26.** $y = -x^2$

27. $x = -y^2/4$ **28.** $x = y^2/16$

29. La Figura P.34 muestra la gráfica de la ecuación $y = x^2$ y cuatro versiones desplazadas de la misma. Obtenga las ecuaciones de las versiones desplazadas.

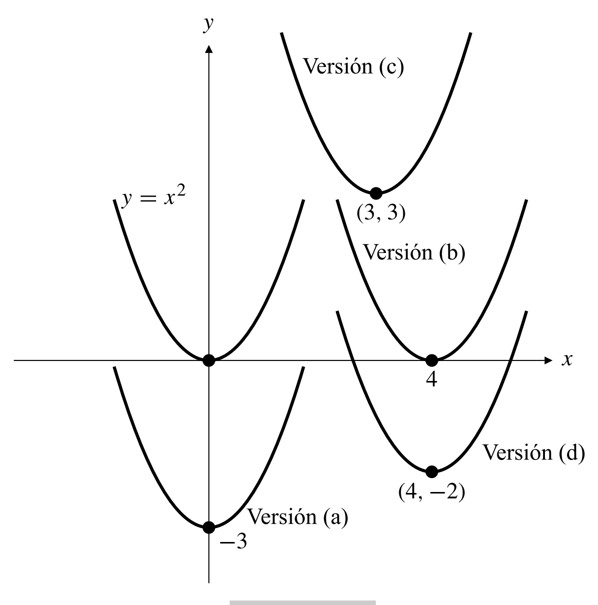


Figura P.34

30. Indique qué ecuaciones resultan de desplazar la recta $y = mx$

(a) Horizontalmente para hacerla pasar por el punto (a, b).

(b) Verticalmente para hacerla pasar por el punto (a, b).

En los Ejercicios 31-34 se modifica la escala de la gráfica $y = \sqrt{x + 1}$ en la forma indicada. Obtenga la ecuación de la gráfica resultante.

31. Las distancias horizontales se multiplican por 3.

32. Las distancias verticales se dividen por 4.

33. Las distancias horizontales se multiplican por 2/3.

34. Las distancias horizontales se dividen por 4 y las verticales se multiplican por 2.

En los Ejercicios 35-38, obtenga la ecuación de la gráfica que resulta de desplazar la gráfica correspondiente a la ecuación dada en la forma que se indica.

35. $y = 1 - x^2$ abajo 1, izquierda 1

36. $x^2 + y^2 = 5$ arriba 2, izquierda 4

37. $y = (x - 1)^2 - 1$ abajo 1, derecha 1

38. $y = \sqrt{x}$ abajo 2, izquierda 4

Calcule los puntos de intersección de las parejas de curvas de los Ejercicios 35-42.

39. $y = x^2 + 3, \quad y = 3x + 1$

40. $y = x^2 - 6, \quad y = 4x - x^2$

41. $x^2 + y^2 = 25, \quad 3x + 4y = 0$

42. $2x^2 + 2y^2 = 5, \quad xy = 1$

En los Ejercicios 43-50, identifique y dibuje las curvas representadas por las ecuaciones dadas.

43. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

44. $9x^2 + 16y^2 = 144$

45. $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

46. $(x-1)^2 + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 4$

47. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

48. $x^2 - y^2 = -1$

49. $xy = -4$

50. $(x-1)(y+2) = 1$

51. Indique cuál es el efecto sobre la gráfica de una ecuación en x e y de

(a) Sustituir x por $-x$.

(b) Sustituir y por $-y$.

52. Indique cuál es el efecto sobre la gráfica de una ecuación en x e y de sustituir simultáneamente x por $-x$ e y por $-y$.

53. Dibuje la gráfica de $|x| + |y| = 1$.

P.4 Funciones y sus gráficas

El área de un círculo depende de su radio. La temperatura de ebullición del agua depende de la altitud respecto al nivel del mar. El interés de una inversión depende del tiempo que se mantenga aquélla.

Siempre que una cantidad dependa de otra, se dice que la primera es función de la segunda. Por ejemplo, el área A de un círculo depende de su radio r de acuerdo con la fórmula

$$A = \pi r^2$$

por lo que podemos decir que el área es una función del radio. La fórmula es una *regla* que indica cómo calcular un *único* valor de salida del área A en función de los valores que tome el radio r.

El conjunto de todos los posibles valores del radio se denomina **dominio** de la función. El conjunto de todos los posibles valores del área es el **rango** de la función. Como los círculos no pueden tener radios ni áreas negativos, el dominio y el rango de la función correspondiente al área del círculo es el intervalo $[0, \infty)$, es decir, el conjunto de los números reales no negativos.

El rango y el dominio de una función pueden ser cualquier tipo de objeto. No tienen que ser números necesariamente. No obstante, en la mayor parte de este libro, el dominio y el rango de una función serán conjuntos de números reales.

En cálculo es frecuente referirse a una función genérica sin tener en mente una fórmula concreta. Para indicar que y es una función de x se escribe

$$y = f(x)$$

que se lee como «y es igual a f de x». En esta notación, debida al matemático del siglo XIX Leonhard Euler, la función se representa mediante el símbolo f. La variable x, denominada **variable independiente**, representa un valor de entrada del dominio de f. La variable y, denominada **variable dependiente**, representa el correspondiente valor de salida $f(x)$ en el intervalo de f.

DEFINICIÓN 1

Una **función** f de un conjunto D en un conjunto S es una regla que asigna un *único* elemento $f(x)$ de S a cada uno de los elementos x de D.

En esta definición $D = \mathcal{D}(f)$ (que se lee «D de f») es el dominio de la función f. El rango de f, $\mathcal{R}(f)$, es el subconjunto de S formado por todos los *valores* $f(x)$ de la función. Una función puede verse como una especie de máquina (*véase* la Figura P.35) que produce un valor de salida $f(x)$ en su rango siempre que se introduce un valor x de su dominio.

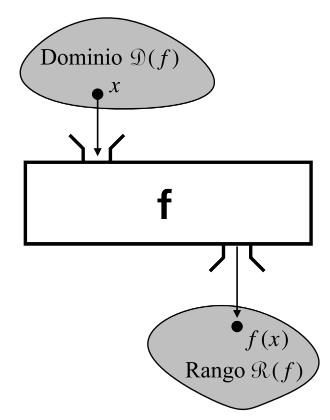


Figura P.35 La función como una máquina.

Hay varias formas de representar simbólicamente una función. Por ejemplo, la función cuadrado de un número, que transforma un número real x en su cuadrado x^2, se puede indicar:

(a) Mediante una fórmula como $y = x^2$, que utiliza una variable dependiente y para indicar el valor de la función.

(b) Mediante una fórmula como $f(x) = x^2$, que define un símbolo de función f para indicar la función.

(c) Mediante una regla de transformación como $x \to x^2$ (léase «x se transforma en x^2»).

En este libro utilizaremos generalmente las opciones (a) o (b) a la hora de definir funciones. En rigor, para denotar una función deberíamos utilizar f en vez de $f(x)$, ya que esto último indica el valor de la función en el punto x. Sin embargo, como se trata de un uso común, a menudo indicaremos la función como $f(x)$ para nombrar explícitamente la variable de la que depende f. A veces resulta conveniente utilizar la misma letra para indicar la variable dependiente y el símbolo de la función. Por ejemplo, la función del área del círculo se puede escribir como $A = f(r) = \pi r^2$ o como $A = A(r) = \pi r^2$. En el último caso A se utiliza para indicar la variable dependiente y el nombre de la función.

Ejemplo 1 El volumen de una esfera de radio r se calcula mediante la función

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

para $r \geqslant 0$. Por tanto, el volumen de una esfera de radio 3 metros es

$$V(3) = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi \text{ m}^3$$

Nótese que la variable r se sustituye por el valor concreto 3 en la fórmula que define la función, para obtener el valor de dicha función en $r = 3$.

■

Ejemplo 2 Una función F está definida para todos los números reales t como

$$F(t) = 2t + 3$$

Calcule los valores de salida de F que corresponden a los valores de entrada de 0, 2, $x + 2$ y $F(2)$.

Solución En cada caso se sustituye t en la definición de F por el valor de entrada:

$$F(0) = 2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$$
$$F(2) = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$$
$$F(x + 2) = 2(x + 2) + 3 = 2x + 7$$
$$F(F(2)) = F(7) = 2(7) + 3 = 17$$

Convenio para el dominio

Una función no queda apropiadamente definida hasta que se especifica su dominio. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ definida para todos los números reales $x \geqslant 0$ es diferente de la función $g(x) = x^2$ definida para todos x reales porque sus dominios son diferentes, incluso aunque tomen los mismos valores en todos los puntos donde están definidas. En los Capítulos 1-9 vamos a tratar con funciones reales (funciones cuyos valores de entrada y de salida son números reales). Cuando el dominio de una función no se indique explícitamente, asumiremos que el dominio es el mayor conjunto de números reales a los que la función asigne valores reales. Por tanto, si se habla de la función x^2 sin especificar un dominio, asumiremos que se trata de la función $g(x)$ anterior.

Convenio para el dominio

Cuando una función f se defina sin especificar su dominio, se supondrá que su dominio está formado por todos los números reales x para los que el valor de la función $f(x)$ es un número real.

En la práctica, generalmente es sencillo determinar el dominio de una función $f(x)$ dada por una fórmula explícita. Sólo hay que excluir aquellos valores de x que producirían una división por 0 o tomar una raíz par de un número negativo.

Ejemplo 3 **La función raíz cuadrada.** El dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es el intervalo $[0, \infty)$, ya que los números negativos no tienen raíz cuadrada. Tenemos, por ejemplo, que $f(0) = 0$, $f(4) = 2$ y $f(10) \approx 3.16228$. Nótese que, aunque existen dos números cuyo cuadrado es 4, concretamente -2 y 2, sólo *uno* de esos números, 2, es la raíz cuadrada de 4 (recuérdese que una función asigna un *único* valor a cada elemento de su dominio; no se puede asignar dos valores diferentes a una misma entrada). La **función raíz cuadrada** $\sqrt{x}$ siempre indica la raíz cuadrada *no negativa* de x. Las dos soluciones de la ecuación $x^2 = 4$ son $x = \sqrt{4} = 2$ y $x = -\sqrt{4} = -2$.

Ejemplo 4 El dominio de la función $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ está formado por todos los números reales, excepto $x = -2$ y $x = 2$. Expresado en términos de intervalos:

$$\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$$

La mayoría de las funciones que encontraremos tendrán dominios que son intervalos o uniones de intervalos.

Ejemplo 5 El dominio de la función $S(t) = \sqrt{1 - t^2}$ está formado por todos los números reales t tales que $1 - t^2 \geqslant 0$. Por tanto debe cumplirse que $t^2 \leqslant 1$ o que $-1 \leqslant t \leqslant 1$. El dominio es el intervalo cerrado $[-1, 1]$.

Gráficas de funciones

Dice un viejo refrán que «una imagen vale más que mil palabras». Esto es aún más cierto en el campo de las matemáticas: lo mejor para describir el comportamiento de una función es dibujar una gráfica de ésta.

La **gráfica de una función** f es simplemente la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Está formada por todos los puntos del plano cartesiano cuyas coordenadas (x, y) son parejas entrada-salida de la función f. Por tanto, un punto (x, y) pertenece a la gráfica de la función f si x pertenece al dominio de f y se cumple que $y = f(x)$.

Para dibujar la gráfica de una función, algunas veces es necesario confeccionar una tabla de pares de coordenadas $(x, f(x))$ para varios valores de x en el dominio de f, dibujar esos puntos y después unirlos con una «curva suave».

Ejemplo 6 Dibuje la función $f(x) = x^2$.

Solución Primero se realiza una tabla de valores (x, y) que cumplen la ecuación $y = x^2$ (*véase* la Tabla 1). Seguidamente se dibujan los puntos y se unen mediante una curva suave (*véase* la Figura P.36(a)).

Tabla 1.

x	$y = f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

¿Cómo sabemos que la gráfica debe ser suave y que no hace cosas extrañas entre los puntos que hemos calculado, como se muestra, por ejemplo, en la Figura P.36(b)? Por supuesto, siempre podríamos dibujar más puntos, más cercanos entre sí, pero ¿cómo sabemos que la gráfica se comporta de nuevo entre esos puntos como hemos dibujado? En el Capítulo 4, el cálculo nos proporcionará útiles herramientas para responder a esas preguntas.

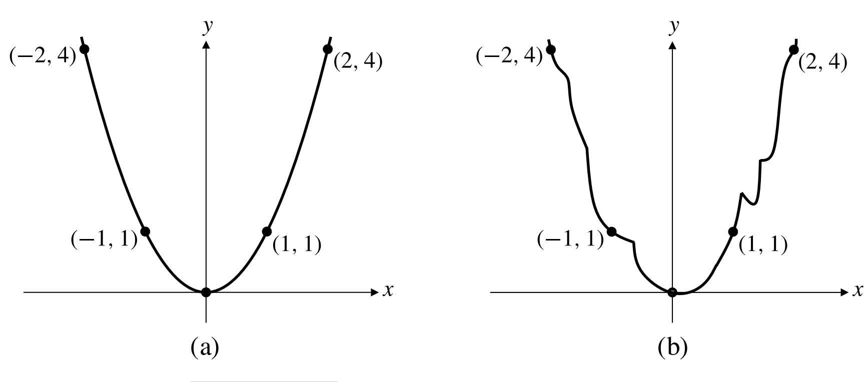


Figura P.36 (a) Gráfica correcta de $f(x) = x^2$.
(b) Gráfica incorrecta de $f(x) = x^2$.

Algunas funciones aparecen a menudo en las aplicaciones, por lo que es conveniente familiarizarse con sus gráficas. Algunas de ellas se muestran en las Figuras P.37-P.46. Es conveniente estudiarlas durante un rato, y merece la pena acordarse de ellas. Nótese, en particular, la gráfica de la función **valor absoluto**, $f(x) = |x|$, que se muestra en la Figura P.46. Está formada por dos semirrectas: $y = -x$ para $x < 0$ e $y = x$ para $x \geqslant 0$.

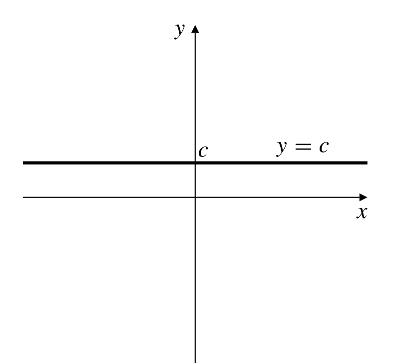


Figura P.37 Gráfica de la función constante $f(x) = c$.

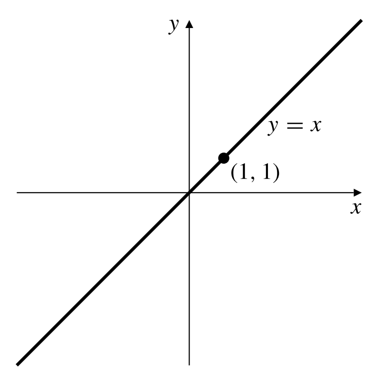


Figura P.38 Gráfica de la función $f(x) = x$.

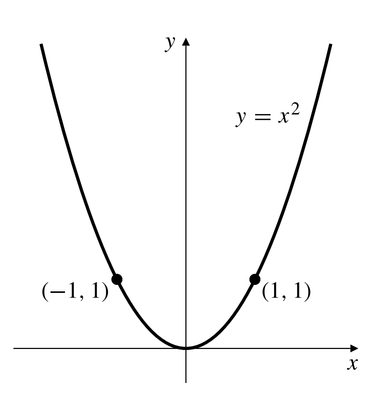


Figura P.39 Gráfica de la función $f(x) = x^2$.

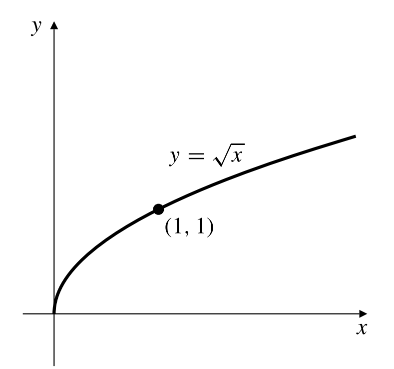


Figura P.40 Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

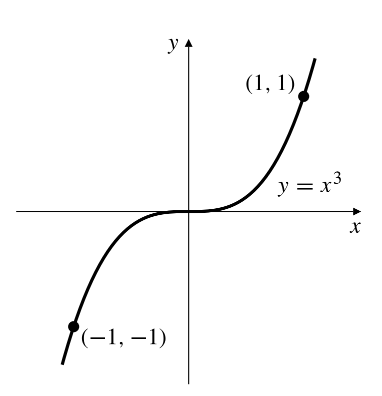


Figura P.41 Gráfica de la función $f(x) = x^3$.

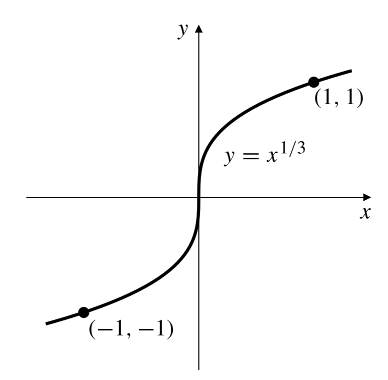


Figura P.42 Gráfica de la función $f(x) = x^{1/3}$.

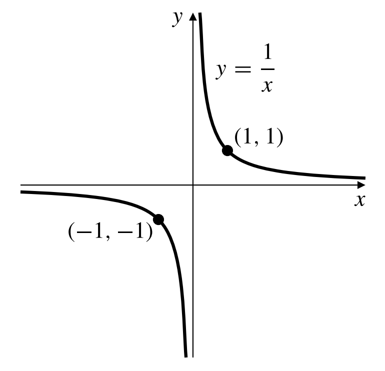


Figura P.43 Gráfica de la función $f(x) = 1/x$.

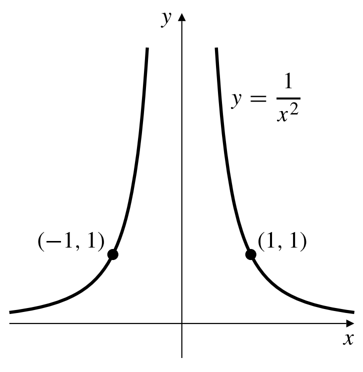


Figura P.44 Gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$.

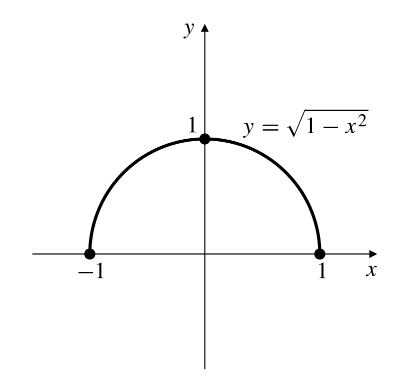


Figura P.45 Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Si se recuerdan los efectos de los desplazamientos horizontales y verticales en las ecuaciones que representan gráficas (*véase* la Sección P.3), se pueden dibujar fácilmente gráficas que sean versiones desplazadas de las que se muestran en las Figuras P.37-P.46.

Ejemplo 7 Dibuje la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x - 4}$.

Solución Se trata de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ de la Figura P.40, desplazada 4 unidades a la derecha (debido a que x se sustituye por $x - 4$) y una unidad hacia arriba. *Véase* la Figura P.47. ■

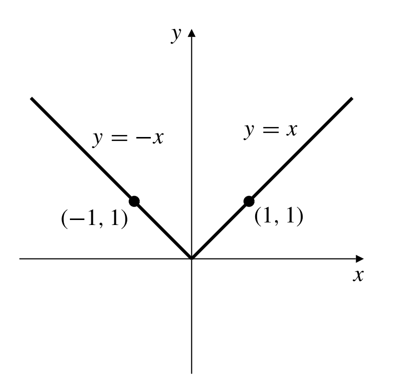


Figura P.46 Gráfica de la función $f(x) = |x|$.

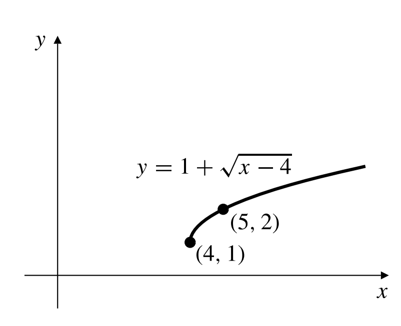


Figura P.47 Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ desplazada 4 unidades a la derecha y una unidad hacia arriba.

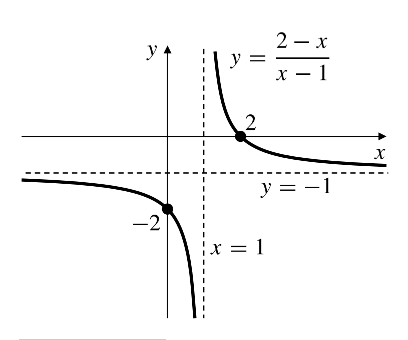


Figura P.48 Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2 - x}{x - 1}$.

Ejemplo 8 Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{2 - x}{x - 1}$.

Solución No es inmediato observar que la gráfica es una versión desplazada de una gráfica conocida. Para ver que esto es así, se puede realizar la división de $x - 1$ por $2 - x$, obteniéndose un cociente de -1 y un resto de 1:

$$\frac{2 - x}{x - 1} = \frac{-x + 1 + 1}{x - 1} = \frac{-(x - 1) + 1}{x - 1} = -1 + \frac{1}{x - 1}$$

Por tanto, la gráfica es la de la función $1/x$ de la Figura P.43 desplazada una unidad a la derecha y una unidad hacia abajo. *Véase* la Figura P.48.

■

No toda curva que podamos dibujar corresponde a la gráfica de una función. Una función f sólo puede tomar un único valor $f(x)$ para cada valor de x de su dominio, por lo que ninguna *recta vertical* puede cortar a la gráfica de una función en más de un punto. Si a pertenece al dominio de la función f, entonces la recta vertical $x = a$ cortará a la gráfica de la función en un único punto $(a, f(a))$. La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ de la Figura P.49 no puede ser la gráfica de una función ya que existen rectas verticales que la cortan dos veces. Sin embargo, es la unión de las gráficas de dos funciones. Concretamente:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

que son, respectivamente, las mitades superior e inferior (semicircunferencias) de la circunferencia dada.

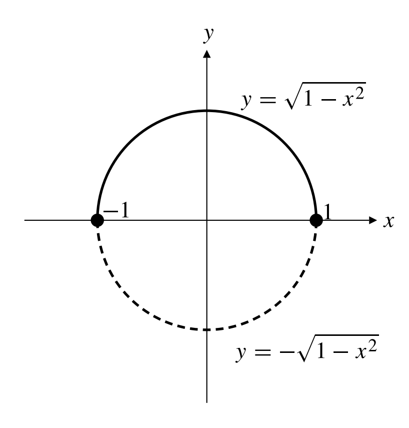


Figura P.49 La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ no es la gráfica de ninguna función.

Funciones pares e impares. Simetría y reflexiones

Sucede a menudo que la gráfica de una función presenta ciertas clases de simetría. Los tipos de simetría más simples relacionan los valores de una función en x y en $-x$.

DEFINICIÓN 2 **Funciones pares e impares**

Supongamos que $-x$ pertenece al dominio de una función cuando x pertenece a dicho dominio. Se dice que f es una **función par** si

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

Se dice que f es una **función impar** si

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

Los nombres de *par* e *impar* proceden del hecho de que las potencias pares como $x^0 = 1$, x^2, x^4, ..., x^{-2}, x^{-4}, ... son funciones pares, y las potencias impares como $x^1 = x$, x^3, ..., x^{-1}, x^{-3}, ... son funciones impares. Obsérvese, por ejemplo, que $(-x)^4 = x^4$, y que $(-x)^{-3} = -x^{-3}$.

Como $(-x^2) = x^2$, cualquier función que dependa sólo de x^2 es par. Por ejemplo, la función valor absoluto $y = |x| = \sqrt{x^2}$ es una función par.

La gráfica de una función par es *simétrica respecto del eje y*. Una recta horizontal dibujada desde un punto de la gráfica hasta el eje y, si se prolonga la misma distancia hacia el otro lado, llegará a otro punto de la gráfica (*véase* la Figura P.50(a)).

La gráfica de una función impar es *simétrica respecto del origen*. Una línea recta dibujada desde un punto de la gráfica hasta el origen, si se prolonga la misma distancia hacia el otro lado del origen llegará a otro punto de la gráfica. Si una función impar f está definida en $x = 0$, entonces su valor en ese punto debe ser cero: $f(0) = 0$ (*véase* la Figura (P.50(b)).

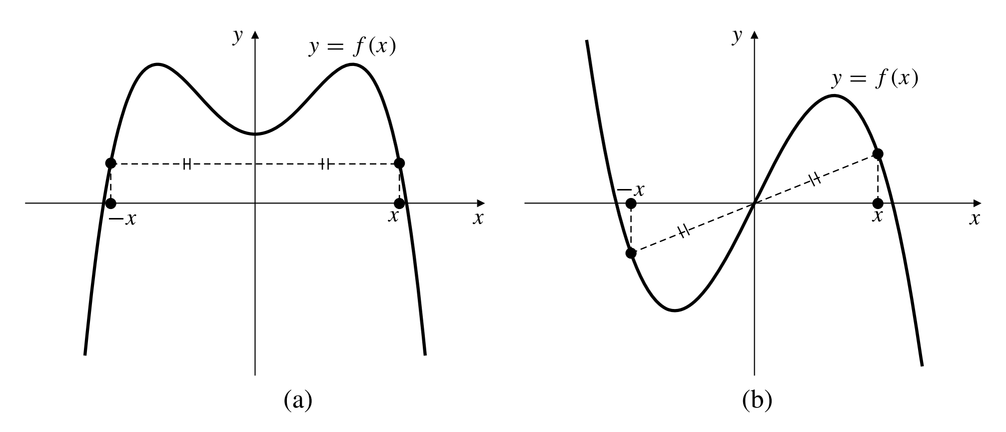


Figura P.50 (a) La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje x.
(b) La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Si $f(x)$ es par (o impar) también lo es cualquier múltiplo constante de $f(x)$, como $2f(x)$ o $-5f(x)$. Las sumas (o diferencias) de funciones pares son funciones pares, y las sumas (o diferencias) de funciones impares son impares. Por ejemplo, $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 1$ es par, ya que es la suma de tres funciones pares: $3x^4$, $-5x^2$ y $-1 = -x^0$. Análogamente, $4x^3 - (2/x)$ es una función impar. La función $g(x) = x^2 - 2x$ es la suma de una función par y una función impar, y por tanto no es ni par ni impar.

También son posibles otras clases de simetría. Por ejemplo, la función $g(x) = x^2 - 2x$ se puede expresar de la forma $g(x) = (x - 1)^2 - 1$. Esto demuestra que los valores de $g(1 \pm u)$ son

iguales, y por tanto la gráfica (*véase* la Figura P.51(a)) es simétrica respecto a la recta vertical $x = 1$. Se trata de la parábola $y = x^2$ desplazada 1 unidad a la derecha y 1 unidad hacia abajo. Análogamente, la gráfica de $h(x) = x^3 + 1$ es simétrica respecto al punto (0, 1) (*véase* la Figura P.51(b)).

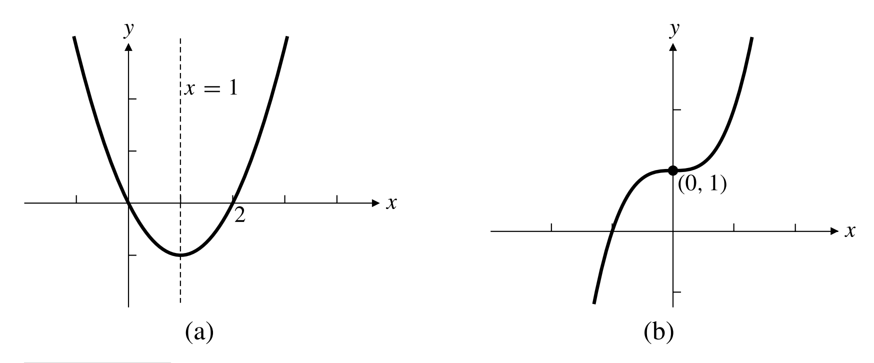


Figura P.51 (a) La gráfica de $g(x) = x^2 - 2x$ es simétrica respecto a $x = 1$.
(b) La gráfica de $y = h(x) = x^3 + 1$ es simétrica respecto al punto (0, 1).

Reflexiones en rectas

La imagen de un objeto reflejado en un espejo plano parece estar a la misma distancia del plano del espejo que el objeto que está frente al mismo. Por tanto, un espejo corta en ángulo recto, y divide en dos partes iguales el segmento de recta que va desde cada punto del objeto al correspondiente punto en la imagen. Dada una recta L y un punto P que no pertenezca a la recta L, se denomina al punto Q **reflexión** o **imagen especular** de P en la recta L si dicha recta L corta al segmento PQ formando un ángulo recto y lo divide en dos partes iguales. La reflexión en L de cualquier gráfica G es la gráfica formada por las reflexiones en L de todos los puntos de la gráfica G.

Algunas reflexiones de gráficas se pueden expresar fácilmente respecto a las ecuaciones de dichas gráficas:

Reflexiones en rectas especiales

1. Al cambiar x por $-x$ en una ecuación en x e y se refleja la gráfica de la ecuación en el eje y.
2. Al cambiar y por $-y$ en una ecuación en x e y se refleja la gráfica de la ecuación en el eje x.
3. Al cambiar x por $a - x$ en una ecuación en x e y se refleja la gráfica de la ecuación en la recta de ecuación $x = a/2$.
4. Al cambiar y por $b - y$ en una ecuación en x e y se refleja la gráfica de la ecuación en la recta de ecuación $y = b/2$.
5. Al intercambiar x e y en una ecuación en x e y se refleja la gráfica de la ecuación en la recta de ecuación $y = x$.

Ejemplo 9 Describa y dibuje la gráfica de $y = \sqrt{2 - x} - 3$.

Solución La gráfica de $y = \sqrt{2 - x}$ es la reflexión de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (Figura P.40) en la recta vertical $x = 1$. Por tanto, la gráfica de $y = \sqrt{2 - x} - 3$ es el resultado de desplazar hacia abajo 3 unidades dicha reflexión (*véase* la Figura P.52(a)).

Figura P.52 (a) Construcción de la gráfica de $y = \sqrt{2 - x} - 3$.
(b) Transformación de $y = |x|$ para producir la gráfica en gris.

Ejemplo 10 Exprese la ecuación de la gráfica en gris de la Figura P.52(b) en función de la función valor absoluto $|x|$.

Solución La gráfica en gris se puede obtener reflejando en primer lugar la gráfica de $|x|$ (Figura P.46) en el eje x y desplazando después la reflexión 3 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia arriba. La reflexión de $y = |x|$ en el eje x tiene como ecuación $-y = |x|$, o $y = -|x|$. Al realizar el desplazamiento de 3 unidades a la izquierda se obtiene $y = -|x + 3|$. Finalmente, al desplazar 2 unidades hacia arriba se obtiene $y = 2 - |x + 3|$, que es la ecuación deseada.

Definición y dibujo de funciones con Maple

Muchos cálculos y gráficas que aparecen al estudiar cálculo se pueden realizar utilizando un sistema de álgebra por ordenador, como Maple o Mathematica. De vez en cuando en el libro se incluirán ejemplos que ilustran cómo emplear Maple para realizar esas tareas. Los ejemplos están escritos en Maple 6, pero la mayoría de ellos funcionarán bien con versiones anteriores de Maple.

Empezaremos con un ejemplo que muestra cómo definir una función en Maple y, seguidamente, cómo dibujar su gráfica. Se muestran en courier las entradas que escribimos en el Maple y en tipo normal las respuestas de Maple. Definamos a continuación la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 12x + 1$.

```
> f := x -> x^3-2*x^2-12*x+1; <enter>
```

$$f := x \to x^3 - 2x^2 - 12x + 1$$

Nótese el uso de `:=` para indicar que se está definiendo el símbolo que hay a la izquierda y el uso de `->` para indicar la regla de construcción de $f(x)$ a partir de x. Nótese también que Maple utiliza el asterisco `*` para indicar la multiplicación y el acento circunflejo `^` para indicar la exponenciación. Una instrucción de Maple debe terminar con punto y coma (`;`) antes de pulsar la tecla Enter. De ahora en adelante no mostraremos `<enter>` en las entradas.

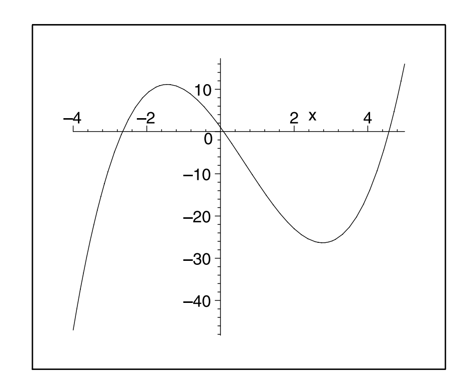
Ahora podemos utilizar f como una función ordinaria:

```
> f(t)+f(1);
```

$$t^3 - 2t^2 - 12t - 11$$

Dibujemos a continuación la gráfica de f en el intervalo $[-4, 5]$.

```
> plot(f(x), x=-4..5);
```



También podríamos haber especificado la expresión `x^3-2*x^2-12*x+1` en la orden plot, en vez de definir primero la función $f(x)$. Nótese el uso de los dos puntos `..` para separar los extremos izquierdo y derecho del intervalo de representación. La orden plot admite otras opciones, todas ellas separadas por comas. Se puede especificar también el intervalo de valores de y, además del de x (que es obligatorio), y se puede usar la opción `scaling=CONSTRAINED` si se desea igualar las distancias en los dos ejes. Aplicar esto no sería una buena idea en el caso de nuestra función (¿por qué?). El comando modificado quedaría así (se omite la gráfica resultado).

```
> plot (f(x), x=-4..5, y=-40..30, scaling=CONSTRAINED);
```

Ejercicios P.4

En los Ejercicios 1-6, obtenga el dominio y el rango de cada una de las funciones.

1. $f(x) = 1 + x^2$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

3. $G(x) = \sqrt{8 - 2x}$

4. $F(x) = 1/(x - 1)$

5. $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2-t}}$

6. $g(x) = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x - 2}}$

7. ¿Cuáles de las gráficas de la Figura P.53 corresponden a gráficas de funciones $y = f(x)$? ¿Por qué?

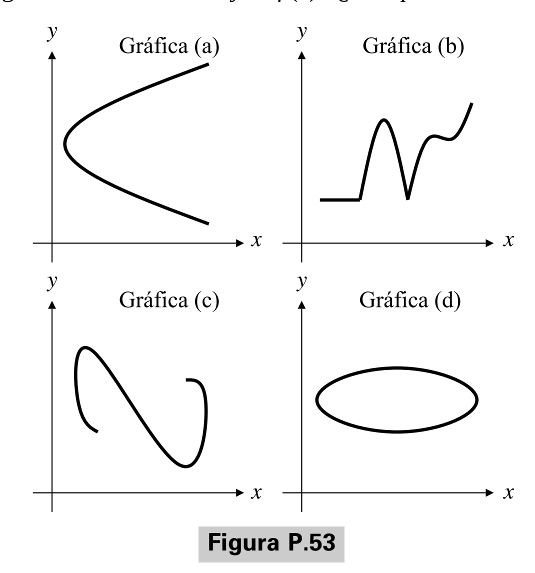


Figura P.53

8. La Figura P.54 muestra las gráficas de las funciones: (i) $x - x^4$, (ii) $x^3 - x^4$, (iii) $x(1 - x)^2$, (iv) $x^2 - x^3$. ¿Cuál es la gráfica correspondiente a cada función?

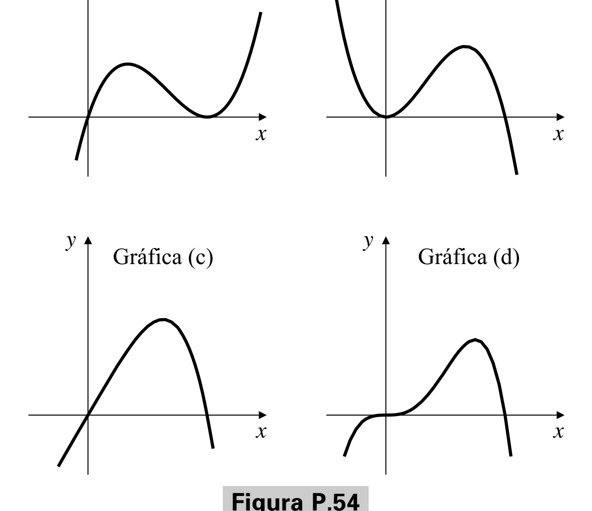


Figura P.54

En los Ejercicios 9 y 10, dibuje la gráfica de la función f construyendo primero la tabla de valores de $f(x)$ en $x = 0$, $x = \pm 1/2$, $x = \pm 1$, $x = \pm 3/2$ y $x = \pm 2$.

9. $f(x) = x^4$

10. $f(x) = x^{2/3}$

En los Ejercicios 11-22, indique qué simetría (si es que existe alguna) tiene la gráfica de $f(x)$. En particular ¿es f par o impar?

11. $f(x) = x^2 + 1$

12. $f(x) = x^3 + x$

13. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

14. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

16. $f(x) = \dfrac{1}{x + 4}$

17. $f(x) = x^2 - 6x$

18. $f(x) = x^3 - 2$

19. $f(x) = |x^3|$

20. $f(x) = |x + 1|$

21. $f(x) = \sqrt{2x}$

22. $f(x) = \sqrt{(x - 1)^2}$

Dibuje las gráficas de las funciones de los Ejercicios 23-38.

23. $f(x) = -x^2$

24. $f(x) = 1 - x^2$

25. $f(x) = (x - 1)^2$

26. $f(x) = (x - 1)^2 + 1$

27. $f(x) = 1 - x^3$

28. $f(x) = (x + 2)^3$

29. $f(x) = \sqrt{x} + 1$

30. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

31. $f(x) = -|x|$

32. $f(x) = |x| - 1$

33. $f(x) = |x - 2|$

34. $f(x) = 1 + |x - 2|$

35. $f(x) = \dfrac{2}{x + 2}$

36. $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

37. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

38. $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$

En los Ejercicios 39-46, f indica una función con dominio [0, 2] y rango [0, 1] cuya gráfica se muestra en la Figura P.55. Dibuje la gráfica de las funciones indicadas y especifique sus dominios y sus rangos.

39. $f(x) + 2$

40. $f(x) - 1$

41. $f(x + 2)$

42. $f(x - 1)$

43. $-f(x)$

44. $f(-x)$

45. $f(4 - x)$

46. $1 - f(1 - x)$

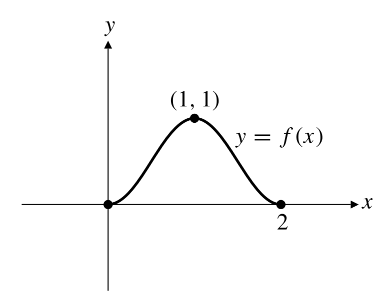


Figura P.55

En muchas ocasiones es muy difícil determinar de forma exacta el rango de una función. En los ejercicios 47-48, utilice una calculadora o un ordenador para dibujar la función f y, ampliando la gráfica, determine el rango de f con una exactitud de dos cifras decimales.

47. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x + 3}$

48. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + x}$

En los Ejercicios 49-52, dibuje mediante un ordenador o calculadora las gráficas de las funciones dadas. Examine las gráficas (ampliándolas o reduciéndolas si es necesario) y busque las simetrías. ¿Respecto a qué rectas y/o puntos son simétricas las gráficas? Intente verificar sus conclusiones algebraicamente.

49. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 1$

50. $f(x) = \dfrac{3 - 2x + x^2}{2 - 2x + x^2}$

51. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}$

52. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{x^2 + 4x + 5}$

53. ¿Qué función $f(x)$, definida en la recta real $\mathbb{R}$, es a la vez par e impar?

P.5 Combinación de funciones para crear otras nuevas

Las funciones se pueden combinar de diversas formas para crear otras nuevas. En esta sección examinaremos las combinaciones que se obtienen

(a) Mediante operaciones algebraicas: sumando, restando, multiplicando y dividiendo funciones.

(b) Mediante composición: es decir, construyendo funciones de funciones.

(c) Agrupando funciones definidas en dominios diferentes.

Sumas, diferencias, productos, cocientes y múltiplos

Como los números, las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto donde el denominador valga cero), para producir nuevas funciones.

DEFINICIÓN 3

Sean f y g dos funciones. Para todo punto x perteneciente a los dominios de f y g, las funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g se definen mediante las fórmulas

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \text{donde } g(x) \neq 0$$

Un caso especial en la regla para multiplicar funciones es el de la multiplicación de funciones por constantes. Si c es un número real, entonces la función cf se define así, para todos los puntos x en el dominio de f:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

Ejemplo 1 La Figura P.56(a) muestra la gráfica de $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 1$ y de su suma $(f+g)(x) = x^2 + x - 1$. Obsérvese que la altura de la gráfica de $f+g$ en cualquier punto es la suma de las alturas de las gráficas de f y g en dicho punto.

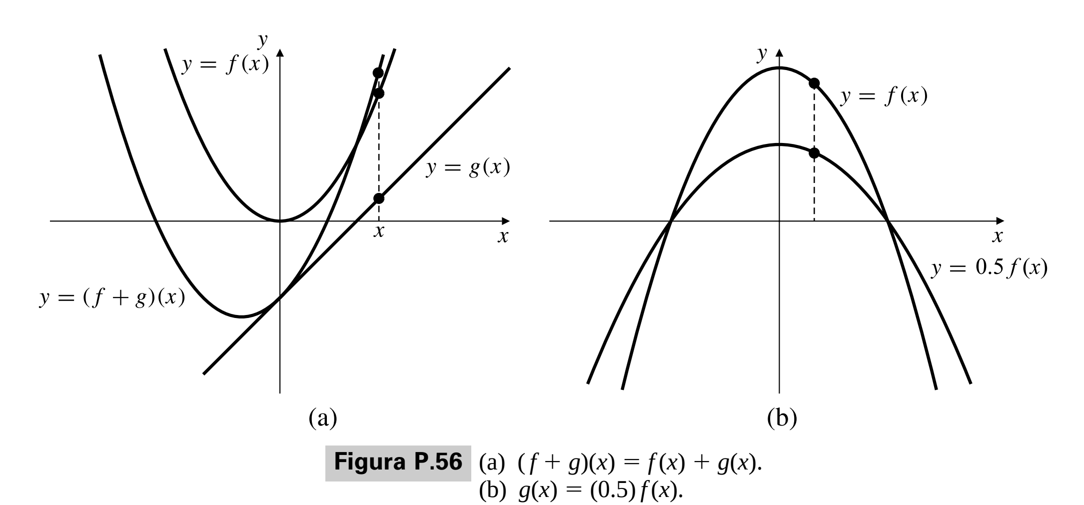


Figura P.56 (a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
(b) $g(x) = (0.5)f(x)$.

Ejemplo 2 La Figura P.56(b) muestra la gráfica de $f(x) = 2 - x^2$ y de su múltiplo $g(x) = (0.5)f(x)$. Nótese que la altura de la gráfica de g en cada punto es la mitad de la altura de la gráfica de f.

Ejemplo 3 Las funciones f y g se definen por las fórmulas

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{1-x}$$

Obtenga las fórmulas para calcular los valores de $3f$, $f+g$, $f-g$, fg, f/g y g/f en x, y especifique los dominios de cada una de esas funciones.

Solución La información se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2. Combinaciones de f y g y sus dominios

Función	Fórmula	Dominio
f	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
g	$g(x) = \sqrt{1 - x}$	$(-\infty, 1]$
$3f$	$(3f)(x) = 3\sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$	$[0, 1]$
$f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1 - x}$	$[0, 1]$
fg	$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1 - x)}$	$[0, 1]$
f/g	$\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\dfrac{x}{1 - x}}$	$[0, 1)$
g/f	$\dfrac{g}{f}(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\dfrac{1 - x}{x}}$	$(0, 1]$

Nótese que la mayoría de las combinaciones de f y g tienen como dominio

$$[0, \infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1]$$

es decir, la intersección de los dominios de f y g. Sin embargo, los dominios de los cocientes f/g y g/f deben restringirse eliminando los puntos donde los denominadores valgan cero. ■

Composición de funciones

Existe otro método, denominado **composición**, con el que se pueden combinar dos funciones para formar una nueva función.

DEFINICIÓN 4 **Composición de funciones**

Sean f y g dos funciones. La función **compuesta** $f \circ g$ se define

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ está formado por los números x del dominio de g para los que los valores $g(x)$ pertenecen al dominio de f. En particular, si el rango de g está incluido en el dominio de f, entonces el dominio de $f \circ g$ coincide con el dominio de g.

Como se muestra en la Figura P.57, formar $f \circ g$ es equivalente a encadenar las «máquinas de función» f y g en una «cadena de montaje» de forma que la salida de g sea la entrada de f.

Para calcular $f \circ g(x) = f(g(x))$ primero se calcula $g(x)$ y después se aplica la función f al resultado. La función g se denomina función *interna* y la función f, función *externa* de la composición. Por supuesto, se puede calcular también la composición $g \circ f(x) = g(f(x))$, donde f es entonces la función interna, que se calcula primero, y g la función externa, que se calcula después. Las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son en general bastante diferentes, como muestra el siguiente ejemplo.

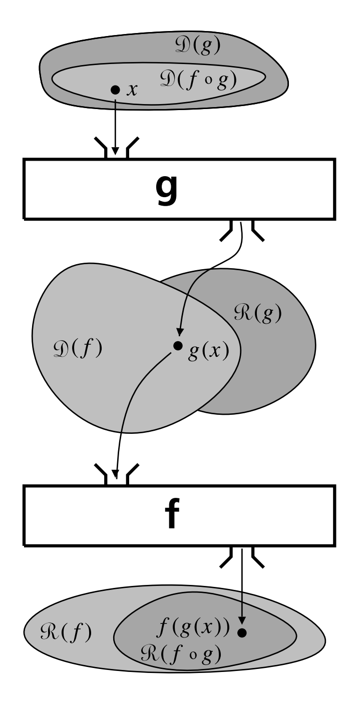


Figura P.57 $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Ejemplo 4 Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$, calcule las cuatro funciones compuestas $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$, $f \circ f(x)$ y $g \circ g(x)$, y especifique los dominios de cada una de ellas.

Solución De nuevo, los resultados se recogen en una tabla.

Tabla 3. Composiciones de f y g y sus dominios

Función	Fórmula	Dominio
f	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
g	$g(x) = x + 1$	$\mathbb{R}$
$f \circ g$	$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
$g \circ f$	$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
$f \circ f$	$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
$g \circ g$	$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2$	$\mathbb{R}$

Para ver, por ejemplo, por qué el dominio de $f \circ g$ es $[-1, \infty)$, obsérvese que $g(x) = x + 1$ está definida para todos los números reales x, pero pertenece al dominio de f sólo si $x + 1 \geqslant 0$, es decir, si $x \geqslant -1$. ■

Ejemplo 5 Dada $G(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, calcule $G \circ G(x)$ y especifique su dominio.

Solución Calculamos

$$G \circ G(x) = G(G(x)) = G\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \dfrac{1-x}{1+x}}{1 + \dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{1 + x - 1 + x}{1 + x + 1 - x} = x$$

Dado que la función resultante, x, está definida para todos los reales x, podemos estar tentados de pensar que el dominio de $G \circ G$ está formado por todos los reales. ¡Esto es incorrecto! Para pertenecer al dominio de $G \circ G$, x debe satisfacer dos condiciones:

(i) x debe pertenecer al dominio de G.

(ii) $G(x)$ debe pertenecer al dominio de G.

El domino de G está formado por todos los números reales *excepto* $x = -1$. Si se excluye el punto $x = -1$ del dominio de $G \circ G$, se cumplirá la condición (i). Obsérvese ahora que la ecuación $G(x) = -1$ no tiene solución x, ya que es equivalente a $1 - x = -(1 + x)$, o $1 = -1$. Por lo tanto, todos los números $G(x)$ pertenecen al dominio de G, y la condición (ii) se satisface sin ninguna restricción sobre la x. El dominio de $G \circ G$ es $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, es decir, todos los números reales excepto -1.

Funciones definidas por tramos

Algunas veces es necesario definir una función utilizando diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. Un ejemplo es la función valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Presentaremos otros ejemplos a continuación. Nótese el uso de puntos rellenos o vacíos en las gráficas para indicar, respectivamente, si los extremos pertenecen o no pertenecen a la parte correspondiente de la gráfica.

Ejemplo 6 **La función de Heaviside.** La función de Heaviside (o función escalón unidad, *véase* la Figura P.58) se define como

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La función $H(t)$ se puede utilizar, por ejemplo, para modelar el voltaje aplicado a un circuito eléctrico por una batería de un voltio si el interruptor del circuito se cierra en el instante $t = 0$.

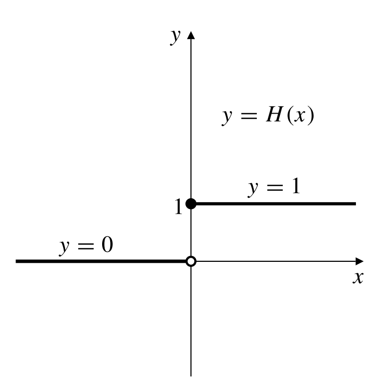


Figura P.58 La función de Heaviside.

Ejemplo 7 **La función signo.** La función signo (*véase* la Figura P.59) se define como

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \text{indefinida} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

El valor de sgn(x) indica si x es positivo o negativo. Como 0 no es positivo ni negativo, sgn(0) no está definido. La función signo es una función impar.

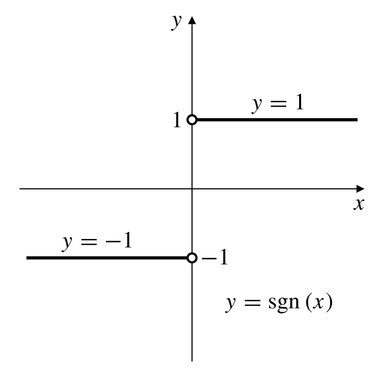


Figura P.59 La función signo.

Ejemplo 8 La función

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

está definida en toda la recta real, pero sus valores están definidos por fórmulas diferentes en función de la posición de x. Su gráfica se muestra en la Figura P.60(a).

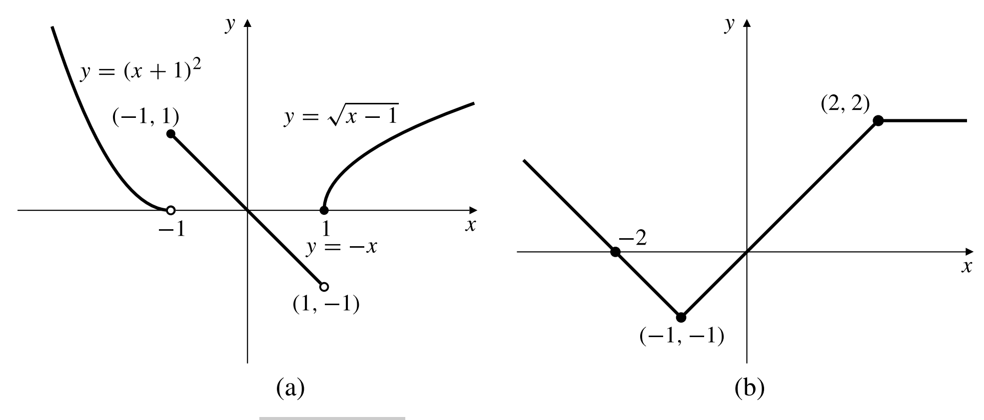


Figura P.60 Funciones definidas por tramos.

Ejemplo 9 Obtenga la fórmula de la función que se muestra en la Figura P.60(b).

Solución La gráfica está formada por tres rectas. Para $x < -1$, la recta tiene pendiente -1 y ordenada en el origen -2. Por tanto, su ecuación es $y = -(x+2)$. La sección intermedia es la recta $y = x$, para $-1 \leqslant x \leqslant 2$. La sección de la derecha es la recta $y = 2$ para $x > 2$. Combinando estas fórmulas, podemos escribir

$$g(x) = \begin{cases} -(x+2) & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

A diferencia del ejemplo anterior, aquí no importa cuál de las posibles fórmulas se utiliza para definir $g(-1)$, ya que ambas dan el mismo valor. Lo mismo es aplicable a $g(2)$.

Las dos funciones siguientes se pueden definir utilizando fórmulas diferentes en cada intervalo entre enteros consecutivos, pero las definiremos de una forma más sencilla.

Ejemplo 10 **La función máximo entero menor.** La función cuyo valor en cualquier número x es el *máximo entero menor o igual que* x se denomina **función máximo entero menor** o **función suelo entero**. Se representa por medio de $\lfloor x \rfloor$, o también, en algunos libros, $[x]$ o $[[x]]$. La gráfica de $y = \lfloor x \rfloor$ se muestra en la Figura P.61(a). Obsérvese que

$$\lfloor 2.4 \rfloor = 2, \quad \lfloor 1.9 \rfloor = 1, \quad \lfloor 0 \rfloor = 0, \quad \lfloor -1.2 \rfloor = -2,$$
$$\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0.2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -0.3 \rfloor = -1, \quad \lfloor -2 \rfloor = -2$$

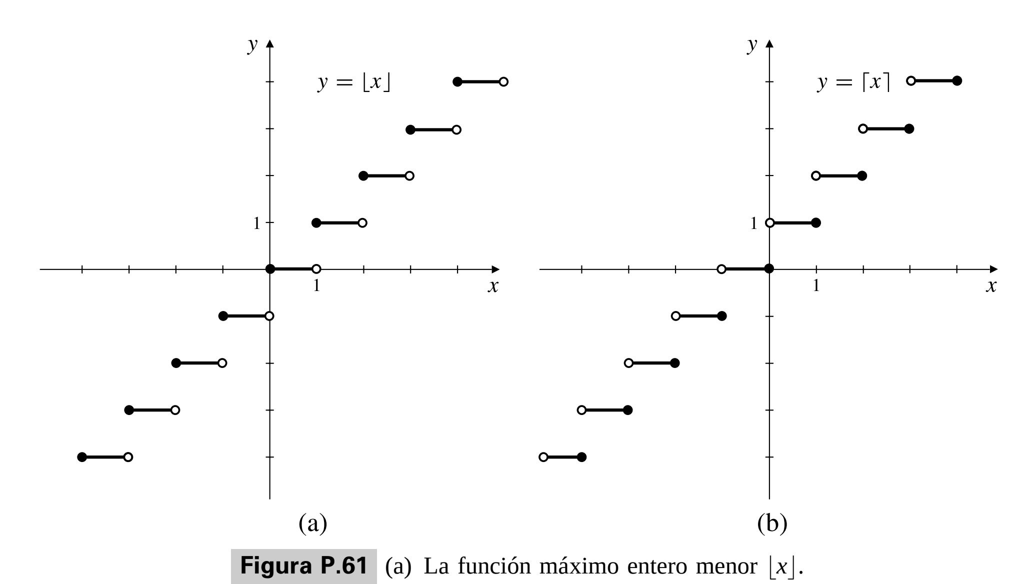


Figura P.61 (a) La función máximo entero menor $\lfloor x \rfloor$.
(b) La función mínimo entero mayor $\lceil x \rceil$.

Ejemplo 11 **La función mínimo entero mayor.** La función cuyo valor en cualquier número x es el *mínimo entero mayor o igual que* x se denomina **función mínimo entero mayor** o **función techo entero**. Se denota como $\lceil x \rceil$. La gráfica de $y = \lceil x \rceil$ se muestra en la Figura P.61(b). Para valores positivos de x esta función podría representar, por ejemplo, el coste de aparcar x horas en un aparcamiento que cobrara 1 € por cada hora o fracción de hora.

Ejercicios P.5

En los Ejercicios 1 y 2, calcule los dominios de las funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g y g/f, y exprese las fórmulas de sus valores.

1. $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

2. $f(x) = \sqrt{1-x}, \quad g(x) = \sqrt{1+x}$

Dibuje las gráficas de las funciones de los Ejercicios 3-6 combinando las gráficas de las funciones más simples que las constituyen.

3. $x - x^2$ **4.** $x^3 - x$

5. $x + |x|$ **6.** $|x| + |x-2|$

7. Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 3$, calcule lo siguiente:

(a) $f \circ g(0)$ (b) $g(f(0))$
(c) $f(g(x))$ (d) $g \circ f(x)$
(e) $f \circ f(-5)$ (f) $g(g(2))$
(g) $f(f(x))$ (h) $g \circ g(x)$

En los Ejercicios 8-10, construya las funciones compuestas

(a) $f \circ f(x)$ (b) $f \circ g(x)$
(c) $g \circ f(x)$ (d) $g \circ g(x)$

8. $f(x) = 2/x, \qquad g(x) = x/(1-x)$

9. $f(x) = 1/(1-x), \qquad g(x) = \sqrt{x-1}$

10. $f(x) = (x+1)/(x-1), \qquad g(x) = \operatorname{sgn}(x)$

Calcule las casillas que faltan en la Tabla 4 (Ejercicios 11-16).

Tabla 4.

	$f(x)$	$g(x)$	$f\circ g(x)$
11.	x^2	$x+1$	
12.		$x+4$	x
13.	$\sqrt{x}$		$\lvert x\rvert$
14.		$x^{1/3}$	$2x+3$
15.	$(x+1)/x$		x
16.		$x-1$	$1/x^2$

17. Utilice una herramienta gráfica para examinar en orden las gráficas de las funciones

$$y = \sqrt{x}, \qquad y = 2 + \sqrt{x},$$
$$y = 2 + \sqrt{3+x}, \qquad y = 1/(2 + \sqrt{3+x})$$

Describa los efectos que producen en la gráfica los cambios realizados en la función en cada etapa.

18. Repita el ejercicio anterior con las funciones

$$y = 2x, \qquad y = 2x - 1, \qquad y = 1 - 2x,$$
$$y = \sqrt{1-2x}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} - 1$$

Los Ejercicios 19-24 se refieren a la función con dominio [0, 2] y rango [0, 1] cuya gráfica se muestra en la Figura P.62. Dibuje las gráficas de las funciones que se indican, y especifique sus dominios y rangos.

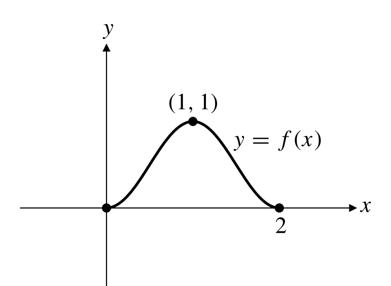


Figura P.62

19. $2f(x)$

20. $-(1/2)f(x)$

21. $f(2x)$

22. $f(x/3)$

23. $1 + f(-x/2)$

24. $2f((x-1)/2)$

En los Ejercicios 25-26, dibuje las gráficas de las funciones dadas.

25. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } \ 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

26. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } \ 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

27. Calcule todos los valores de las constantes reales A y B para los que la función $F(x) = Ax + B$ cumple

(a) $F\circ F(x) = F(x)$ para todo x.

(b) $F\circ F(x) = x$ para todo x.

Funciones máximo entero menor y mínimo entero mayor

28. ¿Para qué valores de x es $\lfloor x\rfloor = 0$? ¿Y $\lceil x\rceil = 0$?

29. ¿Qué números reales cumplen la ecuación $\lfloor x\rfloor = \lceil x\rceil$?

30. Verdadero o falso: ¿$\lceil -x\rceil = -\lfloor x\rfloor$ para todo número real x?

31. Dibuje la gráfica de $y = x - \lfloor x\rfloor$.

32. Dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x\rfloor & \text{si } \ x \geqslant 0 \\ \lceil x\rceil & \text{si } \ x < 0 \end{cases}$$

¿Por qué se llama esta función *parte entera de x*?

Funciones pares e impares

33. Suponga que f es una función par, g es una función impar y que tanto f como g están definidas en toda la recta real. Las siguientes funciones ¿son pares, impares o ninguna de las dos cosas?

$$f+g, \quad fg, \quad f/g, \quad g/f, \quad f^2 = ff, \quad g^2 = gg$$
$$f\circ g, \quad g\circ f, \quad f\circ f, \quad g\circ g$$

34. Demuestre que si f es una función par e impar, entonces debe cumplirse que $f(x) = 0$ en todo punto de su dominio.

35. Sea f una función con dominio simétrico respecto al origen, es decir, si x pertenece a su dominio, $-x$ también pertenece.

(a) Demuestre que f se puede expresar como la suma de una función par y una función impar:

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

siendo E una función par y O una función impar. *Sugerencia*: Forme $E(x) = (f(x) + f(-x))/2$. Demuestre que $E(x) = E(-x)$, por lo que E será par. Demuestre después que $O(x) = f(x) - E(x)$ es una función impar.

(b) Demuestre que sólo existe una forma de escribir f como la suma de una función par y una función impar. *Sugerencia*: Una forma está dada en el apartado (a). Si pudiera expresarse también $f(x) = E_1(x) + O_1(x)$, siendo E_1 una función par y O_1 una función impar, entonces $E - E_1 = O_1 - O$, y utilice después el Ejercicio 34 para demostrar que $E = E_1$ y $O = O_1$.

P.6 Polinomios y funciones racionales

Los polinomios se encuentran entre las funciones más sencillas de tratar en cálculo. Son sumas de términos consistentes en una constante multiplicada por una potencia no negativa de la variable de la función.

DEFINICIÓN 5

Un **polinomio** es una función P cuyo valor en x se expresa como

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde las constantes a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1 y a_0 se denominan **coeficientes** del polinomio y, si $n > 0$, entonces $a_n \neq 0$. El número n, grado de la potencia más alta de x, se denomina **grado** del polinomio (el grado del polinomio cero no está definido).

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 3 &\quad \text{es un polinomio de grado 0} \\ 2 - x &\quad \text{es un polinomio de grado 1} \\ 2x^3 - 17x + 1 &\quad \text{es un polinomio de grado 3} \end{aligned}$$

Supondremos en general que los polinomios con los que vamos a tratar son *polinomios reales*, es decir, sus coeficientes son números reales en vez del caso más general en el que son números complejos. Frecuentemente, los coeficientes serán números enteros o racionales. Los polinomios juegan un papel en el estudio de las funciones análogo al de los enteros en el estudio de los números. Por ejemplo, de la misma forma que al sumar, restar o multiplicar dos enteros se obtiene un entero, al sumar, restar o multiplicar polinomios se obtiene siempre un polinomio. Al sumar o restar polinomios, el resultado es un polinomio cuyo grado no es nunca superior al máximo grado de los dos polinomios que se combinan. Al multiplicar dos polinomios de grados m y n, el resultado es un polinomio de grado $m + n$. Por ejemplo, en el caso del producto

$$(x^2 + 1)(x^3 - x - 2) = x^5 - 2x^2 - x - 2$$

los dos factores tienen grados 2 y 3 y el resultado tiene grado 5.

De la misma forma que el cociente de dos enteros no es frecuentemente un entero, el cociente de dos polinomios frecuentemente no es un polinomio, y se denomina **función racional**.

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1} \qquad \text{es una función racional}$$

Cuando se divide un entero positivo a por un entero positivo más pequeño b se obtiene un cociente entero q y un resto también entero r que cumple $0 \leqslant r < b$. Por tanto, la fracción a/b se puede escribir (de forma única) como la suma de un entero q y una fracción cuyo numerador (el resto r) es menor que el denominador b. Por ejemplo,

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}; \qquad \text{el cociente es 2, el resto es 1}$$

Análogamente, si A_m y B_n son dos polinomios de grados m y n, respectivamente, con $m > n$, la función A_m/B_n se puede expresar (de forma única) como la suma de un polinomio cociente Q_{m-n}, de grado $m - n$ y otra función racional R_k/B_n, en la que el grado del polinomio numerador, R_k (el resto de la división), es o 0 o $k < n$:

$$\frac{A_m(x)}{B_n(x)} = Q_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{B_n(x)} \qquad \textbf{(El Algoritmo de División)}$$

Ejemplo 1 Escriba el algoritmo de división de $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1}$.

Solución **MÉTODO I.** Uso de división de polinomios:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x \;-\; 3 \\
x^2 + 1 & 2x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \\
 & \underline{2x^3 \qquad\quad + 2x \quad} \\
 & \qquad -3x^2 + x + 4 \\
 & \qquad \underline{-3x^2 \qquad - 3} \\
 & \qquad\qquad\quad x + 7
\end{array}
$$

Entonces

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1} = 2x - 3 + \frac{x + 7}{x^2 + 1}$$

El cociente es $2x - 3$ y el resto es $x + 7$.

MÉTODO II. Se añaden términos apropiados de menor grado al numerador con grados no menores que el grado del denominador para permitir la factorización del denominador, y después se restan de nuevo esos términos.

$$
\begin{aligned}
&2x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \\
&= 2x^3 + 2x - 3x^2 - 3 + 3x + 4 - 2x + 3 \\
&= 2x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) + x + 7
\end{aligned}
$$

De donde se deduce inmediatamente que

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1} = 2x - 3 + \frac{x + 7}{x^2 + 1}$$

■

Raíces y factores

Se dice que un número r es una **raíz** de un polinomio P si $P(r) = 0$. Por ejemplo $P(x) = x^3 - 4x$ tiene tres raíces: 0, 2 y -2. Al sustituir x por cualquiera de esos tres números se cumple que $P(x) = 0$. El Teorema Fundamental del Álgebra (*véase* el Apéndice II) indica que todo polinomio de grado como mínimo 1 tiene una raíz (aunque dicha raíz puede ser un número complejo). Por ejemplo, el polinomio lineal (de grado 1) $ax + b$ tiene la raíz $-b/a$, ya que $a(-b/a) + b = 0$. Un polinomio constante (de grado cero) no puede tener raíces, a no ser que sea el polinomio cero, en cuyo caso cualquier número sería una raíz.

Los polinomios reales no tienen por qué tener raíces reales. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 4$ no vale cero para ningún número real x, pero sí vale cero para los números complejos $2i$ y $-2i$, donde i representa la unidad imaginaria, que cumple que $i^2 = -1$ (en el Apéndice I se consideran los números complejos). Los números $2i$ y $-2i$ son *complejos conjugados entre sí*. Los números complejos que son raíces de polinomios reales deben aparecer en pares conjugados.

En aplicaciones de cálculo resulta de utilidad factorizar polinomios en forma de productos de polinomios de grado inferior, especialmente de polinomios de grado 1 o 2 (lineales o cuadráticos). El teorema siguiente muestra la conexión entre los factores lineales y las raíces.

TEOREMA 1 **Teorema de factorización**

Un número r es una raíz de un polinomio P de grado no inferior a 1 si y sólo si $x - r$ es un factor de $P(x)$.

DEMOSTRACIÓN Por el algoritmo de división, se cumple que existe un polinomio cociente Q de grado una unidad menos que el de P y un resto de grado 0 (es decir, una constante c), tal que

$$\frac{P(x)}{x-r} = Q(x) + \frac{c}{x-r}$$

Por tanto, $P(x) = (x-r)Q(x) + c$, y $P(r) = 0$ si y sólo si $c = 0$, y en ese caso $P(x) = (x-r)Q(x)$ y, por tanto, $x - r$ es un factor de $P(x)$.

A partir del Teorema 1 y del Teorema Fundamental del Álgebra se deduce que todo polinomio de grado $n \geqslant 1$ tiene n raíces (si P es de grado $n \geqslant 2$, entonces tiene una raíz r, y $P(x) = (x-r)Q(x)$, siendo Q un polinomio de grado $n - 1 \geqslant 1$, que a su vez tiene una raíz, etc.). Por supuesto, no es necesario que las raíces de un polinomio sean todas diferentes. El polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x-1)^3$ tiene cuatro raíces; una de ellas es 0 y las otras tres valen 1. Se dice que la raíz 1 tiene **multiplicidad** 3, ya que se puede dividir $P(x)$ por $(x-1)^3$ y se obtiene de resto 0.

Si P es un polinomio real que tiene una raíz compleja $r_1 = u + iv$, siendo u y v números reales y $v \neq 0$, entonces, según se ha comentado anteriormente, el complejo conjugado de r_1, es decir $r_2 = u - iv$, debe ser también una raíz de P (y además, r_1 y r_2 tendrán la misma multiplicidad). Por tanto, $x - u - iv$ y $x - u + iv$ son factores de $P(x)$ y su producto

$$(x-u-iv)(x-u+iv) = (x-u)^2 + v^2 = x^2 - 2ux + u^2 + v^2$$

es un polinomio cuadrático sin raíces reales. Se deduce, por tanto, que todo polinomio real se puede descomponer en un producto de factores lineales reales (que pueden estar repetidos) y un producto de factores cuadráticos sin raíces reales (que pueden estar repetidos).

Ejemplo 2 ¿Cuál es el grado de $P(x) = x^3(x^2 + 2x + 5)^2$? ¿Cuáles son las raíces de P, y cuál es la multiplicidad de cada raíz?

Solución Si se desarrolla la expresión de P, el máximo grado de x presente en la expresión desarrollada es $x^3(x^2)^2 = x^7$, por lo que el grado de P es 7. El factor $x^3 = (x-0)^3$ indica que 0 es una raíz de P con multiplicidad 3. Las cuatro raíces restantes serán las raíces del polinomio $x^2 + 2x + 5$, cada una de ellas con multiplicidad 2. Entonces,

$$\begin{aligned}[x^2 + 2x + 5]^2 &= [(x+1)^2 + 4]^2 \\ &= [(x+1+2i)(x+1-2i)]^2\end{aligned}$$

Por tanto, las siete raíces de P son:

$$\begin{cases} 0,\ 0,\ 0 & 0 \text{ tiene multiplicidad } 3 \\ -1-2i,\ -1-2i & -1-2i \text{ tiene multiplicidad } 2 \\ -1+2i,\ -1+2i & -1+2i \text{ tiene multiplicidad } 2 \end{cases}$$

Raíces y factores de polinomios cuadráticos

Existe una expresión bien conocida para calcular las raíces de un polinomio cuadrático.

Ecuación de segundo grado

Las dos soluciones de la ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

siendo A, B y C constantes y $A \neq 0$, se obtienen como

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Para ver que efectivamente es así, se divide la ecuación de segundo grado por A y se completan los cuadrados en x:

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

$$x^2 + \frac{2B}{2A}x + \frac{B^2}{4A^2} = \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}$$

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$$

$$x + \frac{B}{2A} = \pm\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

La cantidad $D = B^2 - 4AC$ que aparece dentro de la raíz cuadrada en la fórmula se denomina **discriminante** de la ecuación o polinomio de segundo grado. La naturaleza de las raíces de la ecuación de segundo grado depende del signo del discriminante.

(a) Si $D > 0$, entonces $D = k^2$ para algún valor de k y la ecuación de segundo grado posee dos raíces distintas, $(-B + k)/(2A)$ y $(-B - k)/(2A)$.

(b) Si $D = 0$, entonces la ecuación de segundo grado tiene sólo una raíz, $-B/(2A)$, la cual tiene multiplicidad 2 (se denomina *raíz doble*).

(c) Si $D < 0$, entonces $D = -k^2$ para algún valor de k y la ecuación de segundo grado posee dos raíces complejas conjugadas, $(-B + ki)/(2A)$ y $(-B - ki)/(2A)$.

Ejemplo 3 Calcule las raíces de los siguientes polinomios de segundo grado y exprese dichos polinomios como producto de sus factores lineales.

(a) $x^2 + x - 1$ (b) $9x^2 - 6x + 1$ (c) $2x^2 + x + 1$

Solución Se utiliza la fórmula de la ecuación de segundo grado para obtener las raíces de los polinomios.

(a) $A = 1, \quad B = 1, \quad C = -1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

(b) $A = 9, \quad B = -6, \quad C = 1$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{1}{3} \quad \text{(raíz doble)}$$

$$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = (3x - 1)^2$$

(c) $A = 2, \quad B = 1, \quad C = 1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}\,i$$

$$2x^2 + x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}\,i\right)\left(x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}\,i\right)$$

Observación Existen fórmulas para calcular las raíces exactas de polinomios de grado 3 y de grado 4, pero, a diferencia de la fórmula de la ecuación de segundo grado, son muy complicadas y raramente se utilizan. El cálculo nos proporciona herramientas muy poderosas y fáciles de de utilizar para obtener aproximaciones a las raíces de polinomios (y soluciones a ecuaciones más generales), con cualquier grado de exactitud que se desee.

Factorizaciones diversas

Algunos polinomios de grado 2 y superior se pueden factorizar (al menos parcialmente) por simple inspección. Algunos ejemplos son:

(a) Factor común: $ax^2 + bx = x(ax + b)$.

(b) Diferencia de cuadrados: $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$.

(c) Diferencia de cubos: $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

(d) De forma más general, la diferencia de n-ésimas potencias para cualquier entero positivo n:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

Nótese que $x - a$ es un factor de $x^n - a^n$ para todo entero positivo n.

(e) Siempre es cierto que si n es un *entero positivo impar*, entonces $x + a$ es un factor de $x^n + a^n$. Por ejemplo,

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$
$$x^5 + a^5 = (x + a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)$$

Finalmente, mencionaremos un método de prueba y error para factorización de polinomios de segundo grado, denominado *factorización trinomial*. Como

$$(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$$
$$(x - p)(x - q) = x^2 - (p + q)x + pq \qquad \text{y}$$
$$(x + p)(x - q) = x^2 + (p - q)x - pq$$

es posible a veces obtener los factores de $x^2 + Bx + C$ buscando los factores de $|C|$ para los que la suma o la diferencia es B. De forma más general, a veces es posible factorizar

$$Ax^2 + Bx + C = (ax + b)(cx + d)$$

Buscando los factores a y c de A y los factores b y d de C para los que $ad + bc = B$. Por supuesto, si esto falla siempre se puede aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado para obtener las raíces, y por tanto los factores, de un polinomio cuadrático.

Ejemplo 4

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \qquad p=3,\ q=2,\ pq=6,\ p+q=5$$
$$x^2 + 7x + 6 = (x+6)(x+1) \qquad p=6,\ q=1,\ pq=6,\ p+q=7$$
$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) \qquad p=3,\ q=-2,\ pq=-6,\ p+q=1$$
$$2x^2 + x - 10 = (2x+5)(x-2) \qquad a=2,\ b=5,\ c=1,\ d=-2$$
$$ac=2,\ bd=-10,\ ad+bc=1$$

■

Ejemplo 5 Calcule las raíces de los siguientes polinomios:

(a) $x^3 - x^2 - 4x + 4$ (b) $x^4 + 3x^2 - 4$ (c) $x^5 - x^4 - x^2 + x$

Solución (a) Existe un factor común obvio:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2)$$

Las raíces son 1, 2 y -2.

(b) Se trata de un trinomio en x^2 para el que existe una factorización sencilla:

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2+4)(x^2-1) = (x+2i)(x-2i)(x+1)(x-1)$$

Las raíces son 1, -1, $2i$ y $-2i$.

(c) Empezamos con unas factorizaciones obvias:

$$x^5 - x^4 - x^2 + x = x(x^4 - x^3 - x + 1) = x(x-1)(x^3-1)$$
$$= x(x-1)^2(x^2+x+1)$$

Por tanto, 0 es una raíz y 1 es una raíz doble. Las dos raíces restantes son las del factor cuadrático $x^2 + x + 1$, que no se puede factorizar de forma sencilla por simple inspección, por lo que usamos la fórmula:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

■

Ejercicios P.6

En los Ejercicios 1-12, calcule las raíces de los polinomios. Si hay raíces repetidas, indique su multiplicidad. Escriba además cada polinomio en forma de producto de sus factores lineales.

1. $x^2 + 7x + 10$

2. $x^2 - 3x - 10$

2. $x^2 + 2x + 2$

4. $x^2 - 6x + 13$

5. $16x^4 - 8x^2 + 1$

6. $x^4 + 6x^3 + 9x^2$

7. $x^3 + 1$

8. $x^4 - 1$

9. $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

10. $x^5 - x^4 - 16x + 16$

11. $x^5 + x^3 + 8x^2 + 8$

12. $x^9 - 4x^7 - x^6 + 4x^4$

En los Ejercicios 13-16, exprese las funciones racionales dadas como la suma de un polinomio con otra función racional cuyo numerador sea o bien cero, o bien de menor grado que el denominador.

13. $\dfrac{x^3-1}{x^2-2}$

14. $\dfrac{x^2}{x^2+5x+3}$

15. $\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$

16. $\dfrac{x^4+x^2}{x^3+x^2+1}$

17. Demuestre que $x - 1$ es un factor de un polinomio P de grado positivo si y sólo si la suma de los coeficientes de P es cero.

18. ¿Qué condición deberían cumplir los coeficientes de un polinomio para asegurar que $x + 1$ es un factor de dicho polinomio?

***19.** El conjugado de un número complejo $z = u + iv$ (siendo u y v números reales) es el número complejo $\bar{z} = u - iv$. En el Apéndice I se demuestra que el conjugado de una suma (o producto) de dos números complejos es la suma (o producto) de los conjugados.

Utilice este hecho para verificar que si $z = u + iv$ es una raíz compleja de un polinomio P con coeficientes reales, entonces su conjugado $\bar{z}$ es también una raíz de P.

∗20. Continuando con el ejercicio anterior, demuestre que si $z = u + iv$ (siendo u y v números reales) es una raíz compleja de un polinomio P con coeficientes reales, entonces P debe tener el factor cuadrático $x^2 - 2ux + u^2 + v^2$.

∗21. Utilice el resultado del ejercicio 20 para demostrar que si $z = u + iv$ (siendo u y v números reales) es una raíz compleja de un polinomio P con coeficientes reales, entonces z y $\bar{z}$ son raíces de P con la misma multiplicidad.

P.7 Las funciones trigonométricas

Casi toda la gente se encuentra por primera vez con las cantidades $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ y a partir de la razón de la longitud de los lados de un triángulo rectángulo en el que t es el valor de uno de sus ángulos agudos. Si en un triángulo rectángulo se denominan «hip» a la hipotenusa, «ady» al cateto adyacente al ángulo t y «opu» al cateto opuesto al ángulo t (*véase* la Figura P.63), entonces

$$\cos t = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} t = \frac{\text{opu}}{\text{hip}} \qquad (*)$$

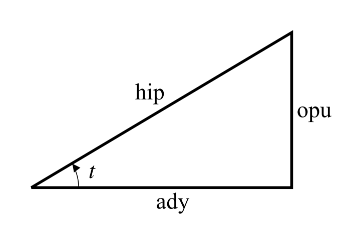


Figura P.63 $\cos t = \text{ady/hip}$. $\operatorname{sen} t = \text{opu/hip}$.

Estas razones dependen sólo del ángulo t, y no de un triángulo en particular, ya que todos los triángulos rectángulos con un ángulo agudo t son similares.

En el ámbito del cálculo son necesarias definiciones más generales de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$, como funciones definidas *para todos los números reales t*, no sólo para los ángulos agudos. Estas definiciones se establecen en función de una circunferencia, en vez de un triángulo.

Sea C una circunferencia de centro el origen O y de radio 1. Su ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. Sea A el punto (1, 0) sobre C. Para todo número real t, sea P_t el punto sobre C situado a una distancia $|t|$ de A, medido sobre C en sentido contrario al de las agujas del reloj, si $t > 0$, y en el sentido de las agujas del reloj si $t < 0$. Por ejemplo, como la circunferencia mide 2π radianes, el punto $P_{\pi/2}$ representa un cuarto de vuelta de distancia desde A en la circunferencia C. Se trata del punto (0, 1).

Utilizaremos esta longitud t como medida del ángulo AOP_t, como muestra la Figura P.64.

DEFINICIÓN 6

La **medida en radianes** del ángulo AOP_t es de t radianes:

$$\angle AOP_t = t \text{ radianes}$$

Estamos más acostumbrados a medir los ángulos en **grados**. Como P_π es el punto $(-1, 0)$, la mitad del camino (π radios de distancia) alrededor de la circunferencia C desde el punto A, tenemos que

$$\pi \text{ radianes} = 180^{\text{o}}$$

Para convertir grados en radianes se multiplican los grados por $\pi/180$, y para convertir radianes en grados se multiplican los radianes por $180/\pi$.

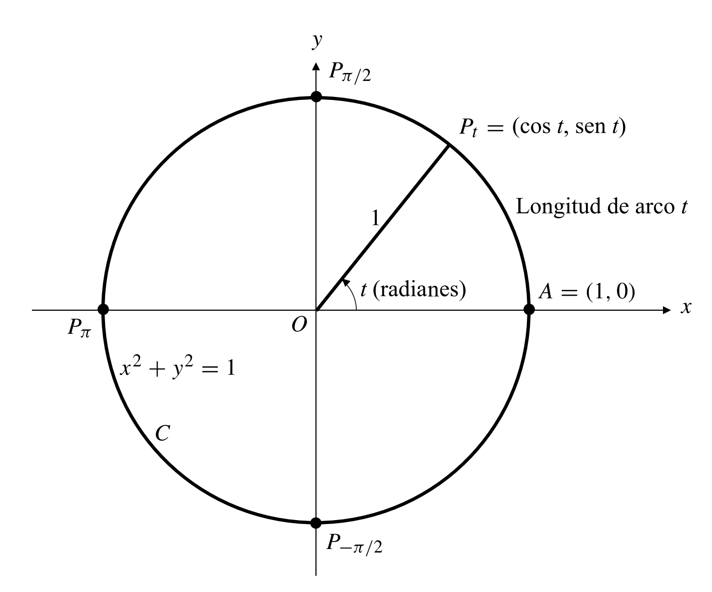


Figura P.64 Si la longitud del arco AP_t es de t radios de C, entonces el ángulo $AOP_t = t$ radianes.

Convenio para ángulos

En cálculo se supone que todos los ángulos se miden en radianes a menos que se indique explícitamente que se miden en grados o en otras unidades. Por ejemplo, al decir un ángulo de $\pi/3$, significa $\pi/3$ radianes (que equivalen a 60°), y no $\pi/3$ grados.

Ejemplo 1 **Longitud de arco y área de sector circular.** Un arco de una circunferencia de radio r abarca un ángulo t desde el centro de dicha circunferencia. Calcule la longitud s de dicho arco y el área A del sector circular comprendido entre el arco y el centro de la circunferencia.

Solución La longitud del arco s es la misma fracción de la longitud de la circunferencia $2\pi r$ que la fracción que representa t de la longitud total de la circunferencia en radianes, que es 2π (o 360°). Por tanto,

$$s = \frac{t}{2\pi}(2\pi r) = rt \text{ unidades}$$

De forma similar, el área A del sector circular (*véase* la Figura P.65) es la misma fracción del área total del círculo πr^2:

$$A = \frac{t}{2\pi}(\pi r^2) = \frac{r^2 t}{2} \text{ unidades}^2$$

(En la Sección 1.1 demostraremos que el área de un círculo de radio r es πr^2).

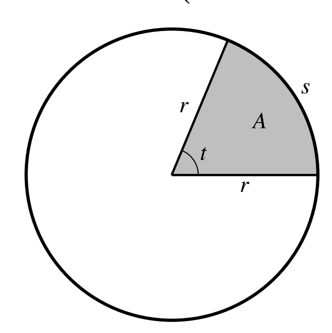


Figura P.65 Longitud del arco $x = rt$. Área del sector circular $A = r^2 t/2$.

■

Utilizando el procedimiento descrito anteriormente, se puede calcular el punto P_t correspondiente a cualquier número real t, positivo o negativo. Los valores $\cos t$ y $\text{sen}\, t$ se definen como las coordenadas del punto P_t (*véase* la Figura P.66).

Figura P.66 Las coordenadas de P_t son $(\cos t, \operatorname{sen} t)$.

DEFINICIÓN 7 **Coseno y seno**

Dado un número real t, el **coseno** de t (abreviadamente, $\cos t$) y el **seno** de t (abreviadamente, $\operatorname{sen} t$) son las coordenadas x e y del punto P_t.

$$\cos t = \text{coordenada } x \text{ del punto } P_t$$
$$\operatorname{sen} t = \text{coordenada } y \text{ del punto } P_t$$

Dada la forma en que se definen, el coseno y el seno se denominan **funciones circulares**. Nótese que estas definiciones concuerdan con las dadas anteriormente en función del ángulo agudo de un triángulo rectángulo (*véanse* las fórmulas (*) al principio de esta sección). En este caso el triángulo es el P_tOQ_t, que se muestra en la Figura P.66.

Ejemplo 2 Examinando las coordenadas de $P_0 = A$, $P_{\pi/2}$, P_π y $P_{-\pi/2} = P_{3\pi/2}$ de la Figura P.67, se obtienen los siguientes valores:

$$\cos 0 = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \cos\pi = -1 \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \operatorname{sen}\pi = 0 \qquad \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$$

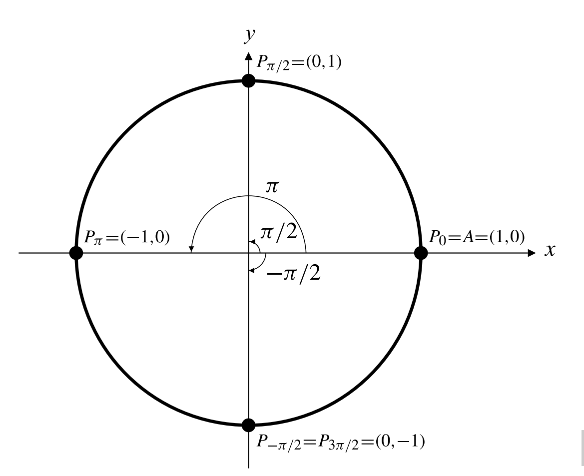


Figura P.67 Algunos ángulos especiales.

Identidades de utilidad

Muchas propiedades importantes de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ se desprenden del hecho de que son las coordenadas del punto P_t sobre la circunferencia C de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Rango del coseno y del seno. Para todo número real t,

$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1 \quad \text{y} \quad -1 \leqslant \operatorname{sen} t \leqslant 1$$

Identidad de Pitágoras. Las coordenadas $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, del punto P_t deben cumplir la ecuación de la circunferencia. Por tanto, para todo número real t,

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

(Nótese que $\cos^2 t$ significa $(\cos t)^2$, y no $\cos(\cos t)$. Se trata de una notación desafortunada, pero se utiliza en prácticamente toda la literatura técnica, así que tendremos que acostumbrarnos a utilizarla).

Periodicidad. Como C es una circunferencia que mide 2π radianes, sumar 2π a un valor de t hace que el punto P_t describa una vuelta completa alrededor de la circunferencia C y termine en el mismo sitio: $P_{t+2\pi} = P_t$. Por tanto, para todo t,

$$\cos(t + 2\pi) = \cos t \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$$

Esto quiere decir que el coseno y el seno son **funciones periódicas** de periodo 2π.

El coseno es una función par. El seno es una función impar. Como la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es simétrica respecto al eje x, los puntos P_t y P_{-t} tienen la misma coordenada x, y coordenadas y opuestas (*véase* la Figura P.68).

$$\cos(-t) = \cos t \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$$

Identidades de ángulos complementarios. Dos ángulos son complementarios si suman $\pi/2$ (o 90°). Los puntos $P_{(\pi/2)-t}$ y P_t son reflexiones (uno del otro) respecto a la recta $y = x$ (Figura P.69), por lo que la coordenada x de uno de ellos es la coordenada y del otro, y viceversa. Así,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$$

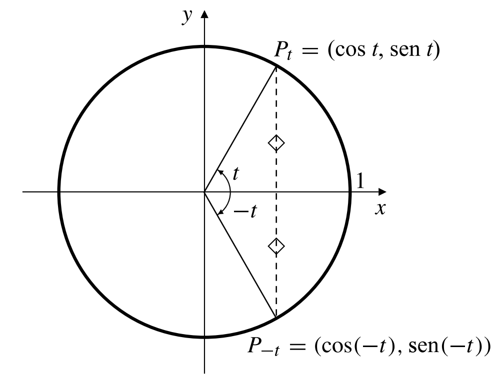


Figura P.68 $\cos(-t) = \cos t$.
$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$.

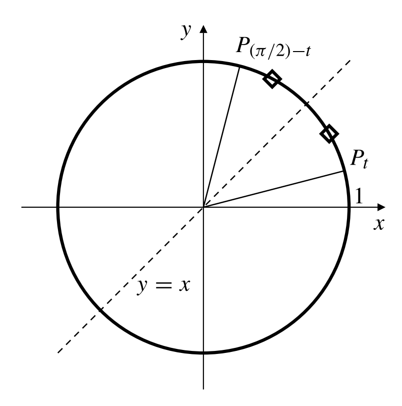


Figura P.69 $\cos((\pi/2) - t) = \operatorname{sen} t$.
$\operatorname{sen}((\pi/2) - t) = \cos t$.

Identidades de ángulos suplementarios. Dos ángulos son suplementarios si suman π (o 180º). Como la circunferencia es simétrica respecto al eje y, $P_{\pi-t}$ y P_t tienen la misma coordenada y, y coordenadas x opuestas (*véase* la Figura P.70). Entonces,

$$\cos(\pi - t) = -\cos t \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$$

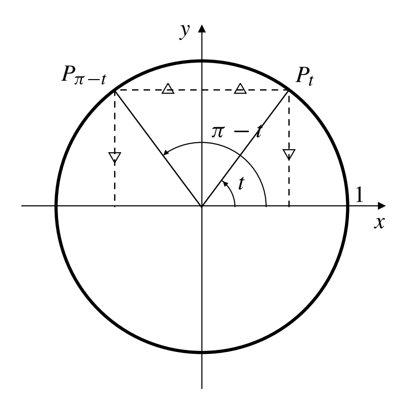


Figura P.70 $\cos(\pi - t) = -\cos t$.
$\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$.

Algunos ángulos especiales

Ejemplo 3 Calcule el seno y el coseno de $\pi/4$ (es decir, 45º).

Solución El punto $P_{\pi/4}$ está en el primer cuadrante sobre la recta $x = y$. Para calcular sus coordenadas, se sustituye $x = y$ en la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, con lo que se obtiene $2x^2 = 1$. Por tanto, $x = y = 1/\sqrt{2}$ (*véase* la Figura P.71), y

$$\cos(45^\circ) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}(45^\circ) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

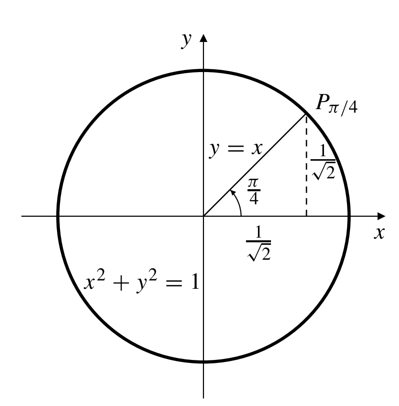


Figura P.71 $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ejemplo 4 Calcule los valores del seno y el coseno de los ángulos $\pi/3$ (o 60º) y $\pi/6$ (o 30º).

Solución El punto $P_{\pi/3}$ y los puntos $O(0, 0)$ y $A(1, 0)$ son los vértices de un triángulo equilátero cuyo lado tiene longitud 1 (*véase* la Figura P.72). Por tanto, la coordenada x del punto $P_{\pi/3}$ vale 1/2, y la coordenada y vale $\sqrt{1 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$, con lo que

$$\cos(60^\circ) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}(60^\circ) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, las identidades de ángulos complementarios nos permiten obtener que

$$\cos(30^o) = \cos\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen}(30^o) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

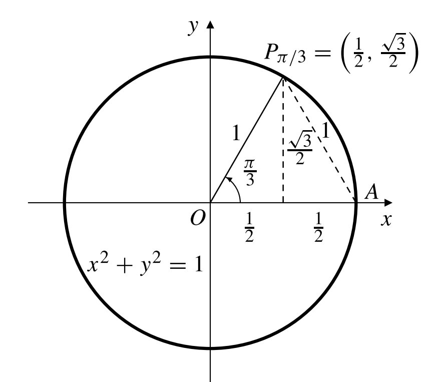


Figura P.72 $\cos \pi/3 = 1/2$.
$\operatorname{sen} \pi/3 = \sqrt{3}/2$.

La Tabla 5 resume los valores del coseno y el seno en los ángulos múltiplos de 30º y 45º entre 0º y 180º. Los valores de 120º, 135º y 150º se han obtenido utilizando las identidades de ángulos suplementarios. Por ejemplo,

$$\cos(120^o) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos(60^o) = -\frac{1}{2}$$

Tabla 5. Cosenos y senos de algunos ángulos especiales

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

Ejemplo 5 Calcule: (a) $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$ y (b) $\cos\frac{4\pi}{3}$

Solución Se pueden dibujar los triángulos adecuados en los cuadrantes donde están los ángulos, para determinar los valores requeridos. *Véase* la Figura P.73.

(a) $\operatorname{sen}(3\pi/4) = \operatorname{sen}(\pi - (\pi/4)) = 1/\sqrt{2}$.

(b) $\cos(4\pi/3) = \cos(\pi + (\pi/3)) = -\frac{1}{2}$.

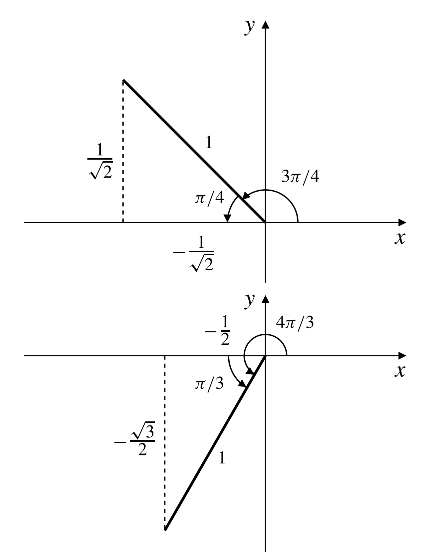


Figura P.73 Uso de triángulos situados adecuadamente para calcular funciones trigonométricas de ángulos especiales.

Aunque se pueden obtener aproximaciones decimales a los valores del seno y el coseno utilizando una calculadora científica o tablas matemáticas, es útil recordar los valores de la tabla para los ángulos 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$, ya que aparecen frecuentemente en las aplicaciones.

Al tratar el seno y el coseno como funciones, las variables se pueden nombrar en la forma que deseemos (por ejemplo, x, como se hace con las otras funciones). Las Figuras P.74 y P.75 muestran las gráficas de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$. En ambas gráficas el comportamiento entre $x = 0$ y $x = 2\pi$ se repite una y otra vez a medida que nos movemos de izquierda a derecha por el eje x. Obsérvese que la gráfica de $\operatorname{sen} x$ es igual a la gráfica de $\cos x$ desplazando esta última a la derecha una distancia de $\pi/2$.

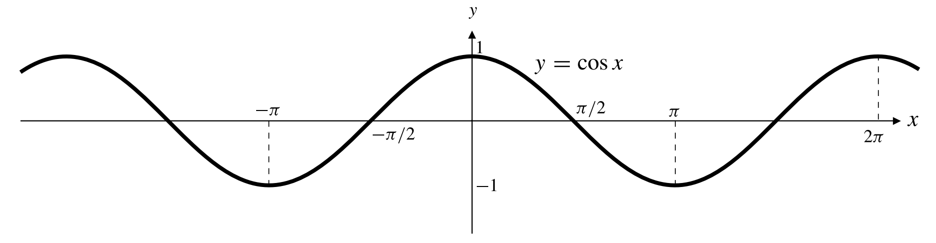


Figura P.74 Gráfica de $\cos x$.

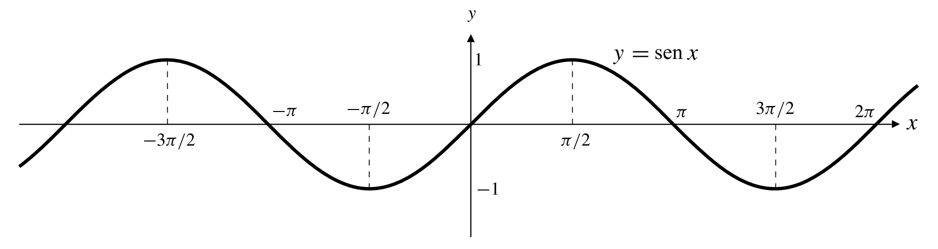


Figura P.75 Gráfica de $\operatorname{sen} x$.

¡Atención!

Cuando se utiliza una calculadora científica para calcular funciones trigonométricas, hay que asegurarse de seleccionar el modo angular apropiado: grados o radianes.

Fórmulas de sumas

Las fórmulas que siguen sirven para determinar el coseno y el seno de una suma o diferencia de dos ángulos en función de los cosenos y senos de dichos ángulos.

TEOREMA 2 **Fórmulas de suma para el coseno y el seno**

$$\cos(s+t) = \cos s\,\cos t - \operatorname{sen} s\,\operatorname{sen} t$$
$$\operatorname{sen}(s+t) = \operatorname{sen} s\,\cos t + \cos s\,\operatorname{sen} t$$
$$\cos(s-t) = \cos s\,\cos t + \operatorname{sen} s\,\operatorname{sen} t$$
$$\operatorname{sen}(s-t) = \operatorname{sen} s\,\cos t - \cos s\,\operatorname{sen} t$$

DEMOSTRACIÓN Demostraremos la tercera fórmula como sigue: sean s y t números reales, y considérense los puntos

$$P_t = (\cos t,\ \operatorname{sen} t) \qquad P_{s-t} = (\cos(s-t),\ \operatorname{sen}(s-t))$$
$$P_s = (\cos s,\ \operatorname{sen} s) \qquad A = (1,\ 0)$$

como se muestra en la Figura P.76.

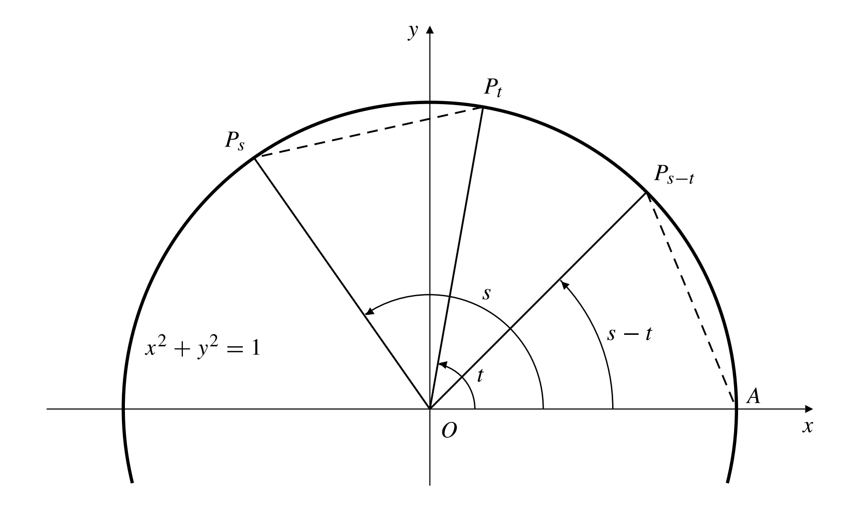


Figura P.76 $P_sP_t = P_{s-t}A$.

El ángulo $P_tOP_s = s - t$ radianes = ángulo AOP_{s-t}, y la distancia P_sP_t es igual a la distancia $P_{s-t}A$. Por tanto, $(P_sP_t)^2 = (P_{s-t}A)^2$. Si expresamos las distancias al cuadrado en función de las coordenadas, y se desarrollan los binomios correspondientes:

$$(\cos s - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} s - \operatorname{sen} t)^2 = (\cos(s-t) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(s-t)$$
$$\cos^2 s - 2\cos s\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 s - 2\operatorname{sen} s\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t$$
$$= \cos^2(s-t) - 2\cos(s-t) + 1 + \operatorname{sen}^2(s-t)$$

Como $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ para todo x, esto se reduce a

$$\cos(s-t) = \cos s\cos t + \operatorname{sen} s\operatorname{sen} t$$

Sustituyendo t por $-t$ en la fórmula anterior, y recordando que $\cos(-t) = \cos t$ y $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, tenemos que

$$\cos(s+t) = \cos s\cos t - \operatorname{sen} s\operatorname{sen} t$$

Para obtener las fórmulas de suma para el seno se pueden emplear las fórmulas de ángulos complementarios:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(s+t) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(s+t)\right)\\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-s\right)-t\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right)\cos t + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-s\right)\operatorname{sen} t\\ &= \operatorname{sen} s\cos t + \cos s\operatorname{sen} t\end{aligned}$$

y la otra fórmula se sigue de nuevo si sustituimos t por $-t$.

Ejemplo 6 Calcule el valor de $\cos(\pi/12) = \cos 15^{\mathrm{o}}$.

Solución

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

A partir de las fórmulas de suma, se pueden obtener como casos especiales ciertas fórmulas útiles denominadas **fórmulas del ángulo doble**. Si en las fórmulas de suma de $\operatorname{sen}(s+t)$ y $\cos(s+t)$ se hace $s = t$, se obtiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2t &= 2\operatorname{sen} t\cos t \qquad \text{y}\\ \cos 2t &= \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\\ &= 2\cos^2 t - 1 \qquad (\text{usando } \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1)\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 t\end{aligned}$$

Despejando en las dos últimas fórmulas $\cos^2 t$ y $\operatorname{sen}^2 t$ se obtiene

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

que se denominan **fórmulas del ángulo mitad**, ya que se utilizan para expresar relaciones trigonométricas de la mitad del ángulo $2t$. Posteriormente encontraremos estas fórmulas de utilidad cuando integremos potencias de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

Otras funciones trigonométricas

Existen otras cuatro funciones trigonométricas: tangente (tan) cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc), todas ellas definidas en función del coseno y el seno. Sus gráficas se muestran en las Figuras P.77-P.80.

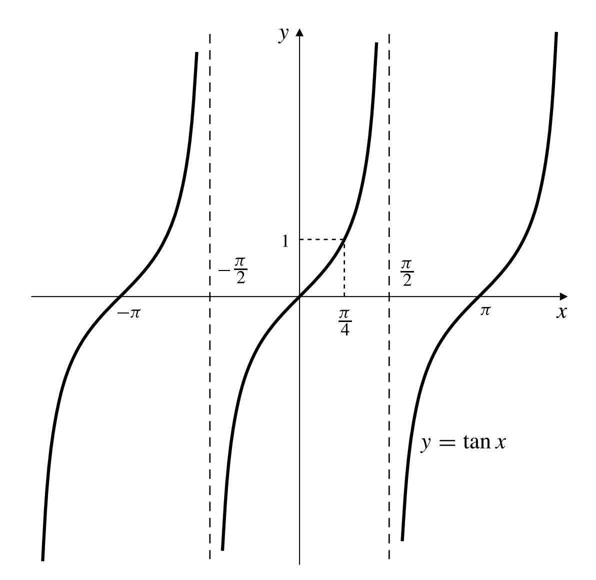


Figura P.77 Gráfica de $\tan x$.

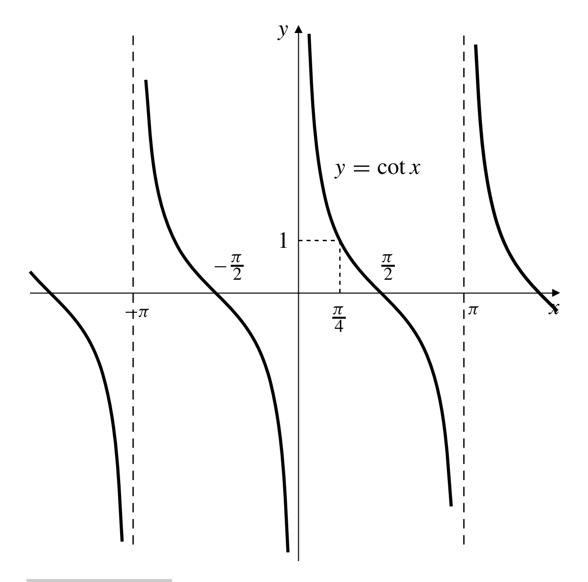


Figura P.78 Gráfica de $\cot x$.

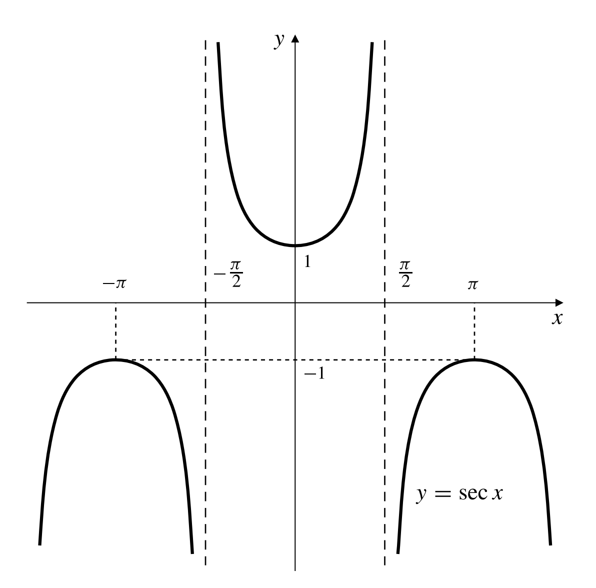


Figura P.79 Gráfica de $\sec x$.

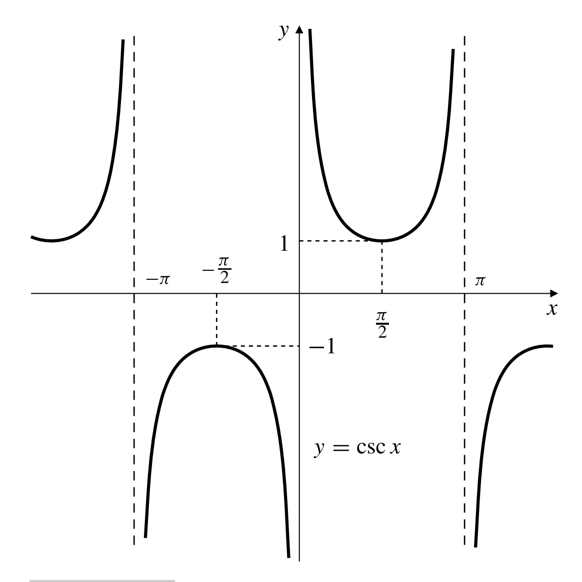


Figura P.80 Gráfica de $\csc x$.

DEFINICIÓN 8 **Tangente, cotangente, secante y cosecante**

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{\tan t} \qquad \csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

Obsérvese que todas las funciones anteriores están indefinidas (y su gráfica presenta una asíntota vertical) en los puntos donde la función del denominador de su definición vale cero. Ob-

sérvese también que la tangente, la cotangente y la cosecante son funciones impares y que la secante es una función par. Como $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$ y $|\cos x| \leqslant 1$ para todo x, $|\csc x| \geqslant 1$ y $|\sec x| \geqslant 1$ en todos los puntos donde están definidas.

Las funciones seno, coseno y tangente se denominan **funciones trigonométricas primarias**, y sus inversas cosecante, secante y cotangente se denominan **funciones trigonométricas secundarias**. Las calculadoras científicas en general sólo llevan incorporadas las funciones primarias; para obtener las funciones secundarias basta con utilizar la tecla de inverso. La Figura P.81 muestra un diagrama de utilidad, denominada «regla CPST» de ayuda para recordar dónde son positivas las funciones primarias. Las tres son positivas en el primer cuadrante, marcado con P. De las tres, sólo el seno es positivo en el segundo cuadrante S, sólo la tangente en el tercer cuadrante T y sólo el coseno en el cuarto cuadrante C.

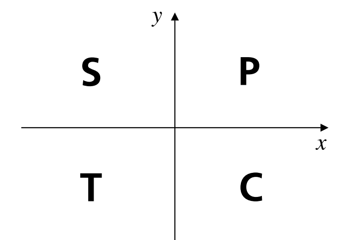


Figura P.81 La regla CPST.

Ejemplo 7 Calcule el seno y la tangente del ángulo θ en el intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ cuyo coseno vale $\cos\theta = -\frac{1}{3}$.

Solución Utilizando la igualdad de Pitágoras $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ se obtiene

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

La condición de que θ debe estar en el intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ lo sitúa en el tercer cuadrante. Por tanto, su seno será negativo. Así,

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{-1/3} = 2\sqrt{2}$$

Como sus inversos coseno y seno, las funciones secante y cosecante son periódicas de periodo 2π. Sin embargo, la tangente y la cotangente tienen periodo π ya que

$$\tan(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\operatorname{sen} x\cos\pi + \cos x \operatorname{sen}\pi}{\cos x\cos\pi - \operatorname{sen} x\operatorname{sen}\pi} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \tan x$$

Dividiendo la identidad de Pitágoras $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ por $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$, respectivamente, se obtienen dos versiones alternativas de dicha identidad que resultan de utilidad:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad \text{y} \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

A partir de las fórmulas de suma del seno y del coseno se pueden obtener las de la tangente y la cotangente. Por ejemplo,

$$\tan(s+t) = \frac{\operatorname{sen}(s+t)}{\cos(s+t)} = \frac{\operatorname{sen} s\cos t + \cos s\operatorname{sen} t}{\cos s\cos t - \operatorname{sen} s\operatorname{sen} t}$$

Si ahora dividimos el numerador y el denominador de la fracción de la derecha por $\cos s \cos t$, se obtiene

$$\tan(s+t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$

Sustituyendo t por $-t$ se llega a

$$\tan(s-t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

Cálculos con Maple

Maple conoce las seis funciones trigonométricas y puede calcular sus valores y manejarlas de diversas formas. Maple asume que los argumentos de las funciones trigonométricas se expresan en radianes.

```
> evalf(sin(30); evalf(sin(Pi/6));
```

$$-.9880316241$$

$$.5000000000$$

Nótese que Maple conoce la constante Pi (con la P mayúscula). La función `evalf()` transforma su argumento en un número en formato decimal en coma flotante con 10 dígitos significativos (la precisión se puede cambiar asignando un nuevo valor a la variable `Digits`). Si no se hace de esta forma, el seno de 30 radianes no se habría desarrollado, ya que no es un entero.

```
> Digits := 20; evalf(100*Pi); sin(30);
```

$$Digits := 20$$

$$314.15926535897932385$$

$$\operatorname{sen}(30)$$

A menudo es útil expresar las funciones trigonométricas de ángulos múltiplo como potencias del seno y coseno, y viceversa.

```
> expand(sin(5*x));
```

$$16\operatorname{sen}(x)\cos(x)^4 - 12\operatorname{sen}(x)\cos(x)^2 + \operatorname{sen}(x)$$

```
> combine((cos(x))^5, trig);
```

$$\frac{1}{16}\cos(5x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{5}{8}\cos(x)$$

Otras funciones trigonométricas se pueden transformar en expresiones en función del seno y el coseno.

```
> convert(tan(4*x)*(sec(4*x))^2, sincos); combine(%, trig);
```

$$\frac{\operatorname{sen}(4x)}{\cos(4x)^3}$$

$$4\frac{\operatorname{sen}(4x)}{\cos(12x) + 3\cos(4x)}$$

El % en el último comando se refiere al resultado del cálculo anterior.

Repaso de trigonometría

Las funciones trigonométricas se denominan de esta forma porque frecuentemente se usan para expresar las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Como vimos al principio de esta sección, si θ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, podemos denominar los tres lados de dicho triángulo como ady (el cateto adyacente a θ), opu (el cateto opuesto a θ) e hip (la hipotenusa). Las funciones trigonométricas de θ se pueden expresar como relaciones de las longitudes de esos tres lados. Concretamente:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opu}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opu}}{\text{ady}}$$

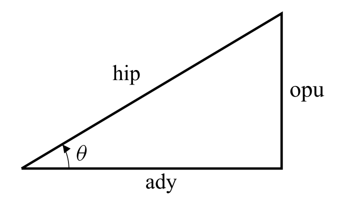


Figura P.82

Ejemplo 8 Calcule los lados desconocidos x e y del triángulo de la Figura P.83.

Solución En este caso, s es el lado opuesto e y es el lado adyacente al ángulo de 30º. La hipotenusa tiene una longitud de 5 unidades. Por tanto,

$$\frac{x}{5} = \operatorname{sen} 30^{\text{o}} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{y}{5} = \cos 30^{\text{o}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

por lo que $x = \dfrac{5}{2}$ e $y = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ unidades.

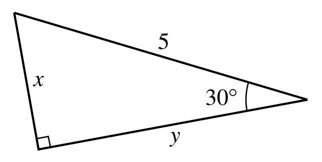


Figura P.83

Ejemplo 9 En el triángulo de la Figura P.84, exprese los lados x e y en función del cateto a y el ángulo θ.

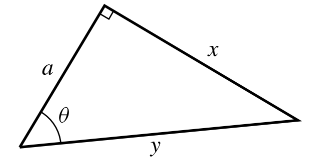


Figura P.84

Solución El cateto x es el opuesto al ángulo θ, e y es la hipotenusa. El cateto adyacente a θ es a. Por tanto,

$$\frac{x}{a} = \tan\theta \quad \text{y} \quad \frac{a}{y} = \cos\theta$$

Por tanto, $x = a\tan\theta$ e $y = \dfrac{a}{\cos\theta} = a\sec\theta$.

Cuando se consideran triángulos generales (no necesariamente rectángulos), resulta conveniente etiquetar sus vértices con letras mayúsculas, que indicarán también los ángulos correspondientes a dichos vértices. Los lados opuestos a los vértices se indican con la letra correspondiente al vértice opuesto pero en minúsculas. *Véase* la Figura P.85. Las relaciones entre los lados a, b y c y los ángulos opuestos A, B y C en un triángulo cualquiera se expresan mediante las siguientes fórmulas, denominadas **Teorema del Seno** y **Teorema del Coseno**.

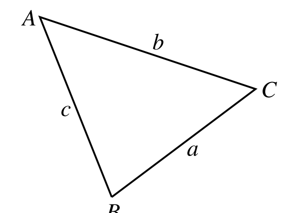


Figura P.85 Los lados de este triángulo se etiquetan de forma correspondiente con sus ángulos opuestos.

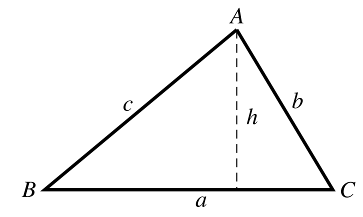
TEOREMA 3

Teorema del Seno: $$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Teorema del Coseno: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

DEMOSTRACIÓN *Véase* la Figura P.86. Sea h la longitud de la perpendicular que va desde A hasta el lado BC. Utilizando las fórmulas de los triángulos rectángulos (y la igualdad $\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$ si fuera necesario), se puede obtener que $c \operatorname{sen} B = h = b \operatorname{sen} C$. Entonces $(\operatorname{sen} B)/b = (\operatorname{sen} C)/c$. Por simetría, o bien trazando una nueva perpendicular a otro de los lados, ambas fracciones deben ser iguales a $(\operatorname{sen} A)/a$. Esto demuestra el Teorema del Seno. Para el Teorema del Coseno, obsérvese que

$$c^2 = \begin{cases} h^2 + (a - b\cos C)^2 & \text{si} \quad C \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ h^2 + (a + b\cos(\pi - C))^2 & \text{si} \quad C > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$
$$= h^2 + (a - b\cos C)^2 \qquad (\text{ya que } \cos(\pi - C) = -\cos C)$$
$$= b^2 \operatorname{sen} C + a^2 - 2ab\cos C + b^2\cos^2 C$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



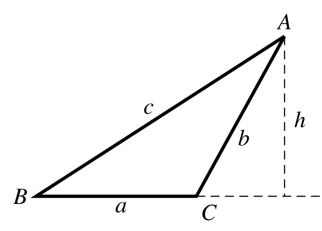


Figura P.86

Las otras versiones del Teorema del Coseno se demuestran de forma similar.

Ejemplo 10 Dos lados de un triángulo valen $a = 2$ y $b = 3$ y el ángulo $C = 40^{\mathrm{o}}$. Calcule el lado c y el seno del ángulo B.

Solución A partir de la tercera versión del Teorema del Coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 4 + 9 - 12\cos 40^{\mathrm{o}} \approx 13 - 12 \times 0.766 = 3.808$$

El lado c es de $\sqrt{3.808} = 1.951$ unidades de longitud. Utilizando ahora el Teorema del Seno se obtiene

$$\operatorname{sen} B = b\,\frac{\operatorname{sen} C}{c} \approx 3 \times \frac{\operatorname{sen} 40^{\mathrm{o}}}{1.951} \approx \frac{3 \times 0.6428}{1.951} \approx 0.988$$

■

Un triángulo queda completamente determinado por uno cualquiera de los siguientes conjuntos de datos (que se corresponden con los casos conocidos de congruencia de triángulos en geometría clásica):

1. Dos lados y el ángulo entre ellos (*véase* el Ejemplo 10).
2. Tres lados, de forma que ninguno de ellos exceda en longitud a la suma de los otros dos.
3. Dos ángulos y un lado.
4. La hipotenusa y un cateto en el caso de un triángulo rectángulo.

En todos los casos anteriores siempre es posible obtener los lados y ángulos desconocidos utilizando el Teorema de Pitágoras o los Teoremas del Seno y del Coseno, y el hecho adicional de que la suma de los tres ángulos de un triángulo es siempre de 180^{o} (o π radianes).

Un triángulo no queda completamente determinado conociendo sólo dos lados y un ángulo no contenido entre esos lados. Puede no existir ningún triángulo, un triángulo rectángulo, o dos triángulos no rectángulos que cumplan con esos datos.

Ejemplo 11 En un triángulo ABC, $B = 30^{\mathrm{o}}$, $b = 2$ y $c = 3$. Calcule a.

Solución Se trata de un caso ambiguo. Utilizando el Teorema del Coseno,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$4 = a^2 + 9 - 6a(\sqrt{3}/2)$$

Por tanto, a debe cumplir la ecuación $a^2 - 3\sqrt{3}a + 5 = 0$. Utilizando la fórmula de la ecuación de segundo grado se obtiene

$$a = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{27 - 20}}{2}$$
$$\approx 1.275 \quad \text{o} \quad 3.921$$

Es decir, existen dos triángulos coherentes con los datos dados, como se muestra en la Figura P.87.

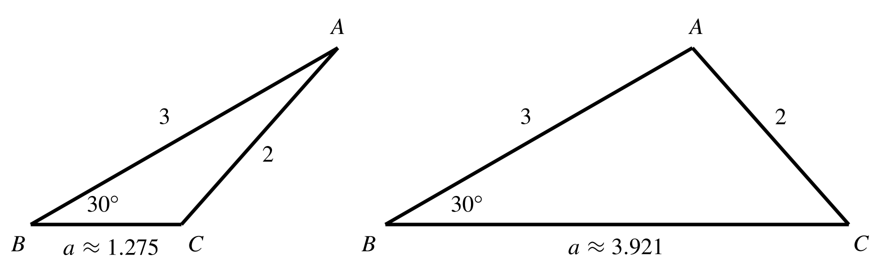


Figura P.87 Dos triángulos con $b = 2$, $c = 3$ y $B = 30^{\mathrm{o}}$.

■

Ejercicios P.7

En los Ejercicios 1-6, calcule los diferentes valores utilizando las fórmulas presentadas en esta sección. No utilice tablas ni calculadora.

1. $\cos \dfrac{3\pi}{4}$ **2.** $\tan -\dfrac{3\pi}{4}$ **3.** $\operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}$

4. $\operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{12}$ **5.** $\cos \dfrac{5\pi}{12}$ **6.** $\operatorname{sen} \dfrac{11\pi}{12}$

En los Ejercicios 7-12, exprese las cantidades dadas en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

7. $\cos(\pi + x)$ **8.** $\operatorname{sen}(2\pi - x)$ **9.** $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$

10. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$ **11.** $\tan x + \cot x$ **12.** $\dfrac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$

En los Ejercicios 13-16, demuestre las igualdades.

13. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos(2x)$

14. $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \tan \dfrac{x}{2}$

15. $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2 \dfrac{x}{2}$

16. $\dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \sec 2x - \tan 2x$

17. Exprese $\operatorname{sen} 3x$ en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

18. Exprese $\cos 3x$ en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

En los Ejercicios 19-22, dibuje las gráficas de las funciones dadas. ¿Cuál es el periodo de cada función?

19. $f(x) = \cos 2x$ **20.** $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

21. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ **22.** $f(x) = \cos \dfrac{\pi x}{2}$

23. Dibuje la gráfica de $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

24. Dibuje la gráfica de $y = 1 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

En los Ejercicios 25-30, se da $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ o $\tan\theta$. Calcule los otros dos valores sabiendo que θ pertenece al intervalo especificado.

25. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}$, θ en $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

26. $\tan\theta = 2$, θ en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

27. $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$, θ en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$

28. $\cos\theta = -\dfrac{5}{13}$, θ en $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

29. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{-1}{2}$, θ en $\left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

30. $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$, θ en $\left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Repaso de trigonometría

En los Ejercicios 31-42, *ABC* es un triángulo cuyo ángulo *C* es recto. Los lados opuestos a los ángulos *A*, *B* y *C* son, respectivamente, *a*, *b* y *c* (*véase* la Figura P.88).

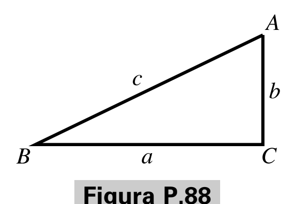


Figura P.88

31. Calcule a y b si $c = 2$, $B = \dfrac{\pi}{3}$.

32. Calcule a y c si $b = 2$, $B = \dfrac{\pi}{3}$.

33. Calcule b y c si $a = 5$, $B = \dfrac{\pi}{6}$.

34. Exprese a en función de A y c.

35. Exprese a en función de A y b.

36. Exprese a en función de B y c.

37. Exprese a en función de B y b.

38. Exprese c en función de A y a.

39. Exprese c en función de A y b.

40. Exprese $\operatorname{sen} A$ en función de a y c.

41. Exprese $\operatorname{sen} A$ en función de b y c.

42. Exprese $\operatorname{sen} A$ en función de a y b.

En los Ejercicios 43-50, *ABC* es un triángulo arbitrario. Los lados opuestos a los ángulos *A*, *B* y *C* son, respectivamente, *a*, *b* y *c* (*véase* la Figura P.89). Calcule las cantidades que se piden. Utilice tablas o una calculadora científica si es necesario.

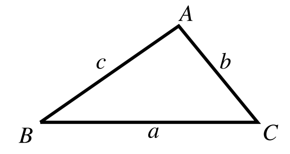


Figura P.89

43. Calcule $\operatorname{sen} B$ si $a = 4$, $b = 3$, $A = \frac{\pi}{4}$.

44. Calcule $\cos A$ si $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$.

45. Calcule $\operatorname{sen} B$ si $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

46. Calcule c si $a = 2$, $b = 3$, $C = \frac{\pi}{4}$.

47. Calcule a si $c = 3$, $A = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{3}$.

48. Calcule c si $a = 2$, $b = 3$, $C = 35^{o}$.

49. Calcule b si $a = 4$, $B = 40^{o}$, $C = 70^{o}$.

50. Calcule c si $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $A = 30^{o}$ (hay dos soluciones posibles).

51. Dos personas estiran dos cuerdas desde la punta de un poste vertical, que denominaremos T, hasta dos puntos B y C en el suelo. C está 10 m más cerca de la base del poste que B. Si la cuerda BT forma un ángulo de 35^{o} con la horizontal, y la cuerda CT forma un ángulo de 50^{o} con la horizontal, ¿cuál es la altura del poste?

52. Dos observadores situados en dos puntos A y B distantes entre sí 2 km miden simultáneamente el ángulo de elevación de un globo meteorológico, y obtienen respectivamente medidas de 40^{o} y 70^{o}. Si el globo está exactamente sobre un punto de la recta que une A y B, calcule la altura del globo.

53. Demuestre que el área de un triángulo ABC se puede calcular mediante la expresión

$$(1/2)ab \operatorname{sen} C = (1/2)bc \operatorname{sen} A = (1/2)ca \operatorname{sen} B$$

$*$**54.** Demuestre que el área de un triángulo ABC se puede expresar como $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, siendo $s = (a+b+c)/2$ el semiperímetro del triángulo.

* Este símbolo se utiliza en el libro para indicar los ejercicios que son algo más difíciles y/o teóricos que el resto.



CAPÍTULO 1

Límites y continuidad

Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, a no ser que se lo obligue a salir de ese estado mediante la aplicación de fuerzas sobre él.

Isaac Newton (1642-1727)
de *Principia Mathematica, 1687*

Hasta que Leibniz y Newton, mediante el descubrimiento del cálculo diferencial, dispersaron las antiguas tinieblas que envolvían el concepto de infinito, estableciendo claramente los conceptos de continuo y de cambio continuo, no se pudieron realizar aplicaciones provechosas de los nuevos conceptos de mecánica obtenidos por el progreso.

Hermann von Helmholtz (1821-1894)

Introducción El cálculo se creó para describir cómo cambian las cantidades. Tiene dos procedimientos básicos opuestos entre sí:

- *Diferenciación*, para obtener la tasa o velocidad de cambio de una función dada.
- *Integración*, para obtener una función con una determinada tasa o velocidad de cambio.

Ambos procedimientos se basan en el concepto fundamental de *límite* de una función. La idea de límite es lo que distingue el cálculo del álgebra, la geometría y la trigonometría, creadas para describir situaciones estáticas.

En este capítulo presentaremos el concepto de límite y desarrollaremos algunas de sus propiedades. Comenzaremos considerando cómo surge el concepto de límite en algunos problemas básicos.

1.1 Ejemplos de velocidad, tasa de crecimiento y área

En esta sección consideraremos algunos ejemplos de fenómenos donde surgen de forma natural los límites.

Velocidad media y velocidad instantánea

La posición de un objeto móvil es función del tiempo. La velocidad media de un objeto en un intervalo de tiempo se obtiene dividiendo el cambio en la posición del objeto por la longitud del intervalo de tiempo.

Ejemplo 1 **(Velocidad media de una piedra que cae)** Los experimentos físicos muestran que si se deja caer una piedra desde cerca de la superficie terrestre, partiendo del reposo, en los primeros t segundos habrá recorrido una distancia

$$y = 4.9t^2 \text{ m}$$

(a) ¿Cuál será la velocidad media de una piedra que cae en esas condiciones durante los primeros 2 s?

(b) ¿Cuál será la velocidad media desde $t = 1$ hasta $t = 2$?

Solución La *velocidad media* de una piedra que cae en cualquier intervalo temporal $[t_1, t_2]$ es el cambio Δy en la distancia de caída recorrida dividido por la longitud del intervalo temporal Δt:

$$\text{Velocidad media en } [t_1, t_2] = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9t_2^2 - 4.9t_1^2}{t_2 - t_1}$$

(a) En los primeros 2 s (intervalo temporal [0, 2]), la velocidad media es

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(2^2) - 4.9(0^2)}{2 - 0} = 9.8 \text{ m/s}$$

(b) En el intervalo temporal [1, 2], la velocidad media es

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(2^2) - 4.9(1^2)}{2 - 1} = 14.7 \text{ m/s}$$

■

Ejemplo 2 ¿Con qué velocidad cae la roca del ejemplo 1: (a) en el instante $t = 1$, (b) en el instante $t = 2$?

Solución Es posible calcular la velocidad media en cualquier intervalo de tiempo, pero ahora la pregunta es sobre la *velocidad instantánea* en un instante determinado. Si la piedra tuviera un velocímetro, ¿qué indicaría en el instante $t = 1$? Para responder a esta pregunta, escribiremos primero la velocidad media en el intervalo $[1, 1 + h]$, que empieza en $t = 1$ y tiene longitud h:

$$\text{Velocidad media en } [1, 1 + h] = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(1 + h)^2 - 4.9(1^2)}{h}$$

No se puede calcular la velocidad instantánea haciendo $h = 0$ en la expresión anterior, porque no se puede dividir por cero. Sin embargo, es posible calcular velocidades medias en intervalos temporales cada vez más pequeños, y ver si los resultados se acercan a algún valor particular. La Tabla 1 muestra los valores de $\Delta y/\Delta t$ a medida que los valores de h se van acercando a cero. Parece que las velocidades medias se acercan más y más al valor de 9.8 m/s a medida que el intervalo temporal se va acercando más y más a cero. Esto sugiere que la piedra cae con una velocidad de 9.8 m/s, un segundo después de iniciar su caída.

De forma similar, la Tabla 2 muestra las velocidades medias sobre intervalos cada vez más cortos $[2, 2 + h]$, empezando en $t = 2$. Los valores sugieren que la piedra cae con una velocidad de 19.6 m/s, dos segundos después de iniciar su caída.

Tabla 1. Velocidad media en el intervalo $[1, 1 + h]$

h	$\Delta y/\Delta t$
1	14.7000
0.1	10.2900
0.01	9.8490
0.001	9.8049
0.0001	9.8005

Tabla 2. Velocidad media en el intervalo $[2, 2 + h]$

h	$\Delta y/\Delta t$
1	24.5000
0.1	20.0900
0.01	19.6490
0.001	19.6049
0.0001	19.6005

■

En el Ejemplo 2 la velocidad media de la piedra que cae en el intervalo temporal $[t, t + h]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h}$$

Para obtener la velocidad instantánea (denominada a menudo simplemente *velocidad*) en los instantes $t = 1$ y $t = 2$, se examinan los valores de dicha velocidad promedio en intervalos temporales cuya longitud h va disminuyendo más y más. De hecho, lo que estamos obteniendo es el *límite de la velocidad media cuando h se aproxima a cero*. Esto se expresa simbólicamente de la siguiente forma:

$$\text{Velocidad en el instante } t = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h}$$

El símbolo $\lim\limits_{h \to 0}$ se lee «límite cuando h tiende a cero de...». No se puede obtener el límite de la fracción simplemente sustituyendo $h = 0$, ya que eso implicaría dividir por cero. Sin embargo, el límite se puede calcular realizando algunas simplificaciones algebraicas en la expresión de la velocidad media.

Ejemplo 3 Simplifique la expresión de la velocidad media de la piedra que cae en el intervalo $[t, t + h]$, desarrollando primero $(t + h)^2$. Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcule la velocidad de la piedra que cae directamente como una función de t, sin hacer uso de la tabla de valores.

Solución La velocidad media en el intervalo $[t, t + h]$ es

$$\begin{aligned} \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} &= \frac{4.9(t^2 + 2th + h^2 - t^2)}{h} \\ &= \frac{4.9(2th + h^2)}{h} \\ &= 9.8t + 4.9h \end{aligned}$$

La forma final de la expresión ya no contiene ninguna división por h. El valor al que tiende dicha expresión cuando h tiende a cero es $9.8t + 4.9(0) = 9.8t$. Por tanto, t segundos después de soltar la piedra, su velocidad será de $9.8t$ m/s. En particular, en $t = 1$ y $t = 2$ las velocidades son de 9.8 m/s y 19.6 m/s, respectivamente.

■

Crecimiento de un cultivo de algas

En un experimento de laboratorio, se mide la biomasa de un cultivo de algas durante un periodo de 74 días midiendo el área en milímetros cuadrados ocupada por el cultivo sobre un cristal de microscopio. Se dibuja la gráfica de las medidas m en función del tiempo (en días), y los puntos se unen mediante una curva suave $m = f(t)$, como se muestra en la Figura 1.1.

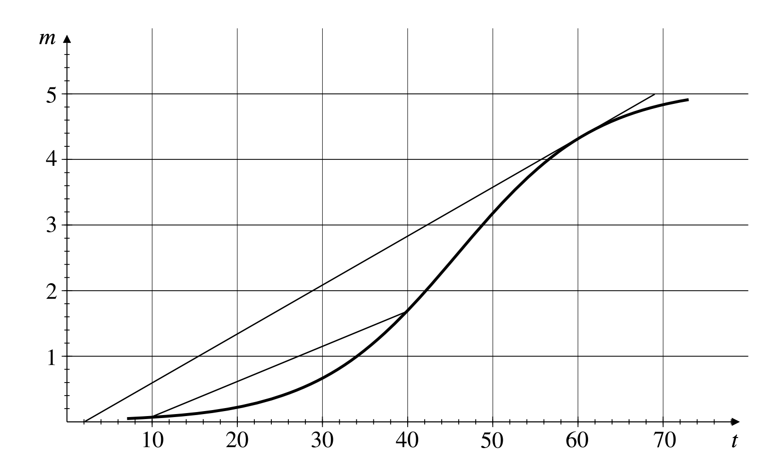


Figura 1.1 Biomasa m de un cultivo de algas transcurridos t días.

Obsérvese que la biomasa era de aproximadamente 0.1 mm^2 el día 10 y había crecido hasta aproximadamente 1.7 mm^2 en el día 40, un incremento de $1.7 - 0.1 = 1.6$ mm^2 en un intervalo de $40 - 10 = 30$ días. La tasa media de crecimiento en el intervalo desde el día 10 hasta el día 40 fue, por tanto, de

$$\frac{1.7 - 0.1}{40 - 10} = \frac{1.6}{30} \approx 0.053 \text{ mm}^2/\text{d}$$

Este promedio es exactamente la pendiente de la recta que une los puntos de la gráfica de $m = f(t)$ correspondientes a $t = 10$ y $t = 40$. De forma similar, la tasa media de crecimiento de la biomasa de algas en cualquier intervalo de tiempo se puede determinar midiendo la pendiente de la recta que une los puntos de la curva correspondientes a dicho intervalo de tiempo. Este tipo de rectas se denominan **secantes** de la curva.

Ejemplo 4 ¿Con qué velocidad crece la biomasa en el día 60?

Solución Para responder a esta pregunta, se pueden medir las tasas medias de crecimiento en intervalos de tiempo cada vez más cortos a partir del día 60. Las correspondientes secantes se van haciendo cada vez más cortas, pero sus pendientes se van aproximando a un *límite*, concretamente, la pendiente de la **recta tangente** a la gráfica $m = f(t)$ en el punto $t = 60$. La Figura 1.1 muestra la recta tangente, que pasa por los puntos (2, 0) y (69, 5), por lo que su pendiente es

$$\frac{5 - 0}{69 - 2} \approx 0.0746 \text{ mm}^2/\text{d}$$

Éste es el valor de la tasa de crecimiento de la biomasa en el día 60. ■

Área de un círculo

Todos los círculos son figuras geométricas similares. Todos tienen la misma forma y se diferencian únicamente en su tamaño. El cociente de la longitud de la circunferencia C y el diámetro $2r$ vale lo mismo en todos los círculos. Esta razón común es el número π:

$$\frac{C}{2r} = \pi \quad \text{o} \quad C = 2\pi r$$

En el colegio nos enseñaron que el área del círculo vale π multiplicado por el cuadrado del radio:

$$A = \pi r^2$$

¿Cómo se puede deducir la fórmula del área a partir de la fórmula de la longitud de la circunferencia, que es la definición de π?

La respuesta a esta pregunta es considerar al círculo como «límite» de una serie de polígonos regulares, que a su vez están constituidos por triángulos, figura cuya geometría ya conocemos en profundidad.

Sea un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r (*véase* la Figura 1.2). El perímetro P_n y el área A_n son, respectivamente, menores que la longitud de la circunferencia C y el área del círculo A. No obstante, si n es grande, *P_n tiene un valor cercano a C* y *A_n tiene un valor cercano a A*. De hecho, la circunferencia que se muestra en la Figura 1.2 es en realidad un polígono regular de 180 lados, de forma que cada lado abarca un ángulo de 2º desde el centro de la circunferencia. Es muy difícil distinguir este polígono de 180 lados de una circunferencia real. Por tanto, es razonable esperar que P_n se aproxime al límite C y que A_n se aproxime al límite A, a medida que n se hace más y más grande y se aproxima a infinito.

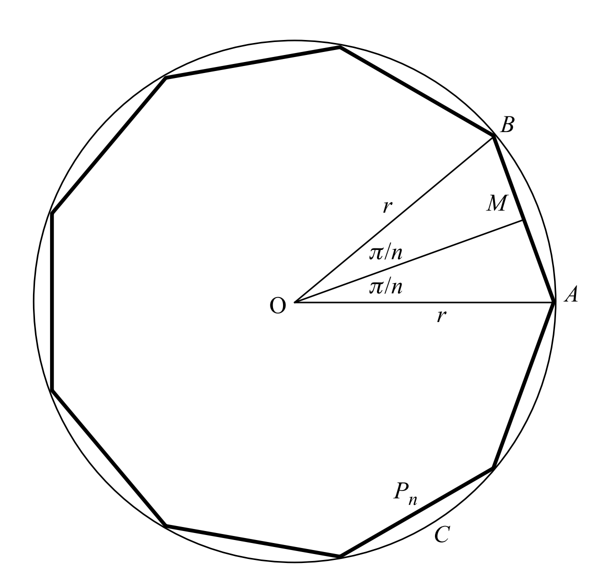


Figura 1.2 Un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia.

Un polígono regular de n lados se puede considerar como la unión no solapada de n triángulos isósceles, todos ellos con un vértice común en O, el centro del polígono. En la Figura 1.2 se muestra uno de esos triángulos $\triangle OAB$. Como el ángulo total alrededor del punto O suma 2π radianes (asumimos una circunferencia de radio 1 y longitud 2π), el ángulo AOB vale $2\pi/n$ radianes. Sea M el punto medio entre A y B; entonces, la recta OM divide al ángulo AOB en dos partes iguales. Utilizando trigonometría elemental, se puede expresar la longitud de AB y el área del triángulo OAB en función del radio r del círculo:

$$|AB| = 2|AM| = 2r \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$$

$$\text{área } OAB = \frac{1}{2}\,|AB|\,|OM| = \frac{1}{2}\left(2r \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right)\left(r\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= r^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{n}$$

El perímetro P_n y el área A_n se obtienen multiplicando por n las expresiones anteriores:

$$P_n = 2rn \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$$

$$A_n = r^2 n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}$$

Despejando en la primera ecuación $rn \operatorname{sen}(\pi/n) = P_n/2$ y sustituyendo en la segunda ecuación, se obtiene

$$A_n = \left(\frac{P_n}{2}\right) r \cos \frac{\pi}{n}$$

El ángulo AOM se aproxima a 0 a medida que n crece. Por tanto, su coseno, $\cos(\pi/n) = |OM|/|OA|$, se aproxima a 1. Como P_n se aproxima a $2\pi r$ cuando n crece, la expresión de A_n se aproxima a $(2\pi r/2) r(1) = \pi r^2$, que por tanto debe ser al área del círculo.

Ejercicios 1.1

Los Ejercicios 1-4 se refieren a un objeto que se mueve a lo largo del eje x, de forma que en el instante t su posición es de $x = t^2 m$ a la derecha del origen.

1. Calcule la velocidad media del objeto en el intervalo temporal $[t, t + h]$.

2. Construya una tabla que muestre las velocidades medias del objeto en los intervalos temporales $[2, 2 + h]$ para $h = 1$, 0.1, 0.01, 0.001 y 0.0001 s.

3. Utilice los resultados del Ejercicio 2 para plantear cuál podría ser la velocidad instantánea del objeto en $t = 2$ s.

4. Confirme su planteamiento del Ejercicio 3 calculando el límite de la velocidad media en el intervalo $[2, 2 + h]$ cuando h tiende a cero, utilizando el método del Ejemplo 3.

Los Ejercicios 5-8 se refieren a una partícula que se mueve por el eje x de forma que su posición en el instante t se expresa como $x = 3t^2 - 12t + 1$ m.

5. Calcule la velocidad media de la partícula en los intervalos de tiempo [1, 2], [2, 3] y [1, 3].

6. Utilice el método del Ejemplo 3 para calcular la velocidad de la partícula en $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

7. ¿En qué dirección se mueve la partícula en $t = 1$? ¿Y en $t = 2$? ¿Y en $t = 3$?

8. Demuestre que para todo número positivo k, la velocidad media de la partícula en el intervalo temporal $[t - k, t + k]$ es igual a su velocidad en el instante t.

En los Ejercicios 9-11, un peso que está suspendido de un muelle oscila arriba y abajo, de forma que su altura sobre el suelo en el instante t es de y pies, con

$$y = 2 + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi t)$$

9. Dibuje la gráfica de y como función de t. ¿A qué altura está el peso en $t = 1$ s? ¿En qué dirección se está moviendo en ese instante?

10. ¿Cuál es la velocidad media del peso en los intervalos temporales [1, 2], [1, 1.1], [1, 1.01] y [1, 1.001]? 

11. Utilizando los resultados del Ejercicio 10, estime la velocidad del peso en el instante $t = 1$. ¿Cuál es el significado del signo del resultado?

Los Ejercicios 12 y 13 se refieren a la evolución de la biomasa de algas que se muestra en la Figura 1.1.

12. ¿Con qué velocidad aproximada está creciendo la biomasa en el día 20?

13. ¿Qué día, aproximadamente, crece más rápido la biomasa?

14. Los beneficios de una pequeña empresa durante cinco años de operaciones se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3.

Año	Beneficio (1000 s €)
2000	6
2001	27
2002	62
2003	111
2004	174

(a) Dibuje los puntos que representan el beneficio en función del año en papel milimetrado, y únalos con una curva suave.

(b) ¿Cuál es la tasa media de incremento en el beneficio entre 2002 y 2004?

(c) Utilice la gráfica para estimar la tasa de crecimiento de los beneficios en 2002.

1.2 Límites de funciones

Para poder hablar con sentido sobre tasas de cambio, rectas tangentes y áreas encerradas por curvas, es necesario investigar previamente el procedimiento de obtención de límites. De hecho, el concepto de *límite* es la piedra angular sobre la que descansa el desarrollo del cálculo. Antes de intentar dar una definición de límite, veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Describa el comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ cerca de $x = 1$.

Solución Nótese que $f(x)$ está definida para todos los números reales excepto para $x = 1$ (no se puede dividir por cero). Para todo $x \neq 1$ se puede simplificar la expresión de $f(x)$ factorizando el numerador y cancelando los factores comunes:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 \qquad \text{para} \qquad x \neq 1$$

La gráfica de f es la recta $x + 1$, en la que se ha eliminado un punto, concretamente el punto (1, 2). Este punto se muestra como un «hueco» en la Figura 1.3. Claramente, aunque $f(1)$ no está definido, podemos hacer que el valor de $f(x)$ *se aproxime lo que queramos* a 2 sin más que escoger el valor de x *lo suficientemente cercano* a 1. Se dice entonces que $f(x)$ se aproxima a 2 cuando x se aproxima a 1, o de otra forma, que $f(x)$ se aproxima al *límite* 2 cuando x se aproxima a 1. Lo escribiremos así:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

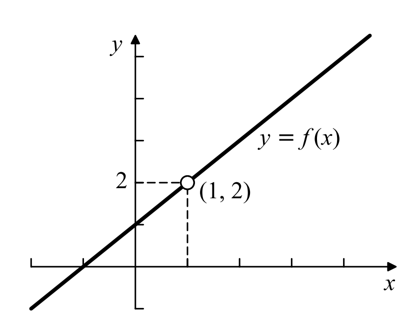


Figura 1.3 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Ejemplo 2 ¿Qué sucede con la función $g(x) = (1 + x^2)^{1/x^2}$ cuando x tiende a cero?

Solución La función $g(x)$ no está definida en $x = 0$. De hecho, por el momento no parece estar definida para ningún x cuyo cuadrado no sea un número racional (recuérdese que si $r = m/n$, siendo m y n enteros y $n > 0$, entonces x^r significa raíz n-ésima de x^m). Ignoremos por el momento el problema de decidir qué significa $g(x)$ si x^2 es irracional, y consideremos sólo valores racionales de x. No hay una forma sencilla de simplificar la expresión de $g(x)$, como hicimos en el Ejemplo 1. Pero se puede usar una calculadora científica para obtener valores aproximados de $g(x)$ para algunos valores racionales de x cada vez más próximos a 0. Los valores de la Tabla 4 se han obtenido de esta forma.

Tabla 4.

x	$g(x)$
± 1.0	2.0000 00000
± 0.1	2.7048 13829
± 0.01	2.7181 45927
± 0.001	2.7182 80469
± 0.0001	2.7182 81815
± 0.00001	1.0000 00000

Excepto el último valor de la tabla, los valores de $g(x)$ parecen aproximarse a un cierto número: 2.71828..., a medida que x se va acercando más y más a 0. En la Sección 3.4 demostraremos que

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} (1 + x^2)^{1/x^2} = e = 2.7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\ ...$$

El número e es un número muy importante en matemáticas.

Obsérvese que la última fila de la tabla parece ser errónea. Esto es porque la calculadora es incapaz de distinguir el número de $1 + (0.00001)^2 = 1.0000000001$ de 1, y por lo tanto el cálculo que realiza es $1^{10\,000\,000\,000} = 1$. Al utilizar una calculadora o un ordenador para evaluar expresiones, hay que tener siempre cuidado con los errores de redondeo. En casos como éste los efectos pueden ser catastróficos. ■

Los anteriores ejemplos, junto con los de la Sección 1.1 sugieren la siguiente definición *informal* de límite.

DEFINICIÓN 1 Definición informal de límite

Si $f(x)$ está definida para todo x cerca de a, con la posible excepción del propio a, y se puede asegurar que $f(x)$ se acerca todo lo que queramos a L a medida que x va estando lo suficientemente cerca de a, pero sin hacerse igual a a, se dice que la función f se aproxima al **límite** L cuando x tiende a a, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Esta definición es *informal* porque utiliza frases imprecisas como *se acerca todo lo que queramos* o *suficientemente cerca*, cuyo significado depende del contexto. Para un mecánico que está fabricando un pistón, *suficientemente cerca* puede ser del orden de las *centésimas de centímetro*. Sin embargo, para un astrónomo que estudia las galaxias lejanas, *suficientemente cerca* puede ser del orden de *miles de años luz*. La definición, sin embargo, es suficientemente clara para permitirnos reconocer y calcular límites de funciones específicas. Una definición «formal» más precisa, que se presentará en la Sección 1.5, será necesaria para *demostrar* teoremas sobre límites, como los Teoremas 2-4, que veremos posteriormente en esta sección.

Ejemplo 3 Calcule (a) $\lim_{x \to a} x$ y (b) $\lim_{x \to a} c$ (siendo c una constante).

Solución Expresado con palabras, el apartado (a) pregunta: «¿a qué se aproxima x cuando x se aproxima a a?». La respuesta clara es a.

$$\lim_{x \to a} x = a$$

De forma similar, el apartado (b) pregunta: «¿a qué se aproxima c cuando x se aproxima a a?». La respuesta en este caso es que c se aproxima a c. No se puede estar más cerca de c que *siendo* c.

$$\lim_{x \to a} c = c$$

■

El Ejemplo 3 muestra que *algunas veces* se puede calcular $\lim_{x \to a} f(x)$ calculando $f(x)$. Éste será el caso si $f(x)$ está definida en un intervalo abierto que contiene a $x = a$, y la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(a, f(a))$ sin interrumpirse. El ejemplo siguiente ilustra varias operaciones algebraicas que se pueden emplear para calcular $\lim_{x \to a} f(x)$ en situaciones en las que $f(x)$ no está definida. Esto ocurre en general cuando $f(x)$ está definida en forma de fracción cuyo denominador se anula en $x = a$.

Ejemplo 4 Calcule:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a}$ y (c) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$

Solución En todos los límites anteriores interviene una fracción cuyo numerador y denominador se anulan en los puntos donde se toma el límite.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$ — Fracción indefinida en $x=-2$

Factorizar numerador y denominador (*véase* la Sección P.6)

$\displaystyle = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)}$ — Cancelar factores comunes.

$\displaystyle = \lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x+3}$ — Calcular el límite sustituyendo $x=-2$

$\displaystyle = \frac{-2-1}{-2+3} = -3$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$ — Fracción indefinida en $x=a$

Simplificar el numerador

$\displaystyle = \lim_{x\to a}\frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a}$

$\displaystyle = \lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{ax(x-a)}$ — Cancelar el factor común.

$\displaystyle = \lim_{x\to a}\frac{-1}{ax} = -\frac{1}{a^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$ — Fracción indefinida en $x=4$

Multiplicar numerador y denominador por el conjugado de la expresión del numerador.

$\displaystyle = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{(4+4)(2+2)} = \frac{1}{32}$

■

Una función f puede estar definida a ambos lados de $x=a$ y carecer de límite en $x=a$. Por ejemplo, la función $f(x)=1/x$ no tiene límite cuando x tiende a 0. Como puede verse en la Figura 1.4(a), los valores de $1/x$ crecen en valor absoluto sin límite a medida que x se aproxima a 0. No se aproximan a ningún número L.

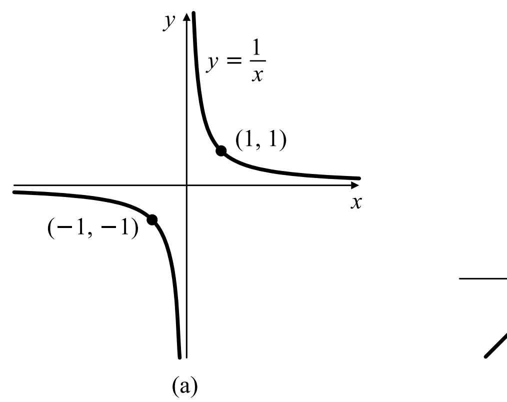
El siguiente ejemplo muestra que aun cuando $f(x)$ esté definida en $x=a$, el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a puede no ser igual a $f(a)$.

¡CUIDADO! Hay que tener siempre en cuenta que la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$ no requiere la existencia de $f(a)$, y que $\lim_{x\to a} f(x)$ no depende de $f(a)$, incluso cuando éste existe. Depende sólo de los valores de $f(x)$ cuando x *se acerca (sin ser igual) a* a.

Ejemplo 5 Sea $g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\neq 2 \\ 1 & \text{si } x=2\end{cases}$ (*Véase* la Figura 1.4(b)). Entonces,

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} x = 2, \quad \text{aunque} \quad g(2)=1$$

■



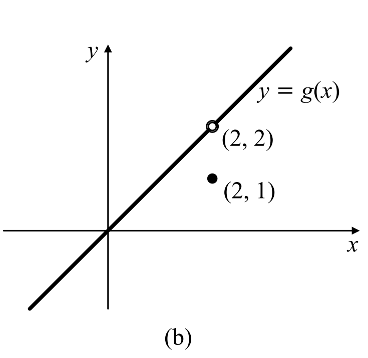


Figura 1.4 (a) No existe $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

(b) $\lim_{x\to 2} g(x) = 2$, pero $g(2) = 1$.

Límites unilaterales

Los límites son *únicos*. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} f(x) = M$, entonces $L = M$ (*véase* el Ejercicio 31 de la Sección 1.5). Aunque una función f sólo puede tener un límite en un punto en particular, resulta de utilidad poder describir el comportamiento de funciones que se aproximan a números diferentes cuando x se aproxima al valor a por un lado o por el otro (*véase* la Figura 1.5).

DEFINICIÓN 2 Definición informal de límites por la izquierda y por la derecha

Si $f(x)$ está definida en algún intervalo (b, a) a la izquierda de $x = a$, y si se puede asegurar que $f(x)$ se acerca cuanto deseemos a L cuando x se acerca cada vez más a a por la izquierda, se dice que el **límite por la izquierda** de $f(x)$ cuando x tiende a a es L, y se escribe

$$\lim_{x\to a-} f(x) = L$$

Si $f(x)$ está definida en algún intervalo (a, b) a la derecha de $x = a$, y si se puede asegurar que $f(x)$ se acerca cuanto deseemos a L cuando x se acerca cada vez más a a por la derecha, se dice que el **límite por la derecha** de $f(x)$ cuando x tiende a a es L, y se escribe

$$\lim_{x\to a+} f(x) = L$$

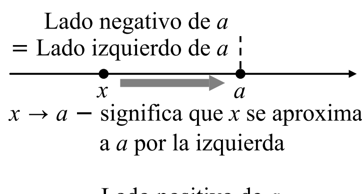
Nótese el uso del sufijo $+$ para indicar la aproximación por la derecha (el lado *positivo*) y el sufijo $-$ para indicar aproximación por la izquierda (el lado *negativo*).

Ejemplo 6 El límite por la izquierda de la función signum $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ (*véase* la Figura 1.6) en $x = 0$ vale -1, y el límite por la derecha en $x = 0$ vale 1:

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$$

ya que los valores de $\operatorname{sgn}(x)$ se aproximan a -1 (de hecho *son* -1) si x es negativo y tiende a 0, y se aproximan a 1 si x es positivo y se aproxima a 0. Como los límites por la izquierda y por la derecha no coinciden, *no existe* $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$. ■

Como se sugiere en el Ejemplo 6, la relación entre los límites ordinarios (bilaterales) y los límites unilaterales se puede establecer como sigue:



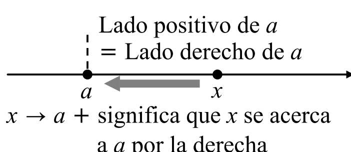


Figura 1.5 Aproximaciones laterales.

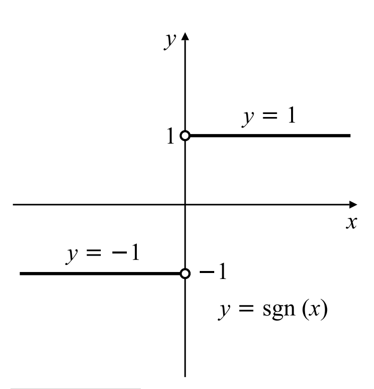


Figura 1.6 No existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$, ya que $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$.

TEOREMA 1 **Relación entre límites bilaterales y unilaterales**

Una función $f(x)$ tiene límite L en $x = a$ si y sólo si existen los límites por la izquierda y por la derecha en ese punto y ambos son iguales a L:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = L$$

Ejemplo 7 Si $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$, calcule: $\lim_{x\to 2+} f(x)$, $\lim_{x\to 2-} f(x)$, y $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Solución Observe que $|x-2| = x-2$ si $x > 2$ y $|x-2| = -(x-2)$ si $x < 2$. Por tanto,

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \frac{x-2}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2+} \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5},$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{-(x-2)}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2-} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{5}$$

Como $\lim_{x\to 2-} f(x) \neq \lim_{x\to 2+} f(x)$, no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Ejemplo 8 ¿Cuáles son los límites laterales $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $x = -1$ y en $x = 1$?

Solución El dominio de g es $[-1, 1]$, de modo que $g(x)$ sólo está definida a la derecha de $x = -1$ y a la izquierda de $x = 1$. Como puede verse en la Figura 1.7,

$$\lim_{x\to -1+} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1-} g(x) = 0$$

$g(x)$ no tiene límite por la izquierda, ni límite en $x = -1$, y tampoco tiene límite por la derecha ni límite en $x = 1$.

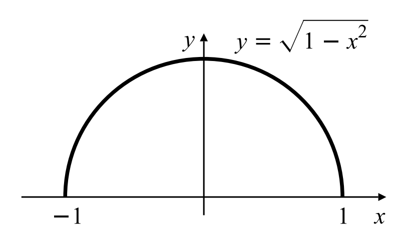


Figura 1.7 $\sqrt{1-x^2}$ tiene límite por la derecha 0 en $x = -1$, y límite por la izquierda 0 en $x = 1$.

Reglas para el cálculo de límites

Los siguientes teoremas facilitan la tarea del cálculo de límites, y de límites unilaterales para muchos tipos de funciones, sin más que conocer previamente algunos límites elementales. No demostraremos aquí los teoremas (*véase* la Sección 1.5).

TEOREMA 2 **Reglas para límites**

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$, y k es una constante, entonces

1. **Límite de una suma:** $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$
2. **Límite de una diferencia:** $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = L - M$
3. **Límite de un producto:** $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = LM$
4. **Límite de la multiplicación por una constante:** $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$
5. **Límite de un cociente:** $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$

Si m es un entero y n es un entero positivo, entonces

6. **Límite de una potencia:** $\lim_{x\to a} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$ siempre que $L > 0$ cuando n sea par, y $L \neq 0$ si $m < 0$

Si $f(x) \leqslant g(x)$ en un intervalo que contiene a a en su interior, entonces

7. **Conservación del orden:** $L \leqslant M$

Las reglas 1-6 son también válidas para límites laterales por la izquierda y por la derecha. También la regla 7, siempre que el supuesto de $f(x) \leqslant g(x)$ se cumpla en un intervalo abierto que se extiende en la dirección apropiada desde a.

Expresado con palabras, la regla 1 dice que el límite de una suma de funciones es la suma de sus límites. Análogamente, la regla 5 dice que el límite del cociente de dos funciones es el cociente de sus límites, siempre que el límite del denominador no sea cero. Intente el lector expresar las otras reglas con palabras.

Se pueden utilizar los límites (a) $\lim_{x\to a} c = c$ (siendo c una constante) y (b) $\lim_{x\to a} x = a$, vistos en el Ejemplo 3, junto con partes del Teorema 2, para calcular límites de muchas combinaciones de funciones.

Ejemplo 9 Calcule: (a) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2 + x + 4}{x^3 - 2x^2 + 7}$ y (b) $\lim_{x\to 2} \sqrt{2x + 1}$.

Solución

(a) La expresión $\dfrac{x^2 + x + 4}{x^3 - 2x^2 + 7}$ está formada por combinaciones de la función básica x y la constante c utilizando sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. El Teorema 2 asegura que el límite de una combinación de este tipo es la misma combinación de los límites a y c de las funciones básicas, siempre que el límite del denominador no sea 0. Entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2 + x + 4}{x^3 - 2x^2 + 7} = \frac{a^2 + a + 4}{a^3 - 2a^2 + 7} \quad \text{siempre que } a^3 - 2a^2 + 7 \neq 0$$

(b) Aplicando el mismo argumento que en el caso (a) se puede demostrar que $\lim_{x\to 2}(2x+1)=2(2)+1=5$. Entonces, la regla de la potencia (regla 6 del Teorema 2) asegura que

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{2x+1}=\sqrt{5}$$

El resultado siguiente es un corolario inmediato del Teorema 2 (*véase* la Sección P.6, donde se presentan los polinomios y las funciones racionales).

TEOREMA 3 **Límites de polinomios y funciones racionales**

1. Si $P(x)$ es un polinomio y a es un número real cualquiera, entonces

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

2. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(a)\neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$$

El teorema del sándwich

El siguiente teorema posibilitará el cálculo de algunos límites muy importantes en los capítulos siguientes. Se denomina así porque se refiere a una función g cuyos valores están comprendidos entre los valores de otras dos funciones, f y h, ambas con límite L en el punto a. Como la función g está «atrapada» entre las otras dos funciones, sus valores deben aproximarse también a L (*véase* la Figura 1.8).

TEOREMA 4 **Teorema del sándwich**

Supongamos que la condición $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ se cumple para todo x perteneciente a un intervalo abierto que contiene al punto a, con la posible excepción del propio $x=a$. Supongamos también que

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$$

Entonces, también $\lim_{x\to a} g(x)=L$. Lo mismo se aplica para el caso de límites laterales por la izquierda y por la derecha.

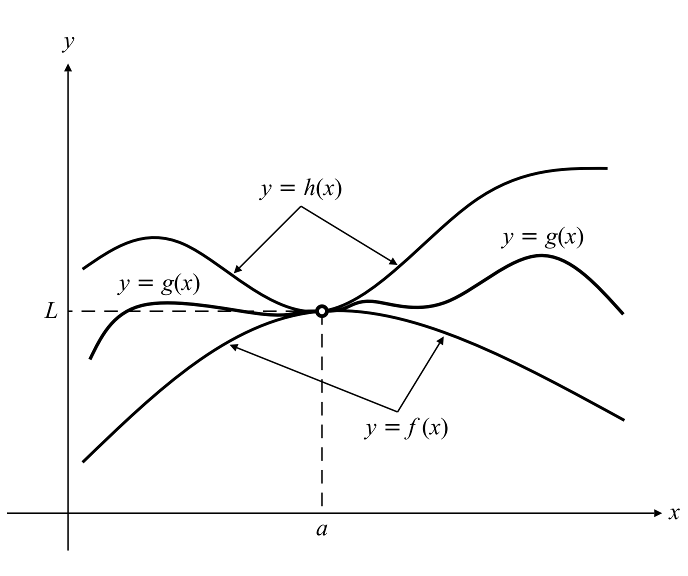


Figura 1.8 La gráfica de g está atrapada entre las de f y h.

Ejemplo 10 Dado que $3 - x^2 \leqslant u(x) \leqslant 3 + x^2$ para todo $x \neq 0$, calcule $\lim_{x\to 0} u(x)$.

Solución Como $\lim_{x\to 0}(3 - x^2) = 3$ y $\lim_{x\to 0}(3 + x^2) = 3$, el Teorema del Sándwich implica que $\lim_{x\to 0} u(x) = 3$.

Ejemplo 11 Demuestre que si $\lim_{x\to a}|f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Solución Como $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, y tanto $-|f(x)|$ como $|f(x)|$ tienen como límite 0 cuando x tiende a a, por el Teorema del Sándwich el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a debe ser también 0.

Ejercicios 1.2

1. Calcule (a) $\lim_{x\to -1} f(x)$, (b) $\lim_{x\to 0} f(x)$ y (c) $\lim_{x\to 1} f(x)$, siendo f la función cuya gráfica se muestra en la Figura 1.9.

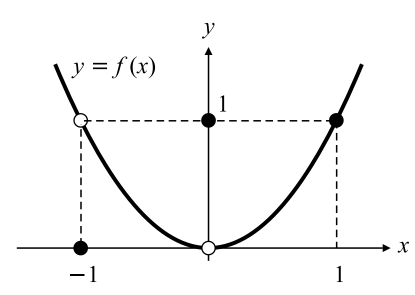


Figura 1.9

2. Dada la función $y = g(x)$ que se muestra en la Figura 1.10, calcule los siguientes límites, o explique por qué no existen.

(a) $\lim_{x\to 1} g(x)$, (b) $\lim_{x\to 2} g(x)$, (c) $\lim_{x\to 3} g(x)$

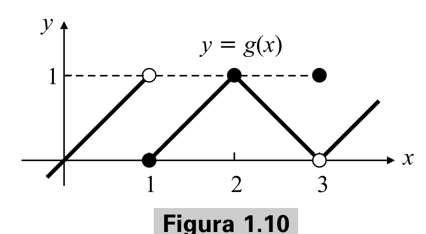


Figura 1.10

En los Ejercicios 3-6, calcule los límites laterales indicados de la función g cuya gráfica se muestra en la Figura 1.10.

3. $\lim\limits_{x\to 1-} g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to 1+} g(x)$

5. $\lim\limits_{x\to 3+} g(x)$

6. $\lim\limits_{x\to 3-} g(x)$

En los Ejercicios 7-36, calcule los límites o explique por qué no existen.

7. $\lim\limits_{x\to 4} (x^2 - 4x + 1)$

8. $\lim\limits_{x\to 2} 3(1 - x)(2 - x)$

9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x + 3}{x + 6}$

10. $\lim\limits_{t\to -4} \dfrac{t^2}{4 - t}$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

12. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

13. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$

14. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$

15. $\lim\limits_{h\to 2} \dfrac{1}{4 - h^2}$

16. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h + 4h^2}{h^2 - h^3}$

17. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

18. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{4 + h} - 2}{h}$

19. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{(x - \pi)^2}{\pi x}$

20. $\lim\limits_{x\to -2} |x - 2|$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

22. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

23. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^2 - 1}{t^2 - 2t + 1}$

24. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4 - 4x + x^2}}{x - 2}$

25. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sqrt{4 + t} - \sqrt{4 - t}}$

26. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$

27. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2 + 3t}{(t + 2)^2 - (t - 2)^2}$

28. $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{(s + 1)^2 - (s - 1)^2}{s}$

29. $\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y - 4\sqrt{y} + 3}{y^2 - 1}$

30. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$

31. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$

32. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x^{2/3} - 4}{x^{1/3} - 2}$

33. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{4}{x^2 - 4}\right)$

34. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x^2 - 4}\right)$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{x^2}$

36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|3x-1| - |3x+1|}{x}$

El límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ aparece frecuentemente en el estudio del cálculo (¿puede adivinar por qué?). Calcule dicho límite para las funciones f de los Ejercicios 37-42.

37. $f(x) = x^2$

38. $f(x) = x^3$

39. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

40. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

41. $f(x) = \sqrt{x}$

42. $f(x) = 1/\sqrt{x}$

Examine las gráficas de sen x y cos x de la Sección P.7 para determinar los límites de los Ejercicios 43-46.

43. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \operatorname{sen} x$

44. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \cos x$

45. $\lim\limits_{x \to \pi/3} \cos x$

46. $\lim\limits_{x \to 2\pi/3} \operatorname{sen} x$

47. Realice una tabla con los valores de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ para una secuencia de valores que se aproxime a 0, por ejemplo, ± 1.0, ± 0.1, ± 0.01, ± 0.001, ± 0.0001 y ± 0.00001. Asegúrese de que su calculadora está en *modo radianes* y no en modo grados. Estime el valor de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

48. Repita el Ejercicio 47 para $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

En los Ejercicios 49-60, obtenga los límites unilaterales indicados, o explique por qué no existen.

49. $\lim\limits_{x \to 2-} \sqrt{2 - x}$

50. $\lim\limits_{x \to 2+} \sqrt{2 - x}$

51. $\lim\limits_{x \to -2-} \sqrt{2 - x}$

52. $\lim\limits_{x \to -2+} \sqrt{2 - x}$

53. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^3 - x}$

54. $\lim\limits_{x \to 0-} \sqrt{x^3 - x}$

55. $\lim\limits_{x \to 0-} \sqrt{x^3 - x}$

56. $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x^2 - x^4}$

57. $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{|x - a|}{x^2 - a^2}$

58. $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{|x - a|}{x^2 - a^2}$

59. $\lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{x^2 - 4}{|x + 2|}$

60. $\lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{x^2 - 4}{|x + 2|}$

Los Ejercicios 61-64 se refieren a la función

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leqslant 0 \\ (x + \pi)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcule los límites que se indican.

61. $\lim\limits_{x \to -1-} f(x)$

62. $\lim\limits_{x \to -1+} f(x)$

63. $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$

64. $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$

65. Suponga que $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = -3$. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to 4} (g(x) + 3)$ (b) $\lim\limits_{x \to 4} x f(x)$

(c) $\lim\limits_{x \to 4} (g(x))^2$ (d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{g(x)}{f(x) - 1}$

66. Suponga que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -2$. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x))$ (b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$

(c) $\lim\limits_{x \to a} 4g(x)$ (d) $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x)$

67. Si $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$, calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

68. Si $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = -2$, calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

Uso de herramientas gráficas para el cálculo de límites

Se pueden utilizar calculadoras gráficas o programas de computador para calcular límites, al menos aproximadamente. Simplemente se amplía la ventana de gráficos de forma que muestre partes cada vez más pequeñas de la gráfica de la función cerca del punto donde se desea encontrar el límite. Calcule los límites siguientes utilizando técnicas gráficas. Obtenga la respuesta exacta donde piense que está justificado. En los demás casos, obtenga la respuesta exacta hasta 4 dígitos decimales. No olvide asegurarse de que la calculadora o el software que utilice están en modo radianes al utilizar funciones trigonométricas.

69. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ 

70. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{\operatorname{sen}(3\pi x)}$ 

71. $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x^2}}$

72. $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

73. Dibuje en la misma gráfica las funciones $y = x \operatorname{sen}(1/x)$, $y = x$ e $y = -x$ para $-0.2 \leqslant x \leqslant 0.2$, $-0.2 \leqslant y \leqslant 0.2$. Describa el comportamiento $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ de cerca de $x = 0$ ¿Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$, y si es así, cuál es su valor? ¿Podría haberse predicho este resultado observando la gráfica? ¿Por qué?

Uso del Teorema del Sándwich

74. Si $\sqrt{5 - 2x^2} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{5 - x^2}$ para $-1 \leqslant x \leqslant 1$, calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

75. Si $2 - x^2 \leqslant g(x) \leqslant 2 \cos x$ para todo x, calcule $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

76. (a) Dibuje las curvas $y = x^2$ e $y = x^4$ en la misma gráfica. ¿Dónde se cortan?

(b) La función $f(x)$ cumple:

$$\begin{cases} x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^4 & \text{si } x < -1 \text{ o } x > 1 \\ x^4 \leqslant f(x) \leqslant x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Calcule (i) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, (ii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, (iii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

77. ¿En qué intervalos es $x^{1/3} < x^3$? ¿En qué intervalos es $x^{1/3} > x^3$? Si la gráfica de $h(x)$ está siempre comprendida entre las gráficas de $y = x^{1/3}$ e $y = x^3$, ¿para qué valores de a se puede determinar el valor de $\lim_{x \to a} h(x)$? Calcule el límite para esos valores de a.

***78.** ¿Cuál es el dominio de $x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$? Calcule $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

***79.** Suponga que $|f(x)| \leqslant g(x)$ para todo x. ¿Qué se puede concluir de $\lim_{x \to a} f(x)$ si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$? ¿Y si $\lim_{x \to a} g(x) = 3$?

1.3 Límites en el infinito y límites infinitos

En esta sección vamos a extender el concepto de límite para contemplar dos situaciones no consideradas por las definiciones de límite y de límites laterales dadas en la sección anterior.

(i) Límites en el infinito, cuando x se hace arbitrariamente grande, positiva o negativa.
(ii) Límites infinitos, que no son realmente límites, pero que proporcionan un simbolismo útil para describir el comportamiento de funciones cuyos valores se hacen arbitrariamente grandes, positivos o negativos.

Límites en el infinito

Considere la función

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 1.11, y cuyos valores (redondeados hasta 7 decimales) se muestran en la Tabla 5. Los valores de $f(x)$ parecen acercarse a 1 a medida que x va tomando valores positivos más y más grandes, y parecen acercarse a -1 a medida que x toma valores negativos cada vez más y más grandes en valor absoluto (para confirmarlo, *véase* el Ejemplo 2 más adelante). Expresaremos este comportamiento escribiendo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1 \qquad \text{«}f(x) \text{ tiende a 1 cuando } x \text{ tiende a infinito».}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1 \qquad \text{«}f(x) \text{ tiende a } -1 \text{ cuando } x \text{ tiende a menos infinito».}$$

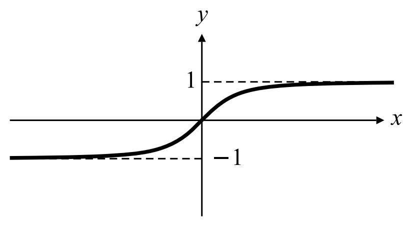


Figura 1.11 Gráfica de $x/\sqrt{x^2 + 1}$.

Tabla 5.

x	$f(x) = x/\sqrt{x^2+1}$
−1000	−0.9999995
−100	−0.9999500
−10	−0.9950372
−1	−0.7071068
0	0.0000000
1	−0.7071068
10	0.9950372
100	0.9999500
1000	0.9999995

La gráfica de f presenta este comportamiento límite ya que se aproxima a la recta horizontal $y = 1$ cuando x se mueve hacia la derecha, y a la recta $y = -1$ cuando x se mueve a la izquierda. Esas rectas se denominan **asíntotas horizontales** de la gráfica. En general, si una curva se aproxima a una línea recta cuando nos alejamos mucho del origen, esa recta se denomina **asíntota** de la curva.

DEFINICIÓN 3 **Límites en infinito y en menos infinito (definición informal)**

Si la función f está definida en un intervalo (a, ∞) y se puede asegurar que $f(x)$ se acerca tanto como se desee al número L cuando x se hace lo suficientemente grande, se dice que $f(x)$ **tiende al límite L cuando x tiende a infinito**, y se escribe

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Si la función f está definida en un intervalo $(-\infty, b)$ y se puede asegurar que $f(x)$ se acerca tanto como se desee al número M cuando x se hace negativo y lo suficientemente grande en valor absoluto, se dice que $f(x)$ **tiende al límite M cuando x tiende a menos infinito**, y se escribe

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$$

No debe olvidarse que el símbolo ∞, denominado **infinito**, *no* representa ningún número real. El ∞ no se puede utilizar de forma normal en aritmética, pero se puede utilizar la frase «tiende a ∞» para indicar que «se hace positivo y arbitrariamente grande», y la frase «tiende a $-\infty$» para indicar «se hace negativo y lo suficientemente grande en valor absoluto».

Ejemplo 1 En la Figura 1.12 se puede ver que $\lim_{x\to\infty} 1/x = \lim_{x\to-\infty} 1/x = 0$. Así, el eje x es una asíntota horizontal de $y = 1/x$.

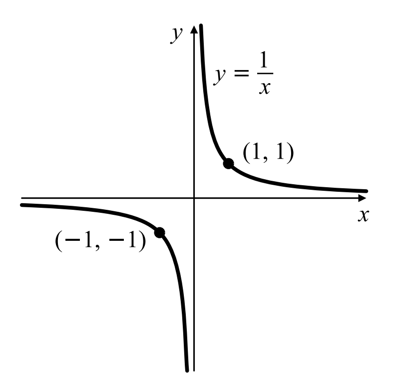


Figura 1.12 $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

■

Los teoremas de la Sección 1.2 tienen su equivalente para los límites en infinito o en menos infinito. En particular, del ejemplo anterior y de la regla del producto para límites se deduce que $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x^n = 0$ para todo entero positivo n. Utilizaremos este resultado en ejemplos posteriores. El Ejemplo 2 muestra cómo obtener los límites en $\pm\infty$ de la función $x/\sqrt{x^2+1}$ utilizando procedimientos algebraicos, sin necesidad de recurrir a construir una tabla de valores o una gráfica, como hicimos anteriormente.

Ejemplo 2 Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solución La ecuación de $f(x)$ se puede expresar como sigue:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{+\frac{1}{x^2}}} \qquad \text{Recuerde que } \sqrt{x^2} = |x|$$

$$= \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \qquad \text{siendo } \operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El factor $\sqrt{1 + (1/x^2)}$ tiende a 1 cuando x tiende a ∞ o a $-\infty$, por lo que los límites de $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$ coinciden con los de la función $\operatorname{sgn}(x)$. Por tanto (*véase* la Figura 1.11),

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

Límites en el infinito de funciones racionales

Los únicos polinomios que tienen límites en $\pm\infty$ son las constantes, $P(x) = c$. La situación es más interesante en el caso de funciones racionales. Recuérdese que una función racional es el cociente de dos polinomios. Los ejemplos que siguen ilustran cómo disponer una función de este tipo de forma que sus límites en infinito y menos infinito (si existen) se vean claramente. Para ello *se divide el numerador y el denominador por la potencia más alta de x que aparezca en el denominador*. Los límites de una función racional en infinito y en menos infinito, o bien no existen, o bien existen y son iguales.

Ejemplo 3 **(Numerador y denominador del mismo grado)** Evalúe $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{3x^2 + 5}$.

Solución Se divide el numerador y el denominador por x^2, que es la potencia más alta de x en el denominador:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{3x^2 + 5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - (1/x) + (3/x^2)}{3 + (5/x^2)} = \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 4 **(Grado del numerador menor que grado del denominador)** Evalúe $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x + 2}{2x^3 - 1}$.

Solución Se divide el numerador y el denominador por la potencia más alta de x en el denominador, concretamente x^3:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x + 2}{2x^3 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(5/x^2) + (2/x^3)}{2 - (1/x^3)} = \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0$$

El comportamiento límite de funciones racionales en infinito y menos infinito se resume a continuación.

La técnica utilizada en los ejemplos anteriores se puede aplicar también a clases más generales de funciones. La función del ejemplo que sigue no es racional, y el límite parece tomar el valor sin sentido de $\infty - \infty$, hasta que se resuelve el problema racionalizando el numerador.

Resumen de los límites en $\pm\infty$ de funciones racionales

Sean $P_m(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$ y $Q_n(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ dos polinomios de grados m y n, respectivamente, con $a_m \neq 0$ y $b_n \neq 0$. Entonces,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

(a) Es igual a cero si $m < n$.

(b) Es igual a $\dfrac{a_m}{b_n}$ si $m = n$.

(c) No existe si $m > n$.

Ejemplo 5 Calcule $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$.

Solución Se trata del límite de la diferencia de dos funciones, y las dos crecen arbitrariamente cuando x tiende a infinito. Se racionaliza la expresión multiplicando el numerador y el denominador (que es 1) por $\sqrt{x^2+x} + x$:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

(En este caso $\sqrt{x^2} = x$ porque $x > 0$ cuando $x \to \infty$). ■

Observación El cálculo de $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$ es más simple. Como $-x > 0$ cuando $x \to -\infty$, tenemos que $\sqrt{x^2+x} - x > \sqrt{x^2+x}$, que crece arbitrariamente cuando $x \to -\infty$. Por tanto, en este caso el límite no existe.

Límites infinitos

A veces se dice que una función cuyos valores crecen arbitrariamente tiene límite infinito. Como infinito no es ningún número, los límites infinitos no son realmente límites en absoluto, pero proporcionan una forma conveniente de describir el comportamiento de funciones que crecen arbitrariamente en valores positivos o negativos. Unos ejemplos permitirán aclarar esta terminología.

Ejemplo 6 **(Límite infinito por ambos lados)** Describa el comportamiento de la función $f(x) = 1/x^2$ en las proximidades de $x = 0$.

Solución A medida que x se acerca a 0 por cualquier lado, los valores de $f(x)$ son positivos y se hacen cada vez mayores (*véase* la Figura 1.13), por lo que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 *no existe*. No obstante, es conveniente describir el comportamiento de f cerca de 0 diciendo que $f(x)$ *tiende a* ∞ cuando x tiende a 0. Se escribe

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Nótese que escribir esto *no* equivale a decir que *exista* el $\lim_{x\to 0} 1/x^2$. Lo que realmente se está diciendo es que el límite *no existe porque* $1/x^2$ *se hace arbitrariamente grande a medida que* x *tiende a 0*. Obsérvese que la gráfica de f se aproxima al eje y a medida que x se aproxima a 0. El eje y es una **asíntota vertical** de la gráfica. ∎

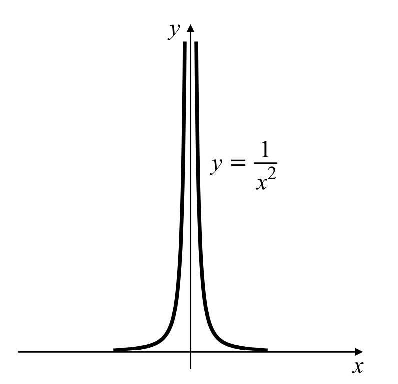


Figura 1.13 Gráfica de $y = 1/x^2$ (no está a escala).

Figura 1.14 $\lim_{x\to 0-} 1/x = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} 1/x = \infty$.

Ejemplo 7 **(Límites infinitos laterales)** Describa el comportamiento de la función $f(x) = 1/x$ en las proximidades de $x = 0$ (*véase* la Figura 1.14).

Solución A medida que x se acerca a 0 por la derecha, los valores de x son positivos y se hacen cada vez mayores, por lo que el límite por la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es infinito:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$$

Análogamente, los valores de $f(x)$ se van haciendo más y más negativos cuando x tiende a 0 por la izquierda, por lo que el límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es $-\infty$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$$

Las afirmaciones anteriores no dicen que *existan* los límites laterales. De hecho no existen porque ∞ y $-\infty$ no son números. Como los límites laterales no coinciden, lo único que podemos decir sobre $\lim_{x\to 0} f(x)$ es que no existe. ∎

Ejemplo 8 **(Comportamiento polinómico en el infinito)**

(a) $\lim_{x\to\infty} (3x^3 - x^2 + 2) = \infty$ (b) $\lim_{x\to -\infty} (3x^3 - x^2 + 2) = -\infty$

(c) $\lim_{x\to\infty} (x^4 - 5x^3 - x) = \infty$ (d) $\lim_{x\to -\infty} (x^4 - 5x^3 - x) = \infty$

Solución El término de mayor grado de un polinomio domina sobre los otros términos a medida que $|x|$ crece, de forma que los límites de dicho término en ∞ y $-\infty$ determinan los límites de todo el polinomio. Para los polinomios de los apartados (a) y (b) tenemos que

$$3x^3 - x^2 + 2 = 3x^3\left(1 - \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^3}\right)$$

El factor del paréntesis grande tiende a 1 cuando x tiende a $\pm\infty$, por lo que el comportamiento del polinomio es como el de su término de mayor grado $3x^3$. ∎

Ahora podemos decir algo más sobre los límites en infinito y menos infinito de una función racional con el grado del numerador mayor que el grado del denominador. Dijimos anteriormente en esta sección que dichos límites *no existen*. Esto es cierto, pero se puede asignar a esos límites el valor de ∞ o de $-\infty$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9 **(Función racional con numerador de mayor grado que denominador)** Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}$.

Solución Se divide el numerador y el denominador por x^2, que es la mayor potencia de x del denominador:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)}{1} = \infty$$

Un polinomio $Q(x)$ de grado n puede tener como máximo n *ceros*; es decir, hay como máximo n números reales r tales que $Q(r) = 0$. Si $Q(x)$ es el denominador de una función racional $R(x) = P(x)/Q(x)$, esta función estará definida para todo x excepto en el número finito de ceros de Q. En cada uno de esos ceros, $R(x)$ puede tener límites, límites infinitos o límites laterales infinitos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 10

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

(c) $\lim_{x\to 2+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$. (Los valores son negativos para $x > 2$, x cerca de 2).

(d) $\lim_{x\to 2-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$. (Los valores son positivos para $x < 2$, x cerca de 2).

(e) $\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)}$ no existe.

(f) $\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$

En los apartados (a) y (b) el efecto del cero del denominador en $x = 2$ se cancela porque el numerador también tiene un cero en ese mismo punto. Por tanto existe límite finito. No ocurre así en el apartado (f), porque el numerador sólo se anula una vez en ese punto, mientras que el denominador se anula tres veces.

Uso de Maple para calcular límites

El procedimiento `limit` de Maple se puede utilizar fácilmente para calcular límites, límites laterales, límites en el infinito y límites infinitos. Ésta es la sintaxis para calcular

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to a-} \frac{x^2-a^2}{|x-a|} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a+} \frac{x^2-a^2}{|x-a|}$$

```
> limit ((x^2-4)/(x^2-5*x+6) ,x=2);
```

$$-4$$

```
< limit (x*sin(x)/(1-cos(x)) ,x=0) ;
```

$$2$$

```
> limit (x/sqrt(x^2+1) ,x=-infinity) ;
```

$$-1$$

```
> limit (x/sqrt(x^2+1) ,x=infinity) ;
```

$$1$$

```
> limit (1/x,x=0) ; limit(1/x,x=0,left) ;
```

$$\mathit{undefined}$$

$$-\infty$$

```
> limit ((x^2-a^2)/(abs(x-a)) ,x=a,left) ;
```

$$-2a$$

```
> limit ((x^2-a^2)/(abs (x-a)) ,x=a,right) ;
```

$$2a$$

Ejercicios 1.3

Calcule los límites en los Ejercicios 1-10.

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x-3}$

2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-4}$

3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$

4. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2}{x-x^2}$

5. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2}$

6. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\operatorname{sen} x}{x^2+\cos x}$

7. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x+2\sqrt{x}}{1-x}$

8. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$

9. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$

10. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x-5}{|3x+2|}$

En los Ejercicios 11-34, calcule el límite que se indica. Si no existe, ¿es ∞, $-\infty$ o ninguna de las dos cosas?

11. $\lim_{x\to3} \dfrac{1}{3-x}$

12. $\lim_{x\to3} \dfrac{1}{(3-x)^2}$

13. $\lim_{x\to3-} \dfrac{1}{3-x}$

14. $\lim_{x\to3+} \dfrac{1}{3-x}$

15. $\lim_{x\to-5/2} \dfrac{2x+5}{5x+2}$

16. $\lim_{x\to-2/5} \dfrac{2x+5}{5x+2}$

17. $\lim_{x\to-(2/5)-} \dfrac{2x+5}{5x+2}$

18. $\lim_{x\to-(2/5)+} \dfrac{2x+5}{5x+2}$

19. $\lim_{x\to2+} \dfrac{x}{(2-x)^3}$

20. $\lim_{x\to1-} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

21. $\lim_{x\to1+} \dfrac{1}{|x-1|}$

22. $\lim_{x\to1-} \dfrac{1}{|x-1|}$

23. $\lim_{x\to2} \dfrac{x-3}{x^2-4x+4}$

24. $\lim_{x\to1+} \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x-x^2}$

25. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+x^3+x^5}{1+x^2+x^3}$

26. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3}{x^2+2}$

***27.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt{x+1}\,(1-\sqrt{2x+3})}{7-6x+4x^2}$

28. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

***29.** $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$

***30.** $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$

31. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}-x}$

32. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

33. ¿Cuáles son las asíntotas horizontales de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} - x}$? ¿Cuáles son sus asíntotas verticales?

34. ¿Cuáles son las asíntotas horizontales y verticales de $y = \dfrac{2x - 5}{|3x + 2|}$?

La función f cuya gráfica se muestra en la Figura 1.15 tiene dominio $[0, \infty)$. Calcule los límites de f que se indican en los Ejercicios 35-45.

35. $\lim_{x\to 0+} f(x)$ **36.** $\lim_{x\to 1} f(x)$

37. $\lim_{x\to 2+} f(x)$ **38.** $\lim_{x\to 2-} f(x)$

39. $\lim_{x\to 3-} f(x)$ **40.** $\lim_{x\to 3+} f(x)$

41. $\lim_{x\to 4+} f(x)$ **42.** $\lim_{x\to 4-} f(x)$

43. $\lim_{x\to 5+} f(x)$ **44.** $\lim_{x\to 5-} f(x)$

45. $\lim_{x\to \infty} f(x)$

46. ¿Qué asíntotas tiene la gráfica de la Figura 1.15?

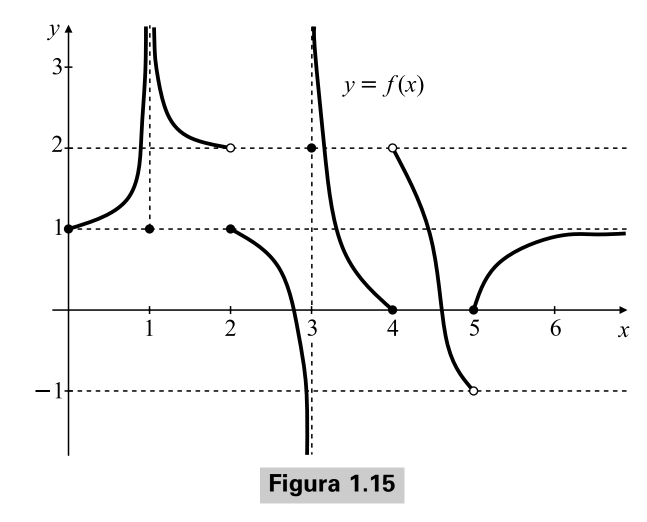


Figura 1.15

Los Ejercicios 47-52 se refieren a la función **máximo entero menor** $\lfloor x \rfloor$ que se muestra en la Figura 1.16. Calcule los límites indicados o explique por qué no existen.

47. $\lim_{x\to 3+} \lfloor x \rfloor$ **48.** $\lim_{x\to 3-} \lfloor x \rfloor$

49. $\lim_{x\to 3} \lfloor x \rfloor$ **50.** $\lim_{x\to 2.5} \lfloor x \rfloor$

51. $\lim_{x\to 0+} \lfloor 2 - x \rfloor$ **52.** $\lim_{x\to -3-} \lfloor x \rfloor$

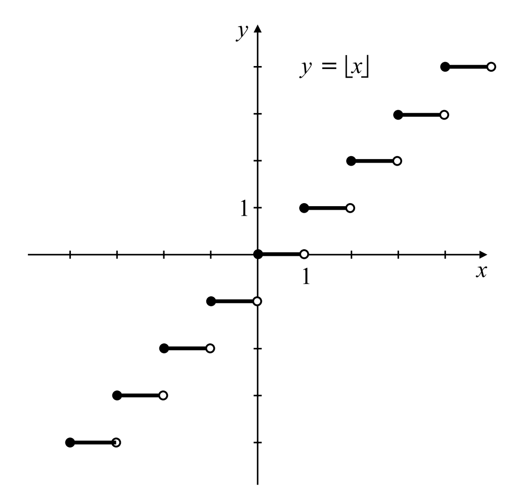


Figura 1.16

53. Aparcar en cierto parking cuesta 1.50 € por cara hora o fracción de hora. Dibuje la gráfica de la función $C(t)$, que representa el coste de aparcar t horas. ¿En qué valores de t tiene límite $C(t)$? Calcule $\lim_{t\to t_0-} C$ y $\lim_{t\to t_0+} C$ para un número arbitrario $t_0 > 0$.

54. Si $\lim_{x\to 0+} f(x) = L$, calcule $\lim_{x\to 0-} f(x)$ si (a) f es par, (b) f es impar.

55. Si $\lim_{x\to 0+} f(x) = A$ y $\lim_{x\to 0-} f(x) = B$, calcule

(a) $\lim_{x\to 0+} f(x^3 - x)$ (b) $\lim_{x\to 0-} f(x^3 - x)$

(c) $\lim_{x\to 0-} f(x^2 - x^4)$ (d) $\lim_{x\to 0+} f(x^2 - x^4)$

1.4 Continuidad

Cuando un coche recorre una autopista, su distancia a partir de un punto inicial varía con el tiempo de forma *continua*, mediante pequeños cambios en intervalos temporales pequeños. Pero no todas las magnitudes varían de esta forma. Cuando el coche está aparcado en un parking cuya tarifa es de «2 € por hora o fracción de hora» la tarifa permanece en 2 € durante la primera hora y cambia bruscamente a 4 € al comienzo de la segunda hora. La función que relaciona la tarifa del parking con el tiempo de aparcamiento es *discontinua* en cada hora. En esta sección vamos a definir la continuidad y aprenderemos a ver cuándo una función es continua. También examinaremos algunas propiedades importantes de las funciones continuas.

Continuidad en un punto

La mayor parte de las funciones que encontramos tienen un dominio formado por intervalos, o uniones de diferentes intervalos. Un punto P perteneciente al dominio de una función se denomina **punto interior** del dominio si pertenece a algún *intervalo abierto* contenido en el dominio. Si P no es un punto interior, se denomina **extremo** del dominio. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$, formado por los puntos interiores del intervalo $(-2, 2)$, el extremo izquierdo -2, y el extremo derecho 2. El dominio de la función $g(x) = 1/x$ es la unión de los intervalos abiertos $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, y está formado sólo por puntos interiores. Nótese que, aunque 0 es un extremo de ambos intervalos, no pertenece al dominio de g y, por tanto, no es un extremo de dicho dominio.

DEFINICIÓN 4 **Continuidad en un punto interior**

Se dice que una función f es **continua** en un punto interior c de su dominio si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Si no existe $\lim_{x \to c} f(x)$, o bien dicho límite no es igual a $f(c)$, se dice que f es **discontinua** en c.

En términos gráficos, f es continua en un punto interior c de su dominio si su gráfica no se interrumpe en el punto $(c, f(c))$; en otras palabras, si es posible seguir la gráfica de la función en ese punto sin levantar el lápiz del papel. Considérese la Figura 1.17. En (a), f es continua en c. En (b), f es discontinua en c porque $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$. En (c), f es discontinua en c porque no existe $\lim_{x \to c} f(x)$. En los casos (b) y (c) la gráfica de la función se interrumpe en $x = c$.

Aunque una función puede no tener límite en un extremo de su dominio, puede existir límite lateral en ese punto. Extenderemos la definición de continuidad para considerar esta situación.

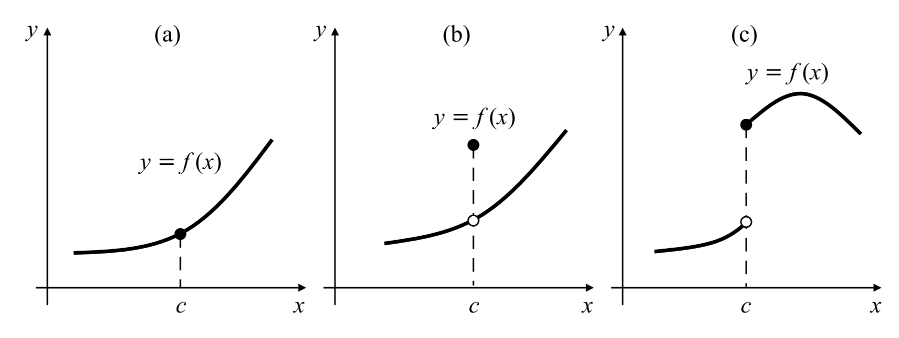


Figura 1.17 (a) f es continua en c.
(b) $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$.
(c) El $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

DEFINICIÓN 5 **Continuidad por la izquierda y por la derecha**

Se dice que una función f es **continua por la derecha** en c si $\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$.

Se dice que una función f es **continua por la izquierda** en c si $\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$.

Ejemplo 1 La función de Heaviside $H(x)$, cuya gráfica se muestra en la Figura 1.18, es continua para todo x excepto $x = 0$. Es continua por la derecha en 0, pero no es continua por la izquierda ni continua en ese punto. ■

Figura 1.18 La función de Heaviside.

El siguiente teorema relaciona los conceptos de continuidad y continuidad lateral.

TEOREMA 5 La función f es continua en c si y sólo si es continua por la izquierda y por la derecha en c.

DEFINICIÓN 6 Continuidad en un extremo

Se dice que una función f es continua en un extremo izquierdo c de su dominio si es continua por la derecha en c.

Se dice que una función f es continua en un extremo derecho c de su dominio si es continua por la izquierda en c.

Ejemplo 2 La función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ tiene dominio $[-2, 2]$. Es continua en el extremo derecho 2 porque es continua por la izquierda en ese punto, es decir, $\lim_{x\to 2-} f(x) = 0 = f(2)$. Es continua en el extremo izquierdo -2 porque es continua por la derecha en ese punto: $\lim_{x\to -2+} f(x) = 0 = f(-2)$. Por supuesto, f es también continua en cualquier punto interior de su dominio. Si $-2 < c < 2$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = \sqrt{4 - c^2} = f(c)$ (*véase* la Figura 1.19).

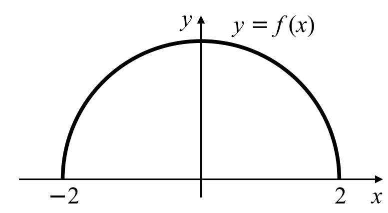


Figura 1.19 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua en todos los puntos de su dominio.

Continuidad en un intervalo

Hemos definido el concepto de continuidad en un punto. Es de mayor importancia el concepto de continuidad en un intervalo.

DEFINICIÓN 7 Continuidad en un intervalo

Se dice que una función f es **continua en intervalo** I si es continua en todos los puntos de I. En particular, se dice que una función f es una **función continua** si lo es en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo 3 La función $f(x) = \sqrt{x}$ es una función continua. Su dominio es $[0, \infty)$. Es continua en el extremo izquierdo 0 porque es continua por la derecha en ese punto. Asimismo, es continua en todo punto $c > 0$ ya que $\lim_{x\to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.

Ejemplo 4 La función $g(x) = 1/x$ es también una función continua. Esto puede parecer extraño a primera vista, puesto que su gráfica se interrumpe en $x = 0$ (*véase* la Figura 1.20). Sin embargo, el 0 no pertenece al dominio de g, por lo que es preferible decir que g no está definida en ese punto a decir que es discontinua en dicho punto (algunos autores dirían que g es discontinua en $x = 0$). Si asignáramos algún valor a $g(0)$, por ejemplo 0, podría decirse que $g(x)$ es discontinua en 0. No hay ninguna forma de definir $g(0)$ de manera que $g(x)$ sea continua en 0.

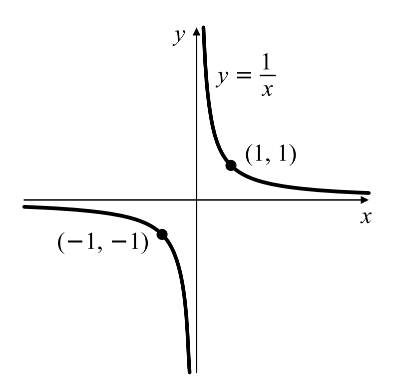


Figura 1.20 $1/x$ es continua en su dominio.

Ejemplo 5 La función máximo entero menor $\lfloor x \rfloor$ (*véase* la Figura 1.16) es continua en todo intervalo $[n, n+1)$, siendo n un entero. Es continua por la derecha para todo entero n, pero no es continua por la izquierda en esos puntos n, de forma que en los enteros es discontinua.

$$\lim_{x\to n+} \lfloor x \rfloor = n = \lfloor n \rfloor\ , \qquad \lim_{x\to n-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \neq n = \lfloor n \rfloor$$

Existen muchas funciones continuas

Las siguientes funciones son continuas allí donde estén definidas:

(a) Todos los polinomios.
(b) Todas las funciones racionales.
(c) Todas las potencias racionales $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$.
(d) Las funciones seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente, definidas en la Sección P.7.
(e) La función valor absoluto $|x|$.

El Teorema 3 de la Sección 1.2 asegura que todo polinomio es una función continua en cualquier punto de la recta real, que toda función racional es continua en todos los puntos de su dominio (formado por todos los números reales excepto el número finito de puntos para los que el denominador de la función racional se anula). Si m y n son enteros y $n \neq 0$, la función potencia racional $x^{m/n}$ está definida para todos los números positivos y también para todos los números negativos si n es impar. Su dominio incluye al 0 si y sólo si $m/n \geqslant 0$.

Los siguientes teoremas muestran que si se combinan funciones continuas de diversas formas, el resultado será a su vez una función continua.

TEOREMA 6 **Combinación de funciones continuas**

Si las funciones f y g están definidas en un intervalo que contiene a c, y son ambas continuas en c, entonces las siguientes funciones serán también continuas en c:

1. La suma $f + g$ y la diferencia $f - g$.

2. El producto fg.
3. La multiplicación por una constante kf, siendo k un número cualquiera.
4. El cociente f/g (siempre que $g(c) \neq 0$).
5. La raíz n-ésima $(f(x))^{1/n}$, siempre que $f(c) > 0$ si n es par.

Para las demostraciones se utilizan las reglas de los límites dadas en el Teorema 2 de la Sección 1.2. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = f(c) + g(c)$$

por lo que $f + g$ es continua en c.

TEOREMA 7 **La composición de funciones continuas es también continua**

Si $f(g(x))$ está definida en un intervalo que contiene a c, f es continua en L y $\lim_{x \to c} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x \to c} g(x))$$

En particular, si g es continua en c (y por tanto $L = g(c)$), entonces la composición $f \circ g$ es continua en c:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(g(c))$$

(*véase* el Ejercicio 37 de la Sección 1.5).

Ejemplo 6 Las siguientes funciones son continuas en todos sus dominios:

(a) $3x^2 - 2x$ (b) $\dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$ (c) $|x^2 - 1|$

(d) $\sqrt{x}$ (e) $\sqrt{x^2 - 2x - 5}$ (f) $\dfrac{|x|}{\sqrt{|x + 2|}}$

Extensiones continuas y discontinuidades evitables

Como hemos visto en la Sección 1.2, una función racional puede tener límite incluso en un punto donde su denominador sea 0. Si $f(c)$ no está definida, pero existe $\lim_{x \to c} f(x) = L$, se puede definir una nueva función $F(x)$ de la siguiente forma:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \text{ está en el dominio de } f \\ L & \text{si } x = c \end{cases}$$

$F(x)$ es continua en $x = c$ y se denomina **extensión continua** de $f(x)$ en $x = c$. Para el caso de funciones racionales f, sus extensiones continuas se obtienen cancelando los factores comunes.

Ejemplo 7 Demuestre que $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ tiene una extensión continua en $x = 1$, y obtenga dicha extensión.

Solución Aunque $f(1)$ no está definida, si $x \neq 1$ tenemos que

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}$$

La función

$$F(x) = \frac{x}{x+1}$$

es igual a $f(x)$ para $x \neq 1$, pero es también continua en $x = 1$, donde toma el valor de 1/2. La Figura 1.21 muestra la gráfica de f. La extensión continua de $f(x)$ en $x = 1$ es $F(x)$. Su gráfica es idéntica a la de $f(x)$ pero sin el hueco en el punto (1, 1/2).

Si una función f está indefinida o es discontinua en un punto a, pero puede ser redefinida en *ese único punto* de forma que sea continua en él, se dice que f tiene una **discontinuidad evitable** en a. La función f del ejemplo anterior tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$. Para evitarla, se define $f(1) = 1/2$.

Ejemplo 8 La función $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$. Para evitarla, se redefine $g(2) = 2$ (*véase* la Figura 1.22).

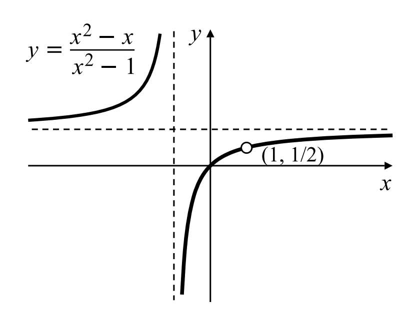


Figura 1.21 Esta función tiene una extensión continua en $x = 1$.

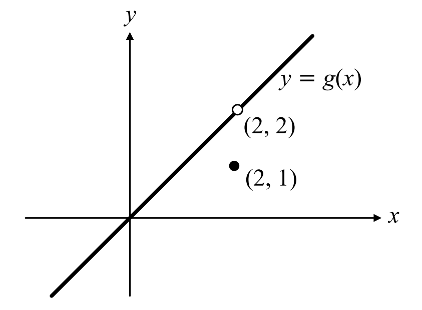


Figura 1.22 g tiene una discontinuidad evitable en 2.

Funciones continuas en intervalos cerrados y finitos

Las funciones continuas definidas en *intervalos cerrados y finitos* tienen propiedades especiales que las hacen particularmente útiles en matemáticas y sus aplicaciones. Presentaremos aquí dos de esas propiedades. Aunque pueden parecer obvias, se trata de propiedades mucho más sutiles que los resultados sobre límites establecidos anteriormente en este capítulo. Sus demostraciones (*véase* el Apéndice III) requieren un estudio cuidadoso de las implicaciones de la propiedad de completitud de los números reales.

La primera de las propiedades establece que una función $f(x)$ que es continua en un intervalo cerrado y finito $[a, b]$ debe tener un **valor máximo absoluto** y un **valor mínimo absoluto**. Esto significa que los valores de $f(x)$ en todos los puntos del intervalo están entre los valores de $f(x)$ en dos puntos del intervalo. La gráfica de f tiene un valor máximo y un valor mínimo.

TEOREMA 8 **Teorema Max-Min**

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado y finito $[a, b]$. Entonces existen dos números p y q en $[a, b]$ tales que para todo x perteneciente al intervalo $[a, b]$,

$$f(p) \leqslant f(x) \leqslant f(q)$$

Por tanto, $f(x)$ tiene el valor mínimo absoluto $m = f(p)$, que se alcanza en el punto p, y el valor máximo absoluto $M = f(q)$, que se alcanza en el punto q.

Muchos problemas importantes en matemáticas y sus aplicaciones se formulan como la búsqueda de valores máximos y mínimos de funciones. El cálculo proporciona algunas herramientas muy valiosas para resolver estos problemas. Obsérvese, sin embargo, que el teorema anterior simplemente establece que los valores máximo y mínimo absolutos *existen*, pero no dice cómo obtenerlos. En el Capítulo 4 desarrollaremos técnicas para calcular los valores máximos y mínimos de funciones. Por ahora, lo que podemos hacer es resolver algunos problemas sencillos de máximos y mínimos en los que intervienen funciones cuadráticas simplemente completando el cuadrado, sin realizar cálculos adicionales.

Ejemplo 9 ¿Cuál es la máxima área posible del campo rectangular que se puede acotar con 200 m de valla?

Solución Si denominamos x e y a los lados del campo en metros (*véase* la Figura 1.23), entonces su perímetro mide $2x + 2y$ m, y su área es $A = xy$ m^2. El dato es que $P = 200$, de forma que $x + y = 100$, e $y = 100 - x$. Ningún lado puede ser negativo, y x debe pertenecer al intervalo cerrado [0, 100]. El área del campo se puede expresar como una función de x sustituyendo y por $100 - x$:

$$A = x(100 - x) = 100x - x^2$$

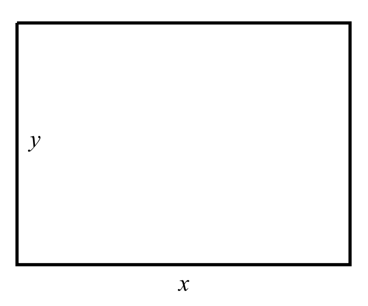


Figura 1.23 Campo rectangular: perímetro $= 2x + 2y$, área $= xy$.

El objetivo es, por tanto, obtener el valor máximo de la función cuadrática $A(x) = 100x - x^2$ en el intervalo [0, 100]. El Teorema 8 garantiza la existencia de ese máximo.

Para obtener el máximo, completamos el cuadrado de la función $A(x)$. Obsérvese que $x^2 - 100x$ son los dos primeros términos del cuadrado $(x - 50)^2 = x^2 - 100x + 2500$. Por tanto,

$$A(x) = 2500 - (x - 50)^2$$

Obsérvese ahora que $A(50) = 2500$, y que $A(x) < 2500$ si $x \neq 50$, ya que se está restando a 2500 un número siempre positivo $(x - 50)^2$. Por tanto, el valor máximo de $A(x)$ es 2500. El valor del área máxima del campo es de 2500 m^2 y se trata de un cuadrado de dimensiones $x = y = 50$ m. ■

El Teorema 8 implica que una función continua en un intervalo cerrado y finito está **acotada**. Esto significa que no puede tomar valores positivos o negativos arbitrariamente grandes. Debe existir un número K tal que

$$|f(x)| \leqslant K, \quad \text{es decir,} \quad -K \leqslant f(x) \leqslant K$$

De hecho, el valor de K puede ser el mayor de los números $|f(p)|$ y $|f(q)|$ en el teorema.

Las conclusiones del Teorema 8 pueden no cumplirse si f no es continua o si el intervalo no es cerrado. Las Figuras 1.24-1.27 muestran ejemplos de la forma en que puede no cumplirse el teorema.

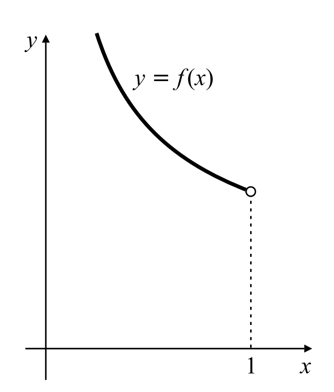


Figura 1.24 $f(x) = 1/x$ es continua en el intervalo abierto (0, 1). No está acotada y no tiene valor máximo ni mínimo.

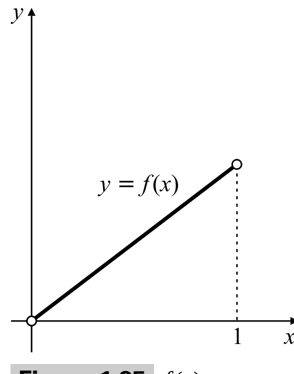


Figura 1.25 $f(x) = x$ es continua en el intervalo abierto (0, 1). Está acotada pero no tiene valor máximo ni mínimo.

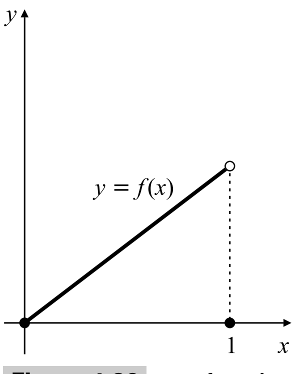


Figura 1.26 Esta función está definida en el intervalo cerrado [0, 1] pero es discontinua en el extremo $x = 1$. Tiene valor mínimo pero no tiene valor máximo.

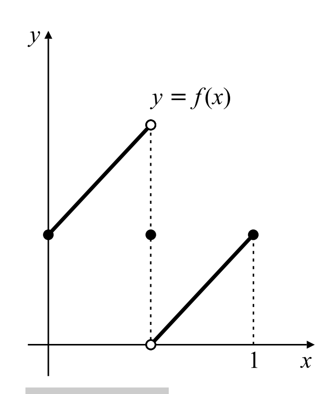


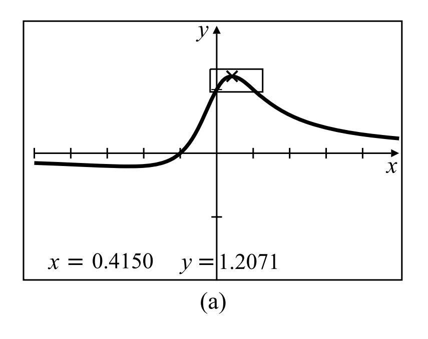
Figura 1.27 Esta función es discontinua en un punto interior de su dominio, el intervalo cerrado [0, 1]. Está acotada pero no tiene valores máximo ni mínimo.

Obtención de máximos y mínimos por métodos gráficos

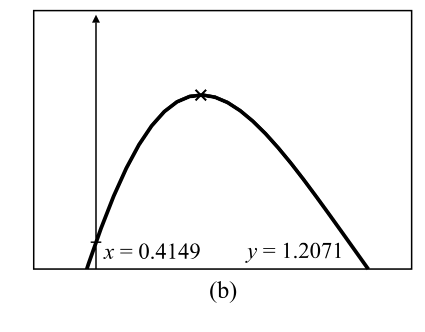
Observación Se pueden utilizar herramientas gráficas para obtener los valores máximos y mínimos de funciones en intervalos donde sean continuas. Concretamente, la función «zoom» y la utilidad «trace» de las calculadoras gráficas pueden servir de ayuda. La Figura 1.28(a) muestra la gráfica de la función

$$y = f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

en la ventana $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$. Obsérvese que f parece tener un máximo cerca de $x = 0.5$ y un mínimo cerca de $x = -2.5$. La Figura 1.28(b) muestra el resultado de ampliar la parte de la gráfica de (a) encerrada en un pequeño rectángulo (zoom) para que ocupe toda la pantalla. Siguiendo la curva hasta su valor máximo se puede obtener una estimación más precisa de dicho valor, obteniéndose que $f(x)$ alcanza un valor máximo de 1.2071 en el punto $x = 0.4149$, con cuatro decimales significativos. Si ampliáramos más la figura se podría obtener más exactitud.



(a)



(b)

Figura 1.28 La utilización de la función «zoom» permite ampliar parte de la curva (a) cerca de su valor máximo de forma que ocupe toda la pantalla (b), manteniendo la forma de la curva.

La segunda propiedad de una función continua definida en un intervalo cerrado y finito es que la función toma todos los valores intermedios entre dos cualesquiera de sus valores. Esta propiedad se conoce con el nombre de **Teorema del Valor Medio**.

TEOREMA 9 **Teorema del Valor Medio**

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado y finito $[a, b]$, y sea s un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. Existe un número c perteneciente al intervalo $[a, b]$ tal que $f(c) = s$.

En particular, una función continua definida en un intervalo cerrado toma todos los valores entre su valor mínimo m y su valor máximo M, por lo que su rango es el intervalo cerrado $[m, M]$.

La Figura 1.29 muestra una situación típica. Los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ están en lados contrarios de la recta horizontal $y = s$. A no ser que se interrumpa, la gráfica de $y = f(x)$ debe cortar esta recta para ir de un punto al otro. En la figura, la recta se cruza sólo una vez, en $x = c$. Si la recta $y = s$ estuviera más arriba, podría haber hasta tres cruces en tres valores posibles de c.

El Teorema 9 es la razón por la que la gráfica de una función continua en un intervalo I no puede tener interrupciones. Debe ser **conexa**, es decir, una curva sin interrupciones ni saltos.

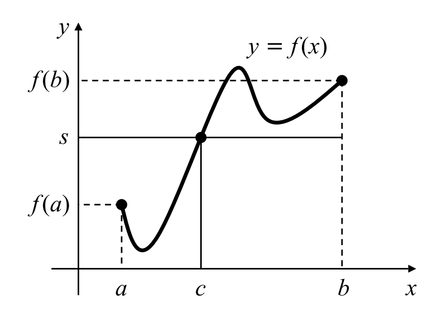


Figura 1.29 La función continua f toma el valor s en algún punto c entre a y b.

Ejemplo 10 Determine los intervalos en los que $f(x) = x^3 - 4x$ es positiva y negativa.

Solución Como $f(x) = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$, $f(x) = 0$ sólo en $x = 0$, 2 y -2. Como $f(x)$ es continua en toda la recta real, su signo debe ser constante en cada uno de los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$ (si existieran en esos intervalos, por ejemplo en el $(0, 2)$, puntos a y b tales que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces, por el Teorema del Valor Medio debería existir un punto c entre a y b, y por tanto entre 0 y 2, tal que $f(c) = 0$. Pero sabemos que no hay ninguna raíz entre 0 y 2).

Para saber si $f(x)$ es positiva o negativa en cada intervalo, basta con escoger un punto de intervalo y evaluar f en dicho punto.

Como $f(-3) = -15 < 0$, $f(x)$ es negativa en $(-\infty, -2)$.

Como $f(-1) = 3 > 0$, $f(x)$ es positiva en $(-2, 0)$.

Como $f(1) = -3 < 0$, $f(x)$ es negativa en $(0, 2)$.

Como $f(3) = 15 > 0$, $f(x)$ es positiva en $(2, \infty)$.

Cálculo de raíces de ecuaciones

Entre las muchas herramientas útiles que proporciona el cálculo existen unas que permiten calcular las soluciones de una ecuación de la forma $f(x) = 0$ con el grado de exactitud que se desee. Estas soluciones se denominan **raíces** de la ecuación, o **ceros** de la función f. El uso de estas herramientas requiere conocer previamente que la ecuación tiene una solución en un determinado intervalo. El teorema del valor medio puede proporcionar esta información.

Ejemplo 11 Demuestre que la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo [1, 2].

Solución La función $f(x) = x^3 - x - 1$ es un polinomio y, por tanto, es continua en todo punto. Tenemos que $f(1) = -1$ y $f(2) = 5$. Como 0 es un valor entre -1 y 5, el teorema del valor medio nos asegura que debe existir un número c en el intervalo [1, 2] tal que $f(c) = 0$. ■

Un método para calcular un cero de una función continua que cambia de signo en los extremos de un intervalo se basa en dividir sucesivas veces el intervalo por la mitad (método de la bisección), determinando en qué mitad de la división está la raíz, que será aquella mitad en la que la función en sus extremos presente signos opuestos. Este método es lento. Por ejemplo, si el intervalo original tuviera de longitud 1, llevaría 11 divisiones conseguir un intervalo cuya longitud fuese menor que 0.0005 (porque $2^{11} > 2000 = 1/(0.0005)$), asegurándonos por tanto que hemos encontrado la raíz con una precisión de tres dígitos decimales. Sin embargo, este método no requiere hardware gráfico y se puede realizar de forma sencilla con una calculadora, preferiblemente una en la que la expresión de la función se pueda programar.

Tabla 6. Método de la bisección para $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

Número de bisección	x	$f(x)$	Intervalo de la raíz	Punto medio
	1	−1		
	2	5	[1, 2]	1.5
1	1.5	0.8750	[1, 1.5]	1.25
2	1.25	−0.2969	[1.25, 1.5]	1.375
3	1.375	0.2246	[1.25, 1.375]	1.3125
4	1.3125	−0.0515	[1.3125, 1.375]	1.3438
5	1.3438	0.0826	[1.3125, 1.3438]	1.3282
6	1.3282	0.0147	[1.3125, 1.3282]	1.3204
7	1.3204	−0.0186	[1.3204, 1.3282]	1.3243
8	1.3243	−0.0018	[1.3243, 1.3282]	1.3263
9	1.3263	0.0065	[1.3243, 1.3263]	1.3253
10	1.3253	0.0025	[1.3243, 1.3253]	1.3248
11	1.3248	0.0003	[1.3243, 1.3248]	1.3246
12	1.3246	−0.0007	[1.3246, 1.3248]	

Ejemplo 12 **(Método de la bisección)** Resuelva la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ del Ejemplo 11 con una precisión de tres dígitos decimales.

Solución Comenzamos por recordar que existe una raíz en el intervalo [1, 2]. La Tabla 6 muestra los resultados de las bisecciones.

La raíz es 1.325, redondeada a 3 dígitos decimales. En la Sección 4.6 veremos que el cálculo proporciona métodos mucho más rápidos para resolver ecuaciones como ésta. ■

La ecuación $f(x) = 0$ se puede resolver también con herramientas gráficas. Basta con dibujar la función $f(x)$ en un intervalo lo suficientemente grande para ver más o menos dónde están los ceros. Se seleccionan los ceros de uno en uno y se va ampliando la parte de la ventana cerca del cero para que ocupe toda la ventana gráfica (*véase* la Figura 1.30). Este procedimiento se repite hasta que se pueda estimar el cero con la precisión deseada (o hasta que la calculadora u ordenador lo permitan).

Muchas calculadoras programables y paquetes software de álgebra por computador incorporan rutinas de resolución de ecuaciones. Por ejemplo, la rutina `fsolve` de Maple se puede utilizar para calcular la solución real de $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo [1, 2] (*véase* el Ejemplo 11).

```
> fsolve(x^3-x-1=0, x=1..2);
```

$$1.324717957$$

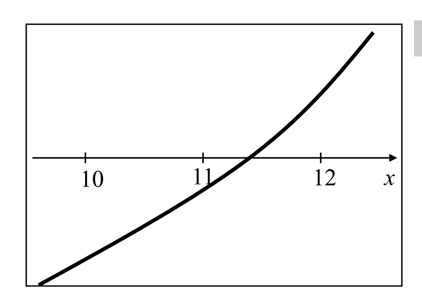


Figura 1.30 La función que se muestra en la ventana superior tiene una raíz entre 11 y 12. El rectángulo pequeño se amplía hasta llenar toda la pantalla en la ventana inferior, lo que permite estimar que la raíz está alrededor de 11.4. Sucesivas ampliaciones permitirían aumentar la precisión.

Observación El teorema Max-Min y el Teorema del Valor Medio son ejemplos de lo que los matemáticos denominan **teoremas de existencia**. Este tipo de teoremas aseveran que algo existe, pero no nos dicen cómo calcularlo. Muchas veces los estudiantes creen que los matemáticos se preocupan mucho por demostrar que un problema tiene solución y no lo bastante para encontrar dicha solución. El argumento es el siguiente: «Si puedo encontrar la solución de un problema, no necesito preocuparme de si esa solución existe». Esta lógica, sin embargo, es falsa. Supongamos el problema «Calcule el máximo entero positivo». Por supuesto, se trata de un problema sin solución. No existe un entero positivo máximo porque siempre se puede sumar a un entero positivo otro entero positivo, con lo que se obtiene un entero positivo mayor. Supongamos, aun así, que olvidamos esto e intentamos calcular una solución. Podríamos proceder así:

Sea N el máximo entero positivo.
Como 1 es un entero positivo, debe cumplirse que $N \geqslant 1$.
Como N^2 es un entero positivo, no puede ser mayor que el máximo entero positivo.
Por tanto, $N^2 \leqslant N$ y $N^2 - N \leqslant 0$.
Entonces, $N(N-1) \leqslant 0$ y debe ser $N - 1 \leqslant 0$.
Por tanto, $N \leqslant 1$.
Sabemos ya que $N \geqslant 1$. Por tanto, $N = 1$.
Por consiguiente, 1 es el máximo entero positivo.

El único error de este razonamiento es el supuesto, en la primera línea, de que el problema tiene solución. En parte, es para evitar estas trampas lógicas por lo que los matemáticos demuestran los teoremas de existencia.

Ejercicios 1.4

Los Ejercicios 1-3 se refieren a la función g definida en el intervalo $[-2, 2]$ que se muestra en la Figura 1.31.

1. Indique si g es (a) continua, (b) continua por la izquierda, (c) continua por la derecha y (d) discontinua en cada uno de los puntos -2, -1, 0, 1 y 2.

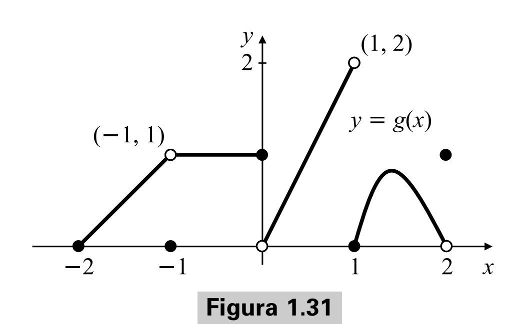


Figura 1.31

2. ¿En qué puntos de su dominio posee g una discontinuidad evitable, y cómo se podría redefinir para que fuera continua en dichos puntos?

3. ¿Tiene g un máximo absoluto en $[-2, 2]$? ¿Y un mínimo absoluto?

4. ¿En qué puntos es la función f, cuya gráfica se muestra en la Figura 1.32, discontinua? ¿En cuáles de esos puntos es continua por la izquierda? ¿Y continua por la derecha?

5. ¿Podría redefinirse la función f de la Figura 1.32 en el punto $x = 1$ de forma que fuera continua en dicho punto?

6. La función $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ no es continua ni discontinua en $x = 0$. ¿Cómo es esto posible?

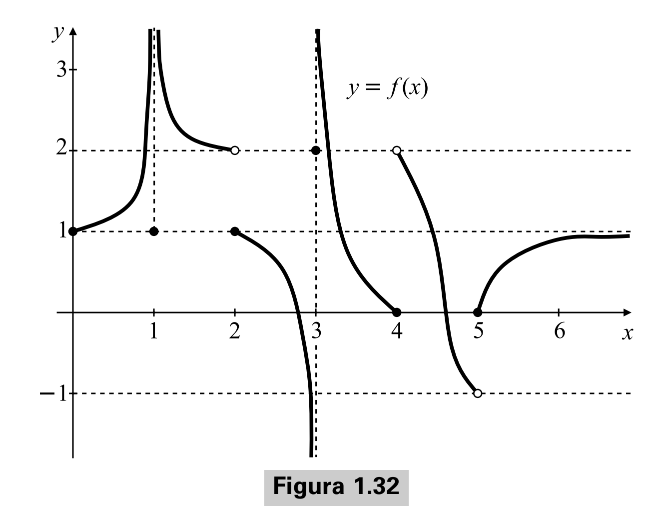


Figura 1.32

En los Ejercicios 7-12, indique en qué puntos de sus dominios las funciones dadas son continuas, continuas por la izquierda o por la derecha y discontinuas.

7. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 0.987 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

11. La función mínimo entero mayor $\lceil x \rceil$ del Ejemplo 11 de la Sección P.5.

12. La función de coste $C(t)$ del Ejercicio 53 de la Sección 1.3.

En los Ejercicios 13-16, ¿cómo debería definirse la función en el punto dado para que fuera continua en dicho punto? Obtenga una fórmula para la extensión continua en dicho punto.

13. $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ para $x = 2$

14. $\dfrac{1 + t^3}{1 - t^2}$ para $t = -1$

15. $\dfrac{t^2 - 5t + 6}{t^2 - t - 6}$ para 3

16. $\dfrac{x^2 - 2}{x^4 - 4}$ para $\sqrt{2}$

17. Obtenga k para que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea una función continua.

18. Obtenga m para que $g(x) = \begin{cases} x - m & \text{si } x < 3 \\ 1 - mx & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ sea una función continua para todo x.

19. ¿Tiene la función x^2 un valor máximo en el intervalo abierto $-1 < x < 1$? ¿Y un valor mínimo? Explique el motivo.

20. La función de Heaviside del Ejemplo 1 tiene un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$, pero no es continua en dicho intervalo. ¿Representa esto una violación del teorema Max-Min? ¿Por qué?

En los Ejercicios 21-24 se piden los valores máximo y mínimo de varias funciones. Se pueden resolver utilizando el método del Ejemplo 9.

21. La suma de dos números no negativos vale 8. ¿Cuál es el máximo valor posible de su producto?

22. La suma de dos números no negativos vale 8. ¿Cuál es (a) el valor mínimo y (b) el valor máximo de la suma de sus cuadrados?

23. Una compañía de software estima que si asigna x programadores para trabajar en un proyecto, puede desarrollar un nuevo producto en T días, siendo

$$T = 100 - 30x + 3x^2$$

¿Cuántos programadores debe asignar la compañía para terminar el producto lo más rápidamente posible?

24. El coste de un fabricante de pupitres para enviar x pupitres a su almacén es de $245x - 30x^2 + x^3$. ¿Cuántos pupitres debería incluir en cada envío para minimizar el coste medio por pupitre?

Calcule los intervalos en los que las funciones $f(x)$ de los Ejercicios 25-28 son positivas y negativas.

25. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

26. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

27. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3}$

29. Demuestre que $f(x) = x^3 + x - 1$ tiene un cero entre $x = 0$ y $x = 1$.

30. Demuestre que la ecuación $x^3 - 15x + 1 = 0$ tiene tres soluciones en el intervalo $[-4, 4]$.

31. Demuestre que la función $F(x) = (x - a)^2(x - b)^2 + x$ toma el valor $(a + b)/2$ en algún punto x.

32. **(Un teorema del punto fijo)** Suponga que f es una función continua en el intervalo $[0, 1]$ y que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo x perteneciente a $[0, 1]$. Demuestre que debe existir un número c en $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$ (c se denomina punto fijo de la función f). *Sugerencia:* si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, el resultado queda demostrado. Si no es así, aplíquese el teorema del valor medio a la función $g(x) = f(x) - x$.

33. Si una función par f es continua por la derecha en $x = 0$, demuestre que es continua en $x = 0$.

34. Si una función impar f es continua por la derecha en $x = 0$, demuestre que es continua en $x = 0$, y que cumple $f(0) = 0$.

Utilice una herramienta gráfica para obtener los valores de los máximos y los mínimos de las funciones de los Ejercicios 35-38, y los puntos x donde se producen. Obtenga todas las respuestas con una precisión de 3 dígitos decimales.

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^4 + 1}$ en $[-5, 5]$

36. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{6 + x}$ en $[-\pi, \pi]$

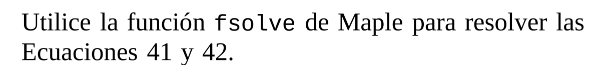
37. $f(x) = x^2 + \dfrac{4}{x}$ en $[1, 3]$

38. $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) + x(\cos(\pi x) + 1)$ en $[0, 1]$

Utilice una herramienta gráfica o una calculadora programable y el método de la bisección para resolver las ecuaciones de los Ejercicios 39 y 40 con una precisión de tres dígitos decimales. Como primer paso, intente obtener un intervalo en el que pueda asegurar que hay una raíz.

39. $x^3 + x - 1 = 0$

40. $\cos x - x = 0$



Utilice la función `fsolve` de Maple para resolver las Ecuaciones 41 y 42.

41. $\operatorname{sen} x + 1 - x^2 = 0$ (dos raíces)

42. $x^4 - x - 1 = 0$ (dos raíces)

43. Investigue la diferencia entre las rutinas de Maple `fsolve (f,x)`,`solve(f,x)`, y `evalf (solve(f,x))`, donde `f := x^3-x-1=0`.
Nótese que no se especifica un intervalo de x.

1.5 Definición formal de límite

El material de esta sección es opcional.

La definición *informal* de límite dada en la Sección 1.2 no es lo suficientemente precisa para permitirnos demostrar resultados sobre límites como los Teoremas 2-4 de la Sección 1.2. La definición *formal* más precisa se basa en la idea de controlar la entrada x de una función f de forma que la salida $f(x)$ esté en un intervalo determinado.

Ejemplo 1 El área de un disco circular de radio r es $A = \pi r^2$ cm^2. Un mecánico debe fabricar un disco circular de metal con un área de 400π cm^2, con una tolerancia de ± 5 cm^2. ¿Con qué tolerancia sobre 20 cm debe controlar el mecánico el radio del disco para lograr ese objetivo?

Solución El mecánico quiere obtener $|\pi r^2 - 400\pi| < 5$, es decir,

$$400\pi - 5 < \pi r^2 < 400\pi + 5$$

o bien

$$\sqrt{400 - (5/\pi)} < r < \sqrt{400 + (5/\pi)}$$

$$19.96017 < r < 20.03975$$

Es decir, el mecánico necesita $|r - 20| < 0.03975$; por lo que debe asegurar que el radio del disco dista menos de 0.04 cm del valor de 20 cm, para que el área del disco esté dentro del nivel de tolerancia. ■

Cuando se dice que $f(x)$ tiene como límite L cuando x tiende a a, lo que realmente se dice es que es posible asegurar que el *error* $|f(x) - L|$ será menor que *cualquier* tolerancia admisible, no importa lo pequeña que sea, si x está lo *suficientemente cerca* de a (pero no es igual a a). Es tradicional utilizar ε (la letra griega «épsilon») para expresar el tamaño del *error* admisible y δ (la letra griega «delta») para expresar la diferencia $x - a$ que indica lo cerca que debe estar x de a para cumplir con la tolerancia. Éstas son las letras que Cauchy y Weierstrass utilizaron en su trabajo pionero del siglo XIX sobre límites y continuidad.

Si ε es un número positivo, *todo lo pequeño que se quiera*, debemos ser capaces de asegurar que $|f(x) - L| < \varepsilon$ haciendo que x esté lo *suficientemente cerca* de a (pero no sea igual a a). ¿Cuánto es lo suficientemente cerca? Es suficiente que la distancia $|x - a|$ entre x y a sea menor que un número positivo δ que depende de ε (*véase* la Figura 1.33). Si se puede encontrar el valor de δ para todo ε positivo, se puede concluir que $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

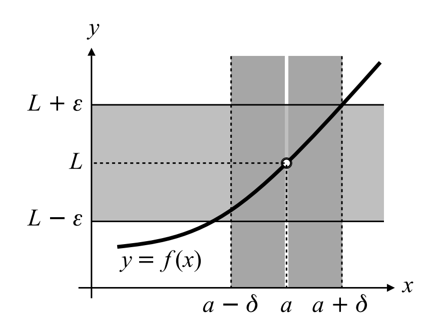


Figura 1.33 Si $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

DEFINICIÓN 8 Definición formal de límite

Se dice que una función f **tiende al límite** L cuando x **tiende** a a, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si se cumple la siguiente condición:
para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, que posiblemente depende de ε, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces x pertenece al dominio de f y

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

La definición formal de límite no indica cómo calcular el límite de una función, pero permite verificar si la sospecha de un determinado límite es correcta. Los ejemplos que siguen muestran cómo se puede utilizar para verificar afirmaciones sobre límites de diversas funciones. El primero de ellos presenta una verificación formal de los dos límites calculados en el Ejemplo 3 de la Sección 1.2.

Ejemplo 2 **(Dos límites importantes)** Verifique: (a) $\lim_{x \to a} x = a$ y (b) $\lim_{x \to a} k = k$ (siendo k una constante).

Solución

(a) Sea $\varepsilon > 0$. Hay que encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{implica que} \quad |x - a| < \varepsilon$$

Claramente se puede tomar $\delta = \varepsilon$ y la implicación anterior se cumplirá. Esto demuestra que $\lim_{x \to a} x = a$.

(b) Sea $\varepsilon > 0$. Hay que encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{implica que} \quad |k - k| < \varepsilon$$

Como $k - k = 0$, δ puede tomar cualquier valor positivo y la implicación anterior será cierta. Esto demuestra que $\lim_{x \to a} k = k$.

■

Ejemplo 3 Verifique: $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Solución Aquí $a = 2$ y $L = 4$. Sea ε un número positivo. Hay que encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Tenemos que

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x + 2)(x - 2)| = |x + 2||x - 2|$$

Queremos que la expresión anterior sea menor que ε. El factor $|x - 2|$ se puede hacer tan pequeño como deseemos escogiendo el valor de δ adecuadamente, pero es necesario controlar el factor $|x + 2|$ para que no se haga demasiado grande. Si asumimos que $\delta \leqslant 1$ y requerimos que $|x - 2| < \delta$, tenemos que

$$|x - 2| < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < x < 3 \quad \Rightarrow \quad 3 < x + 2 < 5$$
$$\Rightarrow \quad |x + 2| < 5$$

Por tanto,

$$|f(x) - 4| < 5|x - 2| \quad \text{si} \quad |x - 2| < \delta \leqslant 1$$

Pero $5|x - 2| < \varepsilon$ si $|x - 2| < \varepsilon/5$. Por tanto, si tomamos $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$, el *mínimo* (el más pequeño) de los números 1 y $\varepsilon/5$, entonces,

$$|f(x) - 4| < 5|x - 2| < 5 \times \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon \quad \text{si} \quad |x - 2| < \delta$$

Esto demuestra que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

■

Uso de la definición de límite para demostrar teoremas

Generalmente no hemos utilizado la definición formal de límite para verificar límites específicos como en los dos ejemplos anteriores. Lo que hemos hecho es utilizar teoremas generales sobre límites, en particular los Teoremas 2-4 de la Sección 1.2. La definición se usa para demostrar estos teoremas. Como ejemplo, demostraremos la primera parte del Teorema 2, la *regla de la suma*.

Ejemplo 4 **(Demostración de la regla del límite de una suma)** Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, demuestre que $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$.

Solución Sea $\varepsilon > 0$. Hay que encontrar un número δ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} &|(f(x) + g(x)) - (L + M)| && \text{Reagrupar términos} \\ &\quad = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| && \text{(Uso de la desigualdad del triángulo } |a + b| \leqslant |a| + |b|) \\ &\quad \leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\varepsilon/2$ es un número positivo, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon/2$$

Análogamente, como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \varepsilon/2$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, el valor mínimo de δ_1 y δ_2. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|x - a| < \delta_1$, por lo que $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ y $|x - a| < \delta_2$, por lo que $|g(x) - M| < \varepsilon/2$. Entonces,

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Esto demuestra que $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$.

■

Otras clases de límites

La definición formal de límite se puede modificar para dar definiciones precisas de límites laterales, límites en el infinito y límites infinitos. Daremos aquí algunas definiciones y dejaremos al lector las restantes.

DEFINICIÓN 9 **Límite por la derecha**

Se dice que una función f tiene **límite por la derecha** L en a, y se escribe

$$\lim_{x\to a+} f(x) = L$$

si se cumple la siguiente condición:
para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, que posiblemente depende de ε, tal que si $a < x < a + \delta$, entonces x pertenece al dominio de f y

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Nótese cómo la condición $0 < |x - a| < \delta$ en la definición de límite se transforma en $a < x < a + \delta$ en el caso del límite por la derecha (Figura 1.34). La definición de límite por la izquierda es similar a la anterior.

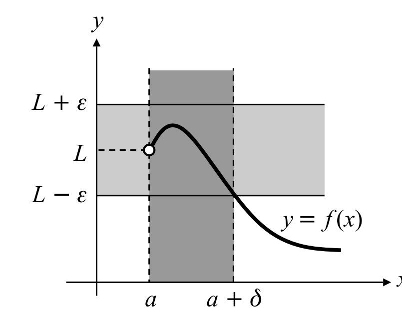


Figura 1.34 Si $a < x < a + \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ejemplo 5 Demuestre que $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$.

Solución Sea $\varepsilon > 0$. Si $x > 0$, entonces $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x}$. Se puede asegurar que $\sqrt{x} < \varepsilon$ haciendo que $x < \varepsilon^2$. Tomando por tanto $\delta = \varepsilon^2$ se cumplirá la condición de la definición:

$$0 < x < \delta = \varepsilon^2 \quad \text{implica que} \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$. ■

Para demostrar que una función f tiene límite L en el infinito tenemos que ser capaces de asegurar que el error $|f(x) - L|$ es menor que cualquier número positivo ε con la restricción de que x sea lo *suficientemente grande*, es decir, requiriendo que $x > R$ para algún número positivo R que dependerá de ε.

DEFINICIÓN 10 **Límite en el infinito**

Se dice que una función f **tiende al límite** L cuando x **tiende a infinito**, y se escribe

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si se cumple la siguiente condición:
para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número R, que posiblemente depende de ε, tal que si $x > R$, entonces x pertenece al dominio de f y

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Sugerimos al lector que formule una versión equivalente a la definición anterior para el límite en menos infinito.

Ejemplo 6 Demuestre que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Solución Sea ε un número positivo. Para $x > 0$ tenemos que

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Por lo tanto, la condición de la definición se cumple si $R = 1/\varepsilon$, con lo que hemos demostrado que $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$.

■

Para demostrar que $f(x)$ tiene límite infinito en a, hay que asegurar que $f(x)$ es mayor que cualquier número positivo dado (llamémoslo B) restringiendo x a un pequeño intervalo centrado en a, con $x \neq a$.

DEFINICIÓN 11 **Límite infinito**

Se dice que una función $f(x)$ **tiende a infinito** cuando x tiende a a, y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

si para todo número positivo B se puede encontrar un número positivo δ, que posiblemente depende de B, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces x pertenece al dominio de f y $f(x) > B$.

Intente el lector formular la correspondiente definición para el concepto de $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Intente después modificar las definiciones para contemplar los casos de límites laterales infinitos y límites infinitos en el infinito.

Ejemplo 7 Verifique que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Solución Sea B un número positivo. Tenemos que

$$\frac{1}{x^2} > B \quad \text{siempre que} \quad x^2 < \frac{1}{B}$$

Si $\delta = 1/\sqrt{B}$, entonces

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad x^2 < \delta^2 = \frac{1}{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} > B$$

Y, por tanto, $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = \infty$.

■

Ejercicios 1.5

1. La longitud L de una barra de metal depende de la temperatura T (°C) en la forma $L = 39.6 + 0.025T$ cm. ¿Entre qué valores de temperatura se debe mantener la barra para que su longitud valga 40 cm ± 1 mm?

2. ¿Cuál es el máximo error admisible en la longitud de 20 cm del lado de una caja de cartón si el volumen de la caja debe ser de 8000 cm^3 con una tolerancia de $\pm 1.2\%$?

En los Ejercicios 3-6, ¿en qué intervalo debe estar confinada x si $f(x)$ debe estar a una distancia menor que ε del número L?

3. $f(x) = 2x - 1$, $L = 3$, $\varepsilon = 0.02$

4. $f(x) = x^2$, $L = 4$, $\varepsilon = 0.1$

5. $f(x) = \sqrt{x}$, $L = 1$, $\varepsilon = 0.1$

6. $f(x) = 1/x$, $L = -2$, $\varepsilon = 0.01$

En los Ejercicios 7-10, encuentre un número $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L|$ es menor que un número dado ε.

7. $f(x) = 3x + 1$, $a = 2$, $L = 7$, $\varepsilon = 0.03$

8 . $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $a = 3$, $L = 3$, $\varepsilon = 0.01$

9. $f(x) = x^3$, $a = 2$, $L = 8$, $\varepsilon = 0.2$

10. $f(x) = 1/(x+1)$, $a = 0$, $L = 1$, $\varepsilon = 0.05$

En los Ejercicios 11-20, utilice la definición formal de límite para verificar los límites indicados.

11. $\lim_{x\to 1} (3x+1) = 4$

12. $\lim_{x\to 2} (5-2x) = 1$

13. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

14. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{1+x^2} = 0$

15. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{1-4x^2}{1-2x} = 2$

16. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+2x}{x+2} = -2$

17. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

18. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2-1} = -\dfrac{1}{2}$

19. $\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$

20. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

En los Ejercicios 21-26, proporcione las definiciones formales de los límites que se presentan.

21. $\lim_{x\to a-} f(x) = L$

22. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$

23. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

24. $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$

25. $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$

26. $\lim_{x\to a-} f(x) = \infty$

Utilice las definiciones formales de las diversas clases de límites para demostrar las afirmaciones de los Ejercicios 27-30.

27. $\lim_{x\to 1+} \dfrac{1}{x-1} = \infty$

28. $\lim_{x\to 1-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

29. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

30. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x} = \infty$

Demostración de teoremas con la definición de límite

***31.** Demuestre que los límites son únicos. Es decir, si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} f(x) = M$, entonces $L = M$. *Sugerencia*: Suponga que $L \neq M$ y haga $\varepsilon = |L - M|/3$.

***32.** Si $\lim_{x\to a} g(x) = M$, demuestre que existe un número $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x)| < 1 + |M|$$

(*Sugerencia*: Haga $\varepsilon = 1$ en la definición de límite). Esto quiere decir que los valores de $g(x)$ están **acotados** en las proximidades de un límite.

***33.** Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, demuestre que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$ (regla del producto del Teorema 2). *Sugerencia*: Vuelva a leer el Ejemplo 4. Haga $\varepsilon > 0$ escriba

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &= |(f(x) - L)g(x) + L(g(x) - M)| \\ &\leqslant |(f(x) - L)g(x)| + |L(g(x) - M)| \\ &= |g(x)|\,|f(x) - L| + |L|\,|g(x) - M| \end{aligned}$$

Ahora intente hacer cada término de la última línea menor que $\varepsilon/2$ tomando un valor de x cercano a a. Necesitará el resultado del Ejercicio 32.

***34.** Si $\lim_{x\to a} g(x) = M$, siendo $M \neq 0$, demuestre que existe un número $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x)| > |M|/2$$

***35.** Si $\lim_{x\to a} g(x) = M$, siendo $M \neq 0$, demuestre que

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

Sugerencia: Necesitará el resultado del Ejercicio 34.

36. Utilice los hechos demostrados en los Ejercicios 33 y 35 para demostrar la regla del cociente (apartado 5 del Teorema 2): si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, siendo $M \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

***37.** Utilice dos veces la definición de límite para demostrar el Teorema 7 de la Sección 1.4: si f es continua en L y $\lim_{x\to c} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x\to c} g(x))$$

***38.** Demuestre el Teorema del Sándwich (Teorema 4 de la Sección 1.2). *Sugerencia*: Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, entonces

$$\begin{aligned} |g(x) - L| &= |g(x) - f(x) + f(x) - L| \\ &\leqslant |g(x) - f(x)| + |f(x) - L| \\ &\leqslant |h(x) - f(x)| + |f(x) - L| \\ &= |h(x) - L - (f(x) - L)| + |f(x) - L| \\ &\leqslant |h(x) - L| + |f(x) - L| + |f(x) - L| \end{aligned}$$

Ahora puede hacer cada término de la expresión anterior menor que $\varepsilon/3$ para completar la demostración.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes frases?**
  - ◇ Tasa o velocidad media de cambio de $f(x)$ en $[a, b]$.
  - ◇ Tasa o velocidad instantánea de cambio de $f(x)$ en $x = a$.
  - ◇ $\lim_{x\to a} f(x) = L$
  - ◇ $\lim_{x\to a+} f(x) = L$, $\lim_{x\to a-} f(x) = L$
  - ◇ $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$
  - ◇ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$
  - ◇ f es continua en c.
  - ◇ f es continua por la izquierda (o por la derecha) en c.
  - ◇ f tiene una extensión continua en c.
  - ◇ f es una función continua.
  - ◇ f toma sus valores máximo y mínimo en el intervalo I.
  - ◇ f está acotada en el intervalo I.
  - ◇ f tiene la propiedad del valor medio en el intervalo I.
- **Formule tantas «leyes de límites» como sepa**.
- **¿Qué propiedades debe tener una función si es continua y su dominio es un intervalo cerrado y finito?**
- **¿Cómo se pueden calcular ceros (raíces) de funciones continuas?**

Ejercicios de repaso

1. Calcule la velocidad media de cambio de x^3 en el intervalo $[1, 3]$.
2. Calcule la velocidad media de cambio de $1/x$ en el intervalo $[-2, -1]$.
3. Calcule la velocidad de cambio de x^3 en $x = 2$.
4. Calcule la velocidad de cambio de $1/x$ en $x = -3/2$.

En los Ejercicios 5-30, calcule los límites o explique por qué no existen.

5. $\lim_{x\to 1} (x^2 - 4x + 7)$
6. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2}{1 - x^2}$
7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2}{1 - x^2}$
8. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$
9. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$
10. $\lim_{x\to 2-} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$
11. $\lim_{x\to -2+} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$
12. $\lim_{x\to 4} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$
13. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$
14. $\lim_{h\to 0} \dfrac{h}{\sqrt{x + 3h} - \sqrt{x}}$
15. $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x - x^2}$
16. $\lim_{x\to 0} \sqrt{x - x^2}$
17. $\lim_{x\to 1} \sqrt{x - x^2}$
18. $\lim_{x\to 1-} \sqrt{x - x^2}$
19. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - x^2}{3x^2 - x - 1}$
20. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x + 100}{x^2 + 3}$
21. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 4}$
22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$
23. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}}$
24. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}}$
25. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$
26. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x}$
27. $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$
28. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$
29. $\lim_{x\to -\infty} [x + \sqrt{x^2 - 4x + 1}]$
30. $\lim_{x\to\infty} [x + \sqrt{x^2 - 4x + 1}]$

¿En qué puntos (si hay alguno) de su dominio son discontinuas las funciones de los Ejercicios 31-38? ¿Es f continua por la izquierda o por la derecha en esos puntos? En los Ejercicios 35 y 36, H indica la función de Heaviside: $H(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ y $H(x) = 0$ si $x < 0$.

31. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$
32. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$
33. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 2 \\ x & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$
34. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ x & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$
35. $f(x) = H(x - 1)$
36. $f(x) = H(9 - x^2)$
37. $f(x) = |x| + |x + 1|$
38. $f(x) = \begin{cases} |x|/|x + 1| & \text{si } x \neq -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

Problemas avanzados

1. Demuestre que la velocidad media de cambio de la función x^3 en el intervalo $[a, b]$, siendo $0 < a < b$, es igual a la velocidad instantánea de cambio de x^3 en $x = \sqrt{(a^2 + ab + b^2)/3}$. ¿Está este punto a la izquierda o a la derecha del punto medio del intervalo $[a, b]$, $(a + b)/2$?

2. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x-1|-|x+1|}$

3. Calcule $\lim_{x\to 3} \dfrac{|5-2x|-|x-2|}{|x-5|-|3x-7|}$

4. Calcule $\lim_{x\to 64} \dfrac{x^{1/3}-4}{x^{1/2}-8}$

5. Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt[3]{7+x}-2}$

6. La ecuación $ax^2+2x-1=0$, siendo a una constante, tiene dos raíces si $a>-1$ y $a\neq 0$:

$$r_+(a)=\frac{-1+\sqrt{1+a}}{a} \quad \text{y} \quad r_-(a)=\frac{-1-\sqrt{1+a}}{a}$$

(a) ¿Qué sucede con la raíz $r_-(a)$ cuando $a\to 0$?

(b) Investigue numéricamente qué ocurre con la raíz $r_+(a)$ cuando $a\to 0$, probando con los valores $a=1,\ \pm 0.1,\ \pm 0.01, \ldots$ Para valores como $a=10^{-8}$, la precisión limitada de las calculadoras puede producir resultados interesantes. ¿Qué sucede, y por qué?

(c) Calcule matemáticamente $\lim_{a\to 0} r_+(a)$ utilizando la igualdad

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

7. ¿VERDADERO o FALSO? Si es VERDADERO, explique la razón. Si es FALSO, proporcione un contraejemplo.

(a) Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero no existe $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces no existe $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$.

(b) Si no existe $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces no existe $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$.

(c) Si f es continua en a, entonces también lo es $|f|$.

(d) Si $|f|$ es continua en a, entonces también lo es f.

(e) Si $f(x)<g(x)$ para todo x en un intervalo alrededor de a, y si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$.

8. (a) Si f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, demuestre que $R(f)$ es un intervalo cerrado.

(b) ¿Qué posibilidades hay para $R(f)$ si $D(f)$ es un intervalo abierto (a, b)?

9. Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}$. Calcule todos los puntos donde f no sea continua. ¿Tiene f límites laterales en alguno de esos puntos y, si es así, cuales son?

10. Calcule el valor mínimo de $f(x)=1/(x-x^2)$ en el intervalo $(0, 1)$. Explique cómo sabe que debe existir ese valor mínimo.

∗11. (a) Suponga que f es una función continua en el intervalo $[0, 1]$ y que $f(0)=f(1)$. Demuestre que $f(a)=f\left(a+\dfrac{1}{2}\right)$ para algún $a\in\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Sugerencia: Haga $g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-f(x)$ y utilice el teorema del valor medio.

(b) Sea n un entero mayor que 2. Demuestre que

$$f(a)=f\left(a+\frac{1}{n}\right) \text{ para algún } a\in\left[0,\ 1-\frac{1}{n}\right].$$



CAPÍTULO 2

Diferenciación

—De acuerdo— —dijo Mente Profunda—. La respuesta a la Gran Pregunta...
—¡Sí...!
—... de la Vida, el Universo y el Todo —añadió Mente Profunda
—¡Sí...!
—Es... —continuó Mente Profunda, e hizo una pausa.
—¡¿Sí...?!
—Cuarenta y dos —afirmó Mente Profunda, con infinita calma y majestad.
—¡Cuarenta y dos! —se lamentó Loonquawl—. ¿Eso es todo lo que tienes que decir tras un trabajo de siete millones y medio de años?
—Lo he comprobado a fondo —dijo el computador—, y esa es la respuesta definitiva. Pienso que el problema, para ser franco contigo, es que nunca supiste realmente cuál era la pregunta.

Douglas Adams (1952-2001)
de *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

Introducción El cálculo considera dos problemas fundamentales. El **problema de las pendientes** consiste en calcular la pendiente de (o recta tangente a) una curva dada en un determinado punto de dicha curva. El **problema de las áreas** consiste en calcular el área de una región plana limitada por curvas y rectas. El **cálculo diferencial** se ocupa de la solución al problema de las pendientes. Como veremos, este problema tiene muchas aplicaciones en matemáticas y en otras disciplinas. De problema de las áreas se ocupa el **cálculo integral**, que consideraremos a partir del Capítulo 5.

2.1 Rectas tangentes y sus pendientes

En esta sección consideraremos el problema de obtener una recta L tangente a una curva C en un punto P. Como ocurre a menudo en matemáticas, el paso más importante en la solución de un problema fundamental es la definición adecuada del mismo.

Por simplicidad, y por evitar ahora ciertos problemas que consideraremos posteriormente, no consideraremos la clase general de curvas, sino sólo aquellas que son *gráficas de funciones continuas*. Sea C la gráfica de $y = f(x)$ y sea P el punto (x_0, y_0) sobre la curva C, de forma que $y_0 = f(x_0)$. Supondremos que P no es un extremo de C. Por tanto, C se extiende una cierta distancia a ambos lados de P (*véase* la Figura 2.1).

¿Qué significa que la recta L es tangente a C en P? Nuestra experiencia en rectas tangentes a circunferencias no nos ayuda para definir tangentes a curvas más generales. Una recta tangente a una circunferencia tiene las siguientes propiedades (*véase* la Figura 2.2):

(i) Corta a la circunferencia en un único punto.

(ii) Toda la circunferencia queda a un único lado de la recta.

(iii) La tangente es perpendicular a la recta que une el centro de la circunferencia con el punto de contacto.

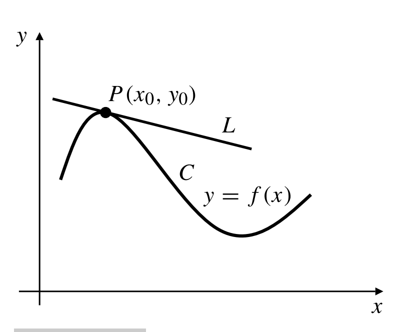


Figura 2.1 L es tangente a C en P.

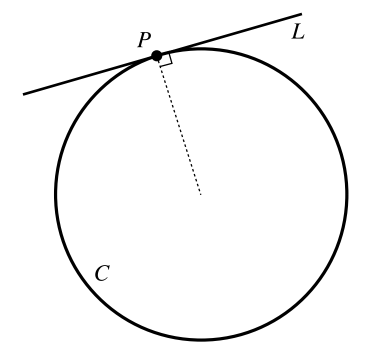


Figura 2.2 L es tangente a C en P.

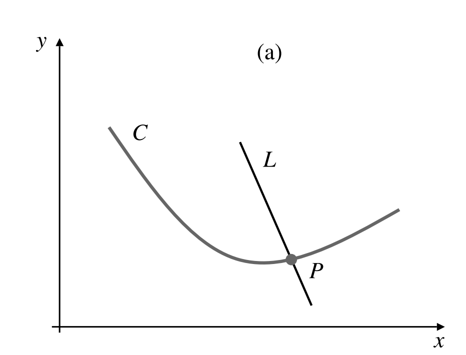
La mayoría de las curvas no tienen *centros* obvios, de forma que la condición (iii) no es de utilidad para caracterizar sus tangentes. En las curvas que se muestran en la Figura 2.3 las condiciones (i) y (ii) tampoco se pueden usar para definir tangentes. En particular, la Figura 2.3(d) muestra una curva que no es «suave» en P, de forma que la curva no puede tener tangente en ese punto. La recta tangente debe tener la misma «dirección» que la curva en el punto de tangencia.

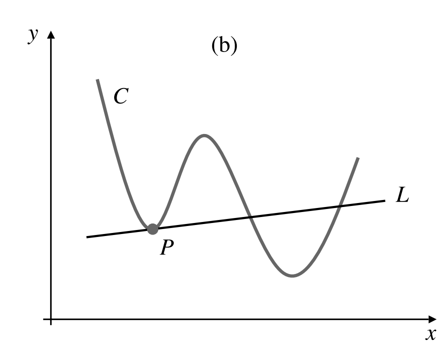
La definición razonable de tangente debe establecerse en términos de límites. Si Q es un punto de C diferente de P, la recta que pasa por P y Q se denomina **secante**. Esta recta gira sobre P a medida que Q se mueve por la curva. Si L es la recta que pasa por P cuya pendiente es el límite de las pendientes de las secantes PQ a medida que Q se aproxima a P por la curva C (Figura 2.4), se dice que dicha recta L es la tangente a la curva C en el punto P.

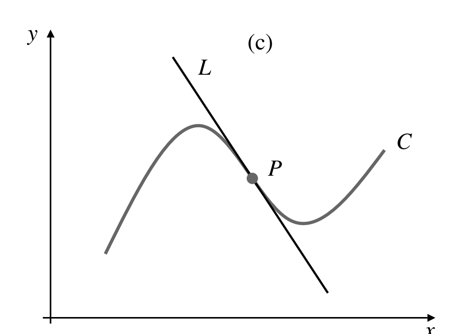
Como C es la gráfica de la *función* $y = f(x)$, entonces las rectas verticales sólo pueden cruzar a C una vez. Como $P = (x_0, f(x_0))$, un punto diferente Q de la gráfica debe tener una coordenada x diferente, por ejemplo $x_0 + h$, siendo $h \neq 0$. Por tanto, $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$, y la pendiente de la recta PQ es

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esta expresión se denomina **cociente de Newton** o **cociente de diferencias** de f en x_0. Nótese que h puede ser positivo o negativo, dependiendo de si Q está a la derecha o a la izquierda de P.







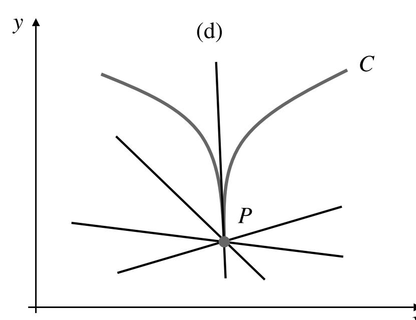


Figura 2.3

(a) L corta a C sólo en P, pero no es tangente a C.
(b) L corta a C en varios puntos, pero sólo es tangente a C en el punto P.
(c) L es tangente a C en P, pero corta también a la curva en P.
(d) Muchas rectas cortan a C sólo en P, pero ninguna de ellas es tangente a C en P.

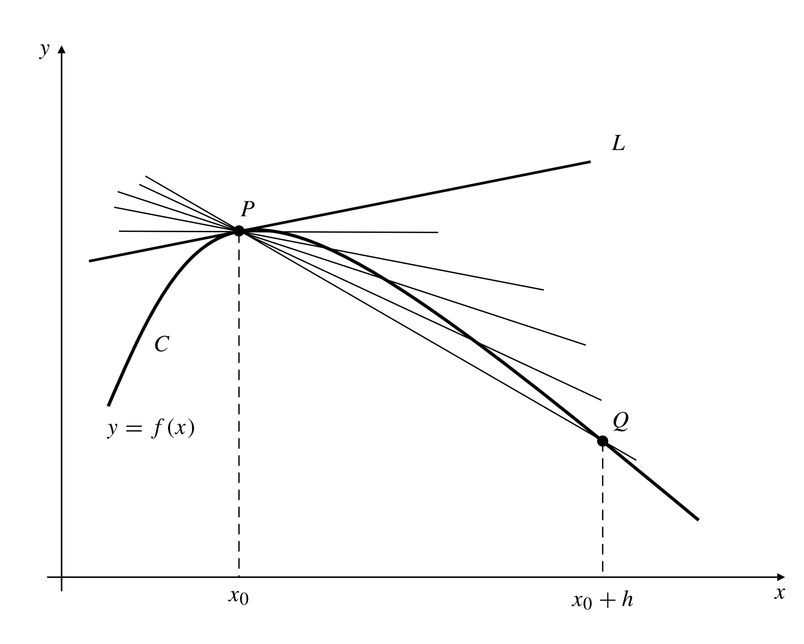


Figura 2.4 Las rectas secantes PQ se aproximan a la recta tangente L a medida que Q se aproxima a P por la curva C.

DEFINICIÓN 1 **Tangentes no verticales**

Supongamos una función f continua en $x = x_0$ y que existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m$$

Entonces la recta de pendiente m que pasa por el punto $P = (x_0,\ f(x_0))$ se denomina **recta tangente** (o simplemente **tangente**) a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto P. Una posible ecuación de la tangente es

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

Ejemplo 1 Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto (1, 1).

Solución En este ejemplo $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, e $y_0 = f(1) = 1$. La pendiente de la tangente pedida es:

$$\begin{aligned} m = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2 + h) = 2 \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior, la ecuación de la recta tangente en (1, 1) es $y = 2(x - 1) + 1$, o $y = 2x - 1$. *Véase* la Figura 2.5.

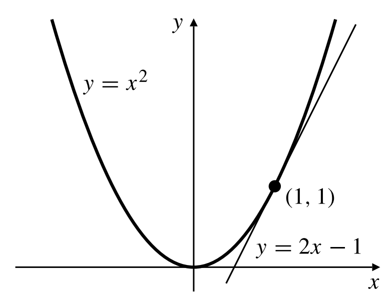


Figura 2.5 Tangente a la curva $y = x^2$ en el punto (1, 1).

La Definición 1 considera sólo tangentes que tienen pendientes finitas y, por tanto, que no son verticales. Es también posible que la gráfica de una función tenga una tangente *vertical*.

Ejemplo 2 Considere la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, que se muestra en la Figura 2.6. La gráfica es una curva suave, y parece evidente que el eje y es tangente a esta curva en el origen. Calculemos el límite del cociente de Newton para f en $x = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

Aunque el límite no existe, la pendiente de la recta secante que pasa por el origen y por cualquier otro punto Q de la curva tiende a infinito cuando Q se aproxima al origen por cualquier lado de la curva.

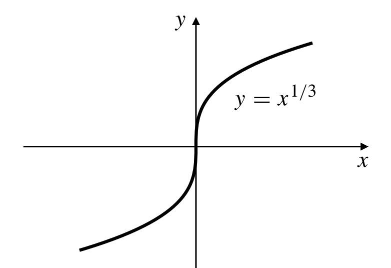


Figura 2.6 El eje y es tangente a $y = x^{1/3}$ en el origen.

Ejemplo 3 Por otra parte, la función $f(x) = x^{2/3}$, cuya gráfica se muestra en la Figura 2.7, no tiene tangente en el origen porque no es «suave» en ese punto. En este caso el cociente de Newton es

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^{2/3}}{h} = \frac{1}{h^{1/3}}$$

que no tiene límite cuando h tiende a cero (el límite por la derecha es ∞ y por la izquierda es $-\infty$). Se dice que la curva tiene un **vértice** en el origen. Un vértice es un punto infinitamente agudo. Si viajáramos por la curva, al llegar al origen tendríamos que parar y girar 180º.

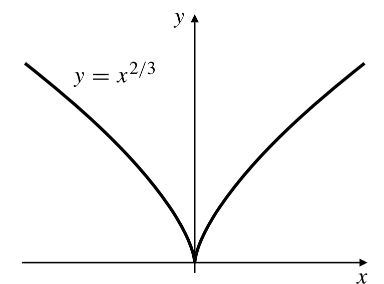


Figura 2.7 Esta gráfica no tiene tangente en el origen.

A la luz de los dos ejemplos anteriores, podemos extender la definición de recta tangente para contemplar el caso de tangentes verticales:

DEFINICIÓN 2 Tangentes verticales

Supongamos una función f continua en $P = (x_0, y_0)$, siendo $y_0 = f(x_0)$; si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

entonces la recta vertical $x = x_0$ es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en P. Si el límite del cociente de Newton no existe y la causa es otra diferente a la de valer ∞ o $-\infty$, la gráfica de $y = f(x)$ no tiene tangente en el punto P.

Ejemplo 4 ¿Tiene la gráfica de $y = |x|$ tangente en $x = 0$?

Solución En este caso el cociente de Newton es:

$$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \operatorname{sgn} h = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad h > 0 \\ -1, & \text{si} \quad h < 0 \end{cases}$$

Como $\operatorname{sgn} h$ tiene límites diferentes por la izquierda y por la derecha en $x = 0$ (concretamente, 1 y -1), el cociente de Newton no tiene límite cuando $h \to 0$, por lo que $y = |x|$ no tiene recta tangente en (0, 0) (*véase* la Figura 2.8). La gráfica presenta un quiebro en el origen, *cambia súbitamente de dirección y no es suave en ese punto*. Las curvas sólo tienen tangentes en los puntos donde son suaves. Las gráficas de $y = x^{2/3}$ e $y = |x|$ tienen tangentes en todos sus puntos excepto en el origen, que es el punto donde no se comportan suavemente.

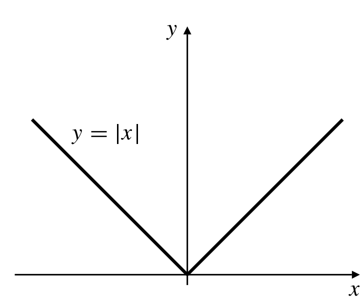


Figura 2.8 $y = |x|$ no tiene tangente en el origen.

DEFINICIÓN 3 **Pendiente de una curva**

La **pendiente** de una curva C en un punto P es la pendiente de la recta tangente a C en P si existe dicha recta tangente. Concretamente, la pendiente de la gráfica de $y = f(x)$ en el punto x_0 es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplo 5 Calcule la pendiente de la curva $y = x/(3x + 2)$ en el punto $x = -2$.

Solución Si $x = -2$, entonces $y = 1/2$, y la pendiente pedida es

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-2 + h}{3(-2 + h) + 2} - \dfrac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-4 + 2h - (-6 + 3h + 2)}{2(-6 + 3h + 2)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2h(-4 + 3h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2(-4 + 3h)} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Normales

Si una curva C tiene una recta tangente L en un punto P, la recta perpendicular a L que pasa por P se denomina **normal** a C en P. Si L es horizontal, entonces N es vertical, y si L es vertical, entonces N es horizontal. Si L no es ni vertical ni horizontal, entonces, como se indica en la Sección P.2, la pendiente de N es el inverso cambiado de signo de la pendiente de L, es decir,

$$\text{pendiente de la normal} = \frac{-1}{\text{pendiente de la tangente}}$$

Ejemplo 6 Calcule la ecuación de la normal a $y = x^2$ en el punto (1, 1).

Solución Como vimos en el Ejemplo 1, la tangente a $y = x^2$ en (1, 1) tiene pendiente 2. Por tanto, la pendiente de la normal es $-1/2$, y su ecuación es

$$y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1 \quad \text{o} \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

Ejemplo 7 Calcule las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto (4, 2).

Solución La pendiente de la tangente en (4, 2) es (Figura 2.9)

$$\begin{aligned} m = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4 + h} - 2)(\sqrt{4 + h} + 2)}{h(\sqrt{4 + h} + 2)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4 + h} + 2)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4 + h} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Figura 2.9 Tangente y normal a $y = \sqrt{x}$ en el punto (4, 2).

La ecuación de la recta tangente es

$$y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2 \qquad \text{o} \qquad x - 4y + 4 = 0$$

y la normal tiene pendiente -4 y, por tanto, su ecuación es

$$y = -4(x - 4) + 2 \qquad \text{o} \qquad y = -4x + 18$$

Ejercicios 2.1

En los Ejercicios 1-12, calcule la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

1. $y = 3x - 1$ en $(1, 2)$

2. $y = x/2$ en $(a, a/2)$

3. $y = 2x^2 - 5$ en $(2, 3)$

4. $y = 6 - x - x^2$ en $x = -2$

5. $y = x^3 + 8$ en $x = -2$

6. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ en $(0, 1)$

7. $y = \sqrt{x + 1}$ en $x = 3$

8. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en $x = 9$

9. $y = \dfrac{2x}{x + 2}$ en $x = 2$

10. $y = \sqrt{5 - x^2}$ en $x = 1$

11. $y = x^2$ en $x = x_0$

12. $y = \dfrac{1}{x}$ en $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$

¿Tienen las gráficas de las funciones f de los Ejercicios 13-17 tangentes en los puntos dados? Si es así, ¿cuál es la recta tangente?

13. $f(x) = \sqrt{|x|}$ en $x = 0$

14. $f(x) = (x - 1)^{4/3}$ en $x = 1$

15. $f(x) = (x + 2)^{3/5}$ en $x = -2$

16. $f(x) = |x^2 - 1|$ en $x = 1$

17. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ en $x = 0$

18. Calcule la pendiente de la curva $y = x^2 - 1$ en el punto $x = x_0$. ¿Cuál es la ecuación de la tangente a $y = x^2 - 1$ cuya pendiente es -3?

19. (a) Calcule la pendiente de $y = x^3$ en el punto $x = a$.
(b) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a $y = x^3$ cuya pendiente es 3.

20. Calcule todos los puntos de la curva $y = x^3 - 3x$ cuya tangente es paralela al eje x.

21. Calcule todos los puntos de la curva $y = x^3 - x + 1$ cuya tangente es paralela a la recta $y = 2x + 5$.

22. Calcule todos los puntos de la curva $y = 1/x$ cuya tangente es perpendicular a la recta $y = 4x - 3$.

23. ¿Para qué valor de la constante k es la recta $x + y = k$ normal a la curva $y = x^2$?

24. ¿Para qué valor de la constante k las curvas $y = kx^2$ e $y = k(x - 2)^2$ se cortan formando ángulos rectos? *Sugerencia*: ¿Dónde se cortan las curvas? ¿Qué valen sus pendientes allí?

Utilice una herramienta gráfica para dibujar las siguientes curvas. ¿Dónde tienen las curvas tangente horizontal? ¿Hay algún punto donde las curvas no tengan tangente?

25. $y = x^3(5 - x)^2$

26. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

27. $y = |x^2 - 1| - x$

28. $y = |x + 1| - |x - 1|$

29. $y = (x^2 - 1)^{1/3}$

30. $y = ((x^2 - 1)^2)^{1/3}$

∗31. Si la recta L es tangente a la curva C en el punto P, entonces el mínimo ángulo entre L y la secante PQ entre P y otro punto Q de C tiende a 0 cuando Q se acerca a P por la recta C. ¿Es cierto lo contrario: si el ángulo entre PQ y la recta L (que pasa por P) tiende a 0, debe ser L tangente a C?

∗32. Sea $P(x)$ un polinomio. Si a es un número real, entonces $P(x)$ se puede expresar de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n$$

para algún $n \geqslant 0$. Si $\ell(x) = m(x - a) + b$, demuestre que la recta $y = \ell(x)$ es tangente a la gráfica de $y = P(x)$ en $x = a$ siempre que $P(x) - \ell(x) = (x - a)^2 Q(x)$, siendo $Q(x)$ un polinomio.

2.2 La derivada

Una línea recta tiene la propiedad de que su pendiente es la misma en todos sus puntos. Sin embargo, en cualquier otra curva la pendiente puede variar de un punto a otro. Por tanto, la pendiente de la gráfica $y = f(x)$ en el punto x es a su vez una función de x. Si en un punto x de una gráfica, la pendiente es finita, se dice que f es diferenciable, y se denomina a la pendiente derivada de f. La derivada es, por tanto, el límite del cociente de Newton.

DEFINICIÓN 4

La **derivada** de una función f es otra función f' definida como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

en todos los puntos x donde el límite exista (sea un número finito). Si existe $f'(x)$, se dice que f es **diferenciable** en x.

El dominio de la derivada f' (léase «f prima») es el conjunto de números x del dominio de f donde la gráfica de f tiene una tangente *no vertical*, y el valor $f'(x_0)$ de f' en un punto x_0 es la pendiente de la tangente a $y = f(x)$ en dicho punto. Por tanto, la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

El dominio $\mathcal{D}(f')$ de f' puede ser menor que el dominio $\mathcal{D}(f)$ de f dado que aquél contiene sólo los puntos de $\mathcal{D}(f)$ donde f es diferenciable. Los valores de x en $\mathcal{D}(f)$ donde f no es diferenciable y que no son extremos de $\mathcal{D}(f)$ se denominan **puntos singulares** de f.

Observación El valor de la derivada de f en un punto particular x_0 se puede expresar como un límite de dos formas:

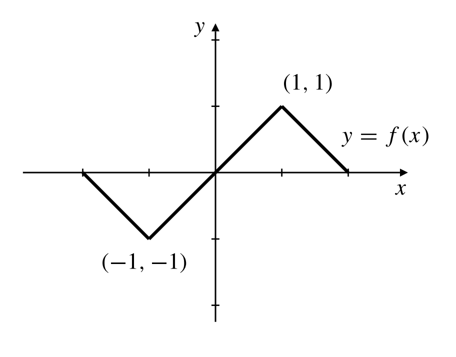
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

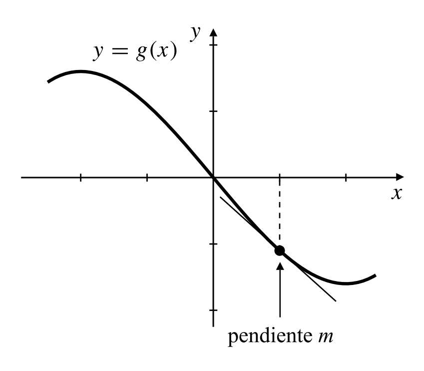
En el segundo límite $x_0 + h$ se sustituye por x, de modo que $h = x - x_0$, y la condición $h \to 0$ es equivalente a $x \to x_0$.

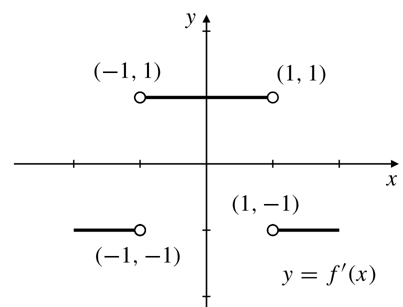
El proceso de calcular la derivada f' de una función dada se denomina **diferenciación**. Muchas veces se puede dibujar la gráfica de f' directamente a partir de la de f visualizando las pendientes, procedimiento que se denomina **diferenciación gráfica**. En la Figura 2.10 las gráficas de f' y g' se obtienen midiendo las pendientes de los correspondientes puntos de las gráficas de f y g que hay encima de ellas. El valor de la gráfica $y = f'(x)$ en x es la pendiente de la gráfica de $y = f(x)$ en x. Nótese que -1 y 1 son puntos singulares de f. Aunque $f(-1)$ y $f(1)$ están definidos, $f'(-1)$ y $f'(1)$ no están definidos. La gráfica de f no tiene recta tangente en -1 ni en 1.

Una función f es diferenciable en un conjunto S si es diferenciable en todo punto x de S. En general, las funciones que encontramos están definidas en intervalos o en uniones de intervalos. Si f está definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, la Definición 4 no contempla la existencia de derivada en los extremos $x = a$ o $x = b$ (¿por qué?). Como hicimos para la continuidad en la Sección 1.4, vamos a extender la definición considerando la **derivada por la derecha** en $x = a$ y la **derivada por la izquierda** en $x = b$:

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \qquad f'_-(b) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$







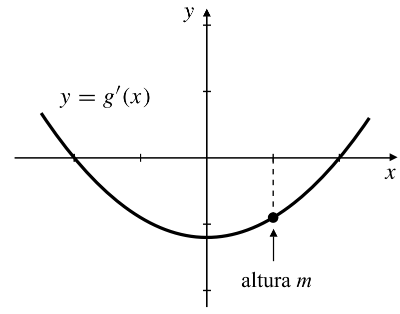


Figura 2.10 Diferenciación gráfica.

Diremos ahora que f es **diferenciable** en $[a, b]$ si existe $f'(x)$ para todo x en (a, b) y existen también $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$.

Algunas derivadas importantes

Presentaremos a continuación algunos ejemplos de cálculo algebraico de derivadas a partir de su definición. Algunos de los ejemplos serán los bloques básicos a partir de los cuales construiremos derivadas más complicadas. Se recogen en la Tabla 1, que se presentará posteriormente en esta sección, y es conveniente memorizarlas.

Ejemplo 1 **(Derivada de una función lineal)** Demuestre que si $f(x) = ax + b$, entonces $f'(x) = a$.

Solución El resultado es evidente observando la gráfica de f (Figura 2.11), pero realizaremos el cálculo utilizando la definición:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a \end{aligned}$$

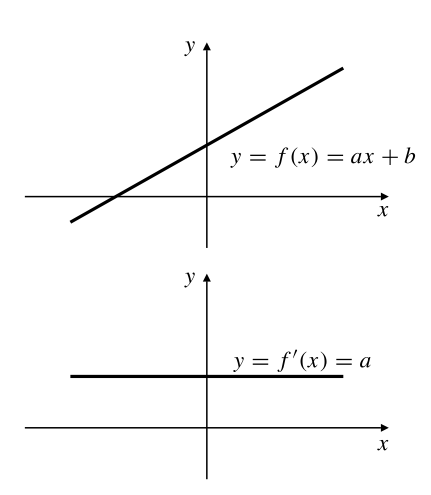


Figura 2.11 La derivada de la función lineal $f(x) = ax + b$ es la función constante $f'(x) = a$.

■

Un caso especial importante del Ejemplo 1 es que la derivada de una función constante es la función cero:

$$\text{Si } g(x) = c \text{ (constante)}, \quad \text{entonces} \quad g'(x) = 0$$

Ejemplo 2 Utilizando la definición, calcule las derivadas de

(a) $f(x) = x^2$, (b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$, y (c) $k(x) = \sqrt{x}$

Solución Las Figuras 2.12-2.14 muestran las gráficas de las funciones y de sus derivadas.

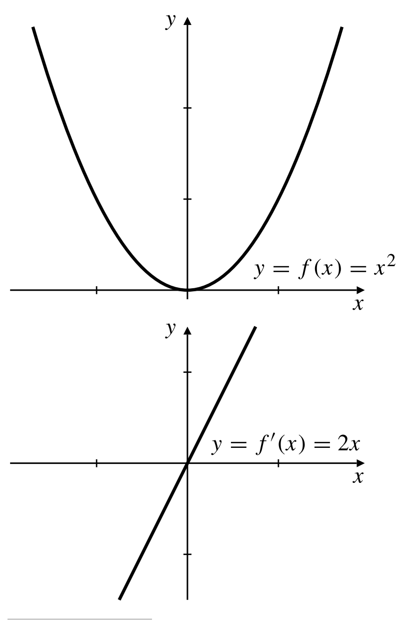


Figura 2.12 La derivada de $f(x)=x^2$ es $f'(x) = 2x$.

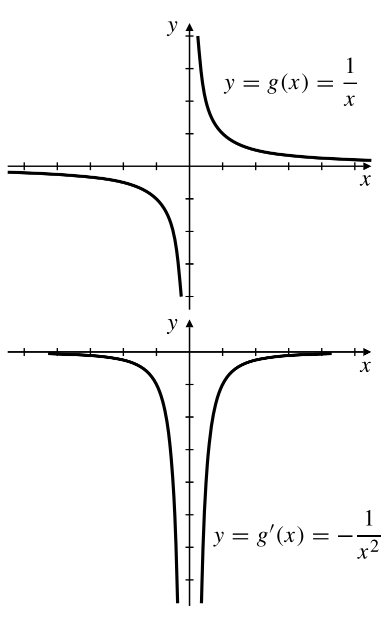


Figura 2.13 La derivada de $g(x)=1/x$ es $g'(x) = -1/x^2$.

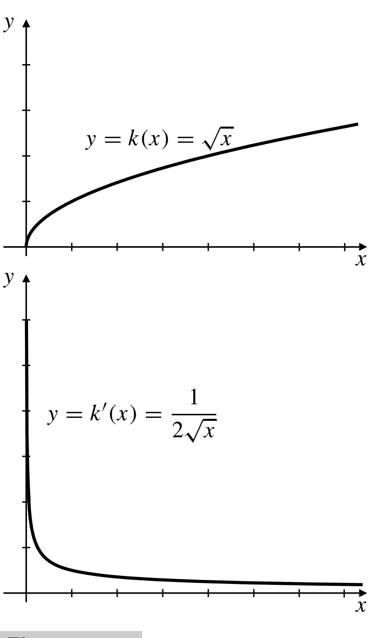


Figura 2.14 La derivada de $k(x)=\sqrt{x}$ es $k'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

$$\text{(a)}\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

$$\text{(b)}\ g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$$

(c) $$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Nótese que k no es diferenciable en el punto $x = 0$.

■

Las tres derivadas calculadas en el Ejemplo 2 son casos particulares de la **regla general de la potencia**:

$$\text{Si } f(x) = x^r, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = rx^{r-1}$$

Esta fórmula, que verificaremos en la Sección 3.3, es válida para *todos los valores de r y x para los que x^{r-1} tenga sentido como número real*.

Ejemplo 3 **(Diferenciación de potencias)**

Si $f(x) = x^{5/3}$, entonces $f'(x) = \frac{5}{3} x^{(5/3)-1} = \frac{5}{3} x^{2/3}$ para todo x real.

Si $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2}$, entonces $g'(t) = -\frac{1}{2} t^{-(1/2)-1} = -\frac{1}{2} t^{-3/2}$ para $t > 0$.

■

Posteriormente demostraremos todos los casos de la regla general de la potencia. Por ahora ofrecemos una demostración del caso $r = n$, un entero positivo, basada en la *factorización de una diferencia de potencias n-ésimas*:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

(Compruebe que la fórmula es correcta multiplicando los dos factores del miembro derecho). Si $f(x) = x^n$, $a = x + h$ y $b = x$, entonces $a - b = h$ y

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\overbrace{[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1}]}^{n \text{ términos}}}{h}$$

$$= nx^{n-1}$$

En la Sección 2.3 se presentará una prueba alternativa basada en la regla del producto e inducción matemática. El método de factorización utilizado anteriormente se puede utilizar también para demostrar la regla general de la potencia para enteros negativos, $r = -n$, e inversos de enteros, $r = 1/n$ (*véanse* los Ejercicios 50 y 52 al final de esta sección).

Ejemplo 4 **(Diferenciación de la función valor absoluto)** Verifique que:

$$\text{Si } f(x) = |x|, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x$$

Solución Tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Por tanto, teniendo en cuenta el Ejemplo 1 anterior, $f'(x) = 1$ si $x > 0$ y $f'(x) = -1$ si $x < 0$. Además, el Ejemplo 4 de la Sección 2.1 demuestra que f no es diferenciable en $x = 0$, que es un punto singular de f. Entonces (*véase* la Figura 2.15),

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x > 0 \\ -1, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x$$

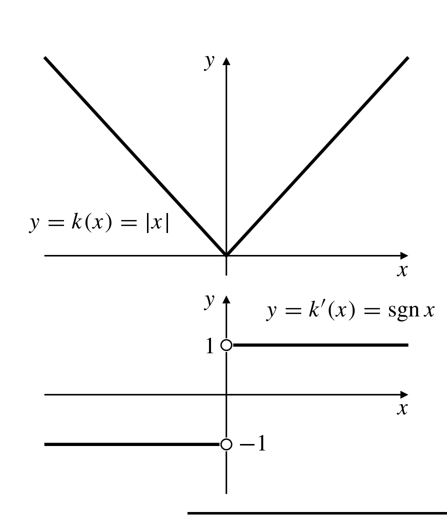


Figura 2.15 La derivada de $|x|$ es $\operatorname{sgn} x = x/|x|$.

La Tabla 1 muestra las derivadas elementales calculadas hasta ahora. A partir de la Sección 2.3 desarrollaremos reglas generales para calcular derivadas de funciones que se obtienen combinando funciones más simples. De esa forma, raramente tendremos que recurrir a la definición de derivada ni al cálculo de límites para obtener derivadas. Es importante, sin embargo, recordar las derivadas de algunas funciones elementales. Conviene memorizar las de la Tabla 1.

Tabla 1. Algunas funciones elementales y sus derivadas

$f(x)$	$f'(x)$
c (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$
x^r	$r\,x^{r-1}$ $(x^{r-1}$ real$)$
$\lvert x\rvert$	$\dfrac{x}{\lvert x\rvert} = \operatorname{sgn} x$

Notación de Leibniz

Como las funciones se pueden escribir de diferentes formas, resulta de utilidad tener más de una notación para representar las derivadas. Si $y = f(x)$, se puede usar la variable dependiente y para

representar la función, e indicar la derivada de dicha función con respecto a x de alguna de las siguientes formas:

$$D_x y = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\, f(x) = f'(x) = D_x f(x) = D f(x)$$

En las formas que usan «D_x» se puede omitir el subíndice x si la variable de diferenciación es obvia. Frecuentemente, la forma más conveniente de referirse a la derivada de una función dada explícitamente como una expresión en la variable x es escribir $\frac{d}{dx}$ delante de la expresión. El símbolo $\frac{d}{dx}$ es el *operador diferencial* y debe leerse «derivada con respecto a x de ...». Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\, x^2 = 2x \quad \text{(la derivada con respecto a } x \text{ de } x^2 \text{ es } 2x\text{)}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dt}\, t^{100} = 100t^{99}$$

$$\text{si } y = u^3, \text{ entonces } \frac{dy}{du} = 3u^2$$

El valor de la derivada de una función en un punto particular x_0 de su dominio se puede expresar también de diversas formas:

$$D_x y\Big|_{x=x_0} = y'\Big|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}\, f(x)\Big|_{x=x_0} = f'(x_0) = D_x f(x_0)$$

El símbolo $\Big|_{x=x_0}$ se denomina **símbolo de evaluación**. Significa que la expresión que lo precede debe ser evaluada en $x = x_0$. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\, x^4\Big|_{x=-1} = 4x^3\Big|_{x=-1} = 4(-1)^3 = -4$$

No hay que confundir las expresiones

$$\frac{d}{dx}\, f(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\, f(x)\Big|_{x=x_0}$$

La primera expresión representa a la *función*, $f'(x)$. La segunda representa un *número*, $f'(x_0)$.

Presentamos a continuación otro ejemplo en el que la derivada se calcula a partir de la definición, esta vez para una función algo más complicada.

Ejemplo 5 Utilice la definición de derivada para calcular $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\Big|_{x=2}$.

Solución Podríamos calcular $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ y sustituir después $x = 2$, pero es más sencillo poner $x = 2$ en la expresión del cociente de Newton antes de tomar al límite:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\bigg|_{x=2} &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2+h}{(2+h)^2+1}-\dfrac{2}{2^2+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2+h}{5+4h+h^2}-\dfrac{2}{5}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{5(2+h)-2(5+4h+h^2)}{5(5+4h+h^2)h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-3h-2h^2}{5(5+4h+h^2)h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-3-2h}{5(5+4h+h^2)} = -\frac{3}{25}
\end{aligned}
$$

Las notaciones dy/dx y $\frac{d}{dx}f(x)$ se denominan **notaciones de Leibniz** de la derivada, tras el trabajo de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), uno de los creadores del cálculo, que utilizó esas notaciones. Las ideas principales del cálculo fueron desarrolladas independientemente por Leibniz e Isaac Newton (1643-1727). Newton utilizó notaciones similares a las primas (y') que hemos usado aquí.

La notación de Leibniz viene sugerida por la definición de derivada. El cociente de Newton $[f(x+h)-f(x)]/h$, cuyo límite se toma para calcular la derivada dy/dx, se puede escribir en la forma $\Delta y/\Delta x$, donde $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ es el incremento de y, y $\Delta x = (x+h) - x = h$ es el correspondiente incremento de x cuando se pasa del punto $(x, f(x))$ al punto $(x+h, f(x+h))$ en la gráfica de x (*véase* la Figura 2.16). Δ es la letra griega delta mayúscula. Utilizando símbolos:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

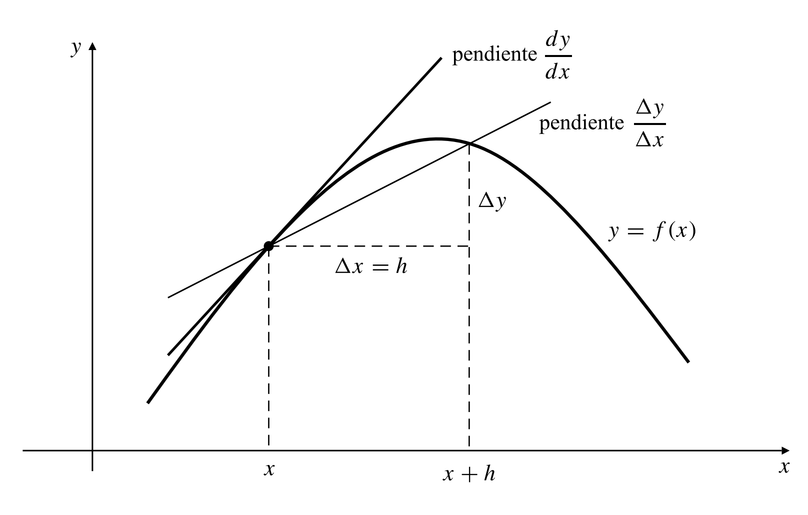


Figura 2.16 $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Diferenciales

El cociente de Newton $\Delta y/\Delta x$ es realmente un cociente de dos cantidades, Δy y Δx. Sin embargo, no está claro del todo que la derivada dy/dx, el límite de $\Delta y/\Delta x$ cuando Δx tiende a cero, se pueda considerar como un cociente. Si y es una función continua de x, entonces Δy tiende a cero cuando Δx tiende a cero, por lo que dy/dx parece ser la cantidad sin sentido $0/0$. No obstante, a veces resulta de utilidad referirse a las cantidades dy y dx, de forma que su cociente es la derivada dy/dx. Esto se puede justificar considerando dx como una nueva variable *independiente* (denominada **diferencial de *x***) y definiendo una nueva variable *dependiente* dy (denominada **diferencial de *y***), como una función de x y de dx de la siguiente forma:

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx = f'(x)\,dx$$

Por ejemplo, si $y = x^2$, se puede escribir $dy = 2x\,dx$, significando lo mismo que $dy/dx = 2x$. La *notación diferencial* se utilizará en la interpretación y operación con integrales al comienzo del Capítulo 5.

Nótese que, tal como han sido definidos, los diferenciales son simplemente variables que pueden ser pequeños en valor absoluto o no serlo. Los diferenciales dy y dx se utilizaron inicialmente por Leibniz (y sus sucesores) para representar cantidades «infinitesimales» (cantidades infinitamente pequeñas, pero no cero), cuyo cociente dy/dx produce la pendiente de la tangente (una recta secante que pasa por dos puntos infinitamente próximos de la gráfica $y = f(x)$). Se puede demostrar que esas cantidades «infinitesimales» no pueden existir (como números reales). Es posible ampliar el sistema de numeración para que pueda admitir infinitesimales, y utilizarlos para desarrollar el cálculo, pero no seguiremos esta línea.

Las derivadas tienen la propiedad del valor medio

¿Es una función f definida en un intervalo I necesariamente la derivada de otra función definida en I? La respuesta es negativa. Algunas funciones son derivadas y otras no. Aunque una derivada no tiene que ser una función continua (*véase* el Ejercicio 18 de la Sección 2.6), debe tener la propiedad del valor medio, como una función continua: en un intervalo $[a, b]$, la derivada $f'(x)$ debe tomar todos los valores entre $f'(a)$ y $f'(b)$ (*véase* el Ejercicio 19 de la Sección 2.6 para una demostración). Una función escalón definida en toda la recta real, como la función de Heaviside $H(x)$ considerada en el Ejemplo 1 de la Sección 1.4 no tiene esta propiedad, por ejemplo, en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que no puede ser la derivada de una función en dicho intervalo. Este argumento no es aplicable a la función signo, que es la derivada de la función valor absoluto en cualquier intervalo (*véase* el Ejemplo 4), incluso aunque no tenga la propiedad del valor medio en un intervalo que contenga al origen. Nótese, sin embargo, que la función signo *no está definida* en el origen.

Si $g(x)$ es una función continua en un intervalo I, entonces $g(x) = f'(x)$ para alguna función f que sea diferenciable en I. Volveremos sobre este hecho en el Capítulo 5 y lo demostraremos en el Apéndice IV.

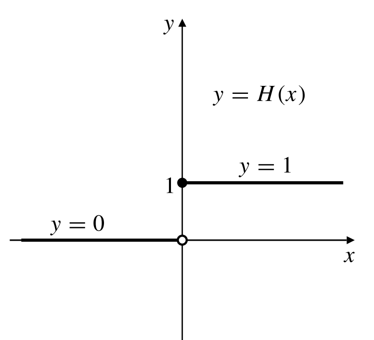


Figura 2.17 Esta función no es una derivada en $[-1, 1]$. No tiene la propiedad del valor medio.

Ejercicios 2.2

Dibuje aproximadamente las gráficas de las derivadas de las funciones de los Ejercicios 1-4.

1. La función f dibujada en la Figura 2.18(a).

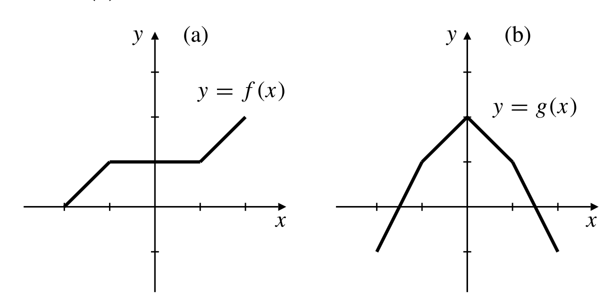
2. La función g dibujada en la Figura 2.18(b).

3. La función h dibujada en la Figura 2.18(c).

4. La función k dibujada en la Figura 2.18(d).

5. ¿Dónde es diferenciable la función f de la Figura 2.18(a)?

6. ¿Dónde es diferenciable la función g de la Figura 2.18(b)?



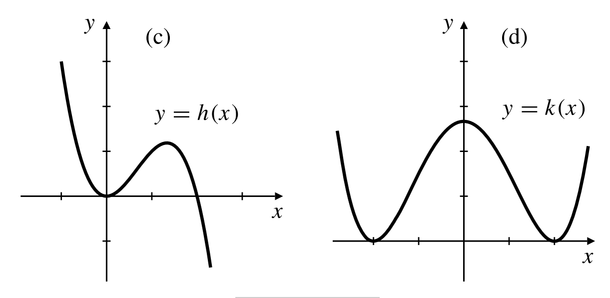


Figura 2.18

Utilice una herramienta gráfica que permita la diferenciación para dibujar las gráficas de las funciones siguientes y de sus derivadas. Observe las relaciones entre las gráficas de y y de y' en cada caso. ¿Qué características de la gráfica de y se pueden deducir a partir de la gráfica de y'?

7. $y = 3x - x^2 - 1$ **8.** $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

9. $y = |x^3 - x|$ **10.** $y = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$

En los Ejercicios 11-22, calcule la derivada de las funciones dadas aplicando directamente la definición de derivada.

11. $y = x^2 - 3x$ **12.** $f(x) = 1 + 4x - 5x^2$

13. $f(x) = x^3$ **14.** $s = \dfrac{1}{3 + 4t}$

15. $F(t) = \sqrt{2t + 1}$ **16.** $f(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt{2 - x}$

17. $y = x + \dfrac{1}{x}$ **18.** $z = \dfrac{s}{1 + s}$

19. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ **20.** $y = \dfrac{1}{x^2}$

21. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}$ **22.** $f(t) = \dfrac{t^2 - 3}{t^2 + 3}$

23. ¿Cómo debería definirse la función $f(x) = x \operatorname{sgn} x$ en $x = 0$ para que sea continua en ese punto? ¿Sería entonces diferenciable en dicho punto?

24. ¿Cómo debería definirse la función $g(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$ en $x = 0$ para que sea continua en ese punto? ¿Sería entonces diferenciable en dicho punto?

25. ¿Dónde no es diferenciable la función $h(x) = |x^2 + 3x + 2|$?

26. Utilizando una calculadora, calcule la pendiente de la recta secante a $y = x^3 - 2x$ que pasa por los puntos correspondientes a $x = 1$ y $1 + \Delta x$, para varios valores de Δx de tamaño decreciente, por ejemplo $\Delta x = \pm 0{,}1$, $\pm 0{,}01$, $\pm 0{,}001$ y $\pm 0{,}0001$ (haga una tabla). Calcule también $\dfrac{d}{dx}(x^3 - 2x)\Big|_{x=1}$ utilizando la definición de derivada.

27. Repita el Ejercicio 26 para la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y los puntos $x = 2$ y $2 + \Delta x$.

Utilizando la definición de derivada, calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a las curvas de los Ejercicios 28-31 en los puntos que se indican.

28. $y = 5 + 4x - x^2$ en el punto donde $x = 2$

29. $y = \sqrt{x + 6}$ en el punto $(3, 3)$

30. $y = \dfrac{t}{t^2 - 2}$ en el punto donde $t = -2$

31. $y = \dfrac{2}{t^2 + t}$ en el punto donde $t = a$

Calcule las derivadas de las funciones de los Ejercicios 32-37 utilizando la regla general de la potencia. ¿Dónde es válida cada derivada?

32. $f(x) = x^{-17}$ **33.** $g(t) = t^{22}$

34. $y = x^{1/3}$ **35.** $y = x^{-1/3}$

36. $t^{-2{,}25}$ **37.** $s^{119/4}$

En los Ejercicios 38-48 se pueden utilizar las fórmulas de derivadas obtenidas en esta sección.

38. Calcule $\left.\dfrac{d}{ds}\sqrt{s}\right|_{s=9}$

39. Calcule $F'(\frac{1}{4})$ si $F(x) = \dfrac{1}{x}$

40. Calcule $f'(8)$ si $f(x) = x^{-2/3}$

41. Calcule $\left.dy/dt\right|_{t=4}$ si $y = t^{1/4}$

42. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en $x = x_0$.

43. Calcule la ecuación de la recta normal a la curva $y = 1/x$ en el punto $x = a$.

44. Demuestre que la curva $y = x^2$ y la recta $x + 4y = 18$ se cortan formando un ángulo recto en uno de sus dos puntos de intersección. *Sugerencia*: Calcule el producto de sus pendientes en uno de sus dos puntos de intersección.

45. Hay dos rectas distintas que pasan por el punto $(1, -3)$ y son tangentes a la curva $y = x^2$. Calcule sus ecuaciones. *Sugerencia*: Dibuje una gráfica. No se dan los puntos de tangencia. Denomínelos (a, a^2).

46. Calcule las ecuaciones de dos rectas que tengan pendiente -2 y sean tangentes a la gráfica de $y = 1/x$.

47. Calcule la pendiente de una recta que pase por el punto $(-2, 0)$ y sea tangente a la curva $y = \sqrt{x}$.

***48.** Demuestre que existen dos tangentes distintas a la curva $y = x^2$ que pasan por el punto (a, b) suponiendo que $b < a^2$. ¿Cuántas tangentes pasan por el punto (a, b) si $b = a^2$? ¿Y si $b > a^2$?

***49.** Demuestre que la derivada de una función impar diferenciable es par y que la derivada de una función par diferenciable es impar.

***50.** Demuestre el caso $r = -n$ (siendo n un entero positivo) de la regla general de la potencia. Es decir, demuestre que

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = -nx^{-n-1}$$

Utilice la fórmula de factorización de una diferencia de potencias n-ésimas dada en esta sección.

***51.** Utilice la fórmula de factorización de una diferencia de cubos:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

como ayuda para calcular la derivada de $f(x) = x^{1/3}$ utilizando directamente la definición de derivada.

***52.** Demuestre la Regla General de la Potencia para $\dfrac{d}{dx}x^r$, siendo $r = 1/n$ y n un entero positivo. *Sugerencia*:

$$\frac{d}{dx}x^{1/n} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{1/n} - x^{1/n}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{1/n} - x^{1/n}}{((x+h)^{1/n})^n - (x^{1/n})^n}$$

Aplique la fórmula de factorización de una diferencia de potencias n-ésimas al último cociente.

53. Obtenga una demostración de la regla de la potencia

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

para enteros positivos n utilizando la fórmula del binomio de Newton:

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1\times 2}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}x^{n-3}h^3 + \cdots + h^n$$

***54.** Utilice las derivadas por la izquierda y por la derecha, $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$ para definir el concepto de una semirrecta con origen en $(a, f(a))$ que es tangente por la izquierda o por la derecha a la gráfica de f en $x = a$. Demuestre que la gráfica tiene tangente en $x = a$ si y sólo si tiene tangentes por la izquierda y por la derecha que son dos partes de una misma recta. ¿Cuáles son las tangentes por la izquierda y por la derecha a las gráficas de $y = x^{1/3}$, $y = x^{2/3}$ y $|x|$ en $x = 0$?

2.3 Reglas de diferenciación

Si hubiera que calcular todas las derivadas utilizando la definición, como en los ejemplos de la Sección 2.2, el cálculo sería sin duda una materia penosa. Afortunadamente, hay una forma más fácil. Desarrollaremos varias *reglas de diferenciación* generales que nos permitirán calcular las derivadas de combinaciones complicadas de funciones de forma más sencilla, sin más que conocer previamente las derivadas de algunas funciones elementales que vimos en la sección anterior.

Por ejemplo, vamos a ser capaces de calcular la derivada de $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ sin más que conocer las

derivadas de x^2 y de $\sqrt{x}$. Las reglas que desarrollaremos en esta sección nos permitirán diferenciar sumas, productos por una constante, productos y cocientes de funciones cuyas derivadas ya conozcamos. En la Sección 2.4 aprenderemos a diferenciar composiciones de funciones.

Antes de desarrollar las reglas de diferenciación es necesario establecer un teorema obvio pero muy importante que dice, más o menos, que la gráfica de una función no puede romperse en un punto donde dicha función es suave.

TEOREMA 1 **Ser diferenciable implica ser continua**

Si f es diferenciable en x, entonces es continua en x.

DEMOSTRACIÓN Como f es diferenciable en x, sabemos que existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

Utilizando las reglas de los límites (Teorema 2 de la Sección 1.2), tenemos que

$$\lim_{h\to 0} (f(x+h)-f(x)) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)(h) = (f'(x))(0) = 0$$

Esto es equivalente a $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, lo que indica que f es continua en x.

Sumas y productos por constantes

La derivada de una suma (o diferencia) de funciones es la suma (o diferencia) de las derivadas de las funciones. La derivada del producto de una función por una constante es la misma constante multiplicada por la derivada de la función.

TEOREMA 2 **Reglas de diferenciación de sumas, diferencias y productos por constantes**

Si las funciones f y g son diferenciables en x, y C es una constante, entonces las funciones $f+g$, $f-g$ y Cf son diferenciables en x y

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$
$$(Cf)'(x) = Cf'(x)$$

DEMOSTRACIÓN Las tres demostraciones son directas, utilizando las reglas de límites correspondientes del Teorema 2 de la Sección 1.2. Para la suma, tenemos que

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\ &= f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

dado que el límite de la suma es la suma de los límites. La demostración para la diferencia es similar. Para el caso de la multiplicación por una constante, tenemos que

$$(Cf)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{Cf(x+h) - Cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = Cf'(x)$$

La regla de diferenciación de sumas se puede ampliar a cualquier suma de un número finito de términos:

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n' \quad (*)$$

Para ver esto se puede utilizar una técnica denominada **inducción matemática** (*véase* la nota que sigue). El Teorema 2 demuestra que el caso de $n = 2$ es cierto. Éste es el PASO 1. Para el PASO 2 debemos demostrar que *si* la fórmula (*) se cumple para algún entero $n = k \geqslant 2$, *entonces* debe cumplirse también para $n = k + 1$. Por tanto, *supongamos* que

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_k)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_k'$$

Inducción matemática

La inducción matemática es una técnica para demostrar que una afirmación sobre un entero n es cierta para todo entero n mayor o igual que algún entero inicial n_0. La demostración se realiza en dos pasos:

PASO 1. Se demuestra que la afirmación es cierta para $n = n_0$.
PASO 2. Se demuestra que si la afirmación es cierta para algún entero $n = k$, siendo $k \geqslant n_0$, entonces es también cierta para el siguiente entero superior, $n = k + 1$.

El paso 2 evita que haya un entero mínimo mayor que n_0 para el que la afirmación sea falsa. Si es cierta para n_0, debe ser cierta también para todos los enteros mayores.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
&(f_1 + f_2 + \cdots + f_k + f_{k+1})' \\
&\quad = (\underbrace{(f_1 + f_2 + \cdots + f_k) + f_{k+1}}_{\text{Sea } f \text{ esta función}})' \\
&\quad = (f + f_{k+1})' \qquad \text{(Ahora se usa el caso conocido } n = 2) \\
&\quad = f' + f_{k+1}' \\
&\quad = f_1' + f_2' + \cdots + f_k' + f_{k+1}'
\end{aligned}$$

Una vez verificados ambos pasos, podemos decir que (*) se cumple para $n \geqslant 2$ por *inducción*. Por tanto, se cumple en particular que la derivada de un polinomio es la suma de las derivadas de sus términos.

Ejemplo 1 Calcule las derivadas de las funciones

(a) $2x^3 - 5x^2 + 4x + 7$, (b) $f(x) = 5\sqrt{x} + \dfrac{3}{x} - 18$, (c) $y = \dfrac{1}{7}t^4 - 3t^{7/3}$

Solución Todas las funciones son sumas de funciones multiplicadas por constante, que ya sabemos cómo diferenciar:

(a) $\frac{d}{dx}(2x^3 - 5x^2 + 4x + 7) = 2(3x^2) - 5(2x) + 4(1) + 0 = 6x^2 - 10x + 4$

(b) $f'(x) = 5\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 3\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0 = \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$

(c) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{7}(4t^3) - 3\left(\frac{7}{3}t^{4/3}\right) = \frac{4}{7}t^3 - 7t^{4/3}$

Ejemplo 2 Calcule la ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{3x^3 - 4}{x}$ en el punto de la curva donde $x = -2$.

Solución Si $x = -2$, entonces $y = 14$. La pendiente de la curva en $(-2, 14)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = \left.\frac{d}{dx}\left(3x^2 - \frac{4}{x}\right)\right|_{x=-2} = \left.\left(6x + \frac{4}{x^2}\right)\right|_{x=-2} = -11$$

La ecuación de la tangente es entonces $y = 14 - 11(x + 2)$, o $y = -11x - 8$.

Regla del Producto

La regla para diferenciar un producto de funciones es un poco más complicada que la de las sumas. *No* es verdad que la derivada de un producto sea el producto de las derivadas.

TEOREMA 3 **Regla del Producto**

Si las funciones f y g son diferenciables en x, entonces el producto fg es también diferenciable en x y

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

DEMOSTRACIÓN Escribiremos el cociente de Newton de fg y sumaremos 0 al numerador de forma que nos permitirá considerar separadamente los cocientes de Newton de f y g:

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, g(x+h) + f(x)\, \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

Para obtener el resultado final hemos utilizado el hecho de que f y g son diferenciables y de que, por tanto, g es continua (Teorema 1), así como las reglas de límites del Teorema 2 de la Sección 1.2. La Figura 2.19 es una demostración gráfica de la regla del producto.

Demostración gráfica de la regla del producto

Tenemos que $u = f(x)$ y $v = g(x)$, de forma que el área rectangular uv representa a $f(x)g(x)$. Si x cambia una cantidad Δx, los incrementos correspondientes de u y v son Δu y Δv. El cambio en el área del rectángulo es

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv \\ &= (\Delta u)v + u(\Delta v) + (\Delta u)(\Delta v)\end{aligned}$$

que es la suma de las tres áreas sombreadas. Dividiendo por Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$ obtenemos

$$\frac{d}{dx}(uv) = \left(\frac{du}{dx}\right)v + u\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

ya que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v = \frac{du}{dx} \times 0 = 0$$

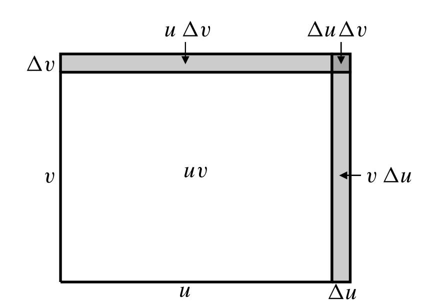


Figura 2.19

Ejemplo 3 Calcule la derivada de $(x^2 + 1)(x^3 + 4)$, utilizando y sin utilizar la regla del producto.

Solución Usando la regla del producto, $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x^3 + 4$, con lo que se calcula

$$\frac{d}{dx}((x^2 + 1)(x^3 + 4)) = 2x(x^3 + 4) + (x^2 + 1)(3x^2) = 5x^4 + 3x^2 + 8x$$

Por otra parte, se puede calcular también la derivada multiplicando los dos binomios y diferenciando el polinomio resultante:

$$\frac{d}{dx}((x^2 + 1)(x^3 + 4)) = \frac{d}{dx}(x^5 + x^3 + 4x^2 + 4) = 5x^4 + 3x^2 + 8x$$

■

Ejemplo 4 Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \left(2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}\right)\left(3\sqrt{x} - \dfrac{2}{x}\right)$.

Solución Usando la regla del producto, siendo f y g las funciones encerradas entre paréntesis, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}\right)\left(3\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right) + \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}\right) \\ &= 6 - \frac{5}{2x^{3/2}} + \frac{12}{x^3}\end{aligned}$$

■

Ejemplo 5 Sea $y = uv$ el producto de dos funciones u y v. Calcule $y'(2)$ si $u(2) = 2$, $u'(2) = -5$, $v(2) = 1$ y $v'(2) = 3$.

Solución Usando la regla del producto, tenemos que

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$

Por tanto,

$$y'(2) = u'(2)v(2) + u(2)v'(2) = (-5)(1) + (2)(3) = -5 + 6 = 1$$

■

Ejemplo 6 Utilice inducción matemática para verificar la fórmula $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ para todos los enteros positivos n.

Solución Para $n = 1$, la fórmula dice que $\frac{d}{dx} x^1 = 1 = 1x^0$, por lo que en este caso la fórmula es verdadera. Debemos demostrar ahora que si la fórmula es verdadera para $n = k \geqslant 1$, es también verdadera para $n = k + 1$. Por tanto, supongamos que

$$\frac{d}{dx} x^k = kx^{k-1}$$

Utilizando la regla del producto, se calcula

$$\frac{d}{dx} x^{k+1} = \frac{d}{dx} (x^k x) = (kx^{k-1})(x) + (x^k)(1) = (k+1)x^k = (k+1)x^{(k+1)-1}$$

Entonces, la fórmula es verdadera también para $n = k + 1$. La fórmula es verdadera para todos los enteros $n \geqslant 1$ *por inducción*.

■

La regla del producto se puede extender a productos de cualquier número de factores. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(fgh)'(x) &= f'(x)(gh)(x) + f(x)(gh)'(x)\\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

En general, la derivada de un producto de n funciones tendrá n términos. Cada término será el mismo producto, pero con uno de sus factores sustituido por su derivada:

$$(f_1 f_2 f_3 \cdots f_n)' = f_1' f_2 f_3 \cdots f_n + f_1 f_2' f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 f_3 \cdots f_n'$$

Esto se puede demostrar mediante inducción matemática. *Véase* el Ejercicio 54 al final de esta sección.

Regla de la Inversa

TEOREMA 4 **Regla de la Inversa**

Si f es diferenciable en x y $f(x) \neq 0$, entonces $1/f$ es diferenciable en x y

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

DEMOSTRACIÓN Utilizando la definición de derivada, se calcula

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{f(x+h)} - \dfrac{1}{f(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x) - f(x+h)}{hf(x+h)f(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{f(x+h)f(x)}\right)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \frac{-1}{(f(x))^2}\,f'(x)$$

Para obtener el resultado hemos utilizado la continuidad de f (Teorema 1), así como las reglas de límites de la Sección 1.2.

Ejemplo 7 Diferencie las funciones

(a) $\dfrac{1}{x^2+1}$ y (b) $f(t) = \dfrac{1}{t + \dfrac{1}{t}}$

Solución Utilizando la Regla de la Inversa:

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

(b) $f'(t) = \dfrac{-1}{\left(t + \dfrac{1}{t}\right)^2}\left(1 - \dfrac{1}{t^2}\right) = \dfrac{-t^2}{(t^2+1)^2}\,\dfrac{t^2-1}{t^2} = \dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$

La Regla de la Inversa se puede utilizar para confirmar la regla general de la potencia para enteros negativos:

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = -nx^{-n-1}$$

que ya hemos demostrado para enteros positivos. Tenemos que

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = \frac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}$$

Ejemplo 8 **(Diferenciación de sumas de inversos)**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+x+1}{x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})$$

$$= -x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

Regla del Cociente

La Regla del Producto y la Regla de la Inversa se pueden combinar para obtener una regla de diferenciación del cociente de dos funciones. Obsérvese que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(f(x)\,\frac{1}{g(x)}\right) = f'(x)\,\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\right)$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Por tanto, hemos demostrado la siguiente regla del cociente.

TEOREMA 5 Regla del Cociente

Si f y g son diferenciables en x y $g(x) \neq 0$, entonces el cociente f/g es diferenciable en x y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Algunas veces los estudiantes tienen problemas para recordar esta regla. Si los términos del numerador invierten su orden el signo final cambiará. Es importante recordar (y utilizar) la regla del cociente de la siguiente forma:

$$(\text{cociente})' = \frac{(\text{denominador}) \times (\text{numerador})' - (\text{numerador}) \times (\text{denominador})'}{(\text{denominador})^2}$$

Ejemplo 9 Calcule las derivadas de

(a) $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$, (b) $\dfrac{\sqrt{t}}{3 - 5t}$, y (c) $f(\theta) = \dfrac{a + b\theta}{m + n\theta}$

Solución En todos los casos se emplea la Regla del Cociente.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1 + x^2)(-2x) - (1 - x^2)(2x)}{(1 + x^2)^2} = -\dfrac{4x}{(1 + x^2)^2}$

(b) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sqrt{t}}{3 - 5t}\right) = \dfrac{(3 - 5t)\dfrac{1}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}(-5)}{(3 - 5t)^2} = \dfrac{3 + 5t}{2\sqrt{t}(3 - 5t)^2}$

(c) $f'(\theta) = \dfrac{(m + n\theta)(b) - (a + b\theta)(n)}{(m + n\theta)^2} = \dfrac{mb - na}{(m + n\theta)^2}$

En los tres casos del Ejemplo 9 la Regla del Cociente produce fracciones con numeradores que son complicados, pero que se pueden simplificar algebraicamente. Es recomendable intentar realizar este tipo de simplificaciones al calcular derivadas, ya que la utilidad de las derivadas en aplicaciones de cálculo depende muchas veces de esas simplificaciones.

Ejemplo 10 Calcule las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(-1, 0)$ y son tangentes a la curva $y = (x-1)/(x+1)$.

Solución El punto $(-1, 0)$ no está en la curva, por lo que no es el punto de tangencia. Supongamos que una recta es tangente a la curva en $x = a$; entonces el punto de tangencia es $(a, (a-1)/(a+1))$. Nótese que a no puede ser -1. La pendiente de la recta debe ser

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}\right|_{x=a} = \frac{2}{(a+1)^2}$$

Si la recta pasa además por $(-1, 0)$, su pendiente debe ser

$$\frac{\dfrac{a-1}{a+1} - 0}{a-(-1)} = \frac{a-1}{(a+1)^2}$$

Igualando las dos expresiones de la pendiente, se obtiene una ecuación de la que se puede despejar a:

$$\frac{a-1}{(a+1)^2} = \frac{2}{(a+1)^2} \quad \Rightarrow \quad a - 1 = 2$$

Por tanto $a = 3$, y la pendiente de la recta es $2/4^2 = 1/8$. Sólo hay una recta que pasa por el punto $(-1, 0)$ y es tangente a la curva, y su ecuación es

$$y = 0 + \frac{1}{8}(x+1) \quad \text{o} \quad x - 8y + 1 = 0$$

■

Observación Las derivadas de cocientes de funciones en las que el denominador es un monomio, como el caso del Ejemplo 8, se pueden resolver en general más fácilmente separando el cociente en varias fracciones (como hicimos en ese ejemplo), en vez de utilizar la Regla del Cociente.

Ejercicios 2.3

En los Ejercicios 1-32, calcule las derivadas de las funciones dadas. Simplifique sus respuestas siempre que sea posible.

1. $y = 3x^2 - 5x - 7$

2. $y = 4x^{1/2} - \dfrac{5}{x}$

3. $f(x) = Ax^2 + Bx + C$

4. $f(x) = \dfrac{6}{x^3} + \dfrac{2}{x^2} - 2$

5. $z = \dfrac{s^5 - s^3}{15}$

6. $y = x^{45} - x^{-45}$

7. $g(t) = t^{1/3} + 2t^{1/4} + 3t^{1/5}$

8. $y = 3\sqrt[3]{t^2} - \dfrac{2}{\sqrt{t^3}}$

9. $u = \dfrac{3}{5}x^{5/3} - \dfrac{5}{3}x^{-3/5}$

10. $F(x) = (3x-2)(1-5x)$

11. $y = \sqrt{x}\left(5 - x - \dfrac{x^2}{3}\right)$

12. $g(t) = \dfrac{1}{2t-3}$

13. $y = \dfrac{1}{x^2 + 5x}$

14. $y = \dfrac{4}{3-x}$

15. $f(t) = \dfrac{\pi}{2 - \pi t}$

16. $g(y) = \dfrac{2}{1 - y^2}$

17. $f(x) = \dfrac{1 - 4x^2}{x^3}$

18. $g(u) = \dfrac{u\sqrt{u} - 3}{u^2}$

19. $y = \dfrac{2 + t + t^2}{\sqrt{t}}$

20. $z = \dfrac{x-1}{x^{2/3}}$

21. $f(x) = \dfrac{3 - 4x}{3 + 4x}$

22. $z = \dfrac{t^2 + 2t}{t^2 - 1}$

23. $s = \dfrac{1 + \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}}$

24. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x + 1}$

25. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

26. $F(t) = \dfrac{t^2 + 7t - 8}{t^2 - t + 1}$

27. $f(x) = (1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)$

28. $f(r) = (r^{-2} + r^{-3} - 4)(r^2 + r^3 + 1)$

29. $y = (x^2 + 4)(\sqrt{x} + 1)(5x^{2/3} - 2)$

30. $y = \dfrac{(x^2 + 1)(x^3 + 2)}{(x^2 + 2)(x^3 + 1)}$

*__31.__ $y = \dfrac{x}{2x + \dfrac{1}{3x + 1}}$

*__32.__ $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x} - 1)(2 - x)(1 - x^2)}{\sqrt{x}(3 + 2x)}$

Calcule las derivadas en los Ejercicios 33-36, sabiendo que $f(2) = 2$ y $f'(2) = 3$.

33. $\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{f(x)}\right)\right|_{x=2}$

34. $\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)\right|_{x=2}$

35. $\left.\dfrac{d}{dx}(x^2 f(x))\right|_{x=2}$

36. $\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{x^2 + f(x)}\right)\right|_{x=2}$

37. Calcule $\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2+4}\right)\right|_{x=-2}$

38. Calcule $\left.\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{t(1+\sqrt{t})}{5-t}\right)\right|_{t=4}$

39. Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$, calcule $f'(2)$.

40. Calcule $\left.\dfrac{d}{dt}\Big((1 + t)(1 + 2t)(1 + 3t)(1 + 4t)\Big)\right|_{t=0}$

41. Calcule la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{2}{3 - 4\sqrt{x}}$ en el punto $(1, -2)$.

42. Calcule la ecuación de la tangente y la normal a $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ en $x = 2$.

43. Calcule los puntos de la curva $y = x + 1/x$ donde la recta tangente es horizontal.

44. Calcule las ecuaciones de todas las rectas horizontales que son tangentes a la curva $y = x^2(4 - x^2)$.

45. Calcule las coordenadas de los puntos donde la curva $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ tiene una tangente horizontal.

46. Calcule las coordenadas de los puntos de la curva $y = \dfrac{x + 1}{x + 2}$ donde la tangente es paralela a la recta $y = 4x$.

47. Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, b)$ y es tangente a la curva $y = 1/x$. Suponga que $b \neq 0$.

*__48.__ Demuestre que la curva $y = x^2$ corta a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ formando ángulos rectos.

49. Obtenga dos rectas que sean tangentes a $y = x^3$ y pasen por el punto $(2, 8)$.

50. Obtenga dos rectas que sean tangentes a $y = x^2/(x - 1)$ y pasen por el punto $(2, 0)$.

51. **(Regla de la Raíz Cuadrada)** Demuestre que si f es diferenciable en x y $f(x) > 0$, entonces

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Utilice la Regla de la Raíz Cuadrada para calcular la derivada de $\sqrt{x^2 + 1}$.

52. Demuestre que $f(x) = |x^3|$ es diferenciable en todo número real x, y calcule su derivada.

Inducción matemática

53. Utilice inducción matemática para demostrar que $\dfrac{d}{dx}x^{n/2} = \dfrac{n}{2}x^{(n/2)-1}$ para todo entero positivo n. Utilice a continuación la Regla de la Inversa para obtener el mismo resultado para enteros n negativos.

54. Utilice inducción matemática para demostrar la fórmula de la derivada de un producto de n funciones, que se presentó anteriormente en esta sección.

2.4 Regla de la Cadena

Aunque ya sabemos diferenciar $\sqrt{x}$ y $x^2 + 1$, todavía no sabemos diferenciar $\sqrt{x^2 + 1}$. Para ello es necesaria una regla que nos diga cómo diferenciar *composiciones* de funciones cuya derivada ya conozcamos. Esta regla se conoce con el nombre de Regla de la Cadena y es la regla de diferenciación que se utiliza más a menudo.

Ejemplo 1 La función $\dfrac{1}{x^2 - 4}$ es la composición $f(g(x))$ de $f(u) = \dfrac{1}{u}$ y $g(x) = x^2 - 4$, cuyas derivadas son

$$f'(u) = \frac{-1}{u^2} \quad \text{y} \quad g'(x) = 2x$$

De acuerdo con la Regla de la Inversa (que es un caso especial de la Regla de la Cadena),

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2-4}\right) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-1}{(x^2-4)^2}(2x)$$
$$= f'(g(x))g'(x)$$

Este ejemplo sugiere que la derivada de una función compuesta $f(g(x))$ es la derivada de f evaluada en $g(x)$ multiplicada por la derivada de g evaluada en x. Esto es la Regla de la Cadena:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

TEOREMA 6 **Regla de la Cadena**

Si $f(u)$ es diferenciable en $u = g(x)$ y $g(x)$ es diferenciable en x, entonces la función compuesta $f \circ g(x) = f(g(x))$ es diferenciable en x y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

En forma de la notación de Leibniz, si $y = f(u)$, siendo $u = g(x)$, entonces $y = f(g(x))$ y:

en u, y cambia con tasa $\dfrac{dy}{du}$ veces el cambio de u.

en x, u cambia con tasa $\dfrac{du}{dx}$ veces el cambio de x.

Por tanto, en x, $y = f(u) = f(g(x))$ cambia con tasa $\dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$ veces el cambio en x. Es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \qquad \text{donde } \frac{dy}{du} \text{ se evalúa en } u = g(x)$$

Aunque parece que el símbolo du se cancelaría en el numerador y el denominador, esto no tiene sentido, ya que dy/du no se define como el cociente de dos cantidades, sino como una única cantidad: la derivada de y con respecto a u.

Podríamos intentar demostrar el Teorema 6 escribiendo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y tomando límites cuando $\Delta x \to 0$. Esa demostración sería válida para la mayoría de las funciones compuestas, pero no para todas (*véase* el Ejercicio 46 al final de esta sección). Más adelante en esta sección se proporcionará una demostración correcta, pero es mejor presentar previamente unos ejemplos para tener una idea más clara de cómo funciona la Regla de la Cadena.

Ejemplo 2 Calcule la derivada de $y = \sqrt{x^2+1}$.

Solución Tenemos que $y = f(g(x))$, siendo $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Como las derivadas de f y g son

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

La Regla de la Cadena indica que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

■

Generalmente, al aplicar la Regla de la Cadena, no se introducen símbolos para representar las funciones que se componen, sino que se procede a calcular la derivada de la función «externa» y a multiplicarla por la derivada de la función «interna». Podemos decir entonces: «la derivada de f de algo es f' de ese algo, multiplicada por la derivada de ese algo».

Funciones internas y externas

En la función compuesta $f(g(x))$, la función f es «externa» y la función g es «interna». La Regla de la Cadena dice que la derivada de la función compuesta es la derivada f' de la función externa evaluada en la función interna $g(x)$ multiplicada por la derivada $g'(x)$ de la función interna:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

Ejemplo 3 Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $(7x-3)^{10}$, (b) $f(t) = |t^2 - 1|$, y (c) $\left(3x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{1/4}$

Solución

(a) Aquí, la función externa es la décima potencia. Debe diferenciarse primero y el resultado multiplicarse por la derivada de la expresión $7x - 3$:

$$\frac{d}{dx}(7x-3)^{10} = 10(7x-3)^9(7) = 70(7x-3)^9$$

(b) En este caso estamos diferenciando el valor absoluto de algo. La derivada es la función signo de ese algo, multiplicada por la derivada de ese algo:

$$f'(t) = (\operatorname{sgn}(t^2-1))(2t) = \frac{2t(t^2-1)}{|t^2-1|} = \begin{cases} 2t & \text{si} \quad t < -1 \text{ o } t > 1 \\ -2t & \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ \text{indefinida} & \text{si} \quad t = \pm 1 \end{cases}$$

(c) Aquí es necesario usar dos veces la Regla de la Cadena. Se comienza por diferenciar la potencia $1/4$ de algo, pero ese algo contiene la potencia -3 de $2x + 1$, y para derivar eso será necesaria de nuevo la Regla de la Cadena:

$$\frac{d}{dx}\left(3x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{1/4} = \frac{1}{4}\left(3x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{-3/4} \frac{d}{dx}\left(3x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(3x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{-3/4}\left(3 - \frac{3}{(2x+1)^4}\frac{d}{dx}(2x+1)\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(1 - \frac{2}{(2x+1)^4}\right)\left(3x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{-3/4}$$

Cuando ya estemos familiarizados con la Regla de la Cadena, podremos ahorrar pasos realizando toda la operación en un solo paso:

$$\frac{d}{dx}\left(3x+\frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{1/4} = \frac{1}{4}\left(3x+\frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{-3/4}\left(3-\frac{3}{(2x+1)^4}(2)\right)$$
$$= \frac{3}{4}\left(1-\frac{2}{(2x+1)^4}\right)\left(3x+\frac{1}{(2x+1)^3}\right)^{-3/4}$$

El uso de la Regla de la Cadena produce productos de factores que no aparecen en el orden en el que se escriben de forma natural, por lo que muchas veces se modificará el resultado para escribir los factores en un orden diferente. Esto es obvio en los apartados (a) y (c) del ejemplo anterior. En monomios (expresiones que son producto de factores), es habitual escribir los factores en orden de complejidad creciente de izquierda a derecha, colocando primero los factores numéricos. Hay ocasiones en las que no merece la pena gastar tiempo realizando estas operaciones. Una de ellas es cuando deseamos particularizar la derivada en un valor concreto. En ese caso, se sustituye el valor tan pronto como se pueda tras calcular la derivada, antes de realizar modificaciones de orden o simplificaciones:

$$\frac{d}{dx}(x^2-3)^{10}\Big|_{x=2} = 10(x^2-3)^9(2x)\Big|_{x=2} = (10)(1^9)(4) = 40$$

Ejemplo 4 Suponga que f es una función diferenciable en la recta real. Exprese en función de f', o f, las derivadas de:

(a) $f(3x)$, (b) $f(x^2)$, (c) $f(\pi f(x))$, y (d) $[f(3-2f(x))]^4$.

Solución

(a) $\frac{d}{dx} f(3x) = (f'(3x))(3) = 3f'(3x)$

(b) $\frac{d}{dx} f(x^2) = (f'(x^2))(2x) = 2xf'(x^2)$

(c) $\frac{d}{dx} f(\pi f(x)) = (f'(\pi f(x)))(\pi f'(x)) = \pi f'(x)f'(\pi f(x))$

(d) $\frac{d}{dx}[f(3-2f(x))]^4 = 4[f(3-2f(x))]^3\ f'(3-2f(x))(-2f'(x))$

$= -8f'(x)f'(3-2f(x))[f(3-2f(x))]^3$

Cálculo de derivadas con Maple

Los sistemas de álgebra por ordenador conocen las derivadas de funciones elementales y pueden calcular simbólicamente las derivadas de combinaciones de esas funciones, utilizando las reglas de diferenciación. El operador `D` de Maple se utiliza para calcular la derivada `D(f)` de una función `f` de una variable. Alternativamente, se puede utilizar `diff` para diferenciar una expresión con respecto a una variable y emplear después la rutina de sustitución `subs` para particularizar el resultado en un número concreto.

```
> f := x-> sqrt(1+2*x^2);
```

$$f := x \to \sqrt{1+2x^2}$$

```
> fprime := D(f);
```

$$fprime := x \to 2\,\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

```
> fprime(2);
```

$$\frac{4}{3}$$

```
> diff(t^2*sin(3*t),t);
```

$$2t\,\mathrm{sen}\,(3t) + 3t^2 \cos(3t)$$

```
> simplify(subs(t=Pi/12, %));
```

$$\frac{1}{12}\,\pi\sqrt{2} + \frac{1}{96}\,\pi^2\,\sqrt{2}$$

Uso de la Regla de la Cadena en las fórmulas de diferenciación

Sea u una función diferenciable en x e $y = u^n$. La aplicación de la Regla de la Cadena produce

$$\frac{d}{dx}\,u^n = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\,\frac{du}{dx}$$

La fórmula

$$\frac{d}{dx}\,u^n = nu^{n-1}\,\frac{du}{dx}$$

es simplemente la fórmula $\frac{d}{dx}\,x^n = nx^{n-1}$ donde se ha incluido la aplicación de la Regla de la Cadena para que se puede emplear con funciones de x, en vez de sólo con x. Algunas otras reglas de diferenciación donde se puede aplicar la Regla de la Cadena son:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{-1}{u^2}\,\frac{du}{dx}$	(Regla de la Inversa)
$\frac{d}{dx}\,\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\frac{du}{dx}$	(Regla de la Raíz Cuadrada)
$\frac{d}{dx}\,u^r = ru^{r-1}\,\frac{du}{dx}$	(Regla General de la Potencia)
$\frac{d}{dx}\,\lvert u\rvert = \mathrm{sgn}\,u\,\frac{du}{dx} = \frac{u}{\lvert u\rvert}\,\frac{du}{dx}$	(Regla del Valor Absoluto)

Demostración de la Regla de la Cadena (Teorema 6)

Sea f una función diferenciable en el punto $u = g(x)$, con g una función diferenciable en x. Sea la función $E(k)$ definida así:

$$E(0) = 0$$

$$E(k) = \frac{f(u+k) - f(u)}{k} - f'(u), \qquad \text{si } k \neq 0$$

Por definición de derivada, $\lim_{k\to 0} E(k) = f'(u) - f'(u) = 0 = E(0)$, por lo que $E(k)$ es continua en $k = 0$. Además, sea $k = 0$ o no, tenemos que

$$f(u+k) - f(u) = (f'(u) + E(k))k$$

Sea ahora $u = g(x)$ y $k = g(x+h) - g(x)$, de forma que $u + k = g(x+h)$, con lo que se obtiene

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) = (f'(g(x)) + E(k))(g(x+h) - g(x))$$

Como g es diferenciable en x, $\lim_{h\to 0} [g(x+h) - g(x)]/h = g'(x)$. Además, g es continua en x por el Teorema 1, por lo que $\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0} (g(x+h) - g(x)) = 0$. Como E es continua en 0, $\lim_{h\to 0} E(k) = \lim_{k\to 0} E(k) = E(0) = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f(g(x)) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (f'(g(x)) + E(k)) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= (f'(g(x)) + 0)g'(x) = f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Ejercicios 2.4

Calcule las derivadas de las funciones de los Ejercicios 1-16.

1. $y = (2x+3)^6$

2. $y = \left(1 - \dfrac{x}{3}\right)^{99}$

3. $f(x) = (4 - x^2)^{10}$

4. $y = \sqrt{1 - 3x^2}$

5. $F(t) = \left(2 + \dfrac{3}{t}\right)^{-10}$

6. $(1 + x^{2/3})^{3/2}$

7. $\dfrac{3}{5 - 4x}$

8. $(1 - 2t^2)^{-3/2}$

9. $y = |1 - x^2|$

10. $f(t) = |2 + t^3|$

11. $y = 4x + |4x - 1|$

12. $y = (2 + |x|^3)^{1/3}$

13. $y = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3x+4}}$

14. $f(x) = \left(1 + \sqrt{\dfrac{x-2}{3}}\right)^4$

15. $z = \left(u + \dfrac{1}{u-1}\right)^{-5/3}$

16. $y = \dfrac{x^5\sqrt{3 + x^6}}{(4 + x^2)^3}$

17. Dibuje la gráfica de la función del Ejercicio 10.

18. Dibuje la gráfica de la función del Ejercicio 11.

Verifique que se cumple la Regla General de la Potencia en los Ejercicios 19-21.

19. $x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$

20. $x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$

21. $x^{3/2} = \sqrt{(x^3)}$

En los Ejercicios 22-29, exprese las derivadas de las funciones dadas en función de la derivada f' de la función diferenciable f.

22. $f(2t+3)$

23. $f(5x - x^2)$

24. $\left[f\left(\dfrac{2}{x}\right)\right]^3$

25. $\sqrt{3 + 2f(x)}$

26. $f(\sqrt{3 + 2t})$

27. $f(3 + 2\sqrt{x})$

28. $f(2f(3f(x)))$

29. $f(2 - 3f(4 - 5t))$

30. Calcule $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}\right)\Bigg|_{x=-2}$

31. Calcule $\dfrac{d}{dx}\sqrt{3t-7}\Bigg|_{t=3}$

32. Si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, calcule $f'(4)$.

33. Si $y = (x^3 + 9)^{17/2}$, calcule $y'\Big|_{x=-2}$

34. Calcule $F'(0)$ si $F(x) = (1+x)(2+x)^2(3+x)^3(4+x)^4$.

***35.** Calcule y' si $y = (x + ((3x)^5 - 2)^{-1/2})^{-6}$. Intente hacer todo en un paso.

En los Ejercicios 36-39, calcule la ecuación de la recta tangente a cada curva en el punto dado.

36. $y = \sqrt{1 + 2x^2}$ en $x = 2$

37. $y = (1 + x^{2/3})^{3/2}$ en $x = -1$

38. $y = (ax + b)^8$ en $x = b/a$

39. $y = 1/(x^2 - x + 3)^{3/2}$ a $x = -2$

40. Demuestre que la derivada de $f(x) = (x - a)^m(x - b)^n$ se anula en algún punto entre a y b si m y n son enteros positivos.

Utilice Maple u otro sistema de álgebra por computador para calcular y simplificar las derivadas de las funciones de los Ejercicios 41-44.

41. $y = \sqrt{x^2 + 1} + \dfrac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$

42. $y = \dfrac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)}{x^6}$

43. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=2}$ si $y = (t + 1)(t^2 + 2)(t^3 + 3)(t^4 + 4)(t^5 + 5)$

44. $f'(1)$ si $f(x) = \dfrac{(x^2 + 3)^{1/2}(x^3 + 7)^{1/3}}{(x^4 + 15)^{1/4}}$

45. ¿Permite la Regla de la Cadena calcular las derivadas de $|x|^2$ y $|x^2|$ en $x = 0$? ¿Tienen derivada esas funciones en $x = 0$? ¿Por qué?

*__46.__ ¿Qué es incorrecto en la siguiente «demostración» de la Regla de la Cadena? Sea $k = g(x + h) - g(x)$. Entonces $\lim_{h\to 0} k = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} &= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \, \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x) + k) - f(g(x))}{k} \, \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\\ &= f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

2.5 Derivadas de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas, especialmente el seno y el coseno, juegan un papel muy importante en el modelado matemático de fenómenos reales. Concretamente, aparecen siempre que las cantidades que se manejan varían de forma periódica. Los movimientos elásticos, las vibraciones y las ondas de todo tipo involucran de forma natural funciones trigonométricas, y muchas leyes de fenómenos físicos y mecánicos se pueden formular como ecuaciones diferenciales en cuyas soluciones participan estas funciones.

En esta sección vamos a calcular las derivadas de las seis funciones trigonométricas. En realidad, sólo tendremos que trabajar en detalle una de ellas, la del seno, ya que las otras se pueden deducir a partir de ésa utilizando igualdades conocidas y las reglas de diferenciación de la Sección 2.32.

Algunos límites especiales

En primer lugar, es necesario obtener algunos límites trigonométricos necesarios para calcular la derivada del seno. Se supone que los argumentos de las funciones trigonométricas se expresan en radianes.

TEOREMA 7 Las funciones $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ son continuas para todo valor de θ. En particular, si $\theta = 0$ tenemos que

$$\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = \cos 0 = 1$$

Este resultado es inmediato observando las gráficas del seno y del coseno, por lo que no lo demostraremos aquí. Una demostración se basa en el Teorema del Sándwich (Teorema 4 de la Sección 1.2), y se sugiere en el Ejercicio 62 de la presente sección.

La gráfica de la función $y = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ se muestra en la Figura 2.20. Aunque no está definida en $\theta = 0$, la función parece tener límite 1 cuando θ tiende a 0.

Figura 2.20 Parece que $\lim_{\theta \to 0} (\operatorname{sen}\theta)/\theta = 1$.

TEOREMA 8 **Un importante límite trigonométrico**

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 \qquad (\text{con } \theta \text{ en radianes})$$

DEMOSTRACIÓN Sea $0 < \theta < \pi/2$, y representemos θ como se muestra en la Figura 2.21. Los puntos $A(1, 0)$ y $P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ están sobre la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$. El área del sector circular OAP está comprendida entre las áreas de los triángulos OAP y OAT:

$$\text{Área } \Delta\ OAP < \text{Área sector } OAP < \text{Área } \Delta\ OAT$$

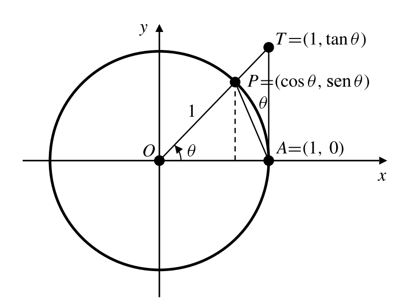


Figura 2.21 Área Δ OAP < Área sector OAP < Área Δ OAT.

Como se demuestra en la Sección P.7, el área de un sector circular de ángulo θ (radianes) y radio 1 es $\theta/2$. El área de un triángulo es $(1/2) \times$ base $\times$ altura, por lo que

$$\text{Área } \Delta\ OAP = \frac{1}{2}(1)(\operatorname{sen}\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$$

$$\text{Área } \Delta\ OAT = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos\theta}$$

Entonces,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos\theta}$$

o, tras multiplicar por el número positivo $2/\operatorname{sen}\theta$,

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

Si ahora tomamos inversos, cambiando por tanto el orden de las inecuaciones:

$$1 > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} > \cos\theta$$

Como $\lim_{\theta \to 0+} \cos\theta = 1$ por el Teorema 7, la aplicación del Teorema del Sándwich produce

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Finalmente, nótese que $\operatorname{sen}\theta$ y θ son *funciones impares*. Por tanto, $f(\theta) = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ es una *función par*: $f(-\theta) = f(\theta)$, como se muestra en la Figura 2.20. Esta simetría implica que el límite por la izquierda en 0 debe ser igual al límite por la derecha:

$$\lim_{\theta\to 0-} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$$

por lo que $\lim_{\theta\to 0} (\operatorname{sen}\theta)/\theta = 1$, por el Teorema 1 de la Sección 1.2.

El Teorema 8 se puede combinar con las reglas de los límites y con igualdades trigonométricas conocidas para obtener otros límites trigonométricos.

Ejemplo 1 Demuestre que $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.

Solución Utilizando la fórmula del ángulo mitad $\cos h = 1 - 2\operatorname{sen}^2(h/2)$, se calcula:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2\operatorname{sen}^2(h/2)}{h} \qquad \text{Sea } \theta = h/2$$

$$= -\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \operatorname{sen}\theta = -(1)(0) = 0$$

Derivadas del seno y el coseno

Para calcular la derivada de $\operatorname{sen} x$ hay que usar la fórmula del seno de una suma (*véase* la Sección P.7):

$$\operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h$$

TEOREMA 9 **La derivada de la función seno es la función coseno.**

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$$

DEMOSTRACIÓN Se utilizan la definición de derivada, la fórmula del seno de una suma, las reglas de combinación de límites, el Teorema 8 y el resultado del Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x (\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= (\operatorname{sen} x)\cdot(0) + (\cos x)\cdot(1) = \cos x
\end{aligned}$$

TEOREMA 10 **La derivada de la función coseno es el negativo de la función seno.**

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

DEMOSTRACIÓN Podríamos repetir la demostración anterior del seno, utilizando la fórmula del seno de la suma $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h$. Una forma más sencilla es utilizar las fórmulas para ángulos complementarios, $\operatorname{sen}((\pi/2)-x) = \cos x$ y $\cos((\pi/2)-x) = \operatorname{sen} x$, y la Regla de la Cadena de la Sección 2.4:

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = (-1)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$$

Nótese el signo menos en la derivada del coseno. La derivada del seno es el coseno, pero la derivada del coseno es *menos* el seno. Esto se muestra gráficamente en la Figura 2.22.

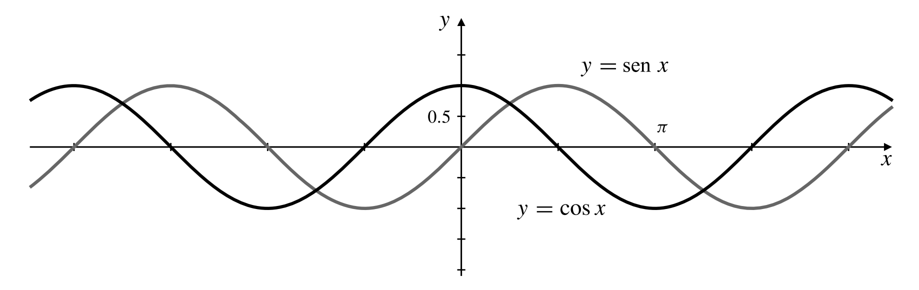


Figura 2.22 Gráfica conjunta del seno y el coseno. La pendiente de la curva del seno en x es $\cos x$, y la pendiente de la curva del coseno en x es $-\operatorname{sen} x$.

Ejemplo 2 Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $\operatorname{sen}(\pi x) + \cos(3x)$, (b) $x^2 \operatorname{sen}\sqrt{x}$, y (c) $\dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

Solución

(a) Aplicando la Regla de la Suma y la Regla de la Cadena:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(\pi x) + \cos(3x)) = \cos(\pi x)(\pi) - \operatorname{sen}(3x)(3) = \pi\cos(\pi x) - 3\operatorname{sen}(3x)$$

(b) Aplicando las Reglas del Producto y de la Cadena:

$$\frac{d}{dx}(x^2\operatorname{sen}\sqrt{x}) = 2x\operatorname{sen}\sqrt{x} + x^2(\cos\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\operatorname{sen}\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{3/2}\cos\sqrt{x}$$

(c) Aplicando la Regla del Cociente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right) &= \frac{(1-\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - (\cos x)(0 - \cos x)}{(1-\operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{(1-\operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{1-\operatorname{sen} x}{(1-\operatorname{sen} x)^2} = \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la igualdad $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ para simplificar la expresión de la línea central.

Utilizando fórmulas trigonométricas se puede modificar a veces la forma de calcular la derivada. Diferenciando de diferentes formas se pueden obtener respuestas que parecen distintas, pero que deben ser iguales si no se han cometido errores.

Ejemplo 3 Utilice dos métodos diferentes para calcular la derivada de la función $f(t) = \operatorname{sen} t \cos t$.

Solución Por la Regla del Producto,

$$f'(t) = (\cos t)(\cos t) + (\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$$

Por otra parte, como $\operatorname{sen}(2t) = 2 \operatorname{sen} t \cos t$, tenemos que

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right) = \left(\frac{1}{2}\right)(2)\cos(2t) = \cos(2t)$$

Las dos respuestas son realmente la misma, ya que $\cos(2t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$. ■

Es muy importante recordar que las fórmulas de las derivadas de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se han obtenido bajo el supuesto de que x se mide en *radianes*. Como $180^{\text{o}} = \pi$ radianes, $x^{\text{o}} = \pi x/180$ radianes. Por la Regla de la Cadena,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x^{\text{o}}) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos(x^{\text{o}})$$

Análogamente, la derivada de $\cos(x^{\text{o}})$ es $(-\pi/180)\operatorname{sen}(x^{\text{o}})$.

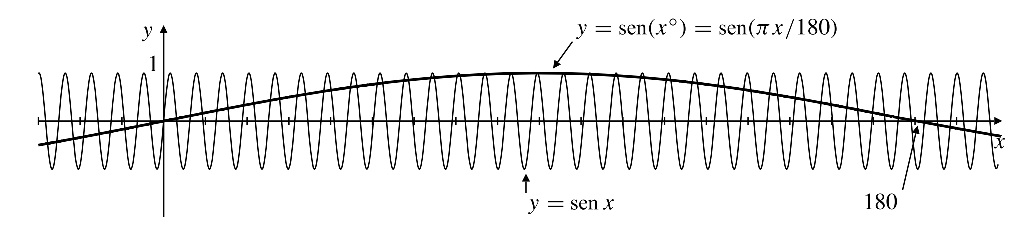


Figura 2.23 $\operatorname{sen}(x^{\text{o}})$ oscila mucho más lentamente que $\operatorname{sen} x$. Su máxima pendiente es $\pi/180$.

Derivadas de otras funciones trigonométricas

Como $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son diferenciables en todos sus valores, las funciones

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

son diferenciables en todos los valores de x en donde están definidas (es decir, donde sus denominadores son distintos de cero). Sus derivadas se pueden calcular aplicando las Reglas del Cociente y de la Inversa, como se indica a continuación:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

Continuidad

Las seis funciones trigonométricas son diferenciables y, por tanto, continuas (por el Teorema 1) en todos sus dominios. Esto significa que se pueden calcular los límites de la mayoría de las funciones trigonométricas cuando $x \to a$ simplemente evaluando dichas funciones en $x = a$.

Las tres funciones «co-» (coseno, cotangente y cosecante) tienen signos menos en sus derivadas.

Ejemplo 4 Verifique las fórmulas de las derivadas de $\tan x$ y $\sec x$.

Solución Para la tangente se utiliza la Regla del Cociente y para la secante, la Regla de la Inversa:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{-1}{\cos^2 x}\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= \frac{-1}{\cos^2 x}(-\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$= \sec x \tan x$$

■

Ejemplo 5

(a) $$\frac{d}{dx}\left[3x + \cot\left(\frac{x}{2}\right)\right] = 3 + \left[-\csc^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}\csc^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

(b) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{\operatorname{sen}(2x)}\right) = \frac{d}{dx}(3\csc(2x))$$

$$= 3(-\csc(2x)\cot(2x))(2) = -6\csc(2x)\cot(2x)$$

■

Ejemplo 6 Calcule las rectas tangente y normal a la curva $y = \tan(\pi x/4)$ en el punto (1, 1).

Solución La pendiente de la tangente a la curva $y = \tan(\pi x/4)$ en el punto (1, 1) es:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{\pi}{4}\sec^2(\pi x/4)\right|_{x=1} = \frac{\pi}{4}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

La tangente es la recta

$$y = 1 + \frac{\pi}{2}(x - 1) \quad \text{o} \quad y = \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2} + 1$$

La pendiente de la normal es $m = -2/\pi$, por lo que su ecuación punto-pendiente es

$$y = 1 - \frac{2}{\pi}(x - 1) \quad \text{o} \quad y = -\frac{2x}{\pi} + \frac{2}{\pi} + 1$$

■

Ejercicios 2.5

1. Verifique la fórmula de la derivada de $\csc x = 1/(\operatorname{sen} x)$.

2. Verifique la fórmula de la derivada de $\cot x = (\cos x)/(\operatorname{sen} x)$.

Calcule las derivadas de las funciones de los Ejercicios 3-36. Simplifique sus respuestas siempre que sea posible. Considere también la posibilidad de simplificar la expresión antes de diferenciarla.

3. $y = \cos 3x$

4. $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{5}$

5. $y = \tan \pi x$

6. $y = \sec ax$

7. $y = \cot(4 - 3x)$

8. $y = \operatorname{sen}((\pi - x)/3)$

9. $f(x) = \cos(s - rx)$

10. $y = \operatorname{sen}(Ax + B)$

11. $\operatorname{sen}(\pi x^2)$

12. $\cos(\sqrt{x})$

13. $y = \sqrt{1 + \cos x}$

14. $\operatorname{sen}(2 \cos x)$

15. $f(x) = \cos(x + \operatorname{sen} x)$

16. $g(\theta) = \tan(\theta \operatorname{sen} \theta)$

17. $u = \operatorname{sen}^3(\pi x/2)$

18. $y = \sec(1/x)$

19. $F(t) = \operatorname{sen} at \cos at$

20. $G(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen} a\theta}{\cos b\theta}$

21. $\operatorname{sen}(2x) - \cos(2x)$

22. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

23. $\tan x + \cot x$

24. $\sec x - \csc x$

25. $\tan x - x$

26. $\tan(3x)\cot(3x)$

27. $t \cos t - \operatorname{sen} t$

28. $t \operatorname{sen} t + \cos t$

29. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

30. $\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

31. $x^2 \cos(3x)$

32. $g(t) = \sqrt{(\operatorname{sen} t)/t}$

33. $v = \sec(x^2)\tan(x^2)$

34. $z = \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{1 + \cos\sqrt{x}}$

35. $\operatorname{sen}(\cos(\tan t))$

36. $f(s) = \cos(s + \cos(s + \cos s))$

37. Sabiendo que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, deduzca que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

38. Sabiendo que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, deduzca que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

En los Ejercicios 39-42, calcule las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las curvas $y = f(x)$ en los puntos dados.

39. $y = \operatorname{sen} x$, $(\pi, 0)$

40. $y = \tan(2x)$, $(0, 0)$

41. $y = \sqrt{2}\cos(x/4)$, $(\pi, 1)$

42. $y = \cos^2 x$, $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$

43. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \operatorname{sen}(x^{\text{o}})$ en el punto $x = 45$.

44. Calcule la ecuación de la recta normal a la curva $y = \sec(x^{\text{o}})$ en el punto $x = 60$.

45. Calcule los puntos de la curva $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, donde su tangente es paralela a la recta $y = 2x$.

46. Calcule los puntos de la curva $y = \tan(2x)$, $-\pi/4 < x < \pi/4$, donde su tangente es paralela a la recta $y = -x/8$.

47. Demuestre que las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \sec x$ e $y = \csc x$ tienen tangentes horizontales.

48. Demuestre que las gráficas de $y = \tan x$ e $y = \cot x$ nunca tienen tangentes horizontales.

¿Tienen las gráficas de las funciones de los Ejercicios 49-52 tangentes horizontales en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$? Si es así, ¿dónde? Si no, ¿por qué no?

49. $y = x + \operatorname{sen} x$

50. $y = 2x + \operatorname{sen} x$

51. $y = x + 2 \operatorname{sen} x$

52. $y = x + 2 \cos x$

Calcule los límites de los Ejercicios 53-56.

53. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x}$

54. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \sec(1 + \cos x)$

55. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (x^2 \csc x \cot x)$

56. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi - \pi\cos^2 x}{x^2}\right)$

57. Utilice el método del Ejemplo 1 para calcular $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos h}{h^2}$

58. Calcule los valores de a y b que hacen que

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0 \\ 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

sea diferenciable en $x = 0$.

59. ¿Cuántas rectas existen que pasan por el origen y son tangentes a $y = \cos x$? Calcule (con una precisión de 6 decimales) las pendientes de las dos rectas que tienen las mayores pendientes positivas.

Utilice Maple o algún otro sistema de matemáticas por computador para calcular y simplificar las derivadas de las funciones de los Ejercicios 60-61.

60. $\displaystyle\frac{d}{dx}\frac{x\cos(x \operatorname{sen} x)}{x + \cos(x \cos x)}\bigg|_{x=0}$

61. $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x^2+3}\,\text{sen}\,(x^2)-\frac{(2x^2+3)^{3/2}\cos(x^2)}{x}\right)\Bigg|_{x=\sqrt{\pi}}$

∗**62. (Continuidad del seno y el coseno)**

(a) Demuestre que

$$\lim_{\theta\to 0}\,\text{sen}\,\theta = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta\to 0}\,\cos\theta = 1$$

de la siguiente forma: utilice el hecho de que la longitud de la cuerda *AP* es menor que la longitud del arco *AP* en la Figura 2.24 para demostrar que

$$\text{sen}^2\,\theta + (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$$

Deduzca a continuación que $0 \leqslant |\text{sen}\,\theta| < |\theta|$ y que $0 \leqslant |1-\cos\theta| < |\theta|$. Utilice ahora el Teorema del Sándwich de la Sección 1.2.

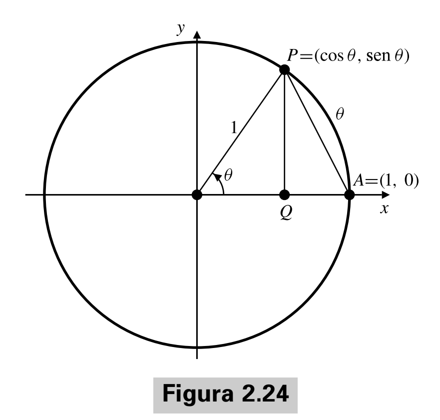


Figura 2.24

(b) El apartado (a) indica que $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$ son continuas en $\theta = 0$. Utilice ahora las fórmulas de suma para deducir que son por tanto continuas para todo θ.

2.6 El Teorema del Valor Medio

Si salimos en un coche a las 13:00 horas y llegamos a una cuidad a 150 km de distancia del punto de partida a las 15:00 horas, habremos viajado a una velocidad media de $150/2 = 75$ km/h. Aunque no hayamos viajado a esa velocidad constante, debemos haber viajado a 75 km/h *al menos un instante* en nuestro trayecto, porque si nuestra velocidad hubiera sido siempre inferior a 75 km/h hubiéramos recorrido menos de 150 km en dos horas, y si nuestra velocidad hubiera sido siempre superior a 75 km/h, habríamos recorrido más de 150 km en dos horas. Para pasar de un valor inferior a 75 km/h a un valor superior a 75 km/h nuestra velocidad, que es una función continua con el tiempo, debe pasar por el valor de 75 km/h en algún instante intermedio.

La conclusión de que la velocidad media en un intervalo de tiempo debe ser igual a la velocidad instantánea en algún instante de ese intervalo es un ejemplo de principio matemático importante. En términos geométricos indica que si *A* y *B* son dos puntos de una curva suave, entonces hay al menos un punto *C* en la curva entre *A* y *B* donde la recta tangente es paralela a la cuerda *AB*. *Véase* la Figura 2.25.

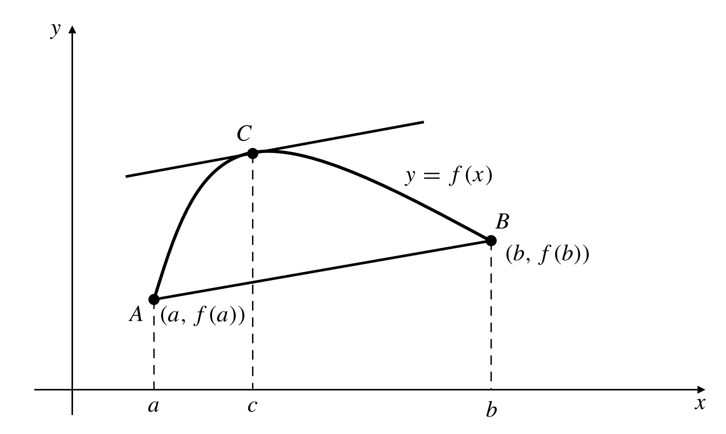


Figura 2.25 Existe un punto *C* en la curva donde la tangente es paralela a *AB*.

El siguiente teorema postula de forma más precisa el principio anterior.

TEOREMA 11 **Teorema del Valor Medio**

Sea una función F continua en el intervalo cerrado finito $[a, b]$, y diferenciable en el intervalo abierto (a, b). Existe un punto c en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Esto indica que la pendiente de la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$, por lo que las dos rectas son paralelas.

Más adelante en esta sección demostraremos el Teorema del Valor Medio. Por el momento, realizaremos algunas observaciones.

1. Todas las hipótesis del Teorema del Valor Medio son necesarias para que se cumpla su conclusión: si f no es continua en todo punto del intervalo $[a, b]$ o no es diferenciable en un solo punto de (a, b), entonces puede no haber ningún punto en el que la tangente sea paralela a la secante AB (*véase* la Figura 2.26).

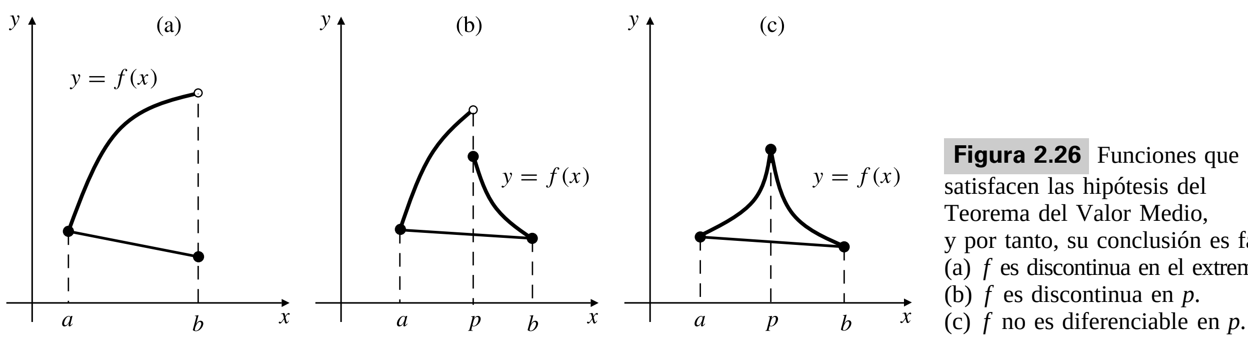


Figura 2.26 Funciones que no satisfacen las hipótesis del Teorema del Valor Medio, y por tanto, su conclusión es falsa:
(a) f es discontinua en el extremo b.
(b) f es discontinua en p.
(c) f no es diferenciable en p.

2. El Teorema del Valor Medio no ofrece ninguna indicación de cuántos puntos C existen en la curva entre A y B donde la tangente es paralela a AB. Si la curva es en realidad una línea recta, entonces todos sus puntos tendrán la propiedad requerida. En general, puede haber más de un punto (*véase* la Figura 2.27), pero el Teorema del Valor Medio sólo asegura que debe existir al menos uno.

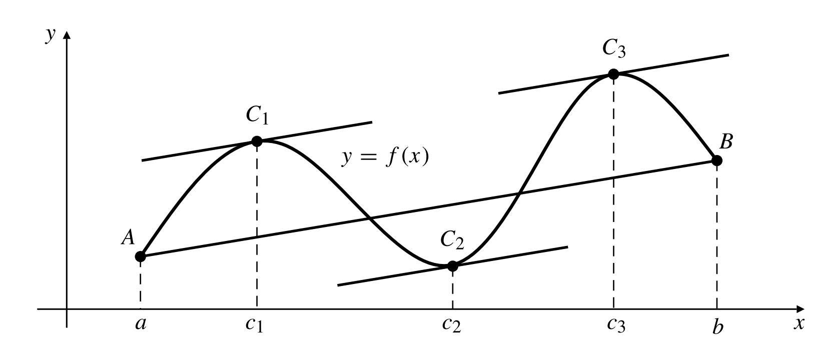


Figura 2.27 En esta curva hay tres puntos C donde la tangente es paralela a la cuerda AB.

3. El Teorema del Valor Medio no da ninguna información sobre cómo encontrar el punto c. Sólo indica que este punto debe existir. En algunas funciones simples es posible encontrar c (*véase* el ejemplo que sigue), pero hacerlo así no suele tener valor práctico. Como veremos posteriormente, la importancia del Teorema del Valor Medio reside en su uso como herra-

mienta teórica. Pertenece a la clase de teoremas denominados *teoremas de existencia*, como el Teorema Max-Min o el Teorema del Valor Intermedio (Teoremas 8 y 9 de la Sección 1.4).

Ejemplo 1 Verifique la conclusión del Teorema del Valor Medio para $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[a, b]$, siendo $0 \leqslant a < b$.

Solución El teorema dice que debe existir un número c en el intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

Por tanto, $2\sqrt{c} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ y $c = \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2}\right)^2$. Como $a < b$, tenemos que

$$a = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a}}{2}\right)^2 < c < \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{b}}{2}\right)^2 = b$$

por lo que c está en el intervalo (a, b). ■

Los dos ejemplos siguientes son más representativos de cómo se usa realmente el Teorema del Valor Medio.

Ejemplo 2 Demuestre que $\operatorname{sen} x < x$ para todo $x > 0$.

Solución Si $x > 2\pi$, entonces $\operatorname{sen} x \leqslant 1 < 2\pi < x$. Si $0 < x \leqslant 2\pi$ entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe un c en el intervalo abierto $(0, 2\pi)$ tal que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x \bigg|_{x=c} = \cos c < 1$$

Por tanto, $\operatorname{sen} x < x$ también en este caso. ■

Ejemplo 3 Demuestre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}$ para $x > 0$ y para $-1 \leqslant x < 0$.

Solución Si $x > 0$, se aplica el Teorema del Valor Medio a $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en el intervalo $[0, x]$. Existe entonces un valor c en $(0, x)$ tal que

$$\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1 + c}} < \frac{1}{2}$$

La última inecuación se cumple porque $c > 0$. Multiplicando por el número positivo x y pasando el -1 al otro lado se obtiene $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}$.

Si $-1 \leqslant x < 0$, se aplica el Teorema del Valor Medio a $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en el intervalo $[x, 0]$. Existe entonces un valor c en $(x, 0)$ tal que

$$\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \frac{1 - \sqrt{1 + x}}{-x} = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1 + c}} > \frac{1}{2}$$

ya que $0 < 1 + c < 1$. Ahora hay que multiplicar por el número negativo x, con lo que se invierte la inecuación, $\sqrt{1 + x} - 1 < \frac{x}{2}$, y el resultado se obtiene pasando el -1 al otro lado. ■

Funciones crecientes y decrecientes

Los intervalos en los que la gráfica de una función f tiene pendiente positiva o negativa proporcionan información de utilidad sobre el comportamiento de f. El Teorema del Valor Medio permite determinar esos intervalos considerando el signo de la derivada de f.

DEFINICIÓN 5 **Funciones crecientes y decrecientes**

Sea una función f definida en un intervalo abierto I, y sean x_1 y x_2 dos puntos pertenecientes a I.

(a) Si $f(x_2) > f(x_1)$ siempre que $x_2 > x_1$, se dice que f es **creciente** en I.

(b) Si $f(x_2) < f(x_1)$ siempre que $x_2 > x_1$, se dice que f es **decreciente** en I.

(c) Si $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ siempre que $x_2 > x_1$, se dice que f es **no decreciente** en I.

(d) Si $f(x_2) \leqslant f(x_1)$ siempre que $x_2 > x_1$, se dice que f es **no creciente** en I.

La Figura 2.28 ilustra estos términos. Nótese la distinción entre *creciente* y *no decreciente*. Si una función es creciente (o decreciente) en un intervalo, debe tomar valores diferentes en puntos diferentes (una función así se denomina **uno a uno**). Una función no decreciente (o no creciente) puede ser constante en un subintervalo de su dominio, y por tanto no puede ser uno a uno. Una función creciente es no decreciente, pero no toda función no decreciente es creciente.

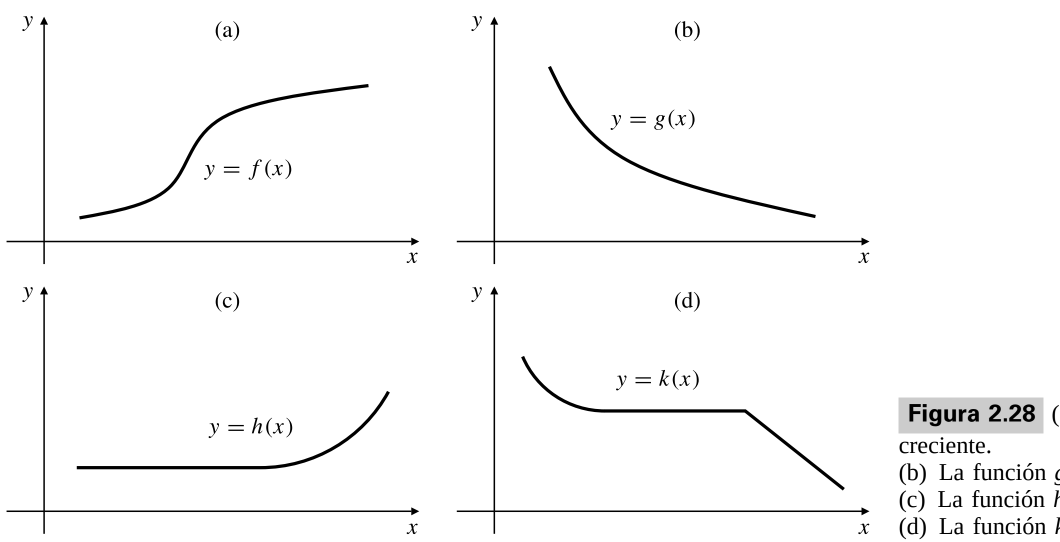


Figura 2.28 (a) La función f es creciente.
(b) La función g es decreciente.
(c) La función h es no decreciente.
(d) La función k es no creciente.

TEOREMA 12 Sea J un intervalo abierto, y sea I un intervalo que contiene a todos los puntos de J, y posiblemente uno de sus extremos, o ambos. Sea f una función continua en I y diferenciable en J.

(a) Si $f'(x) > 0$ para todo x perteneciente a J, entonces f es creciente en I.

(b) Si $f'(x) < 0$ para todo x perteneciente a J, entonces f es decreciente en I.

(c) Si $f'(x) \geqslant 0$ para todo x perteneciente a J, entonces f es no decreciente en I.

(d) Si $f'(x) \leqslant 0$ para todo x perteneciente a J, entonces f es no creciente en I.

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos puntos pertenecientes a I, con $x_2 > x_1$. Por el Teorema del Valor Medio, existe un punto c en (x_1, x_2) (y por tanto en J) tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

y por tanto, $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$. Como $x_2 - x_1 > 0$, la diferencia $f(x_2) - f(x_1)$ debe ser del mismo signo que $f'(c)$, y debe ser cero si $f'(c)$ es cero. Por tanto, se deducen todas las conclusiones de las partes correspondientes de la Definición 5.

Observación A pesar de lo que dice el Teorema 12, $f'(x_0) > 0$ en un solo punto x_0 *no* implica que la función sea creciente en *cualquier* intervalo que contenga a x_0. *Véase* el Ejercicio 20 al final de esta sección, donde se presenta un contraejemplo.

Ejemplo 4 ¿En qué intervalos es creciente la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$? ¿En qué intervalos es decreciente?

Solución Tenemos que $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$. Obsérvese que $f'(x) > 0$ si $x < -2$ o $x > 2$, y $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 2$. Por tanto, f es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, y es decreciente en el intervalo $(-2, 2)$. *Véase* la Figura 2.29.

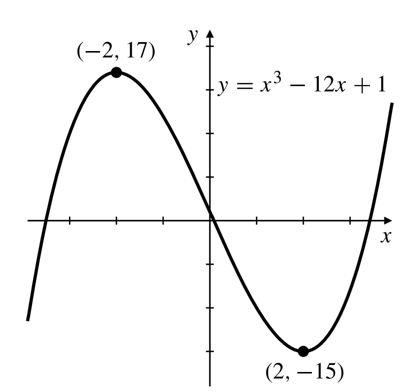


Figura 2.29

Una función f cuya derivada cumple que $f'(x) \geqslant 0$ en un intervalo puede ser todavía creciente en ese intervalo, en vez de ser sólo no decreciente como asegura el Teorema 12(c). Esto ocurre cuando $f'(x) = 0$ en una serie de puntos aislados, con tal que f sea creciente en los intervalos situados a la izquierda y a la derecha de esos puntos.

Ejemplo 5 Demuestre que $f(x) = x^3$ es creciente en cualquier intervalo.

Solución Sean x_1 y x_2 dos números reales, con $x_2 > x_1$. Como $f'(x) = 3x^2 > 0$, excepto en $x = 0$, el Teorema 12(a) nos dice que $f(x_2) > f(x_1)$ si $x_1 < x_2 \leqslant 0$ o si $0 \leqslant x_1 < x_2$. Si $x_1 < 0 < x_2$, entonces $f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Por tanto, f es creciente en cualquier intervalo.

Si una función es constante en un intervalo, entonces su derivada será cero en dicho intervalo. El Teorema del Valor Medio nos permite demostrar la afirmación recíproca.

TEOREMA 13 Sea f una función continua en un intervalo I, y sea $f'(x) = 0$ en todo punto del interior de I (es decir, en todo punto de I excepto en sus extremos). Entonces $f(x) = C$, una constante, en I.

DEMOSTRACIÓN Sea un punto x_0 de I y sea $C = f(x_0)$. Si x es otro punto de I, entonces el Teorema del Valor Medio dice que debe existir un punto c entre x_0 y x tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

El punto c debe pertenecer a I porque el intervalo contiene a todos los puntos entre los dos citados, y c no puede ser un extremo de I ya que $c \neq x_0$ y $c \neq x$. Como $f'(c) = 0$ para todos esos puntos c, tenemos que $f(x) - f(x_0) = 0$ para todo x en I, y $f(x) = f(x_0) = C$, como queríamos demostrar.

Veremos cómo se puede utilizar el Teorema 13 para obtener identidades sobre nuevas funciones que se verán en capítulos posteriores. También lo utilizaremos al definir las primitivas en la Sección 2.10.

Demostración del Teorema del Valor Medio

El Teorema del Valor Medio es uno de los profundos resultados que se basan en la completitud del sistema de los números reales, mediante el hecho de que una función continua en un intervalo cerrado y finito toma un valor máximo y mínimo en dicho intervalo (Teorema 8 de la Sección 1.4). Antes de dar la demostración, estableceremos dos resultados preliminares.

TEOREMA 14 Si f es una función definida en un intervalo abierto (a, b), y que alcanza un valor máximo (o mínimo) en un punto c de (a, b), y existe $f'(c)$, entonces $f'(c) = 0$. Los valores de x donde $f'(x) = 0$ se denominan **puntos críticos** de la función f.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que f tiene un máximo en c. Entonces $f(x) - f(c) \leqslant 0$ para todo x en (a, b). Si $c < x < b$, entonces

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0, \quad \text{por tanto,} \quad f'(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

Análogamente, si $a < x < c$, entonces

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0, \quad \text{por tanto,} \quad f'(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

Por tanto, $f'(c) = 0$. La demostración para un valor mínimo en c es similar.

TEOREMA 15 **Teorema de Rolle**

Suponga una función g continua en un intervalo cerrado y finito $[a, b]$, y diferenciable en el intervalo abierto (a, b). Si $g(a) = g(b)$, entonces existe un punto c en el intervalo abierto (a, b) en el que $g'(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Si $g(x) = g(a)$ para todo punto x de $[a, b]$, entonces g es una función constante, por lo que $g'(c) = 0$ para todo c perteneciente a (a, b). Por tanto, supongamos que existe un x en (a, b) tal que $g(x) \neq g(a)$. Supongamos que $g(x) > g(a)$ (si $g(x) < g(a)$, la demostración es similar). Por el Teorema Max-Min (Teorema 8 de la Sección 1.4), como es continua en $[a, b]$, g debe tener un valor máximo en algún punto c en

$[a, b]$. Como $g(c) \geqslant g(x) > g(a) = g(b)$, c no puede ser a ni b. Por tanto, c pertenece al intervalo abierto (a, b), por lo que g es diferenciable en c. Por el Teorema 14, c debe ser un punto crítico de g: $g'(c) = 0$.

Observación El Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema del Valor Medio en el que la cuerda tiene pendiente 0, por lo que la correspondiente recta tangente paralela debe tener también pendiente 0. Se puede deducir el Teorema del Valor Medio de este caso especial.

Demostración del Teorema del Valor Medio Suponga que f cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio. Sea

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)$$

(Para $a \leqslant x \leqslant b$, $g(x)$ es un desplazamiento vertical entre la curva $y = f(x)$ y la cuerda

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. *Véase* la Figura 2.30).

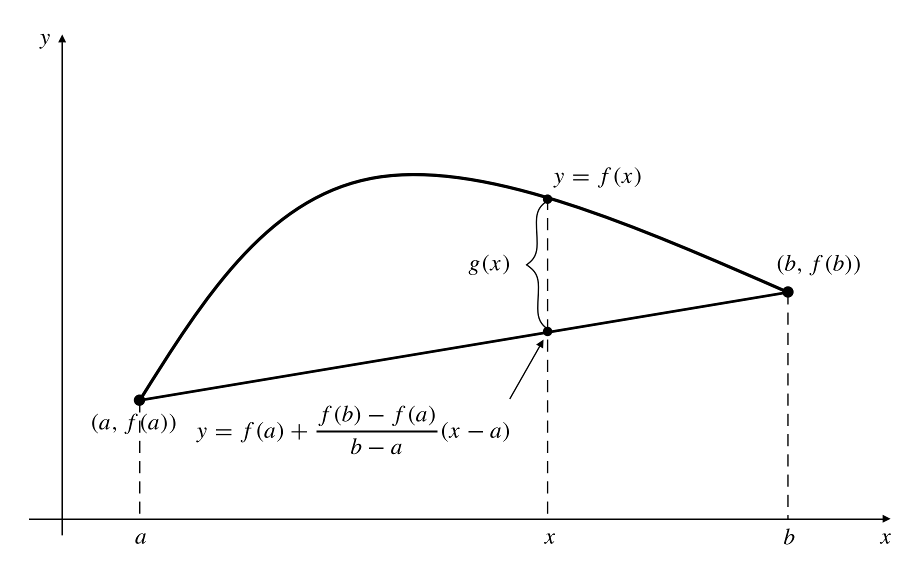


Figura 2.30 $g(x)$ es la distancia vertical entre la gráfica de f y la cuerda.

La función g es también continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), ya que f posee esas propiedades. Además, $g(a) = g(b) = 0$. Según el Teorema de Rolle, existe un punto c en (a, b) tal que $g'(c) = 0$. Como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

se deduce que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Muchas de las aplicaciones que haremos en capítulos posteriores del Teorema del Valor Medio usarán la siguiente versión generalizada del mismo.

TEOREMA 16 **Teorema del Valor Medio Generalizado**

Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$, y diferenciables en (a, b), y sea $g(x) \neq 0$ para todo x de (a, b). Existe un número c en (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

DEMOSTRACIÓN Nótese que $g(b) \neq g(a)$ porque si no, habría un punto de (a, b) y el que $g' = 0$. Por tanto, ningún denominador de la expresión anterior puede ser cero. Aplicando el Teorema del Valor Medio a

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))(g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

como $h(a) = h(b) = 0$, existe un c en (a, b) tal que $h'(c) = 0$. Entonces,

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$$

y se llega al resultado deseado sin más que dividir por los fatores en g.

Ejercicios 2.6

En los Ejercicios 1-3, ilustre el Teorema del Valor Medio obteniendo los puntos del intervalo abierto (a, b) donde la recta tangente a $y = f(x)$ es paralela a la cuerda que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

1. $f(x) = x^2$ en $[a, b]$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 2]$

3. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en $[-2, 2]$

4. Aplicando el Teorema del Valor Medio a $f(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2}$ en el intervalo $[0, x]$, y utilizando el resultado del Ejemplo 2, demuestre que

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$$

para $x > 0$. Esta inecuación es también cierta para $x < 0$. ¿Por qué?

5. Demuestre que $\tan x > x$ para $0 < x < \pi/2$.

6. Sea $r > 1$. Si $x > 0$ o $-1 \leqslant x < 0$, demuestre que $(1 + x)^r > 1 + rx$.

7. Sea $0 < r < 1$. Si $x > 0$ o $-1 \leqslant x < 0$, demuestre que $(1 + x)^r < 1 + rx$.

Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones de los Ejercicios 8-15.

8. $f(x) = x^2 + 2x + 2$

9. $f(x) = x^3 - 4x + 1$

10. $f(x) = x^3 + 4x + 1$

11. $f(x) = (x^2 - 4)^2$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

13. $f(x) = x^3(5 - x)^2$

14. $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x$

15. $f(x) = x + \operatorname{sen} x$

***16.** Si $f(x)$ es diferenciable en un intervalo I y se anula en $n \geqslant 2$ puntos diferentes de I, demuestre que $f'(x)$ debe anularse al menos en $n - 1$ puntos de I.

17. ¿Qué es erróneo en la siguiente «demostración» del Teorema del Valor Medio Generalizado? Por el Teorema del Valor Medio, $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ para algún valor c entre a y b y, de forma similar, $g(b) - g(a) = (b - a)g'(c)$ para algún c, Por tanto, $(f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(c)/g'(c)$, como queríamos demostrar.

***18.** Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Demuestre que $f'(x)$ existe para todo x, pero que f' no es continua en $x = 0$. Esto demuestra la aseveración (realizada al final de la Sección 2.2) de que una derivada definida en un intervalo no necesita ser continua en dicho intervalo.

***19.** Demuestre la afirmación (hecha al final de la Sección 2.2) de que una derivada definida en un intervalo debe tener la propiedad del valor medio. (*Sugerencia*: Suponga que f' existe en $[a, b]$ y que $f'(a) \neq f'(b)$. Si k está entre $f'(a)$ y $f'(b)$, demuestre que la función g definida como $g(x) = f(x) - kx$ debe tener *o bien* un máximo *o bien* un mínimo en $[a, b]$, en un punto interior c de (a, b). Deduzca entonces que $f'(c) = k$).

***20.** Sea $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(a) Demuestre que $f'(0) = 1$. (*Sugerencia*: Utilice la definición de derivada).

(b) Demuestre que todo intervalo que contiene a $x = 0$ contiene también puntos en los que $f'(x) < 0$, por lo que f no puede ser creciente en ese intervalo.

2.7 Aplicación de las derivadas

En esta sección presentaremos algunos ejemplos de la forma en que utilizan las derivadas para interpretar cambios y tasas de cambio en el mundo que nos rodea. Es natural pensar en el cambio como algo que es función del tiempo, como la velocidad de un objeto en movimiento, pero no hay necesidad de ser restrictivos respecto a esto. El cambio con respecto a variables distintas del tiempo se trata de la misma forma. Por ejemplo, un médico puede desear saber cómo afectan pequeños cambios en la dosis en la respuesta del cuerpo a un medicamento. Un economista puede estar interesado en estudiar cómo cambia la inversión extranjera con respecto a los cambios en los tipos de interés en el país. Todas esas cuestiones se pueden formular en términos de tasa de cambio de una función con respecto a una variable.

Aproximación de pequeños cambios

Si una cantidad y es función de otra cantidad x, es decir,

$$y = f(x)$$

en ocasiones se desea conocer cómo afecta un cambio en x, Δx, al valor de y. El cambio exacto en y, Δy, se expresa como

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

pero si el cambio en x es pequeño, se puede aproximar Δy utilizando el hecho de que $\Delta y/\Delta x$ es aproximadamente la derivada dy/dx. Entonces,

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,\Delta x \approx \frac{dy}{dx}\,\Delta x = f'(x)\,\Delta x$$

Algunas veces los cambios en una cantidad se miden con respecto al valor de dicha cantidad. El **cambio relativo** en x es el cociente $\Delta x/x$. El **cambio porcentual** es el cambio relativo expresado como un porcentaje:

$$\text{cambio relativo en } x = \frac{\Delta x}{x}$$

$$\text{cambio porcentual en } x = 100\,\frac{\Delta x}{x}$$

Ejemplo 1 ¿En qué porcentaje aumenta aproximadamente el área del círculo si su radio se incrementa en un 2%?

Solución El área A de un círculo se expresa en función de su radio como $A = \pi r^2$. Entonces,

$$\Delta A \approx \frac{dA}{dr}\,\Delta r = 2\pi r \Delta r$$

Dividiendo esta aproximación por $A = \pi r^2$ se obtiene una aproximación que relaciona los cambios relativos en A y r:

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{2\pi r \Delta r}{\pi r^2} = 2\,\frac{\Delta r}{r}$$

Si r se incrementa un 2%, entonces $\Delta r = \dfrac{2}{100}\,r$, por lo que

$$\frac{\Delta A}{A} \approx 2 \times \frac{2}{100} = \frac{4}{100}$$

Por tanto, A se incrementa aproximadamente un 4%. ■

Velocidad de cambio media e instantánea

Recuérdese el concepto de velocidad o tasa media de cambio de una función en un intervalo, presentada en la Sección 1.1. La derivada de la función es el límite de esta tasa media cuando la longitud del intervalo tiende a cero, y por tanto representa la velocidad o tasa de cambio de la función en un valor dado de su variable.

DEFINICIÓN 6

La **velocidad media de cambio** de una función $f(x)$ con respecto a x en el intervalo desde a hasta $a + h$ es

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La **velocidad de cambio (instantánea)** de f con respecto a x en $x = a$ es la derivada

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

suponiendo que exista dicho límite.

Es habitual utilizar la palabra *instantánea* cuando la variable x no representa tiempo, aunque frecuentemente se omite dicha palabra. Cuando se dice *velocidad de cambio*, significa *velocidad instantánea de cambio*.

Ejemplo 2 ¿Con qué rapidez crece al área A de un círculo con respecto a su radio cuando el radio mide 5 m?

Solución La velocidad de cambio del área con respecto al radio es

$$\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$$

Cuando $r = 5$ m, el área cambia con una velocidad de $2\pi \times 5 = 10\pi$ m^2/m. Esto significa que un pequeño cambio Δr m en el radio cuando el radio vale 5 m producirá un cambio de aproximadamente $10\pi\Delta r$ m^2 en el área del círculo.

■

El ejemplo anterior sugiere que las unidades apropiadas para medir la velocidad de cambio de una cantidad y con respecto a otra cantidad x son unidades de y por unidades de x.

Si $f'(x_0) = 0$, se dice que f es **estacionaria** en x_0 y que x_0 es un **punto crítico** de f. El punto correspondiente $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de f se denomina **punto crítico** de la gráfica. La gráfica tiene tangente horizontal en sus puntos críticos, y f puede tener o no un máximo o mínimo en dichos puntos (*véase* la Figura 2.31). Es posible que f sea creciente o decreciente en un punto crítico (*véase* el punto a en la Figura 2.31).

Ejemplo 3 Suponga que la temperatura en un determinado lugar t horas después del mediodía es de T °C (T grados Celsius), siendo

$$T = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 10 \qquad (\text{para } 0 \leqslant t \leqslant 5)$$

¿Con qué velocidad está subiendo o bajando la temperatura a la una de la tarde? ¿Y a las tres de la tarde? ¿En qué instantes la temperatura es estacionaria?

Solución La velocidad de cambio de la temperatura se expresa como

$$\frac{dT}{dt} = t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4)$$

Si $t = 1$, entonces $\frac{dT}{dt} = 3$, por lo que a la una de la tarde la temperatura está *subiendo* a razón de 3 ºC/h.

Si $t = 3$, entonces $\frac{dT}{dt} = -1$, por lo que a las tres de la tarde la temperatura está *bajando* a razón de 1 ºC/h.

La temperatura es estacionaria cuando $\frac{dT}{dt} = 0$, es decir, a las dos de la tarde y a las cuatro de la tarde. ■

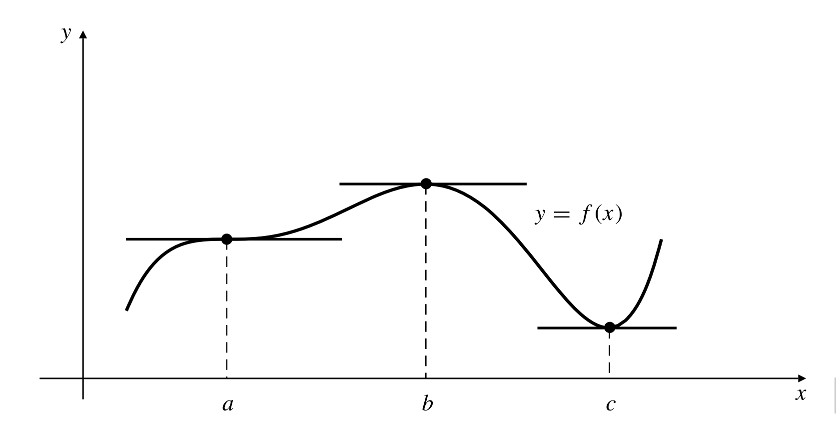


Figura 2.31 Puntos críticos de *f*.

Sensibilidad a los cambios

Cuando un pequeño cambio en x produce un gran cambio en una función $f(x)$, se dice que esa función es muy **sensible** a los cambios en x. La derivada $f'(x)$ es una medida de la sensibilidad que tiene la dependencia de f con x.

Ejemplo 4 **(Dosis de una medicina)** Un estudio farmacológico de un medicamento en desarrollo para bajar la tensión arterial determina experimentalmente que la disminución R de la tensión que produce una dosis diaria de x mg del medicamento es

$$R = 24.2\left(1 + \frac{x-13}{\sqrt{x^2 - 26x + 529}}\right) \qquad \text{mm Hg}$$

(Las unidades son milímetros de mercurio (Hg)). Determine la sensibilidad de R a la dosis x cuando el nivel de la dosis es de 5 mg, 15 mg y 35 mg. ¿En cuál de esos niveles de dosis produce un mayor efecto un incremento de la dosis?

Solución La sensibilidad de R con x es dR/dx. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dx} &= 24.2\left(\frac{\sqrt{x^2-26x+529}(1) - (x-13)\dfrac{x-13}{\sqrt{x^2-26x+529}}}{x^2-26x+529}\right)\\
&= 24.2\left(\frac{x^2-26x+529-(x^2-26x+169)}{(x^2-26x+529)^{3/2}}\right)\\
&= \frac{8712}{(x^2-26x+529)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Cuando la dosis es $x = 5$ mg, 15 mg y 35 mg las sensibilidades son

$$\left.\frac{dR}{dx}\right|_{x=5} = 0.998 \text{ mm Hg/mg}$$

$$\left.\frac{dR}{dx}\right|_{x=15} = 1.254 \text{ mm Hg/mg}$$

$$\left.\frac{dR}{dx}\right|_{x=35} = 0.355 \text{ mm Hg/mg}$$

De los niveles de dosificación, el que tiene mayor sensibilidad es el de 15 mg. Incrementar la dosis de 15 a 16 mg al día se espera reduciría la tensión media aproximadamente 1.25 mm Hg.

Derivadas en economía

Del mismo modo que los físicos utilizan los términos *velocidad* y *aceleración* para referirse a las derivadas de ciertas cantidades, los economistas también tienen su vocabulario especializado para denominar a las derivadas. Las denominan **marginales**. En economía el término **marginal** se refiere a la velocidad o tasa de cambio de una cantidad con respecto a la variable de la que depende. Por ejemplo, el **coste de producción** $C(x)$ en una operación de fabricación es función de x, el número de unidades de producto producidas. El **coste marginal de producción** es la velocidad de cambio de C con respecto de x, y por tanto es dC/dx. Algunas veces el coste marginal de producción corresponde aproximadamente al coste extra de producir una unidad más, es decir,

$$\Delta C = C(x + 1) - C(x)$$

Para ver por qué esto es aproximadamente correcto, observemos en la Figura 2.32 que si la pendiente de $C = C(x)$ no varía muy rápidamente cerca de x, entonces el cociente de incrementos $\Delta C/\Delta x$ tomará un valor próximo a su límite, la derivada dC/dx, incluso cuando $\Delta x = 1$.

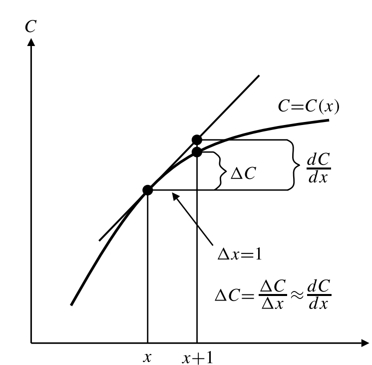


Figura 2.32 El coste marginal dC/dx es aproximadamente el coste extra ΔC de producir $\Delta x = 1$ unidad más.

Ejemplo 5 **(Tasas marginales de impuestos)** Si la tasa marginal de impuestos sobre ingresos es del 35% y los ingresos crecen en 1000 €, habrá que pagar unos 350 € extras en impuestos sobre ingresos. Esto no significa que se pague el 35% de todos los ingresos en impuestos. Significa que en el nivel de ingresos actual, l, la tasa de incremento de los impuestos T con respecto a los ingresos es $dT/dl = 0{,}35$. Es decir, se pagan 0.35 € de impuestos por cada euro extra que se ingresa. Por supuesto, si el nivel de ingresos aumenta mucho, puede pasarse a otro segmento impositivo y aumentar las tasas marginales.

Ejemplo 6 **(Coste marginal de producción)** El coste de producir x toneladas de carbón por día en una mina es $C(x)$ €, siendo

$$C(x) = 4200 + 5.40x - 0.001x^2 + 0.000002x^3$$

(a) ¿Cuál es el coste medio de producir cada tonelada si el nivel diario de producción es de 1000 toneladas? ¿Y si es de 2000 toneladas?
(b) Calcule el coste marginal de producción si la producción diaria es de 1000 toneladas y de 2000 toneladas.
(c) Si el nivel de producción crece ligeramente de las 1000 toneladas o de las 2000 toneladas, ¿qué sucederá con el coste medio por tonelada?

Solución

(a) El coste medio por tonelada de carbón es

$$\frac{C(x)}{x} = \frac{4200}{x} + 5.40 - 0.001x + 0.000002x^2$$

Si $x = 1000$, el coste medio por tonelada es de $C(1000)/1000 = 10.6$/ton. Si $x = 2000$, el coste medio por tonelada es de $C(2000)/2000 = 13.5$ €/ton.
(b) El coste marginal de producción es

$$C'(x) = 5.40 - 0.002x + 0.000006x^2$$

Si $x = 1000$, el coste marginal es de $C(1000) = 9.4$/ton. Si $x = 2000$, el coste marginal es de $C(2000) = 25.4$ €/ton.
(c) Si el nivel de producción se incrementa ligeramente por encima de $x = 1000$, entonces disminuirá el coste medio por tonelada, ya que el coste crece con una tasa menor que el coste medio. En $x = 2000$ ocurre lo contrario. Un incremento en la producción aumentará el coste medio por tonelada. ■

Los economistas prefieren a veces utilizar tasas de cambio relativo, que no depende de las unidades en que se miden las cantidades involucradas. Utilizan el término **elasticidad** para denominar a esos cambios relativos.

Ejemplo 7 **(Elasticidad de la demanda)** La demanda y de un cierto producto (es decir, la cantidad que se puede vender) normalmente depende del precio p aplicado a dicho producto: $y = f(p)$. La demanda marginal $dy/dp = f'(p)$ (que típicamente es negativa) depende de las unidades que se utilicen para medir y y p. La *elasticidad de la demanda* es la cantidad

$$-\frac{p}{y}\frac{dy}{dp} \qquad \text{(el signo «}-\text{» asegura que la elasticidad es positiva)}$$

que es independiente de las unidades y proporciona una buena medida de la sensibilidad de la demanda a los cambios de precio. Para ver esto, supongamos que se utilizan unidades nuevas para la demanda y el precio, que son múltiplos de las unidades antiguas. En las nuevas unidades, la demanda y el precio se expresan como Y y P, siendo

$$Y = k_1 y \quad \text{y} \quad P = k_2 p$$

Es decir, $Y = k_1 f(P/k_2)$ y $dY/dP = (k_1/k_2)f'(P/k_2) = (k_1/k_2)f'(p)$, aplicando la Regla de la Cadena. Por tanto, se deduce que el valor de la elasticidad no cambia:

$$-\frac{P}{Y}\frac{dY}{dP} = -\frac{k_2 p}{k_1 y}\frac{k_1}{k_2}f'(p) = -\frac{p}{y}\frac{dy}{dp}$$

■

Ejercicios 2.7

En los Ejercicios 1-6, calcule los cambios porcentuales aproximados en las funciones $y = f(x)$ dadas que producen un cambio del 2% en el valor de x.

1. $y = x^2$ **2.** $y = 1/x$

3. $y = 1/x^2$ **4.** $y = x^3$

5. $y = \sqrt{x}$ **6.** $y = x^{-2/3}$

7. ¿En qué porcentaje, aproximadamente, crecerá el volumen de una esfera de radio r, ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$), si el radio se incrementa en un 2%?

8. ¿En qué porcentaje disminuirá la longitud de la arista de un cubo de hielo si el cubo pierde el 6% de su volumen al fundirse?

9. Calcule la velocidad de cambio del área de un cuadrado con respecto a la longitud de su lado cuando dicho lado mide 4 m.

10. Calcule la velocidad de cambio del lado de un cuadrado con respecto a su área cuando dicha área es de 16 m^2.

11. Calcule la velocidad de cambio del diámetro de un círculo con respecto a su área.

12. Calcule la velocidad de cambio del área de un círculo con respecto a su diámetro.

13. Calcule la velocidad de cambio del volumen de una esfera (dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$) con respecto a su radio r cuando el radio mide 2 m.

14. ¿Cuál es la velocidad de cambio del área A de un cuadrado con respecto a la longitud L de su diagonal?

15. ¿Cuál es la velocidad de cambio de la longitud de una circunferencia C con respecto a su área A?

16. Calcule la velocidad de cambio del lado s de un cubo con respecto al volumen V de dicho cubo.

¿Cuáles son los puntos críticos de las funciones de los Ejercicios 17-20? ¿En qué intervalo es cada función creciente o decreciente?

17. $f(x) = x^2 - 4$ **18.** $f(x) = x^3 - 12x + 1$

19. $y = x^3 + 6x^2$ **20.** $y = 1 - x - x^5$

21. Demuestre que $f(x) = x^3$ es creciente en toda la recta real aunque $f'(x)$ no sea positiva en todos sus puntos.

22. ¿En qué intervalos es creciente $f(x) = x + 2\,\text{sen}\,x$?

Utilice un programa de gráficos o de matemáticas por computador para calcular los puntos críticos de las funciones de los Ejercicios 23-26, con una precisión de 6 decimales.

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4}$ **24.** $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$

25. $f(x) = x - \text{sen}\left(\dfrac{x}{x^2 + x + 1}\right)$

26. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos(x + 0.1)}$

27. El volumen de agua en un tanque t minutos después de empezar a vaciarse se puede expresar como

$$V(t) = 350(20 - t)^2 \text{ L}$$

(a) ¿Con qué velocidad se vacía el tanque tras 5 minutos? ¿Y tras 15 minutos?

(b) ¿Cuál es la velocidad media de vaciado del tanque en el intervalo comprendido entre 5 minutos y 15 minutos?

28. **(Ley de Poiseuille)** La velocidad del flujo F (medido en litros por minuto) de líquido por una tubería es proporcional a la cuarta potencia del radio de la tubería:

$$F = kr^4$$

¿Qué porcentaje aproximado de incremento es necesario en el radio de la tubería para que la velocidad del flujo aumente un 10%?

29. **(Fuerza gravitatoria)** La fuerza gravitatoria F con la que la Tierra atrae a un objeto en el espacio es $F = k/r^2$, siendo k una constante y r la distancia del objeto al centro de la Tierra. Si F disminuye con respecto a r con una velocidad de 1 *newton*/*km* cuando $r = 7000$ km, ¿con qué rapidez cambia F con respecto a r cuando $r = 10\,000$ km?

30. **(Sensibilidad de los ingresos con el precio)** Los ingresos por ventas R de un determinado producto software dependen del precio p aplicado al distribuidor de acuerdo con la fórmula

$$R = 4000p - 10p^2$$

(a) ¿Qué sensibilidad tiene R con p cuando $p = 100$ €? ¿Y cuando $p = 200$ €? ¿Y cuando $p = 300$ €?

(b) ¿Cuál de los tres es el precio más razonable para aplicar al distribuidor? ¿Por qué?

31. **(Coste marginal)** El coste de fabricar x refrigeradores es de $C(x)$, siendo

$$C(x) = 8000 + 400x - 0.5x^2$$

(a) Calcule el coste marginal si se fabrican 100 refrigeradores.

(b) Demuestre que el coste marginal es aproximadamente la diferencia de fabricar 101 refrigeradores en vez de 100.

32. **(Beneficio marginal)** Si una fábrica de contrachapado produce x planchas al día, su beneficio por día será de $P(x)$ €, siendo

$$P(x) = 8x - 0.005x^2 - 1000$$

(a) Calcule el beneficio marginal. ¿Para qué valores de x es positivo el beneficio marginal? ¿Y negativo?

(b) ¿Cuántas hojas habría que producir cada día para generar un beneficio máximo?

33. El coste C (en euros) de producir n objetos al mes en una fábrica es de

$$C = \frac{80\,000}{n} + 4n + \frac{n^2}{100}$$

Calcule el coste marginal de producción si el número de objetos fabricados cada mes es de (a) 100 y (b) 300.

∗**34.** En una operación minera el coste C (en euros) de extraer cada tonelada de mineral es de

$$C = 10 + \frac{20}{x} + \frac{x}{1000}$$

siendo x el número de toneladas extraídas al día. Para x pequeño, C se reduce al aumentar x debido a las economías de escala, pero para x grande, C crece con x debido a la sobrecarga de los equipos y de trabajo. Si cada tonelada de mineral se puede vender a 13 €, ¿cuántas toneladas habría que extraer al día para maximizar el beneficio por día de la mina?

∗**35.** **(Coste medio y coste marginal)** Si a un fabricante le cuesta $C(x)$ euros producir x productos, entonces su coste medio de producción es de $C(x)/x$ euros por producto. En general, el coste medio es una función decreciente con x para x pequeño, y es creciente con x para x grande (¿por qué?). Demuestre que el valor de x que minimiza el coste medio hace que el coste medio sea igual al coste marginal.

36. **(Elasticidad constante**) Demuestre que si la demanda y se relaciona con el precio p mediante la ecuación $y = Cp^{-r}$, siendo C y p constantes positivas, entonces la elasticidad de la demanda (*véase* el Ejemplo 7) es la constante r.

2.8 Derivadas de orden superior

Si la derivada $y' = f'(x)$ de una función $y = f(x)$ es también diferenciable en x, se puede calcular *su* derivada, que se denomina **segunda derivada** de f, y se expresa como $y'' = f''(x)$. Como en el caso de las primeras derivadas, las derivadas segundas se pueden expresar de diversas formas en función del contexto. Algunas de las formas más comunes son

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\,f(x) = \frac{d^2}{dx^2}\,f(x) = D_x^2 y = D_x^2 f(x)$$

De forma similar se pueden considerar la tercera, cuarta, y en general derivadas de orden n. La notación que utiliza primas es inadecuada para derivadas de orden alto, por lo que el orden se denotará mediante un superíndice encerrado entre paréntesis (para distinguirlo de los exponentes). La n-ésima derivada de $y = f(x)$ es

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}\,f(x) = D_x^n y = D_x^n f(x)$$

y se define como la derivada de la $(n-1)$-ésima derivada. Para $n = 1$, 2 y 3 se utiliza todavía la notación de las primas: $f^{(2)}(x) = f''(x)$, $f^{(3)}(x) = f'''(x)$. Algunas veces es conveniente denotar como $f^{(0)}(x) = f(x)$, es decir, indicar que una función es su propia derivada de orden cero.

Ejemplo 1 La **velocidad** de un objeto en movimiento es la tasa (instantánea) de cambio de la posición del objeto con respecto al tiempo. Si el objeto se mueve a lo largo del eje x y está en la posición $x = f(t)$ en el instante t, entonces su velocidad en ese instante es

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

De forma similar, la **aceleración** de un objeto es la tasa de cambio en la velocidad. Por tanto, la aceleración es la *segunda derivada* de la posición:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

Más adelante, en la Sección 2.11, investigaremos más a fondo las relaciones entre posición, velocidad y aceleración. ■

Ejemplo 2 Si $y = x^3$, entonces $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$, $y^{(4)} = 0$ y todas las derivadas sucesivas valen cero.

En general, si $f(x) = x^n$ (siendo n un entero positivo), entonces

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))x^{n-k}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k} & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}$$

donde $n!$ (denominado n **factorial**) se define como

$$0! = 1$$
$$1! = 0! \times 1 = 1 \times 1 = 1$$
$$2! = 1! \times 2 = 1 \times 2 = 2$$
$$3! = 2! \times 3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$$
$$4! = 3! \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$
$$\vdots$$
$$n! = (n-1)! \times n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

De lo anterior se deduce que si P es un polinomio de grado n,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 son constantes, entonces $P^{(k)}(x) = 0$ para $k > n$. Para $k \leqslant n$, $P^{(k)}$ es un polinomio de grado $n - k$. En particular, $P^{(n)}(x) = n!a_n$, es decir, una constante.

Ejemplo 3 Demuestre que si A, B y k son constantes, entonces la función

$$y = A\cos(kt) + B\,\mathrm{sen}(kt)$$

es la solución de la **ecuación diferencial del movimiento armónico simple** de *segundo orden* (*véase* la Sección 3.7):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = 0$$

Solución Para ser una solución, la función $y(t)$ debe cumplir la ecuación diferencial, es decir,

$$\frac{d^2}{dt^2}\, y(t) + k^2y(t) = 0$$

debe cumplirse para todo número real t. Esto se puede verificar calculando las dos primeras derivadas de la función $y(t) = A\cos(kt) + B\,\mathrm{sen}(kt)$, y observando que la segunda derivada mas $k^2y(t)$ vale siempre cero:

$$\frac{dy}{dt} = -Ak\,\mathrm{sen}(kt) + Bk\cos(kt)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -Ak^2\cos(kt) - Bk^2\,\mathrm{sen}(kt) = -k^2y(t)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y(t) = 0$$

Ejemplo 4 Calcule la n-ésima derivada, $y^{(n)}$, de $y = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Solución Comenzamos por calcular unas pocas derivadas:

$$\begin{aligned} y' &= -(1+x)^{-2} \\ y'' &= -(-2)(1+x)^{-3} = 2(1+x)^{-3} \\ y''' &= 2(-3)(1+x)^{-4} = -3!(1+x)^{-4} \\ y^{(4)} &= -3!(-4)(1+x)^{-5} = 4!(1+x)^{-5} \end{aligned}$$

Aparece un patrón obvio. Parece que

$$y^{(n)} = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$$

En realidad no hemos demostrado que la fórmula anterior es correcta para todo n, aunque lo es para $n = 1$, 2, 3 y 4. Para completar la demostración se utiliza inducción matemática (Sección 2.3). Supongamos que la fórmula es válida para $n = k$, siendo k un entero positivo. Considérese $y^{(k+1)}$:

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= \frac{d}{dx}\, y^{(k)} = \frac{d}{dx}\left((-1)^k k!(1+x)^{-k-1}\right) \\ &= (-1)^k k!(-k-1)(1+x)^{-k-2} = (-1)^{k+1}(k+1)!(1+x)^{-(k+1)-1} \end{aligned}$$

Esto es lo que la fórmula predice para la derivada de orden $(k+1)$. Por tanto, si la fórmula para $y^{(n)}$ es correcta para $n = k$, es también correcta para $n = k+1$. Como se sabe que la fórmula es verdadera para $n = 1$, debe ser cierta para todo $n \geqslant 1$ *por inducción*.

Nótese el uso de $(-1)^n$ para indicar un signo negativo si n es impar y positivo si n es par.

Ejemplo 5 Calcule una fórmula para $f^{(n)}(x)$, siendo $f(x) = \operatorname{sen}(ax+b)$.

Solución Comenzamos por calcular unas pocas derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\cos(ax+b) \\ f''(x) &= -a^2 \operatorname{sen}(ax+b) = -a^2 f(x) \\ f'''(x) &= -a^3\cos(ax+b) = -a^2 f'(x) \\ f^{(4)}(x) &= a^4 \operatorname{sen}(ax+b) = a^4 f(x) \\ f^{(5)}(x) &= a^5\cos(ax+b) = a^4 f'(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aquí también el patrón es bastante obvio. Cada derivada es $-a^2$ veces la segunda derivada anterior. Una fórmula que permite calcular todas las derivadas es

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k a^n \operatorname{sen}(ax+b) & \text{si} \quad n = 2k \\ (-1)^k a^n \cos(ax+b) & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$

que se puede verificar también por inducción en k.

Nuestro ejemplo final ilustra que no siempre es fácil obtener la derivada n-ésima de una función.

Ejemplo 6 Calcule f', f'' y f''' de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. ¿Existe algún patrón que permita predecir cómo será $f^{(4)}$?

Solución Como $f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$, tenemos que

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x) = x(x^2+1)^{-1/2}$$
$$f''(x) = (x^2+1)^{-1/2} + x(-\tfrac{1}{2})(x^2+1)^{-3/2}(2x)$$
$$= (x^2+1)^{-3/2}(x^2+1-x^2) = (x^2+1)^{-3/2}$$
$$f'''(x) = -\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{-5/2}(2x) = -3x(x^2+1)^{-5/2}$$

Aunque la expresión que se obtiene en cada derivada se puede simplificar algo, el patrón subyacente no es (todavía) lo bastante obvio como para permitirnos predecir la fórmula de $f^{(4)}(x)$ sin tener que calcularla. De hecho,

$$f^{(4)}(x) = 3(4x^2 - 1)(x^2+1)^{-7/2}$$

por lo que el patrón (si es que hay alguno) no aparece claramente en esta etapa. ■

Observación Las derivadas de orden superior se pueden indicar en Maple repitiendo la variable de diferenciación o indicando el orden utilizando el operador `$`:

```
> diff(x^5, x, x) + diff(sin(2*x),x$3) ;
```

$$20x^3 - 8\cos(2x)$$

El operador `D` se puede utilizar también para obtener las derivadas de orden superior de una función (no como una expresión) componiéndolas explícitamente o utilizando el operador `@@`:

```
> f :=x -> x^5; fpp := D (D(f)) ; (D@@3)(f) (a) ;
```

$$f := x \to x^5$$
$$fpp := x \to 20x^3$$
$$60a^2$$

Ejercicios 2.8

Calcule y', y'' e y''' para las funciones de los Ejercicios 1-12.

1. $y = (3-2x)^7$

2. $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$

3. $y = \dfrac{6}{(x-1)^2}$

4. $y = \sqrt{ax+b}$

5. $y = x^{1/3} - x^{-1/3}$

6. $y = x^{10} + 2x^8$

7. $y = (x^2+3)\sqrt{x}$

8. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

9. $y = \tan x$

10. $y = \sec x$

11. $y = \cos(x^2)$

12. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

En los Ejercicios 13-23, calcule las suficientes derivadas de las funciones propuestas como para obtener una expresión general de la fórmula de $f^{(n)}(x)$. Verifique después la fórmula obtenida mediante inducción matemática.

13. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

14. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

16. $f(x) = \sqrt{x}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{a+bx}$

18. $f(x) = x^{2/3}$

19. $f(x) = \cos(ax)$

20. $f(x) = x\cos x$

21. $f(x) = x\operatorname{sen}(ax)$

***22.** $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

***23.** $f(x) = \sqrt{1-3x}$

24. Si $y = \tan kx$, demuestre que $y'' = 2k^2y(1+y^2)$.

25. Si $y = \sec kx$, demuestre que $y'' = k^2y(2y^2-1)$.

26. Utilice inducción matemática para demostrar que la n-ésima derivada de $y = \operatorname{sen}(ax+b)$ sigue la fórmula establecida al final del Ejemplo 5.

27. Utilice inducción matemática para demostrar que la n-ésima derivada de $y = \tan x$ es de la forma $P_{n+1}(\tan x)$, siendo P_{n+1} un polinomio de grado $n+1$.

28. Si f y g son funciones diferenciables dos veces, demuestre que $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

∗29. Formule y demuestre un resultado análogo al del Ejercicio 28 pero para $(fg)^{(3)}$ y $(fg)^{(4)}$. ¿Podría obtener la fórmula de $(fg)^{(n)}$?

∗30. Si $f''(x)$ existe en un intervalo I y f se anula en al menos tres puntos diferentes de I, demuestre que f'' debe anularse al menos en un punto de I.

∗31. Generalice el Ejercicio 30 a una función para la que $f^{(n)}$ existe en I, y para la que f se anula en $n+1$ puntos diferentes de I.

∗32. Suponga que f es dos veces diferenciable en un intervalo I (es decir, f'' existe en I). Suponga además que los puntos 0 y 2 pertenecen a I y que $f(0) = f(1) = 0$ y $f(2) = 1$. Demuestre que:

(a) $f'(a) = \dfrac{1}{2}$ para algún punto a en I.

(b) $f''(b) > \dfrac{1}{2}$ para algún punto b en I.

(c) $f'(c) = \dfrac{1}{7}$ para algún punto c en I.

2.9 Diferenciación implícita

Ya sabemos calcular la pendiente de una curva que corresponde a la representación gráfica de la función $y = f(x)$ calculando la derivada de f. Pero no todas las curvas corresponden a gráficas de estas funciones. Para ser la gráfica de una función $f(x)$, la curva no debe cruzar cualquier recta vertical en más de un punto.

Las curvas son generalmente *ecuaciones* en dos variables. Estas ecuaciones se pueden expresar de la forma

$$F(x, y) = 0$$

donde $F(x, y)$ indica una expresión que involucra a las dos variables x e y. Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio 5 es

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

por lo que $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ para esa circunferencia.

A veces es posible despejar y en la ecuación $F(x, y) = 0$ y, por tanto, obtener fórmulas explícitas de una o más funciones $y = f(x)$ definidas por dicha ecuación. Sin embargo, a menudo no es posible resolver la ecuación. No obstante, aún podemos ver la ecuación como una forma de definir *implícitamente* y como una o más funciones de x, aunque no podemos obtener *explícitamente* esas funciones. Es más, podemos obtener las derivadas dy/dx de las funciones implícitas mediante una técnica denominada **diferenciación implícita**. Se trata de diferenciar la ecuación dada con respecto a x, considerando que y es una función de x con derivada dy/dx, o y'.

Ejemplo 1 Calcule dy/dx si $y^2 = x$.

Solución La ecuación $y^2 = x$ define dos funciones diferenciables de x, que en este caso podemos conocer explícitamente. Son $y_1 = \sqrt{x}$ e $y_2 = -\sqrt{x}$ (Figura 2.33), cuyas derivadas están definidas para $x > 0$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

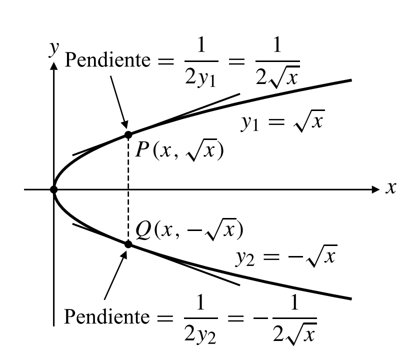


Figura 2.33 La ecuación $y^2 = x$ define dos funciones diferenciables de x en el intervalo $x \geqslant 0$.

Sin embargo, es posible obtener la pendiente de la curva $y^2 = x$ en cualquier punto (x, y) que cumpla la ecuación sin despejar previamente y. Para calcular dy/dx simplemente se diferencian con respecto a x los dos miembros de la ecuación $y^2 = x$, tratando y como una función diferenciable de x y utilizando la Regla de la Cadena para diferenciar y^2:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x) \qquad \left(\text{La Regla de la Cadena da } \frac{d}{dx}y^2 = 2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

Obsérvese que esto coincide con las derivadas calculadas anteriormente para *ambas* soluciones explícitas $y_1 = \sqrt{x}$ e $y_2 = -\sqrt{x}$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

■

Ejemplo 2 Calcule la pendiente de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$.

Solución La circunferencia no corresponde a la gráfica de una única función de x. De nuevo se combinan las gráficas de dos funciones: $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ e $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ (Figura 2.34). El punto $(3, -4)$ pertenece a la gráfica de y_2, por lo que la pendiente se puede obtener calculando explícitamente:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\left.\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}\right|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4}$$

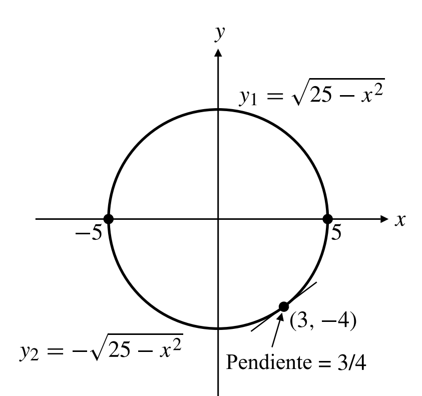


Figura 2.34 La circunferencia combina la gráfica de dos funciones. La gráfica de y_2 es el semicírculo inferior y pasa por el punto $(3, -4)$.

Pero el problema se puede resolver más fácilmente diferenciando implícitamente la ecuación dada de la circunferencia y con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

La pendiente en $(3, -4)$ es $-\left.\frac{x}{y}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

■

Ejemplo 3 Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $y \operatorname{sen} x = x^3 + \cos y$.

Solución Esta vez no se puede despejar la y como una función explícita de x, por lo que *debemos* utilizar diferenciación implícita:

$$\frac{d}{dx}(y \operatorname{sen} x) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(\cos y) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Uso de la Regla del Producto}\\ \text{en el miembro izquierdo.}\end{array}\right)$$

$$(\operatorname{sen} x)\frac{dy}{dx} + y\cos x = 3x^2 - (\operatorname{sen} y)\frac{dy}{dx}$$

$$(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)\frac{dy}{dx} = 3x^2 - y\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y\cos x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}$$

■

Para calcular dy/dx mediante diferenciación implícita:

1. Se diferencian los dos miembros de la ecuación con respecto a x, teniendo en cuenta que y es función de x y empleando la Regla de la Cadena para diferenciar las funciones de y.
2. Se agrupan los términos dy/dx en un miembro de la ecuación y se despeja dy/dx dividiendo por su coeficiente.

En los ejemplos anteriores, las derivadas dy/dx calculadas por diferenciación implícita dependían de y o de x e y, en vez de depender sólo de x. Esto es normal, ya que una ecuación en x e y puede definir más de una función de x, y la derivada calculada implícitamente debe aplicar a todas ellas. Por ejemplo, en el Ejemplo 2, la derivada $dy/dx = -x/y$ proporciona también la pendiente $-3/4$ en el punto (3, 4) de la circunferencia. Cuando se usa diferenciación implícita para calcular la pendiente de una curva en un punto, en general habrá que conocer las coordenadas de ese punto.

Existen peligros sutiles al calcular derivadas implícitas. Cuando se utiliza la Regla de la Cadena para diferenciar una ecuación en la que y depende de x, se asume automáticamente que la ecuación define y como una función diferenciable de x. Éste no tiene por qué ser el caso. Para ver lo que puede pasar, consideremos el problema de calcular $y' = dy/dx$ de la ecuación

$$x^2 + y^2 = K \, (*)$$

siendo K una constante. Como en el Ejemplo 2 (donde $K = 25$), la diferenciación implícita produce como resultado

$$2x + 2yy' = 0 \qquad \text{o} \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

Esta fórmula proporciona la pendiente de la curva (*) en cualquier punto de dicha curva donde $y \neq 0$. Para $K > 0$, (*) representa una circunferencia centrada en el origen con radio $\sqrt{K}$. Esta circunferencia tiene pendiente finita, excepto en los dos puntos donde cruza al eje x (donde $y = 0$). Si $K = 0$, la ecuación representa un solo punto, el origen, por lo que el concepto de pendiente carece de sentido. Para $K < 0$, no existen puntos reales cuyas coordenadas cumplan la ecuación (*), por lo que y' carece aquí también de sentido. La consecuencia es que poder calcular y' en una ecuación dada aplicando diferenciación implícita no garantiza que y' represente realmente la pendiente de algo.

Si (x_0, y_0) es un punto en la gráfica de la ecuación $F(x, y) = 0$, existe un teorema que puede justificar el uso de la diferenciación implícita para calcular la pendiente de la gráfica en dicho punto. No podemos ofrecer una demostración rigurosa del **teorema de la función implícita** (*véase* la Sección 12.8), pero en términos generales, dice que parte de la gráfica de $F(x, y) = 0$ cerca de (x_0, y_0) es la gráfica de una función de x que es diferenciable en x_0, suponiendo que $F(x, y)$ sea una función «suave» y que la derivada

$$\frac{d}{dy} F(x_0, y)\bigg|_{y=y_0} \neq 0$$

En el caso de la circunferencia $x^2 + y^2 - K = 0$ (siendo $K > 0$) esta condición dice que $2y_0 \neq 0$, que es la condición de que la derivada $y' = -x/y$ debe existir en (x_0, y_0).

Una estrategia útil

Cuando se usa diferenciación implícita para calcular el valor de la derivada en un punto concreto, es mejor sustituir las coordenadas del punto inmediatamente después de realizar la diferenciación y antes de despejar la derivada dy/dx. Es más sencillo resolver una ecuación con números que con expresiones algebraicas.

Ejemplo 4 Calcule la ecuación de la tangente a $x^2 + xy + 2y^3 = 4$ en $(-2, 1)$.

Solución Nótese que $(-2, 1)$ está en la curva dada. Para calcular la pendiente en la tangente se diferencia implícitamente la ecuación con respecto a x. Se utiliza la Regla del Producto para diferenciar el término xy:

$$2x + y + xy' + 6y^2y' = 0$$

Sustituyendo las coordenadas $x = -2$ e $y = 1$ y despejando y':

$$-4 + 1 - 2y' + 6y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3}{4}$$

La pendiente de la tangente en $(-2, 1)$ es $3/4$ y su ecuación es

$$y = \frac{3}{4}(x + 2) + 1 \qquad \text{o} \qquad 3x - 4y = -10$$

Ejemplo 5 Demuestre que para todo valor de las constantes a y b, las curvas $x^2 - y^2 = a$ y $xy = b$ se cortan formando ángulos rectos, es decir, en cualquier punto donde se corten, sus tangentes son perpendiculares.

Solución La pendiente en cualquier punto de $x^2 - y^2 = a$ se expresa como $2x - 2yy' = 0$, o $y' = x/y$. La pendiente en cualquier punto $xy = b$ se expresa como $y + xy' = 0$, o $y' = -y/x$. Si las dos curvas (que son hipérbolas si $a \neq 0$ y $b \neq 0$) se cortan en (x_0, y_0), las pendientes en ese punto son respectivamente x_0/y_0 y $-y_0/x_0$. Se ve claramente que una pendiente es el inverso cambiado de signo de la otra, por lo que la tangente a una curva es perpendicular a la tangente a la otra en el punto considerado. Por tanto, las curvas se cortan formando ángulos rectos (*véase* la Figura 2.35).

Derivadas de orden superior

Ejemplo 6 Calcule $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ si $xy + y^2 = 2x$.

Figura 2.35 Algunas hipérbolas de la familia $x^2 - y^2 = a$ (en discontinua) que se cortan con algunas curvas de la familia $xy = b$ (en continua) formando ángulos rectos.

Solución Diferenciando dos veces los dos miembros de la ecuación dada con respecto a x:

$$y + xy' + 2yy' = 2$$

$$y' + y' + xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$$

Ahora se despejan y' e y'' en las ecuaciones.

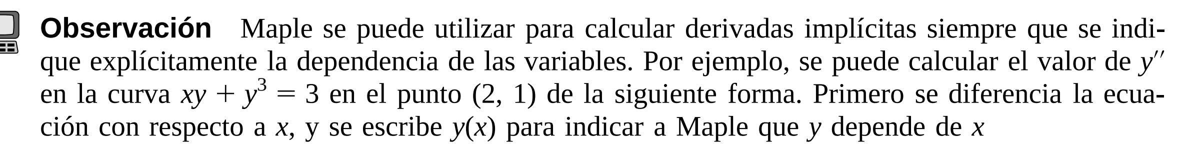
$$y' = \frac{2-y}{x+2y}$$

$$y'' = -\frac{2y' + 2(y')^2}{x+2y} = -2\,\frac{2-y}{x+2y}\,\frac{1+\dfrac{2-y}{x+2y}}{x+2y}$$

$$= -2\,\frac{(2-y)(x+y+2)}{(x+2y)^3}$$

$$= -2\,\frac{2x - xy + 2y - y^2 + 4 - 2y}{(x+2y)^3} = -\frac{8}{(x+2y)^3}$$

Hemos utilizado la ecuación dada para simplificar el numerador de la línea superior. ■



Observación Maple se puede utilizar para calcular derivadas implícitas siempre que se indique explícitamente la dependencia de las variables. Por ejemplo, se puede calcular el valor de y'' en la curva $xy + y^3 = 3$ en el punto $(2, 1)$ de la siguiente forma. Primero se diferencia la ecuación con respecto a x, y se escribe $y(x)$ para indicar a Maple que y depende de x

```
> deq := diff(x*y(x) + (y(x))^3=3, x);
```

$$deq := y(x) + x\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right) + 3y(x)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right) = 0$$

Nótese que Maple utiliza el símbolo ∂ en vez de d al expresar la derivada en la notación de Leibniz. Esto es porque la expresión que está diferenciando puede depender de más de una variable: $(\partial/\partial x)y$ indica la derivada de y con respecto a la variable concreta x y no con respecto a las otras variables de las que y puede depender. Se denomina **derivada parcial**. En el Capítulo 12 hablaremos de las derivadas parciales. Por el momento consideremos ∂ como si fuera d.

A continuación se despeja y' en la ecuación resultante:

```
> yp := solve(deq, diff(y(x), x)) ;
```

$$yp := -\frac{y(x)}{x + 3y(x)^2}$$

Ahora se puede diferenciar yp con respecto a x para obtener y''.

```
> ypp := diff(yp, x) ;
```

$$ypp := -\frac{\frac{\partial}{\partial x} y(x)}{x + 3y(x)^2} + \frac{y(x)\left(1 + 6y(x)\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)\right)}{(x + 3y(x)^2)^2}$$

Para obtener una expresión que dependa sólo de x e y hay que sustituir la expresión de la primera derivada en el resultado. Como en el resultado de la sustitución aparecerán fracciones compuestas, simplificaremos dicho resultado.

```
> ypp := simplify(subs(diff(y(x), x)=yp, ypp) ;
```

$$ypp := 2\,\frac{xy(x)}{(x + 3y(x)^2)^3}$$

Esto es y'' expresada en función de x e y. Ahora hay que sustituir las coordenadas $x = 2$, $y(x) = 1$ para obtener el valor de y'' en (2, 1). Hay que tener en cuenta que el orden de las sustituciones es importante. *Primero* hay que sustituir $y(x)$ por 1 y *después* sustituir x por 2 (si sustituyéramos primero x, habríamos sustituido $y(2)$ en vez de $y(x)$ por 1). El comando `subs` de Maple realiza las sustituciones en el orden en que se escriben.

```
> subs(y(x) = 1, x = 2, ypp) ;
```

$$\frac{4}{125}$$

Regla General de la Potencia

Hasta ahora sólo hemos demostrado la Regla General de la Potencia

$$\frac{d}{dx}\,x^r = rx^{r-1}$$

para exponentes enteros r y algunos exponentes racionales como $r = 1/2$. Utilizando diferenciación implícita se puede dar una demostración para cualquier exponente racional $r = m/n$, siendo m y n enteros y $n \neq 0$.

Si $y = x^{m/n}$, entonces $y^n = x^m$. Diferenciando implícitamente con respecto a x se obtiene

$$ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \qquad \text{por tanto,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}\,x^{m-1}y^{1-n} = \frac{m}{n}\,x^{m-1}x^{(m/n)(1-n)} = \frac{m}{n}\,x^{m-1+(m/n)-m} = \frac{m}{n}\,x^{(m/n)-1}$$

Ejercicios 2.9

En los Ejercicios 1-8, calcule dy/dx en función de x e y.

1. $xy - x + 2y = 1$

2. $x^3 + y^3 = 1$

3. $x^2 + xy = y^3$

4. $x^3y + xy^5 = 2$

5. $x^2y^3 = 2x - y$

6. $x^2 + 4(y-1)^2 = 4$

7. $\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{x^2}{y} + 1$

8. $x\sqrt{x+y} = 8 - xy$

En los Ejercicios 9-16, calcule la ecuación de las tangentes a las curvas en los puntos dados.

9. $2x^2 + 3y^2 = 5$ en $(1, 1)$

10. $x^2y^3 - x^3y^2 = 12$ en $(-1, 2)$

11. $\dfrac{x}{y} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^3 = 2$ en $(-1, -1)$

12. $x + 2y + 1 = \dfrac{y^2}{x-1}$ en $(2, -1)$

13. $2x + y - \sqrt{2}\,\text{sen}\,(xy) = \pi/2$ en $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

14. $\tan\,(xy)^2 = \dfrac{2xy}{\pi}$ en $\left(-\pi, \dfrac{1}{2}\right)$

15. $x\,\text{sen}\,(xy - y^2) = x^2 - 1$ en $(1, 1)$

16. $\cos\left(\dfrac{\pi y}{x}\right) = \dfrac{x^2}{y} - \dfrac{17}{2}$ en $(3, 1)$

En los Ejercicios 17-20, calcule y'' en función de x e y.

17. $xy = x + y$

18. $x^2 + 4y^2 = 4$

***19.** $x^3 - y^2 + y^3 = x$

***20.** $x^3 - 3xy + y^3 = 1$

21. Para $x^2 + y^2 = a^2$ demuestre que $y'' = -\dfrac{a^2}{y^3}$.

22. Para $Ax^2 + By^2 = C$ demuestre que $y'' = -\dfrac{AC}{B^2y^3}$.

Utilice Maple u otro sistema de matemáticas por computador para calcular los valores que se piden en los Ejercicios 23-26.

23. Calcule la pendiente de $x + y^2 + y\,\text{sen}\,x = y^3 + \pi$ en $(\pi, 1)$.

24. Calcule la pendiente de $\dfrac{x+\sqrt{y}}{y+\sqrt{x}} = \dfrac{3y-9x}{x+y}$ en el punto $(1, 4)$.

25. Si $x + y^5 + 1 = y + x^4 + xy^2$, calcule d^2y/dx^2 en $(1, 1)$.

26. Si $x^3y + xy^3 = 11$, calcule d^3y/dx^3 en $(1, 2)$.

***27.** Demuestre que la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ y la hipérbola $2x^2 - 2y^2 = 1$ se cortan formando ángulos rectos.

***28.** Demuestre que la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y la hipérbola $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ se cortan formando ángulos rectos si $A^2 \leqslant a^2$ y $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ (esto indica que la elipse y la hipérbola tienen los mismos focos).

***29.** Si $z = \tan\dfrac{x}{2}$, demuestre que

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2}{1+z^2},\ \text{sen}\,x = \frac{2z}{1+z^2},\ \text{y}\ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

***30.** Utilice diferenciación implícita para calcular y' si $(x-y)/(x+y) = x/y + 1$. Demuestre ahora que, de hecho, la curva no tiene puntos, por lo que la derivada calculada no tiene sentido. Este otro ejemplo demuestra los peligros de calcular algo que no se conoce si existe o no.

2.10 Primitivas y problemas de valor inicial

Hasta el momento en este capítulo nos hemos ocupado de calcular la derivada f' de una función dada f. El problema inverso (dada la derivada f' calcular f) es también de interés e importancia. Este problema se estudia en el *cálculo integral* y en general es más difícil de resolver que el cálculo de derivadas. En esta sección consideraremos este problema de forma preliminar y volveremos sobre él en el Capítulo 5.

Primitivas

Comenzaremos por definir la primitiva de una función f como una función F cuya derivada es f. Es apropiado requerir que $F'(x) = f(x)$ en un *intervalo*.

DEFINICIÓN 7

La **primitiva** de una función f en un intervalo I es otra función F que cumple

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para } x \text{ en } I$$

Ejemplo 1

(a) $F(x) = x$ es una primitiva de la función $f(x) = 1$ en cualquier intervalo porque $F'(x) = 1 = f(x)$ en todas partes.

(b) $G(x) = \frac{1}{2}x^2$ es una primitiva de la función $g(x) = x$ en cualquier intervalo porque $G'(x) = \frac{1}{2}(2x) = = x = g(x)$ en todas partes.

(c) $R(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$ es una primitiva de $r(x) = \operatorname{sen}(3x)$ en cualquier intervalo porque $R'(x) = = -\frac{1}{3}(-3\operatorname{sen}(3x)) = \operatorname{sen}(3x) = r(x)$ en todas partes.

(d) $F(x) = -1/x$ es una primitiva de $f(x) = 1/x^2$ en cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$ porque $F'(x) = 1/x^2 = f(x)$ en todas partes excepto en $x = 0$.

Las primitivas no son únicas. De hecho, si C es una constante, entonces $F(x) = x + C$ es una primitiva de $f(x) = 1$ en cualquier intervalo. Siempre se puede añadir una constante a la primitiva F de una función f en un intervalo y obtener otra derivada de f. Lo que es más importante, *todas* las primitivas de f en un intervalo se pueden obtener sumando constantes a una primitiva concreta. Si F y G son primitivas de f en un determinado intervalo I, entonces

$$\frac{d}{dx}(G(x) - F(x)) = f(x) - f(x) = 0$$

en dicho intervalo I, de forma que $G(x) - F(x) = C$ (una constante) en I por el Teorema 13 de la Sección 2.6. Por tanto, $G(x) = F(x) + C$ en I.

Nótese que ni esta conclusión ni el Teorema 13 son válidos en un conjunto que no sea un intervalo. Por ejemplo, la derivada de

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

es 0 para todo $x \neq 0$, pero $\operatorname{sgn} x$ no es constante para todo $x \neq 0$, sino que tiene valores constantes *diferentes* en los dos intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ que forman su dominio.

La integral indefinida

La *primitiva general* de una función $f(x)$ en un intervalo I es $F(x) + C$, siendo $F(x)$ una primitiva concreta de $f(x)$ en I y C una constante. Esta primitiva general se denomina integral indefinida de $f(x)$ en I, y se indica como $\int f(x)\,dx$.

DEFINICIÓN 8

La **integral indefinida** de $f(x)$ en un intervalo I es

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{en } I$$

siempre que $F'(x) = f(x)$ para todo x de I.

El símbolo $\int$ se denomina **signo integral**. Su forma es de una «S» alargada por razones que se verán al estudiar la *integral definida* en el Capítulo 5. De la misma forma que dy/dx se considera un solo símbolo que representa la derivada de y con respecto a x, hay que considerar $\int f(x)\,dx$

como un solo símbolo (primitiva general) de f con respecto a x. La constante C se denomina **constante de integración**.

Ejemplo 2

(a) $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$ en cualquier intervalo.

(b) $\int (x^3 - 5x^2 + 7)\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 7x + C$ en cualquier intervalo.

(c) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = -\frac{1}{x} + 4\sqrt{x} + C$ en cualquier intervalo a la derecha de $x = 0$.

Las tres fórmulas anteriores se pueden comprobar diferenciando los miembros derechos.

El cálculo de primitivas es en general más difícil que el cálculo de derivadas, ya que muchas funciones no tienen primitivas expresables como combinación finita de funciones elementales. Sin embargo, *toda fórmula de una derivada se puede expresar como una fórmula de una primitiva*. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x; \qquad \text{por tanto,} \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

En capítulos posteriores desarrollaremos varias técnicas para calcular primitivas. Hasta entonces, nos contentaremos con escribir algunas primitivas simples basadas en el conocimiento de las derivadas de funciones elementales:

(a) $\int dx = \int 1\,dx = x + C$

(b) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

(c) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

(d) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

(e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$

(f) $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \ (r \neq -1)$

(g) $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

(h) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

(i) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

(j) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

(k) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

(l) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

Obsérvese que las fórmulas (a)-(e) son casos especiales de la fórmula (f). Por el momento, en (f), r debe ser un número racional, pero esta restricción desaparecerá posteriormente.

La regla para diferenciar sumas y múltiplos constantes de funciones se convierte en una regla similar en el caso de las primitivas, como se refleja en los apartados (b) y (c) del Ejemplo 2 anterior.

Las gráficas de las diferentes primitivas de la misma función en el mismo intervalo son versiones desplazadas verticalmente de la misma curva, como se muestra en la Figura 2.36. En general, sólo una de esas curvas pasará por un punto dado, por lo que se puede obtener una primitiva concreta de una función dada exigiendo que dicha primitiva tome un valor determinado en un punto concreto x.

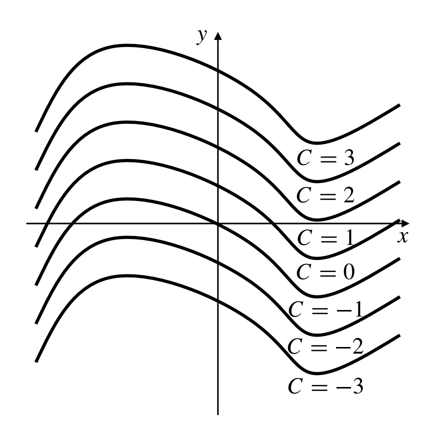


Figura 2.36 Gráficas de varias primitivas de la misma función.

Ejemplo 3 Calcule la función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x) = 6x^2 - 1$ para todo real x y tal que $f(2) = 10$.

Solución Como $f'(x) = 6x^2 - 1$, tenemos que

$$f(x) = \int (6x^2 - 1)\, dx = 2x^3 - x + C$$

para alguna constante C. Como $f(2) = 10$, entonces

$$10 = f(2) = 16 - 2 + C$$

Por tanto, $C = -4$ y $f(x) = 2x^3 - x - 4$ (se puede verificar por cálculo directo que $f'(x) = 6x^2 - 1$ y $f(2) = 10$).

Ejemplo 4 Calcule la función $g(t)$ cuya derivada es $\dfrac{t+5}{t^{3/2}}$ y cuya gráfica pasa por el punto (4, 1).

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned} g(t) &= \int \frac{t+5}{t^{3/2}}\, dt \\ &= \int (t^{-1/2} + 5t^{-3/2})\, dt \\ &= 2t^{1/2} - 10t^{-1/2} + C \end{aligned}$$

Como la gráfica de $y = g(t)$ debe pasar por el punto (4, 1), se requiere que

$$1 = g(4) = 4 - 5 + C$$

Por tanto, $C = 2$ y

$$g(t) = 2t^{1/2} - 10t^{-1/2} + 2 \qquad \text{para } t > 0$$

Ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial

Una **ecuación diferencial** (ED) es una ecuación en la que aparecen una o más derivadas de una función desconocida. Cualquier función cuyas derivadas cumplan la ecuación diferencial *en un intervalo* se denomina **solución** de la ecuación diferencial en dicho intervalo. Por ejemplo, la función $y = x^3 - x$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$$

en toda la recta real. Esta ecuación diferencial tiene más de una solución. De hecho, $y = x^3 - x + C$ es una solución para cualquier valor de la constante C.

Ejemplo 5 Demuestre que para cualquier valor de las constantes A y B, la función $y = Ax^3 + B/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ en cualquier intervalo que no contenga el 0.

Solución Si $y = Ax^3 + B/x$, entonces para todo $x \neq 0$ tenemos que

$$y' = 3Ax^2 - B/x^2 \quad \text{y} \quad y'' = 6Ax + 2B/x^3$$

Y, por tanto,

$$x^2y'' - xy' - 3y = 6Ax^3 + \frac{2B}{x} - 3Ax^3 + \frac{B}{x} - 3Ax^3 - \frac{3B}{x} = 0$$

siempre que $x \neq 0$. Esto es lo que queríamos demostrar. ■

El **orden** de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que aparece en dicha ecuación. La ED del Ejemplo 5 es una ED de *segundo orden* ya que en ella interviene y'', y no hay derivadas de y de orden superior. Nótese que en la solución que se ha verificado en el Ejemplo 5 intervienen dos constantes arbitrarias, A y B. Esta solución se denomina **solución general** de la ecuación, ya que se puede demostrar que cualquier solución es de esta forma, dando valores a las constantes A y B. Se obtiene una **solución particular** de la ecuación asignando valores concretos a esas constantes. En la solución general de una ecuación diferencial de orden n aparecen n constantes arbitrarias.

Un **problema de valor inicial** (PVI) está formado por:

(a) una ecuación diferencial (para resolverla encontrando una función desconocida) y
(b) valores de la solución y de un número suficiente de sus derivadas en un punto determinado (el punto inicial) para determinar los valores de todas las constantes arbitrarias en la solución general de la ED y obtener, así, una solución particular.

Observación Es habitual utilizar el mismo símbolo, por ejemplo y, para indicar la variable independiente y la función solución de una ED o de un PVI. Es decir, la función solución se denominará $y = y(x)$, en vez de $y = f(x)$.

Observación La solución de un PVI es válida en el máximo intervalo que contenga a los puntos iniciales donde se define la función solución.

Ejemplo 6 Utilice el resultado del Ejemplo 5 para resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x^2y'' - xy' - 3y = 0 \quad (x > 0) \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -6 \end{cases}$$

Solución Como se demuestra en el Ejemplo 5, la ED $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ tiene como solución $y = Ax^3 + B/x$, cuya derivada es $y' = 3Ax^2 - B/x^2$. En $x = 1$ debe cumplirse que $y = 2$ e $y' = -6$, por lo que

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ 3A - B &= -6 \end{aligned}$$

Despejando A y B en estas dos ecuaciones lineales, se obtiene $A = -1$ y $B = 3$. Por tanto, $y = -x^3 + 3/x$ para $x > 0$ es la solución del PVI. ■

Uno de los tipos más simples de ecuación diferencial es

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

que se puede resolver obteniendo y en función de x. Evidentemente la solución es

$$y = \int f(x)\,dx$$

La posibilidad de obtener la función desconocida $y(x)$ depende de la posibilidad de obtener una primitiva de f.

Ejemplo 7 Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3 + 2x^2}{x^2} \\ y(-2) = 1 \end{cases}$$

¿Dónde es válida la solución?

Solución

$$y = \int \left(\frac{3}{x^2} + 2\right) dx = -\frac{3}{x} + 2x + C$$

$$1 = y(-2) = \frac{3}{2} - 4 + C$$

Por tanto, $C = \frac{7}{2}$ y

$$y = -\frac{3}{x} + 2x + \frac{7}{2}$$

Aunque la función solución parece estar definida para todo valor de x excepto el 0, el PVI sólo tiene solución para $x < 0$. Esto se debe a que $(-\infty, 0)$ es el mayor intervalo que contiene al punto inicial -2 pero no $x = 0$, donde la y está indefinida.

Ejemplo 8 Resuelva el PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y'' = \operatorname{sen} x \\ y(\pi) = 2 \\ y'(\pi) = -1 \end{cases}$$

Solución Como $(y')' = y'' = \operatorname{sen} x$, tenemos que

$$y'(x) = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C_1$$

La condición inicial para y' permite obtener

$$-1 = y'(\pi) = -\cos \pi + C_1 = 1 + C_1$$

de forma que $C_1 = -2$ y $y'(x) = -(\cos x + 2)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} y(x) &= -\int (\cos x + 2)\,dx \\ &= -\operatorname{sen} x - 2x + C_2 \end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial sobre y:

$$2 = y(\pi) = -\operatorname{sen} \pi - 2\pi + C_2 = -2\pi + C_2$$

con lo que $C_2 = 2 + 2\pi$. La solución del PVI es

$$y = 2 + 2\pi - \operatorname{sen} x - 2x$$

y es válida para todo x.

Las ecuaciones diferenciales y los problemas de valor inicial son de gran importancia en las aplicaciones del cálculo, especialmente para expresar de forma matemática ciertas leyes de la naturaleza en las que intervienen tasas de cambio de cantidades. Una gran parte del desarrollo matemático de los doscientos últimos años se ha dedicado a este estudio. En general, esto se estudia en cursos separados dedicados a las ecuaciones diferenciales, pero en este texto los presentaremos de vez en cuando, cuando resulte apropiado. A lo largo del libro, excepto en las secciones dedicadas explícitamente a las ecuaciones diferenciales, emplearemos el símbolo ❖ para marcar los ejercicios sobre ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial.

Ejercicios 2.10

En los Ejercicios 1-14, calcule las integrales indefinidas dadas.

1. $\int 5\,dx$ **2.** $\int x^2\,dx$

3. $\int \sqrt{x}\,dx$ **4.** $\int x^{12}\,dx$

5. $\int x^3\,dx$ **6.** $\int (x + \cos x)\,dx$

7. $\int \tan x \cos x\,dx$ **8.** $\int \dfrac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

9. $\int (a^2 - x^2)\,dx$ **10.** $\int (A + Bx + Cx^2)\,dx$

11. $\int (2x^{1/2} + 3x^{1/3})\,dx$ **12.** $\int \dfrac{6(x-1)}{x^{4/3}}\,dx$

13. $\int \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x - 1\right)dx$

14. $105 \int (1 + t^2 + t^4 + t^6)\,dt$

En los Ejercicios 15-22, calcule las integrales indefinidas dadas. Esto puede requerir intuir la forma de la primitiva y comprobarlo después por diferenciación. Por ejemplo, podemos sospechar que $\int \cos(5x - 2)\,dx = k \operatorname{sen}(5x - 2) + C$ para algún valor de k. Al diferenciar, se obtiene que $k = 1/5$.

15. $\int \cos(2x)\,dx$ **16.** $\int \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)dx$

∗**17.** $\int \dfrac{dx}{(1+x)^2}$ ∗**18.** $\int \sec(1-x)\tan(1-x)\,dx$

∗**19.** $\int \sqrt{2x+3}\,dx$ ∗**20.** $\int \dfrac{4}{\sqrt{x+1}}\,dx$

21. $\int 2x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ ∗**22.** $\int \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Utilice igualdades trigonométricas como $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ y $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ como ayuda para calcular las integrales indefinidas de los Ejercicios 23-26.

∗**23.** $\int \tan^2 x\,dx$ ∗**24.** $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

∗**25.** $\int \cos^2 x\,dx$ ∗**26.** $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Ecuaciones diferenciales

En los Ejercicios 27-42, calcule la solución $y = y(x)$ de los problemas de valor inicial dados. ¿En qué intervalo es válida la solución? (Nótese que los ejercicios referidos a ecuaciones diferenciales están precedidos por el símbolo ❖).

❖**27.** $\begin{cases} y' = x - 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$ ❖**28.** $\begin{cases} y' = x^{-2} - x^{-3} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$

❖**29.** $\begin{cases} y' = 3\sqrt{x} \\ y(4) = 1 \end{cases}$ ❖**30.** $\begin{cases} y' = x^{1/3} \\ y(0) = 5 \end{cases}$

❖**31.** $\begin{cases} y' = Ax^2 + Bx + C \\ y(1) = 1 \end{cases}$ ❖**32.** $\begin{cases} y' = x^{-9/7} \\ y(1) = -4 \end{cases}$

❖**33.** $\begin{cases} y' = \cos x \\ y(\pi/6) = 2 \end{cases}$ ❖**34.** $\begin{cases} y' = \operatorname{sen}(2x) \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases}$

❖**35.** $\begin{cases} y' = \sec^2 x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ❖**36.** $\begin{cases} y' = \sec^2 x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

❖**37.** $\begin{cases} y'' = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y(0) = -3 \end{cases}$

❖**38.** $\begin{cases} y'' = x^{-4} \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

❖**39.** $\begin{cases} y'' = x^3 - 1 \\ y'(0) = 5 \\ y(0) = 8 \end{cases}$

❖**40.** $\begin{cases} y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2} \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

❖**41.** $\begin{cases} y'' = \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

❖**42.** $\begin{cases} y'' = x + \operatorname{sen} x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

❖**43.** Demuestre que para cualquier valor de las constantes A y B la función $y = y(x) = Ax + B/x$ cumple la *ecuación diferencial de segundo orden* $x^2y'' + xy' - y = 0$ para $x \neq 0$. Calcule una función y que sea solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' - y = 0 \qquad (x > 0) \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 4 \end{cases}$$

❖**44.** Demuestre que para cualquier valor de las constantes A y B la función $y = Ax^{r_1} + Bx^{r_2}$ es una solución, para $x > 0$, de la ecuación diferencial $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, siendo r_1 y r_2 dos raíces racionales distintas de la ecuación cuadrática $ar(r - 1) + br + c = 0$.

Utilice el resultado del Ejercicio 44 para resolver los problemas de valor inicial de los Ejercicios 45-46 en el intervalo $x > 0$.

❖**45.** $\begin{cases} 4x^2y'' + 4xy' - y = 0 \\ y(4) = 2 \\ y'(4) = -2 \end{cases}$

❖**46.** $\begin{cases} x^2y'' - 6y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

2.11 Velocidad y aceleración

Velocidad

Supongamos un objeto que se mueve por una línea recta (el eje x) de forma que su posición x es una función del tiempo t, $x = x(t)$ (estamos utilizando x para indicar tanto la variable dependiente como la función). Supongamos que x se mide en metros y t en segundos. La **velocidad media** del objeto en el intervalo temporal $[t, t + h]$ es el cambio en la posición dividido por el cambio en el tiempo, es decir, el cociente de Newton

$$v_{\text{media}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + h) - x(t)}{h} \text{ m/s}$$

La **velocidad** $v(t)$ del objeto en el instante t es el límite de su velocidad media cuando $h \to 0$. Por tanto, es la tasa de cambio (la derivada) de la posición con respecto al tiempo.

$$\text{Velocidad:} \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

Además de decirnos lo rápido que se mueve un objeto, la velocidad también nos indica en qué dirección se mueve. Si $v(t) > 0$, entonces x aumenta, por lo que el objeto se mueve hacia la derecha. Si $v(t) < 0$, x disminuye, por lo que el objeto se mueve hacia la izquierda. En los puntos críticos de x, es decir, los instantes t en los que $v(t) = 0$, el objeto está en reposo instantáneo: en ese instante no se mueve en ninguna dirección.

Hay que distinguir entre el vector velocidad (que incluye información de la dirección de movimiento) y el módulo de la velocidad, que sólo da cuenta de la tasa y no de la dirección. La velocidad es el módulo del vector velocidad:

$$\text{Velocidad:} \quad s(t) = |v(t)| = \left|\frac{dx}{dt}\right|$$

Un velocímetro nos proporciona la velocidad a la que se mueve un vehículo, pero no su dirección. El velocímetro no muestra valores negativos si el vehículo se da la vuelta y comienza a moverse en dirección contraria.

Ejemplo 1

(a) Determine la velocidad $v(t)$ en el instante t de un objeto que se mueve por el eje x de forma que su posición en t se expresa como

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

siendo v_0 y a constantes.

(b) Dibuje la gráfica de la función $v(t)$ y demuestre que el área encerrada bajo dicha gráfica y por encima del eje t, en el intervalo $[t_1, t_2]$, es igual a la distancia recorrida por el objeto en dicho intervalo.

Solución La velocidad se expresa como

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

Esta gráfica es una recta con pendiente a y ordenada en el origen v_0. El área encerrada bajo la gráfica (zona sombreada en la Figura 2.37) es la suma de las áreas de un rectángulo y un triángulo. Ambos tienen como base $t_2 - t_1$. El rectángulo tiene altura $v(t_1) = v_0 + at_1$, y el triángulo tiene altura $a(t_2 - t_1)$ (¿por qué?). Por tanto, el área sombreada es igual a

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= (t_2 - t_1)(v_0 + at_1) + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)[a(t_2 - t_1)] \\
&= (t_2 - t_1)\left[v_0 + at_1 + \frac{a}{2}(t_2 - t_1)\right] \\
&= (t_2 - t_1)\left[v_0 + \frac{a}{2}(t_2 + t_1)\right] \\
&= v_0(t_2 - t_1) + \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2) \\
&= x(t_2) - x(t_1)
\end{aligned}$$

que corresponde a la distancia recorrida por el objeto entre los instantes t_1 y t_2.

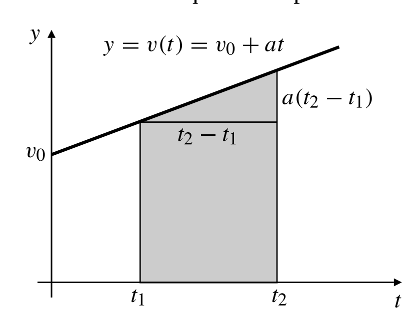


Figura 2.37 El área sombreada es igual a la distancia recorrida entre t_1 y t_2.

■

Observación En el Ejemplo 1 hemos diferenciado la posición x para obtener la velocidad v y después hemos utilizado el área encerrada bajo la gráfica de la velocidad para obtener información de la posición. Parece que existe una conexión entre calcular áreas y obtener las funciones que tienen derivadas determinadas (es decir, obtener primitivas). Esta conexión, que examinaremos en el Capítulo 5, es quizá la idea más importante del cálculo.

Aceleración

La derivada de la velocidad tiene también una útil interpretación. La tasa de cambio de la velocidad con respecto al tiempo es la **aceleración** del objeto móvil. Se mide en unidades de distancia/tiempo^2. El valor de la aceleración en el instante t es

$$\text{Aceleración:} \quad a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

La aceleración es la *segunda derivada* de la posición. Si $a(t) > 0$, la velocidad aumenta. Esto no quiere decir necesariamente que el módulo de la velocidad esté aumentando. Si el objeto se mueve hacia la izquierda, entonces $v(t) < 0$, y al acelerar hacia la derecha ($a(t) > 0$), realmente se está moviendo más lentamente. El módulo de la velocidad de un objeto crece sólo cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo.

Tabla 2. Velocidad, aceleración y módulo de la velocidad

Si la velocidad es	y la aceleración es	el objeto está	y el módulo de su velocidad está
positiva	positiva	moviéndose a la derecha	aumentando
positiva	negativa	moviéndose a la derecha	disminuyendo
negativa	positiva	moviéndose a la izquierda	disminuyendo
negativa	negativa	moviéndose a la izquierda	aumentando

Si $a(t_0) = 0$, entonces la velocidad y su módulo son estacionarias en t_0. Si $a(t) = 0$ durante un intervalo de tiempo, entonces la velocidad no varía y, por tanto, es constante en ese intervalo.

Ejemplo 2 Un punto P se mueve por el eje x de forma que su posición en el instante t se expresa como

$$x = 2t^3 - 15t^2 + 24t \text{ m}$$

(a) Calcule la velocidad y la aceleración de P en el instante t.
(b) ¿En qué dirección y con qué velocidad se mueve P en $t = 2$ s? En ese instante, ¿su velocidad está aumentando o disminuyendo?
(c) ¿Cuándo está P en reposo instantáneo? ¿Cuándo no cambia instantáneamente el módulo de su velocidad?
(d) ¿Cuándo se mueve P a la izquierda? ¿Y a la derecha?
(e) ¿Cuándo está P acelerando? ¿Y desacelerando?

Solución

(a) La velocidad y la aceleración de P en el instante t son

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 30t + 24 = 6(t-1)(t-4) \text{ m/s y}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 30 = 6(2t-5) \text{ m/s}^2$$

(b) En $t = 2$, tenemos $v = -12$ y $a = -6$. Por tanto, P se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 12 m/s, y como la velocidad y la aceleración son negativas, el módulo de su velocidad aumenta.
(c) P está en reposo cuando $v = 0$, es decir, cuando $t = 1$ s o $t = 4$ s. Su velocidad no cambia cuando $a = 0$, es decir, en $t = 5/2$ s.
(d) La velocidad es continua para todo t, por lo que, de acuerdo con el Teorema del Valor Medio, su signo es constante en los intervalos entre los puntos en los que vale 0. Examinando los valores de $v(t)$ en $t = 0$, 2 y 5 (o analizando los signos de los factores $(t-1)$ y $(t-4)$ en la expresión de $v(t)$), se concluye que $v(t) < 0$ (y P se mueve a la izquierda) en el intervalo $(1, 4)$, y $v(t) > 0$ (y P se mueve a la derecha) en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(4, \infty)$.
(e) La aceleración a es negativa para $t < 5/2$ y positiva para $t > 5/2$. La Tabla 3 combina este información con la información de v para mostrar cuándo P está acelerando y decelerando.

Tabla 3. Datos del Ejemplo 2

Intervalo	$v(t)$ es	$a(t)$ es	P está
$(-\infty, 1)$	positiva	negativa	decelerando
$(1, 5/2)$	negativa	negativa	acelerando
$(5/2, 4)$	negativa	positiva	decelerando
$(4, \infty)$	positiva	positiva	acelerando

La Figura 2.38 muestra el movimiento de P.

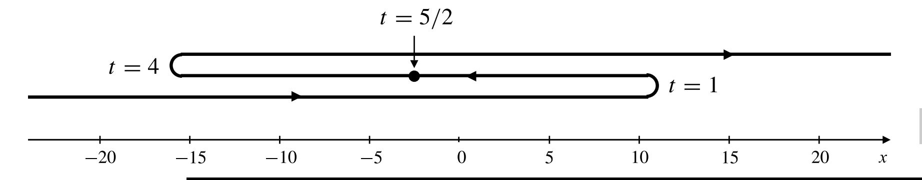


Figura 2.38 Movimiento de P en el Ejemplo 2.

Ejemplo 3 Un objeto se arroja hacia arriba desde el tejado de un edificio de 10 m. Se eleva y posteriormente cae. La expresión de su altura desde el suelo t segundos después de ser arrojado es

$$y = -4.9t^2 + 8t + 10 \text{ m}$$

hasta que cae al suelo. ¿Qué altura máxima sobre el suelo alcanza el objeto? ¿Con qué velocidad golpea el suelo el objeto?

Solución *Véase* la Figura 2.39. La velocidad vertical en el instante t durante el vuelo es

$$v(t) = -2(4.9)t + 8 = -9.8t + 8 \text{ m/s}$$

El objeto se eleva cuando $v > 0$, es decir, cuando $0 < t < 8/9.8$, y cae cuando $t > 8/9.8$. Por tanto, el objeto alcanza su máxima altura en el instante $t = 8/9.8 \approx 0.8163$ s, y su altura máxima es

$$y_{\text{máx}} = -4.9\left(\frac{8}{9.8}\right)^2 + 8\left(\frac{8}{9.8}\right) + 10 \approx 13.27 \text{ m}$$

El instante t en el que el objeto golpea el suelo es la raíz positiva de la ecuación de segundo grado que se obtiene al hacer $y = 0$.

$$-4.9t^2 + 8t + 10 = 0$$

es decir,

$$t = \frac{-8 - \sqrt{64 + 196}}{-9.8} \approx 2.462 \text{ s}$$

La velocidad en ese instante es $v = -(9.8)(2.462) + 8 \approx -16.12$. Por tanto, el objeto golpea el suelo con una velocidad aproximada de 16.12 m/s.

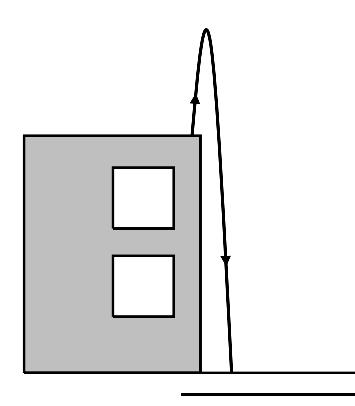


Figura 2.39

Caída libre

De acuerdo con la Segunda Ley del Movimiento de Newton, una roca de masa m sobre la que actúa una fuerza F experimentará una aceleración a proporcional a F y en su misma dirección. Utilizando las unidades apropiadas de fuerza, $F = ma$. Si la roca está en el suelo, sobre ella actúan dos fuerzas: la fuerza de la gravedad hacia abajo, y la reacción del suelo hacia arriba. Las dos fuerzas se equilibran, por lo que la aceleración resultante es nula. Por otra parte, si la roca está en el aire y no se apoya en ningún sitio, la fuerza gravitacional no resulta equilibrada, y la roca experimentará una aceleración hacia abajo. Es decir, caerá.

De acuerdo con la Ley de la Gravitación Universal de Newton, la fuerza con que la Tierra atrae a la roca es proporcional a la masa m de la roca e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r al centro de la Tierra: $F = km/r^2$. Si el cambio relativo $\Delta r/r$ es pequeño, como sucede cuando la roca está cerca de la superficie de la Tierra, entonces $F = mg$, siendo $g = k/r^2$ aproximadamente constante. Se deduce entonces que $ma = F = mg$ y la roca experimenta una aceleración *constante* g hacia abajo. Como g no depende de m, todos los objetos experimentan la misma aceleración cuando caen cerca de la superficie de la Tierra, suponiendo que se ignora la resistencia del aire y otras fuerzas que pudieran estar actuando. Las leyes de Newton implican, por tanto, que si la altura a la que está un objeto en el instante t es $y(t)$, entonces

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

El signo negativo es necesario porque la aceleración gravitacional es hacia abajo, en dirección opuesta a la que crece la y. Los experimentos físicos permiten medir los siguientes valores aproximados de g en la superficie de la Tierra:

$$g = 32 \text{ pies/s}^2 \quad \text{o} \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 4 Una roca en caída libre cerca de la superficie de la Tierra está sujeta a una aceleración constante hacia abajo de valor g, si se desprecia el efecto de la resistencia del aire. Si la altura y la velocidad de la roca son y_0 y v_0 en el instante $t = 0$, calcule la altura $y(t)$ de la roca en cualquier instante posterior hasta que llegue el suelo.

Solución En este ejemplo se pide la solución $y(t)$ al problema de valor inicial de segundo orden:

$$\begin{cases} y''(t) = -g \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

Tenemos que

$$y'(t) = -\int g\,dt = -gt + C_1$$

$$v_0 = y'(0) = 0 + C_1$$

Por tanto, $C_1 = v_0$.

$$y'(t) = -gt + v_0$$

$$y(t) = \int (-gt + v_0)\,dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2$$

$$y_0 = y(0) = 0 + 0 + C_2$$

Con lo que $C_2 = y_0$. Finalmente, por tanto,

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

■

Ejemplo 5 Una pelota se arroja con una velocidad inicial de 20 pies/s desde la cima de un acantilado, y golpea el suelo en el fondo tras 5 s. ¿Qué altura tiene el acantilado?

Solución Aplicaremos el resultado del Ejemplo 4. En este caso $g = 32$ pies/s^2, $v_0 = -20$ pies/s e y_0 es la altura desconocida del acantilado. La altura de la pelota t segundos tras arrojarla es

$$y(t) = -16t^2 - 20t + y_0 \text{ pies}$$

En $t = 5$, la pelota llega al suelo, por lo que $y(5) = 0$:

$$0 = -16(25) - 20(5) + y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 500$$

Por lo que la altura del acantilado es de 500 pies. ■

Ejemplo 6 **(Distancia de frenado)** Un coche viaja a 72 km/h. En un cierto instante, se aplican los frenos y se produce una deceleración constante de 0.8 m/s^2. ¿Qué distancia recorrerá el coche hasta detenerse?

Solución Sea $s(t)$ la distancia que recorre el coche t segundos después de aplicar los frenos. Entonces $s''(t) = -0.8$ (m/s^2), por lo que la velocidad en el instante t es

$$s'(t) = \int -0.8\, dt = -0.8t + C_1 \text{ m/s}$$

Como $s'(0) = 72$ km/h $= 72 \times 1000/3600 = 20$ m/s, tenemos que $C_1 = 20$. Por tanto,

$$s'(t) = 20 - 0.8t$$

y

$$s(t) = \int (20 - 0.8t)\, dt = 20t - 0.4t^2 + C_2$$

Como $s(0) = 0$, tenemos que $C_2 = 0$ y $s(t) = 20t - 0.4t^2$. Cuando el coche se detenga, su velocidad será 0. Por tanto, el instante de parada es la solución t a la ecuación

$$0 = s'(t) = 20 - 0.8t$$

Es decir, $t = 25$ s. La distancia recorrida durante la deceleración es $s(25) = 250$ m. ■

Ejercicios 2.11

En los Ejercicios 1-4, un punto se mueve por el eje x de forma que su posición en el instante t está especificada por las funciones dadas. En cada caso, determine lo siguiente:

(a) Los intervalos de tiempo en los que el punto se mueve a la derecha.
(b) Los intervalos de tiempo en los que el punto se mueve a la izquierda.
(c) Los intervalos de tiempo en los que el punto está acelerando hacia la derecha.
(d) Los intervalos de tiempo en los que el punto está acelerando hacia la izquierda.
(e) Los intervalos de tiempo en los que el punto está acelerando.
(f) Los intervalos de tiempo en los que el punto está decelerando.
(g) La aceleración en los instantes en los que la velocidad es cero.
(h) La velocidad media en el intervalo temporal [0, 4].

1. $x = t^2 - 4t + 3$

2. $x = 4 + 5t - t^2$

3. $x = t^3 - 4t + 1$

4. $x = \dfrac{t}{t^2 + 1}$

5. Una pelota se arroja hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 9.8 m/s, de forma que su altura en metros tras t segundos se expresa como $y = 9.8t - 4.9t^2$. ¿Cuál es la aceleración de la pelota en cualquier instante t? ¿A qué altura llega la pelota? ¿Con qué velocidad se mueve cuando llega al suelo?

6. Una pelota se tira desde lo alto de una torre de 100 m con una velocidad inicial de 2 m/s. Su altura sobre el suelo t segundos después es $y = 100 - 2t - 4.9t^2$. ¿Cuánto tarda en llegar al suelo? ¿Cuál es la velocidad media durante la caída? ¿En qué instante su velocidad es igual a su velocidad media?

7. **(Distancia de despegue)** La distancia que recorre una aeronave antes de despegar se expresa como $D = t^2$, donde D se mide en metros desde el punto inicial, y t se mide en segundos desde que se sueltan los frenos. Si el avión despega cuando su velocidad llega a 200 km/h ¿Cuánto tardará en despegar, y qué distancia habrá recorrido en el momento del despegue?

8. **(Proyectiles en Marte)** Un proyectil que se dispara hacia arriba en la superficie de la Tierra llega al suelo al cabo de 10 s. ¿Cuánto tardará en caer al suelo si se dispara en Marte con la misma velocidad inicial? $g_{\text{Marte}} = 3.72$ m/s^2.

9. Una pelota se arroja hacia arriba con velocidad inicial de v_0 m/s y alcanza una altura máxima de h m. ¿Qué altura alcanzará si su velocidad inicial es de $2v_0$? ¿Con qué velocidad debe lanzarse hacia arriba para que alcance una altura máxima de $2h$ m?

10. ¿Con qué velocidad debería lanzarse hacia arriba la pelota del Ejercicio 9 en Marte para que alcanzara una altura máxima de $3h$ m?

11. Una roca cae desde la cima de un acantilado y llega al suelo en su base con una velocidad de 160 pies/s. ¿Qué altura tiene el acantilado?

12. Una piedra se tira hacia abajo desde la cima de un acantilado con una velocidad inicial de 32 pies/s y llega al suelo en la base del acantilado con una velocidad de 160 pies/s. ¿Qué altura tiene el acantilado?

13. **(Distancia recorrida en frenada)** Cuando se aplican los frenos al máximo, un tren de mercancías puede decelerar de forma constante 1,6 m/s^2. ¿Cuánto viajará el tren frenando hasta detenerse completamente si su velocidad inicial era de 60 km/h?

*14. Demuestre que si la posición x de un punto en movimiento se expresa mediante la función cuadrática de t, $x = At^2 + Bt + C$, entonces la velocidad media en cualquier intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es igual a la velocidad instantánea en el punto medio de dicho intervalo.

*15. **(Movimiento por tramos)** La posición de un objeto que se mueve por el eje x en el instante t se expresa como

$$s = \begin{cases} t^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 4t - 4 & \text{si} \quad 2 < t < 8 \\ -68 + 20t - t^2 & \text{si} \quad 8 \leqslant t \leqslant 10 \end{cases}$$

Determine la velocidad y la aceleración en cualquier instante t. ¿Es continua la velocidad? ¿Es continua la aceleración? ¿Cuál es la velocidad máxima y cuándo se alcanza?

(Cohete con combustible limitado) La Figura 2.40 muestra la velocidad v en pies por segundo de un pequeño cohete que se lanza desde lo alto de una torre en el instante $t = 0$ (t en segundos), acelera con aceleración ascendente constante hasta que se acaba el combustible y después cae a tierra a los pies de la torre. El vuelo completo dura 14 s. Los Ejercicios 16-19 se refieren a este cohete.

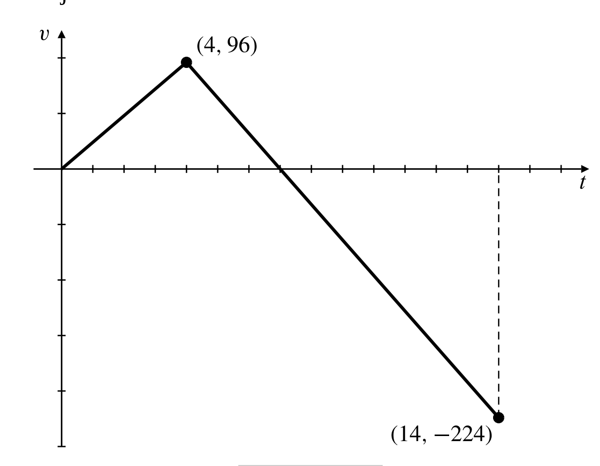


Figura 2.40

16. ¿Cuál era la aceleración del cohete hasta que se gastó el combustible?

17. ¿Cuánto tiempo ha estado ascendiendo el cohete?

*18. ¿Cuál es la máxima altura sobre el suelo alcanzada por el cohete?

*19. ¿Qué altura tenía la torre desde la que se lanzó el cohete?

20. Realice de nuevo el Ejemplo 6 con una deceleración constante $s''(t) = -t$ m/s^2.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes frases?**
  - ◇ La recta L es tangente a la curva C en el punto P.
  - ◇ El cociente de Newton de $f(x)$ en $x = a$.
  - ◇ La derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$.
  - ◇ f es diferenciable en $x = a$.
  - ◇ La pendiente de la gráfica $y = f(x)$ en $x = a$.
  - ◇ f es creciente (o decreciente) en el intervalo I.

◇ f es no creciente (o no decreciente) en el intervalo I.
◇ La velocidad (tasa) media de cambio de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.
◇ La velocidad (tasa) de cambio de $f(x)$ en $x = a$.
◇ c es un punto crítico de $f(x)$.
◇ La segunda derivada de $f(x)$ en $x = a$.
◇ Una primitiva de f en un intervalo I.
◇ La integral indefinida de f en el intervalo I.
◇ Ecuación diferencial.
◇ Problema de valor inicial.
◇ Velocidad.
◇ Módulo de la velocidad.
◇ Aceleración.

- **Enuncie las siguientes reglas de diferenciación:**

◇ Regla de diferenciación de la suma de funciones.
◇ Regla de diferenciación del producto de una función por una constante.
◇ Regla del Producto.
◇ Regla de la Inversa.
◇ Regla del Cociente.
◇ Regla de la Cadena.

- **Enuncie el Teorema del Valor Medio.**
- **Enuncie el Teorema del Valor Medio Generalizado.**
- **Enuncie las derivadas de las siguientes funciones:**

◇ x ◇ x^2 ◇ $1/x$ ◇ $\sqrt{x}$
◇ x^n ◇ $|x|$ ◇ $\operatorname{sen} x$ ◇ $\cos x$
◇ $\tan x$ ◇ $\cot x$ ◇ $\sec x$ ◇ $\csc x$

- **¿Qué es una demostración por inducción matemática?**

Ejercicios de repaso

Utilice la definición de derivada para calcular las derivadas de los Ejercicios 1-4.

1. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = (3x + 1)^2$ **2.** $\dfrac{d}{dx}\sqrt{1 - x^2}$

3. $f'(2)$ si $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ **4.** $g'(9)$ si $g(t) = \dfrac{t - 5}{1 + \sqrt{t}}$

5. Calcule la tangente a $y = \cos(\pi x)$ en $x = 1/6$.

6. Calcule la tangente a $y = \tan(x/4)$ en $x = \pi$.

Calcule las derivadas de las funciones de los Ejercicios 7-12.

7. $\dfrac{1}{x - \operatorname{sen} x}$ **8.** $\dfrac{1 + x + x^2 + x^3}{x^4}$

9. $(4 - x^{2/5})^{-5/2}$ **10.** $\sqrt{2 + \cos^2 x}$

11. $\tan\theta - \theta\sec^2\theta$ **12.** $\dfrac{\sqrt{1 + t^2} - 1}{\sqrt{1 + t^2} + 1}$

Calcule los límites de los Ejercicios 13-16 interpretándolos como derivadas.

13. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x + h)^{20} - x^{20}}{h}$ **14.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x - 2}$

15. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\cos(2x) - (1/2)}{x - \pi/6}$ **16.** $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{(1/x^2) - (1/a^2)}{x + a}$

En los Ejercicios 17-24, exprese las derivadas de las funciones dadas en función de las derivadas f' y g' de las funciones diferenciables f y g.

17. $f(3 - x^2)$ **18.** $[f(\sqrt{x})]^2$

19. $f(2x)\sqrt{g(x/2)}$ **20.** $\dfrac{f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)}$

21. $f(x + (g(x))^2)$ **22.** $f\left(\dfrac{g(x^2)}{x}\right)$

23. $f(\operatorname{sen} x)\,g(\cos x)$ **24.** $\sqrt{\dfrac{\cos f(x)}{\operatorname{sen} g(x)}}$

25. Calcule la tangente a la curva $x^3y + 2xy^3 = 12$ en el punto $(2, 1)$.

26. Calcule la pendiente de la curva $3\sqrt{2x}\operatorname{sen}(\pi y) + 8y\cos(\pi x) = 2$ en el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$.

Calcule las integrales indefinidas en los Ejercicios 27-30.

27. $\displaystyle\int\frac{1 + x^4}{x^2}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int\frac{1 + x}{\sqrt{x}}\,dx$

29. $\displaystyle\int\frac{2 + 3\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int(2x + 1)^4\,dx$

31. Calcule $f(x)$ siendo $f'(x) = 12x^2 + 12x^3$ y $f(1) = 0$.

32. Calcule $g(x)$ si $g'(x) = \operatorname{sen}(x/3) + \cos(x/6)$ y la gráfica de g pasa por el punto $(\pi, 2)$.

33. Diferencie $x\operatorname{sen} x + \cos x$ y $x\cos x - \operatorname{sen} x$. Utilice los resultados para calcular las integrales indefinidas

$$I_1 = \int x\cos x\,dx \quad \text{y} \quad I_2 = \int x\operatorname{sen} x\,dx$$

34. Suponga que $f'(x) = f(x)$ para todo x, y sea $g(x) = xf(x)$. Calcule algunas derivadas sucesivas de g

y plantee una fórmula para la derivada n-ésima $g^{(n)}(x)$. Verifique su fórmula por inducción.

35. Calcule la ecuación de la recta que pasa por el origen y es tangente a la curva $y = x^3 + 2$.

36. Calcule las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (0, 1) y son tangentes a la curva $y = \sqrt{2 + x^2}$.

37. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}$$

$(\operatorname{sen}^n x \operatorname{sen}(nx)) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen}((n+1)x)$. ¿En qué puntos x de $[0, \pi]$ tiene tangente horizontal la gráfica de $y = \operatorname{sen}^n x \operatorname{sen}(nx)$. Suponga que $n \geqslant 2$.

38. Obtenga fórmulas de diferenciación de $y = \operatorname{sen}^n x \cos(nx)$, $y = \cos^n x \operatorname{sen}(nx)$ y $y = \cos^n x \cos(nx)$, análogas a la dada en el Ejercicio 37 para $y = \operatorname{sen}^n x \operatorname{sen}(nx)$.

39. Sea Q el punto (0, 1). Calcule todos los puntos P de la curva $y = x^2$ en los que la recta PQ es normal a $y = x^2$ en P. ¿Cuál es la mínima distancia de Q a la curva $y = x^2$?

40. (Beneficio medio y marginal) La Figura 2.41 muestra la gráfica del beneficio $P(x)$ obtenido por un exportador de grano por la venta de x toneladas de trigo. Por tanto, el beneficio medio por tonelada es de $P(x)/x$. Demuestre que el beneficio medio máximo se produce cuando el beneficio medio se hace igual al beneficio marginal. ¿Cuál es el significado geométrico de este hecho en la figura?

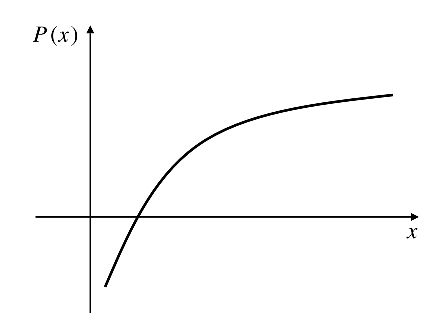


Figura 2.41

41. (Atracción gravitatoria) La atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre una masa m a una distancia r de su centro es una función continua $F(r)$, definida para $r \geqslant 0$ como

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{mgR^2}{r^2} & \text{si} \quad r \geqslant R \\ mkr & \text{si} \quad 0 \leqslant r < R \end{cases}$$

siendo R el radio de la Tierra y g la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Tierra.

(a) Calcule la constante k en función de g y R.

(b) F disminuye a medida que m se aleja de la superficie de la Tierra. Demuestre que F disminuye a medida que r incrementa respecto a R con el doble de velocidad con la que F decrece a medida que r decrece con respecto a R.

42. (Compresibilidad de un gas) La compresibilidad isotérmica de un gas es la velocidad relativa de cambio en el volumen V con respecto a la presión P a una temperatura constante T. Es decir, $(1/V)\,dV/dP$. Dada una muestra de un gas ideal, su temperatura, presión y volumen cumplen la ecuación $PV = kT$, siendo k una constante relacionada con el número de moléculas de gas presentes en la muestra. Demuestre que la compresibilidad isotérmica de un gas es el inverso cambiado de signo de la presión.

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} = -\frac{1}{P}$$

43. Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s desde la azotea de un edificio. Una segunda pelota se lanza hacia arriba con una velocidad nicial de 20 m/s desde el suelo. Ambas pelotas alcanzan la misma altura máxima desde el suelo. ¿Qué altura tiene el edificio?

44. Una pelota se deja caer desde la cima de una torre alta en el mismo momento que una segunda pelota se lanza hacia arriba desde la base de la torre. Las pelotas chocan a una altura de 30 metros desde el suelo. ¿Con qué velocidad inicial se lanzó la segunda pelota? ¿Con qué velocidad se mueve cada pelota en el momento en que chocan?

45. (Distancia de frenada) Los frenos de un coche pueden disminuir su velocidad en 20 pies/s^2. ¿A qué velocidad puede viajar el coche si debe poder frenar en una distancia de 160 pies?

46. (Medida de variaciones en *g*) El periodo P de un péndulo de longitud L se expresa como $P = 2\pi\sqrt{L/g}$, siendo g la aceleración de la gravedad.

(a) Suponiendo que L es fijo, demuestre que un 1% de incremento en g produce una disminución de aproximadamente el 12% del periodo P (las variaciones en el periodo de un péndulo se pueden utilizar para detectar pequeñas variaciones de g a lo largo de la superficie de la Tierra).

(b) Para g fija, ¿qué porcentaje de cambio en L producirá un 1% de incremento en P?

Problemas avanzados

1. René Descartes, el inventor de la geometría analítica, calculó la tangente a una parábola (o a una circunferencia o a otra curva cuadrática) en un punto dado (x_0, y_0) de la curva buscando la recta que pasa por

(x_0, y_0) que sólo tiene una intersección con la curva. Ilustre el método escribiendo la ecuación de una recta que pasa por el punto (a, a^2) con pendiente arbitraria m, y calculando después el valor de m para el que la recta sólo tiene un punto de intersección con la parábola $y = x^2$. ¿Por qué no funciona este método con curvas más generales?

2. Sabiendo que $f'(x) = 1/x$ y $f(2) = 9$, calcule:

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x^2+5) - f(9)}{x-2}$ (b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{f(x)} - 3}{x-2}$

3. Suponga que $f'(4) = 3$, $g'(4) = 7$, $g(4) = 4$ y $g(x) \neq 4$ para $x \neq 4$. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 4} (f(x) - f(4))$ (b) $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x^2 - 16}$

(c) $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{\sqrt{x} - 2}$ (d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{(1/x) - (1/4)}$

(e) $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{g(x) - 4}$ (f) $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(g(x)) - f(4)}{x - 4}$

4. Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x = 1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \ldots \\ x^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$

(a) Calcule todos los puntos para los que f es continua. En particular, ¿es continua en $x = 0$?

(b) ¿Es verdadera o falsa la siguiente afirmación? Justifique su respuesta. Para toda pareja de números reales a y b existe un valor x entre a y b tal que $f(x) = (f(a) + f(b))/2$.

(c) Calcule todos los puntos en los que f es diferenciable. En particular, ¿es diferenciable en $x = 0$?

5. Suponga que $f(0) = 0$ y $|f(x)| > \sqrt{|x|}$ para todo x. Demuestre que no existe $f'(0)$.

6. Suponga que f es una función que cumple las siguientes condiciones: $f'(0) = k$, $f(0) \neq 0$ y $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todo x e y. Demuestre que $f(0) = 1$ y que $f'(x) = kf(x)$ para todo x (en el Capítulo 3 estudiaremos funciones con estas propiedades).

7. Suponga que la función g cumple las condiciones $g'(0) = k$ y $g(x + y) = g(x) + g(y)$ para todo x e y. Demuestre que:

(a) $g(0) = 0$, (b) $g'(x) = k$ para todo x, y

(c) $g(x) = kx$ para todo x. *Sugerencia*: Haga $h(x) = g(x) - g'(0)x$.

8. (a) Si f es diferenciable en x, demuestre que

(i) $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x)$

(ii) $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$

(b) Demuestre que la existencia del límite en (i) garantiza que f es diferenciable en x.

(c) Demuestre que la existencia del límite en (ii) *no* garantiza que f sea diferenciable en x. *Sugerencia*: Considere la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

9. Demuestre que existe una recta que pasa por $(a, 0)$ y que es tangente a la curva $y = x^3$ en $x = 3a/2$. Si $a \neq 0$, ¿existe otra recta que pase por $(a, 0)$ que sea tangente a la curva? Si (x_0, y_0) es un punto arbitrario, ¿cuál es el máximo número de rectas que pasan por (x_0, y_0) y son tangentes a $y = x^3$? ¿Y el número mínimo?

10. Realice un gráfico que demuestre que existen dos rectas, cada una de ellas tangente a las parábolas $y = x^2 + 4x + 1$ y $y = -x^2 + 4x - 1$. Calcule las ecuaciones de las dos rectas.

11. Demuestre que si $b > 1/2$, existen tres rectas que pasan por $(0, b)$, que son normales a la curva $y = x^2$. ¿Cuántas rectas hay si $b = 1/2$? ¿Y si $b < 1/2$?

12. **(Distancia de un punto a una curva)** Calcule el punto de la curva $y = x^2$ más cercano al punto $(3, 0)$. *Sugerencia*: La recta desde el punto $(3, 0)$ al punto más cercano Q en la parábola es normal a la parábola en Q.

***13.** **(Envolvente de una familia de rectas)** Demuestre que para cada valor del parámetro m, la recta $y = mx - (m^2/4)$ es tangente a la parábola $y = x^2$ (la parábola se denomina *envolvente* de la familia de rectas $y = mx - (m^2/4)$). Calcule $f(m)$ de forma que la familia de rectas $y = mx + f(m)$ tenga como envolvente la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$.

***14.** **(Tangentes comunes)** Considere las dos parábolas de ecuaciones $y = x^2$ y $y = Ax^2 + Bx + C$. Se supone que $A \neq 0$ y que si $A = 1$ entonces $B \neq 0$ y $C \neq 0$, de forma que las dos ecuaciones representan parábolas diferentes. Demuestre que:

(a) Las dos parábolas son tangentes entre sí si $B^2 = 4C(A - 1)$.

(b) Las dos parábolas tienen rectas tangentes comunes si y sólo si $A \neq 1$ y $A(B^2 - 4C(A - 1)) > 0$.

(c) Las parábolas tienen exactamente una tangente común si se cumple que $A = 1$ y $B \neq 0$, o $A \neq 1$ y $B^2 = 4C(A - 1)$.

(d) Las parábolas no tienen tangentes comunes si $A = 1$ y $B = 0$, o $A \neq 1$ y $A(B^2 - 4C(A - 1)) < 0$.

Realice algunas ilustraciones de las posibilidades anteriores.

15. Sea C la gráfica de $y = x^3$.

(a) Demuestre que si $a \neq 0$ entonces la tangente a C en $x = a$ corta también a C en un segundo punto $x = b$.

(b) Demuestre que la pendiente de C en $x = b$ es cuatro veces la pendiente en $x = a$.

(c) ¿Puede ser una recta tangente a C en más de un punto?

(d) ¿Puede ser una recta tangente a la gráfica de $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ en más de un punto?

***16.** Sea C la gráfica de $y = x^4 - 2x^2$.

(a) Calcule todas las rectas horizontales que son tangentes a C.

(b) Una de las rectas obtenidas en (a) es tangente a C en dos puntos diferentes. Demuestre que no existen más rectas con esta propiedad.

(c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^4 - 2x^2 + x$ en dos puntos diferentes. ¿Existen más rectas con esa propiedad? ¿Por qué?

17. **(Tangentes dobles)** Una recta tangente a la cuártica (polinomio de cuarto grado) $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ en $x = p$ debe cortar a C en cero, uno o dos puntos. Si corta a C únicamente en sólo algún otro punto $x = q$, debe ser tangente a C en ese punto y, por tanto, es una «doble tangente».

(a) Calcule la condición que deben satisfacer los coeficientes del polinomio de cuarto grado para asegurar que existe esa doble tangente, y demuestre que no puede haber más dobles tangentes. Ilustre su resultado aplicándolo a $y = x^4 - 2x^2 + x - 1$.

(b) Si la recta PQ es tangente a C en dos puntos diferentes $x = p$ y $x = q$, demuestre que PQ es paralela a la recta tangente a C en $x = (p + q)/2$.

(c) Si la recta PQ es tangente a C en dos puntos diferentes $x = p$ y $x = q$, demuestre que C tiene dos puntos de inflexión diferentes R y S y que RS es paralela a PQ.

18. Verifique las siguientes fórmulas para cualquier entero positivo n:

(a) $\dfrac{d^n}{dx^n}\cos(ax) = a^n \cos\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(b) $\dfrac{d^n}{dx^n}\operatorname{sen}(ax) = a^n \operatorname{sen}\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(c) $\dfrac{d^n}{dx^n}(\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x) = 4^{n-1}\cos\left(4x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

19. **(Cohete con paracaídas)** Se dispara un cohete desde lo alto de una torre en el instante $t = 0$. Experimenta una aceleración constante ascendente hasta que se consume el combustible. A partir de ese momento su aceleración es la aceleración descendente de la gravedad hasta que, durante su caída, despliega un paracaídas que produce una aceleración ascendente para ralentizar la caída. El cohete toca tierra cerca de la base de la torre. La Figura 2.42 muestra la velocidad ascendente (en metros por segundo) en función del tiempo. Utilizando la información de la figura, conteste a las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuánto duró el combustible?

(b) ¿Cuál fue la altura máxima del cohete?

(c) ¿Cuándo se desplegó el paracaídas?

(d) ¿Cuál era la aceleración ascendente del cohete cuando funcionaba el motor?

(e) ¿Qué altura máxima alcanzó el cohete?

(f) ¿Qué altura tenía la torre desde la que se lanzó el cohete?

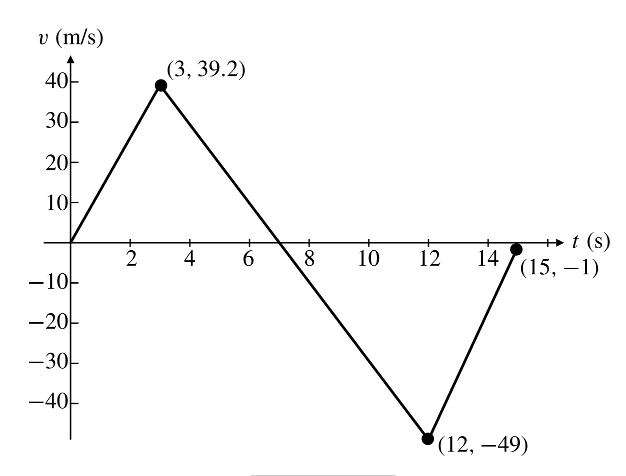


Figura 2.42



CAPÍTULO 3

Funciones trascendentes

Es bien sabido que el problema central de toda la matemática moderna es el estudio de las funciones trascendentes definidas por ecuaciones diferenciales.

Felix Klein (1849-1925)
Lectures on Mathematics (1911)

Introducción Con excepción de las funciones trigonométricas, todas las funciones que hemos encontrado hasta ahora han sido de tres tipos principales: *polinomios*, *funciones racionales* (cocientes de polinomios) y *funciones algebraicas* (potencias fraccionarias de funciones racionales). En un intervalo de su dominio todas las funciones anteriores se pueden construir a partir de números reales y una sola variable real x, utilizando un número finito de operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) y tomando raíces finitas (potencias fraccionarias). Las funciones que no se pueden construir de esta forma se denominan **funciones trascendentes**. Los únicos ejemplos de funciones de ese tipo que hemos visto hasta ahora son las funciones trigonométricas.

Una buena parte de la importancia del cálculo y de sus aplicaciones más útiles surge de la posibilidad de explicar el comportamiento de las funciones trascendentes que aparecen de forma natural al intentar modelar problemas concretos en términos matemáticos. Este capítulo está dedicado a desarrollar otras funciones trascendentes, entre las que se encuentran las funciones exponencial y logarítmica y las funciones trigonométricas inversas.

Algunas de estas funciones «deshacen» lo que otras «hacen» y viceversa. Cuando una pareja de funciones se comporta de esta forma, se denominan inversas entre sí. Comenzaremos el capítulo estudiando las funciones inversas en general.

3.1 Funciones inversas

Considere la función

$$f(x) = x^3$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 3.1. Como cualquier función, $f(x)$ toma sólo un valor para cada x de su dominio (la recta real completa $\mathbb{R}$). En términos geométricos, cualquier recta *vertical* cruza la gráfica de f en un único punto. Sin embargo, para esta función f, cualquier recta *horizontal* cruza también la gráfica en un único punto. Esto significa que diferentes valores de x siempre producen diferentes valores de $f(x)$. Esta función se denomina *uno a uno*.

DEFINICIÓN 1

Se dice que una función f es **uno a uno** si $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que x_1 y x_2 pertenezcan al dominio de f y $x_1 \neq x_2$ o, de forma equivalente, si

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Si una función definida en un único intervalo es creciente (o decreciente), entonces es uno a uno (*véase* la Sección 2.6 para más detalles).

Sea la función $f(x) = x^3$ (Figura 3.1). Como la ecuación

$$y = x^3$$

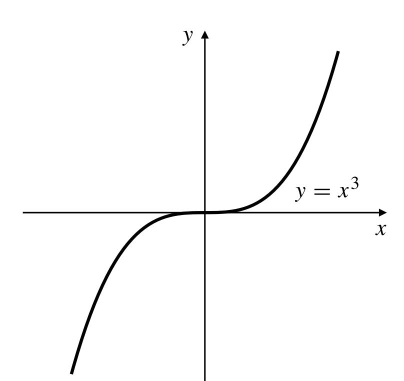


Figura 3.1 La gráfica de $f(x) = x^3$.

tiene una solución única x para todo valor dado y perteneciente al rango de f, f es uno a uno. Concretamente, esta solución se expresa como

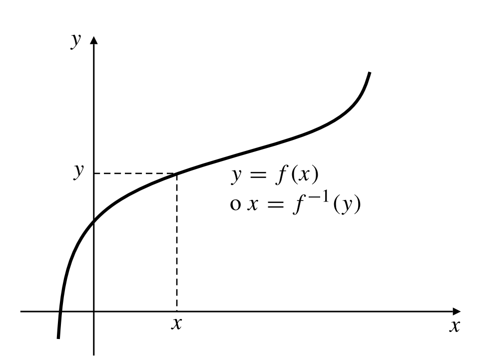
$$x = y^{1/3}$$

y define x como función de y. Denominaremos a esta nueva función *inversa de* f y la indicaremos como f^{-1}. Es decir,

$$f^{-1}(y) = y^{1/3}$$

En general, si una función f es uno a uno, entonces para cualquier número y de su rango existirá siempre un único número x de su dominio tal que $y = f(x)$. Como x está determinado de forma única por y, es a su vez una función de y. Escribiremos $x = f^{-1}(y)$ y denominaremos f^{-1} a la inversa de f. La función f cuya gráfica se muestra en la Figura 3.2(a) es uno a uno y tiene inversa. La función g cuya gráfica se muestra la Figura 3.2(b) no es uno a uno y no tiene inversa.

No hay que confundir el -1 de f^{-1} con un exponente. La función inversa f^{-1} *no* es el inverso $1/f$. Si deseamos indicar el inverso $1/f(x)$ con un exponente se puede escribir como $(f(x))^{-1}$.



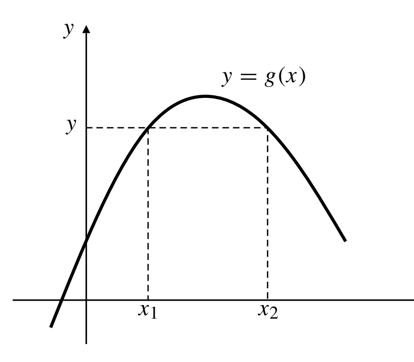


Figura 3.2 (a) f es uno a uno y tiene inversa. $y = f(x)$ significa lo mismo que $x = f^{-1}(y)$. (b) g no es uno a uno.

En general es preferible escribir las funciones denominando x en vez de y a la variable del dominio. Por tanto, invertiremos los papeles de x e y, y replantearemos la definición anterior como sigue.

DEFINICIÓN 2

Si f es uno a uno, entonces tiene **función inversa** f^{-1}. El valor de $f^{-1}(x)$ es el único número y del dominio de f para el que $f(y) = x$. Por tanto,

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

Como se ha visto antes, $y = x^3$ es equivalente a $x = y^{1/3}$ o, invirtiendo los papeles de x e y,

$$y = x^{1/3} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^3$$

Ejemplo 1 Demuestre que $f(x) = 2x - 1$ es uno a uno y calcule su inversa $f^{-1}(x)$.

Solución Como $f'(x) = 2 > 0$ en $\mathbb{R}$, f es creciente y, por tanto, uno a uno. Sea $y = f^{-1}(x)$. Entonces,

$$x = f(y) = 2y - 1$$

Despejando y en esta ecuación se obtiene $y = \dfrac{x+1}{2}$. Por tanto, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

■

Hay varias cosas que hay que recordar sobre la relación entre una función f y su inversa f^{-1}. La más importante es que las dos ecuaciones

$$y = f^{-1}(x) \qquad \text{y} \qquad x = f(y)$$

son *lo mismo*. Son equivalentes de la misma forma que, por ejemplo, $y = x + 1$ y $x = y - 1$. Cualquiera de las ecuaciones se puede sustituir por la otra. Esto implica que el dominio de f^{-1} es el rango de f y viceversa.

La inversa de una función uno a uno es a su vez uno a uno y por tanto tiene también inversa. Por supuesto, la inversa de f^{-1} es f:

$$y = (f^{-1})^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)$$

Se puede sustituir cualquiera de las ecuaciones $y = f^{-1}(x)$ o $x = f(y)$ en la otra y se obtienen las **identidades de cancelación**:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \qquad f^{-1}(f(y)) = y$$

La primera de estas identidades es válida para todo x perteneciente al dominio de f^{-1} y la segunda para todo y perteneciente al dominio de f. Si S representa cualquier conjunto de números reales e I_S es la **función identidad** sobre S, definida como

$$I_S(x) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } S$$

entonces las identidades de cancelación indican que si $\mathcal{D}(f)$ es el dominio de f, entonces

$$f \circ f^{-1} = I_{\mathcal{D}(f^{-1})} \qquad \text{y} \qquad f^{-1} \circ f = I_{\mathcal{D}(f)}$$

siendo $f \circ g(x)$ la composición $f(g(x))$.

Si las coordenadas de un punto $P = (a, b)$ se cambian de orden para formar las de un nuevo punto $Q = (b, a)$, entonces cada punto corresponde a la reflexión del otro respecto a la recta $x = y$ (para ver esto, nótese que la recta PQ tiene pendiente -1, y por tanto es perpendicular a $y = x$. Además, el punto medio de PQ es $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2}\right)$, que está en $y = x$). Se deduce, por tanto, que las gráficas de las ecuaciones $x = f(y)$ y $y = f(x)$ son reflexiones especulares con respecto a la recta $x = y$. Como la ecuación $x = f(y)$ es equivalente a $y = f^{-1}(x)$, las gráficas de las funciones f^{-1} y f son reflexiones especulares una de otra (*véase* la Figura 3.3).

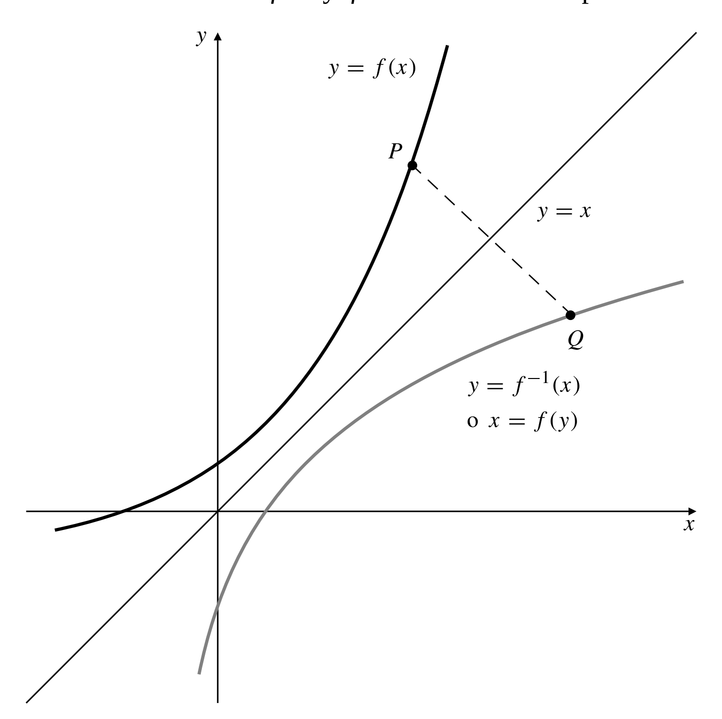


Figura 3.3 La gráfica de $y = f^{-1}(x)$ es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ con respecto a la recta $y = x$.

Presentamos a continuación un resumen de las propiedades de las funciones inversas:

Propiedades de las funciones inversas

1. $y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y)$.
2. El dominio de f^{-1} es el rango de f.
3. El rango de f^{-1} es el dominio de f.
4. $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x perteneciente al dominio de f.
5. $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo x perteneciente al dominio de f^{-1}.
6. $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ para todo x perteneciente al dominio de f.
7. La gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f con respecto a la recta $x = y$.

Ejemplo 2 Demuestre que $g(x) = \sqrt{2x+1}$ es invertible, y calcule su inversa.

Solución Si $g(x_1) = g(x_2)$, entonces $\sqrt{2x_1+1} = \sqrt{2x_2+1}$. Elevando al cuadrado los dos miembros se obtiene $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$, que implica que $x_1 = x_2$. Por tanto, g es uno a uno e invertible. Sea $y = g^{-1}(x)$; entonces

$$x = g(y) = \sqrt{2y+1}$$

de donde se deduce que $x \geqslant 0$ y $x^2 = 2y + 1$. Por tanto, $y = \dfrac{x^2-1}{2}$ y

$$g^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2} \qquad \text{para } x \geqslant 0$$

(La restricción $x \geqslant 0$ se aplica, ya que el rango de g es $[0, \infty)$). *Véase* la Figura 3.4(a) que muestra las gráficas de g y de g^{-1}.

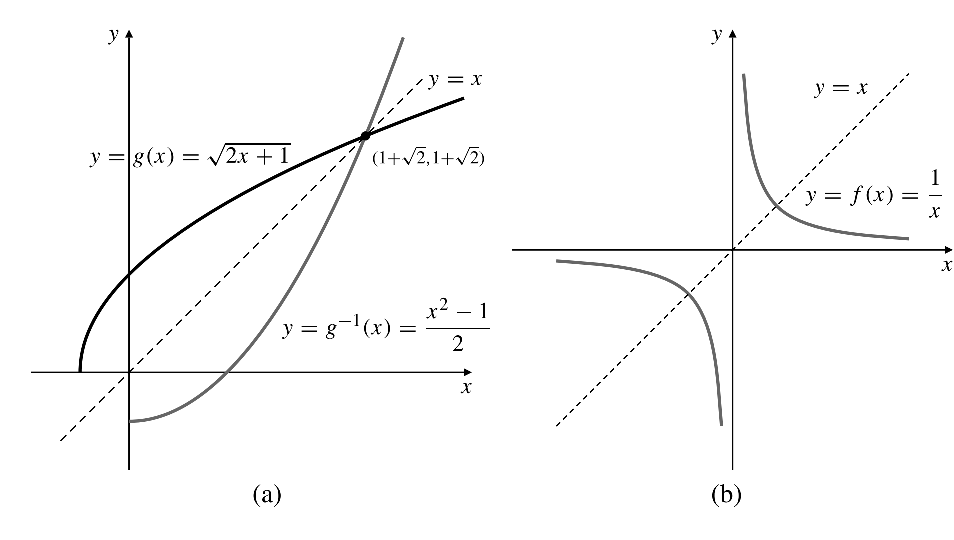


Figura 3.4 (a) Gráfica de $g(x) = \sqrt{2x+1}$ y de su inversa.
(b) Gráfica de la función $f(x) = 1/x$, que es autoinversa.

DEFINICIÓN 3

Una función f es **autoinversa** si $f^{-1} = f$, es decir, si $f(f(x)) = x$ para todo x perteneciente al dominio de f.

Ejemplo 3 La función $f(x) = 1/x$ es autoinversa. Si $y = f^{-1}(x)$, entonces $x = f(y) = 1/y$. Por tanto, $y = 1/x$, y $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} = f(x)$ (*véase* la Figura 3.4(b)). La gráfica de cualquier función autoinversa debe ser su propio reflejo respecto a la recta $x = y$ y, por tanto, debe ser simétrica respecto a dicha recta.

Inversión de funciones que no son uno a uno

Muchas funciones importantes, como las funciones trigonométricas, no son uno a uno en todo su dominio. Es todavía posible definir la inversa para tales funciones, pero hay que restringir el dominio artificialmente de forma que la función con el dominio restringido sea uno a uno.

Consideremos como ejemplo la función $f(x) = x^2$. Sin restricciones, su dominio es toda la recta real y, por tanto, no es uno a uno ya que $f(-a) = f(a)$ para todo a. Definamos una nueva

función $F(x)$ igual a $f(x)$ pero con un dominio menor, de forma que sea uno a uno. Podemos utilizar como dominio de F el intervalo $[0, \infty)$:

$$F(x) = x^2 \qquad \text{para} \quad 0 \leqslant x < \infty$$

La Figura 3.5 muestra la gráfica de F. Es la mitad derecha de la parábola $y = x^2$, que es la gráfica de f. Evidentemente, F es uno a uno, por lo que tiene función inversa F^{-1} que se calcula como sigue:

Sea $y = F^{-1}(x)$, entonces $x = F(y) = y^2$ e $y \geqslant 0$. Por tanto, $y = \sqrt{x}$. De aquí $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Esta forma de restringir el dominio de una función que no es uno a uno para hacerla invertible se utilizará cuando invirtamos funciones trigonométricas en la Sección 3.5.

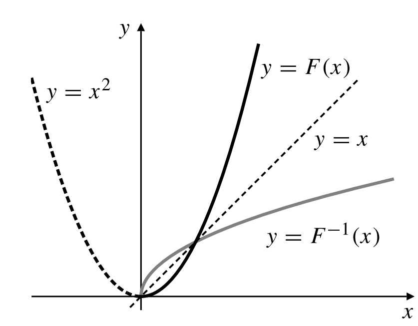


Figura 3.5 Restricción de F de x^2 a $[0, \infty)$ y su inversa F^{-1}.

Derivadas de funciones inversas

Supongamos que la función f es diferenciable en un intervalo (a, b) y que, o bien $f'(x) > 0$ para $a < x < b$, de forma que f es creciente en (a, b), o bien $f'(x) < 0$ para $a < x < b$, de forma que f es decreciente en (a, b). En ambos casos f es uno a uno en (a, b) y tiene inversa f^{-1}, definida como

$$y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y), \qquad (a < y < b)$$

Como estamos suponiendo que la gráfica $y = f(x)$ tiene una tangente *no horizontal* en algún punto x en (a, b), su reflexión, que es la gráfica $y = f^{-1}(x)$, tiene una tangente *no vertical* en algún punto x del intervalo comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. Por tanto, f^{-1} es diferenciable en esos valores de x (Figura 3.6).

Sea $y = f^{-1}(x)$. Se desea obtener dy/dx. Se resuelve la ecuación $y = f^{-1}(x)$ en la forma $x = f(y)$ y se diferencia implícitamente con respecto a x, de modo que se obtiene

$$1 = f'(y)\,\frac{dy}{dx}, \qquad \text{por tanto,} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Por tanto, la pendiente de la gráfica de f^{-1} en (x, y) es la inversa de la pendiente de la gráfica de f en (y, x) (Figura 3.6) y

$$\frac{d}{dx}\, f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Con la notación de Leibniz se expresa como $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_x = \dfrac{1}{\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y = f^{-1}(x)}}$.

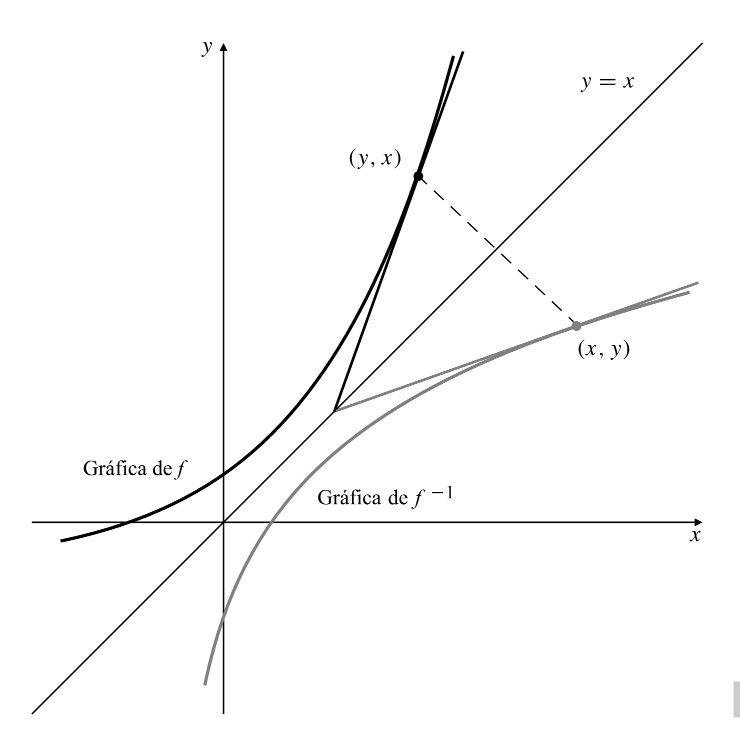


Figura 3.6 Tangentes de las gráficas de f y de f^{-1}.

Ejemplo 4 Demuestre que $f(x) = x^3 + x$ es uno a uno en toda la recta real, y, teniendo en cuenta que $f(2) = 10$, calcule $(f^{-1})'(10)$.

Solución Como $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ para todos los números reales x, f es creciente y, por tanto, uno a uno e invertible. Si $y = f^{-1}(x)$ entonces

$$x = f(y) = y^3 + y \quad \Rightarrow \quad 1 = (3y^2 + 1)y'$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{3y^2 + 1}$$

Como $x = f(2) = 10$, esto implica que $y = f^{-1}(10) = 2$. Por tanto,

$$(f^{-1})'(10) = \left.\frac{1}{3y^2 + 1}\right|_{y=2} = \frac{1}{13}$$

■

Ejercicios 3.1

Demuestre que las funciones f de los Ejercicios 1-12 son uno a uno, y calcule las funciones inversas f^{-1}. Especifique los dominios y los rangos de f y de f^{-1}.

1. $f(x) = x - 1$

2. $f(x) = 2x - 1$

3. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

4. $f(x) = -\sqrt{x - 1}$

5. $f(x) = x^3$

6. $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

7. $f(x) = x^2, \quad x \leqslant 0$

8. $f(x) = (1 - 2x)^3$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

10. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$

11. $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{1 + x}$

12. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

En los Ejercicios 13-20, f es una función uno a uno cuya inversa es f^{-1}. Calcule las inversas de las funciones dadas en función de f^{-1}.

13. $g(x) = f(x) - 2$

14. $h(x) = f(2x)$

15. $k(x) = -3f(x)$

16. $m(x) = f(x - 2)$

17. $p(x) = \dfrac{1}{1 + f(x)}$

18. $q(x) = \dfrac{f(x) - 3}{2}$

19. $r(x) = 1 - 2f(3 - 4x)$

20. $s(x) = \dfrac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$

En los Ejercicios 21-23, demuestre en las funciones dadas son uno a uno y calcule sus inversas.

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

22. $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^{1/3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

23. $h(x) = x|x| + 1$

24. Calcule $f^{-1}(2)$ si $f(x) = x^3 + x$.

25. Calcule $g^{-1}(1)$ si $g(x) = x^3 + x - 9$.

26. Calcule $h^{-1}(-3)$ si $h(x) = x|x| + 1$.

27. Suponga que la función $f(x)$ cumple $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ y que f es uno a uno. Si $y = f^{-1}(x)$, demuestre que $dy/dx = y$.

28. Calcule $(f^{-1})'(x)$ si $f(x) = 1 + 2x^3$.

29. Demuestre que $f(x) = \dfrac{4x^3}{x^2 + 1}$ tiene inversa y calcule $(f^{-1})'(2)$.

∗**30.** Calcule $(f^{-1})'(-2)$ si $f(x) = x\sqrt{3 + x^2}$.

31. Si $f(x) = x^2/(1 + \sqrt{x})$, calcule, $f^{-1}(2)$ con una exactitud de cinco cifras decimales.

32. Si $g(x) = 2x + \operatorname{sen} x$, demuestre que g es invertible, y calcule $g^{-1}(2)$ y $(g^{-1})'(2)$ con una exactitud de cinco cifras decimales.

33. Demuestre que $f(x) = x \sec x$ es uno a uno en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. ¿Cuál es el dominio de $f^{-1}(x)$? Calcule $(f^{-1})'(0)$.

34. Si f y g tienen respectivamente como inversas f^{-1} y g^{-1}, demuestre que la inversa de la función compuesta $f \circ g$ es $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

∗**35.** ¿Para qué valores de las constantes a, b y c es autoinversa la función $f(x) = (x - a)/(bx - c)$?

∗**36.** ¿Puede ser autoinversa una función par? ¿Y una función impar?

∗**37.** En esta sección se ha dicho que una función creciente (o decreciente) definida en un único intervalo es necesariamente uno a uno. ¿Es necesariamente cierta la afirmación inversa? Explique por qué.

∗**38.** Repita el Ejercicio 37 con la suposición añadida de que f es continua en el intervalo donde está definida.

3.2 Las funciones exponencial y logarítmica

Comenzaremos considerando las funciones exponencial y logarítmica, que seguramente ya habremos encontrado en nuestros estudios anteriores de matemáticas. En las secciones que siguen presentaremos estas funciones desde diferentes puntos de vista y aprenderemos a calcular sus derivadas.

Exponenciales

Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde la **base** a es una constante positiva y el **exponente** x es la variable. No hay que confundir estas funciones con las funciones **potenciales** como $f(x) = x^a$, en las que la base es variable y el exponente es constante. La función exponencial a^x se puede definir para exponentes x enteros y racionales, de la siguiente forma:

DEFINICIÓN 4 Funciones exponenciales

Si $a > 0$, entonces

$$a^0 = 1$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}} \qquad \text{si } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{si } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{si } n = 1, 2, 3, \ldots \text{ y } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

En esta definición, $\sqrt[n]{a}$ es el número $b > 0$ que cumple que $b^n = a$.

¿Cómo se puede definir a^x cuando x no es racional? Por ejemplo, ¿qué significa 2^{π}? Para calcular la derivada de a^x es necesario que la función esté definida para todos los números reales x, no sólo para los números racionales.

En la Figura 3.7 se muestran puntos con coordenadas $(x, 2^x)$ para muchos valores racionales de x muy cerca unos de otros. Parecen estar en una curva suave. La definición de a^x se puede extender a valores x no racionales de forma que a^x sea una función diferenciable de x en toda la recta real. Lo haremos en la sección siguiente. Por el momento, si x es irracional podemos pensar en a^x como el límite de los valores a^r para un conjunto de números racionales r que se aproximan a x:

$$a^x = \lim_{\substack{r \to x \\ r \text{ racional}}} a^r$$

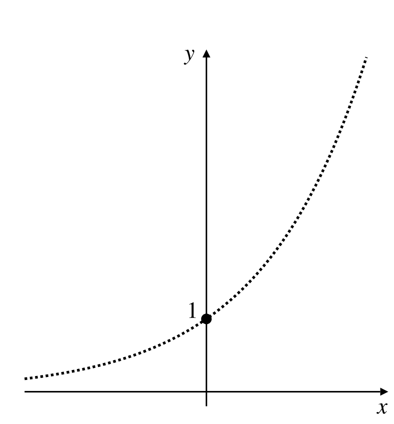


Figura 3.7 $y = 2^x$ para x racional.

Ejemplo 1 Como el número irracional $\pi = 3.141\,592\,653\,59\ldots$ es el límite de la secuencia de números racionales

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 3.1, \quad r_3 = 3.14, \quad r_4 = 3.141, \quad r_5 = 3.1415, \quad \ldots,$$

se puede calcular 2^{π} como el límite de la correspondiente secuencia

$$2^3 = 8, \quad 2^{3.1} = 8.574\,1877\ldots, \quad 2^{3.14} = 8.815\,249\,9\ldots$$

Se obtiene $2^{\pi} = \lim_{n \to \infty} 2^{r_n} = 8.824\,977\,827\ldots$

Las funciones exponenciales cumplen varias identidades denominadas *leyes de los exponentes*:

Leyes de los exponentes

Sean $a > 0$ y $b > 0$, y x e y dos números reales cualesquiera; entonces,

(i) $a^0 = 1$ (ii) $a^{x+y} = a^x a^y$

(iii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ (iv) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

(v) $(a^x)^y = a^{xy}$ (vi) $(ab)^x = a^x b^x$

Estas identidades se pueden demostrar para el caso de exponentes racionales utilizando las definiciones anteriores. Son también verdaderas para exponentes irracionales, pero no podremos demostrarlo hasta la sección siguiente.

Si $a = 1$, entonces $a^x = 1^x = 1$ para todo x. Si $a > 1$, entonces a^x es una función creciente de x. Si $0 < a < 1$, entonces a^x es decreciente. La Figura 3.8(a) muestra las gráficas de algunas

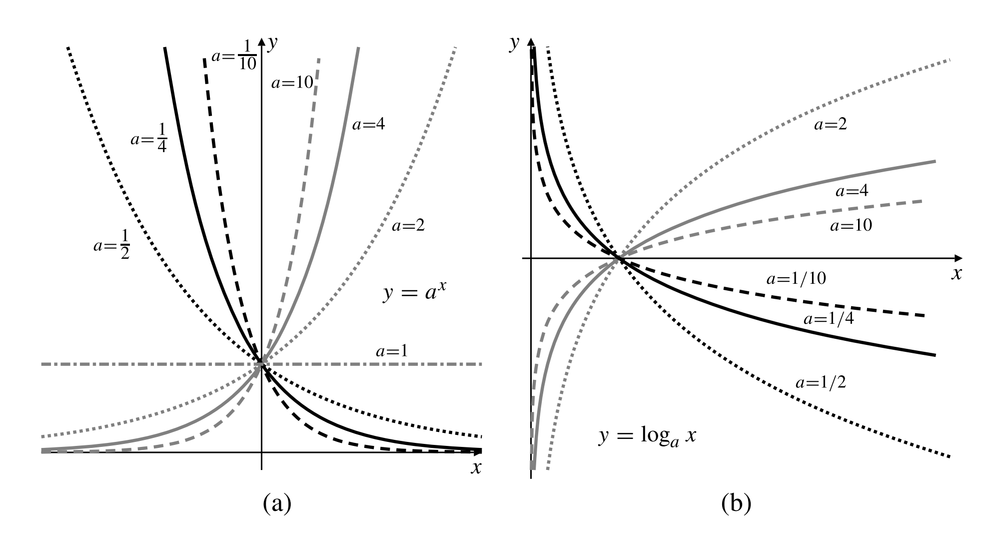


Figura 3.8 (a) Gráficas de algunas funciones exponenciales. (c) Gráficas de algunas funciones logarítmicas.

funciones exponenciales típicas. Todas ellas pasan por el punto (0, 1) ya que $a^0 = 1$ para todo $a > 0$. Obsérvese que $a^x > 0$ para todo $a > 0$ y para todo real x, y que

$$\text{Si} \quad a > 1, \qquad \text{entonces} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} a^x = \infty.$$

$$\text{Si} \quad 0 < a < 1, \qquad \text{entonces} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} a^x = 0.$$

La gráfica de $y = a^x$ presenta una asíntota horizontal en el eje x si $a \neq 1$. Es asintótica por la izquierda (cuando $x \to -\infty$) si $a > 1$ y por la derecha (cuando $x \to \infty$) si $0 < a < 1$.

Logaritmos

La función $f(x) = a^x$ es una función uno a uno siempre que $a > 0$ y $a \neq 1$. Por tanto, f tiene inversa que denominaremos *función logarítmica*.

DEFINICIÓN 5

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función $\log_a x$, denominada **logaritmo en base *a* de *x***, es la inversa de la función uno a uno a^x:

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y, \qquad (a > 0, \quad a \neq 1)$$

Como el dominio de a^x es $(-\infty, \infty)$, el rango de $\log_a x$ es $(-\infty, \infty)$. Como el rango de a^x es $(0, \infty)$, el dominio de $\log_a x$ es $(0, \infty)$. Como a^x y $\log_a x$ son funciones inversas, se cumplen las siguientes **identidades de cancelación**:

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{para todo } x \text{ real} \qquad \text{y} \qquad a^{\log_a x} = x \quad \text{para todo} \quad x > 0$$

La Figura 3.8(b) muestra las gráficas de algunas funciones logarítmicas típicas. Todas pasan por el punto (1, 0). Cada una de ellas es la reflexión con respecto a la recta $y = x$ de la correspondiente gráfica exponencial de la Figura 3.8(a).

A partir de las leyes de los exponentes se pueden obtener las siguientes leyes de los logaritmos:

Leyes de los logaritmos

Si $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ y $b \neq 1$, entonces

(i) $\log_a 1 = 0$ (ii) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

(iii) $\log_a \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$ (iv) $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(v) $\log_a (x^y) = y \log_a x$ (vi) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Ejemplo 2 Si $a > 0$, $x > 0$ e $y > 0$, verifique que $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, utilizando las leyes de los exponentes.

Solución Sean $u = \log_a x$ y $v = \log_a y$. Por la propiedad de definición de funciones inversas, $x = a^u$ y $y = a^v$. Por tanto, $xy = a^u a^v = a^{u+v}$. Invirtiendo de nuevo, se obtiene $\log_a (xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$.

La ley (vi) de los logaritmos, presentada anteriormente, demuestra que si se conocen los logaritmos en una base particular b se pueden calcular los logaritmos en cualquier otra base a. Las calculadoras científicas disponen en general de programas para calcular logaritmos en base 10 y en base e, un número especial que presentaremos en la Sección 3.3. Los logaritmos en cualquier otra base se pueden calcular utilizando cualquiera de esas funciones. Por ejemplo, los especialistas en computadores necesitan a veces utilizar logaritmos en base 2. Utilizando una calculadora científica, se puede calcular rápidamente

$$\log_2 13 = \frac{\log_{10} 13}{\log_{10} 2} = \frac{1.113\,943\,352\,31...}{0.301\,029\,995\,664...} = 3.700\,439\,718\,14...$$

Las leyes de los logaritmos se pueden utilizar en algunas ocasiones para simplificar expresiones complicadas.

Ejemplo 3 Simplifique

(a) $\log_2 10 + \log_2 12 - \log_2 15$, (b) $\log_{a^2} a^3$ y (c) $3^{\log_9 4}$.

Solución

(a) $\log_2 10 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 \dfrac{10 \times 12}{15}$ (leyes (ii) y (iv))

$= \log_2 8$

$= \log_2 2^3 = 3$ (identidad de cancelación)

(b) $\log_{a^2} a^3 = 3 \log_{a^2} a$ (ley (v))

$= \dfrac{3}{2} \log_{a^2} a^2$ (ley (v) de nuevo)

$= \dfrac{3}{2}.$ (identidad de cancelación)

(c) $3^{\log_9 4} = 3^{(\log_3 4)/(\log_3 9)}$ (ley (vi))

$= (3^{\log_3 4})^{1/\log_3 9}$

$= 4^{1/\log_3 3^2} = 4^{1/2} = 2$ (identidad de cancelación)

Ejemplo 4 Resuelva la ecuación $3^{x-1} = 2^x$.

Solución Tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación en cualquier base a se obtiene

$$(x-1)\log_a 3 = x\log_a 2$$
$$(\log_a 3 - \log_a 2)x = \log_a 3$$
$$x = \frac{\log_a 3}{\log_a 3 - \log_a 2} = \frac{\log_a 3}{\log_a (3/2)}$$

El valor numérico de x se puede obtener utilizando la función «log» en una calculadora científica (esta función es $\log_{10}$). El valor es $x = 2.7095...$

De la misma forma que las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas tienen también un comportamiento asintótico. Todas sus gráficas son asintóticas con el eje y a medida que $x \to 0$ por la derecha:

Si $a > 1$, entonces $\lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty$.

Si $0 < a < 1$, entonces $\lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$.

Ejercicios 3.2

Simplifique las expresiones de los Ejercicios 1-18.

1. $\dfrac{3^3}{\sqrt{3^5}}$

2. $2^{1/2}8^{1/2}$

3. $(x^{-3})^{-2}$

4. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x 4^{x/2}$

5. $\log_5 125$

6. $\log_4\left(\dfrac{1}{8}\right)$

7. $\log_{1/3} 3^{2x}$

8. $2^{\log_4 8}$

9. $10^{-\log_{10}(1/x)}$

10. $x^{1/(\log_a x)}$

11. $(\log_a b)(\log_b a)$

12. $\log_x(x(\log_y y^2))$

13. $(\log_4 16)(\log_4 2)$

14. $\log_{15} 75 + \log_{15} 3$

15. $\log_6 9 + \log_6 4$

16. $2\log_3 12 - 4\log_3 6$

17. $\log_a(x^4 + 3x^2 + 2) + \log_a(x^4 + 5x^2 + 6) - 4\log_a\sqrt{x^2+2}$

18. $\log_\pi(1 - \cos x) + \log_\pi(1 + \cos x) - 2\log_\pi \operatorname{sen} x$

Utilice las funciones logaritmo y exponencial con base 10, 10^x y $\log x\,(=\log_{10} x)$, de una calculadora científica para evaluar las expresiones o resolver las ecuaciones de los Ejercicios 19-24.

19. $3^{\sqrt{2}}$

20. $\log_3 5$ 

21. $2^{2x} = 5^{x+1}$ 

22. $x^{\sqrt{2}} = 3$ 

23. $\log_x 3 = 5$

24. $\log_3 x = 5$ 

Utilice las leyes de los exponentes para demostrar las leyes de los logaritmos en los Ejercicios 25-28.

25. $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$

26. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

27. $\log_a(x^y) = y\log_a x$

28. $\log_a x = (\log_b x)/(\log_b a)$

29. Despeje x en $\log_4(x+4) - 2\log_4(x+1) = \dfrac{1}{2}$.

30. Despeje x en $2\log_3 x + \log_9 x = 10$.

Evalúe los límites de los Ejercicios 31-34.

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \log_x 2$

32. $\lim\limits_{x\to 0+} \log_x(1/2)$

33. $\lim\limits_{x\to 1+} \log_x 2$

34. $\lim\limits_{x\to 1-} \log_x 2$

***35.** Suponga que $f(x) = a^x$ es diferenciable en $x = 0$ y que $f'(0) = k$, siendo $k \neq 0$. Demuestre que f es diferenciable en cualquier número real x y que

$$f'(x) = ka^x = kf(x)$$

***36.** Continuando con el Ejercicio 35, demuestre que $f^{-1}(x) = \log_a x$ es diferenciable en cualquier $x > 0$ y que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{kx}$$

3.3 La exponencial y el logaritmo natural

En esta sección vamos a definir la función $\ln x$, denominada logaritmo *natural* de x, de una forma que en principio parece no tener nada que ver con los logaritmos considerados en la Sección 3.2. Sin embargo, demostraremos que tiene las mismas propiedades que esos logaritmos, y al final veremos que $\ln x = \log_e x$, el logaritmo de x en una cierta base específica e. Demostraremos que $\ln x$ es una función uno a uno, definida para todos los números reales positivos. Por lo tanto, debe tener una función inversa, e^x, que denominaremos función exponencial. Nuestro objetivo final es llegar a una definición de la función exponencial a^x (para cualquier $a > 0$) que sea válida para todo número real x, en vez de sólo para números racionales, y que sea continua e incluso diferenciable sin tener que suponer esas propiedades como hicimos en la Sección 3.2.

El logaritmo natural

La Tabla 1 muestra las derivadas de las potencias enteras de x. Esas derivadas son múltiplos de potencias enteras de x, pero hay una potencia entera, x^{-1}, que está ausente de esta lista de derivadas. Todavía no conocemos ninguna función cuya derivada sea $x^{-1} = 1/x$. Vamos a remediar esta situación definiendo una función $\ln x$ tal que su derivada sea $1/x$.

Tabla 1. Derivadas de potencias enteras

$f(x)$	$f'(x)$
$\vdots$	$\vdots$
x^4	$4x^3$
x^3	$3x^2$
x^2	$2x$
x^1	$1x^0 = 1$
x^0	0
x^{-1}	$-x^{-2}$
x^{-2}	$-2x^{-3}$
x^{-3}	$-3x^{-4}$
$\vdots$	$\vdots$

Para tener una idea de cómo se puede hacer esto, revisemos el Ejemplo 1 de la Sección 2.11. En ese ejemplo demostramos que el área bajo la gráfica de la velocidad de un objeto móvil en un intervalo de tiempo es igual a la distancia recorrida por el objeto en dicho intervalo. Como la derivada de la distancia es la velocidad, la medida del área nos proporcionó una forma de obtener una función (la distancia) que tenía una derivada dada (la velocidad). Esta relación entre área y derivadas es una de las ideas más importantes en cálculo. Se denomina **Teorema Fundamental del Cálculo**. Lo consideraremos en detalle en el Capítulo 5, pero haremos uso de esta idea ahora para definir $\ln x$, cuya derivada queremos que sea $1/x$.

DEFINICIÓN 6 El logaritmo natural

Para $x > 0$, sea A_x el área de la región plana encerrada por la curva $y = 1/t$, el eje t y las rectas verticales $t = 1$ y $t = x$. La función $\ln x$ se define como

$$\ln x = \begin{cases} A_x & \text{si } x \geqslant 1, \\ -A_x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

y se muestra en la Figura 3.9.

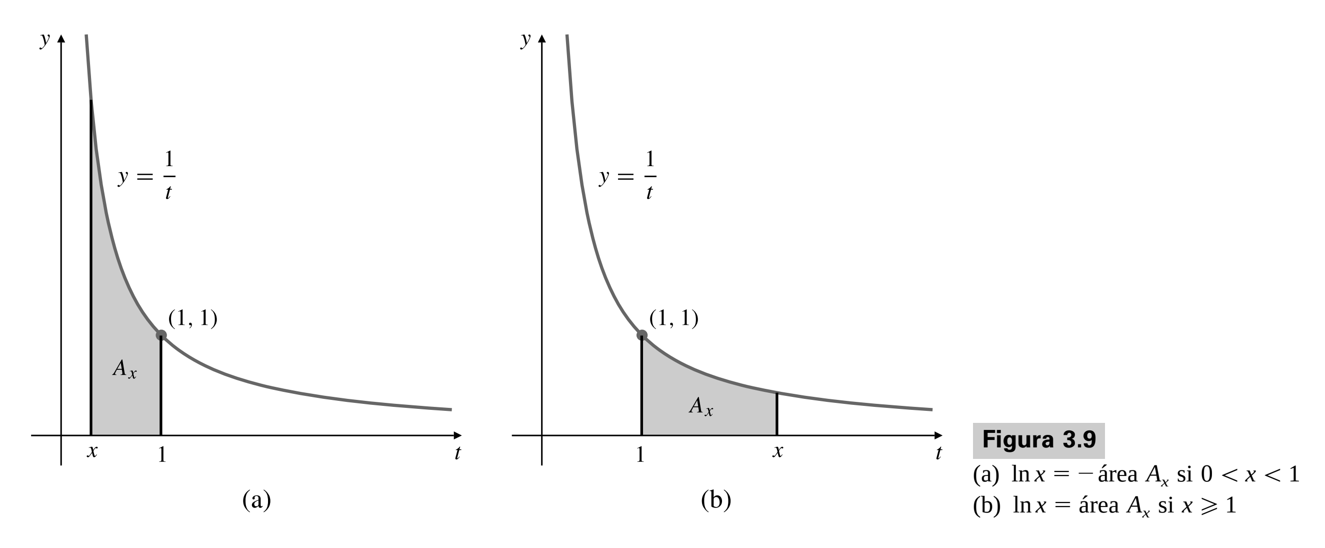


Figura 3.9
(a) $\ln x = -$área A_x si $0 < x < 1$
(b) $\ln x =$ área A_x si $x \geqslant 1$

La definición implica que $\ln 1 = 0$, que $\ln x > 0$ si $x > 1$, que $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$ y que es una función uno a uno. Ahora demostraremos que si $y = \ln x$, entonces $y' = 1/x$. La demostración de este resultado es similar a la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo que proporcionaremos en la Sección 5.5.

TEOREMA 1 Si $x > 0$, entonces

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

DEMOSTRACIÓN Para $x > 0$ y $h > 0$, $\ln(x + h) - \ln x$ es el área de la región plana limitada por $y = 1/t$, $y = 0$, y las rectas verticales $t = x$ y $t = x + h$. Corresponde al área sombreada en la Figura 3.10. Comparando esta área con la de los dos rectángulos se puede ver que

$$\frac{h}{x + h} < \text{área sombreada} = \ln(x + h) - \ln x < \frac{h}{x}$$

Por tanto, el cociente de Newton de $\ln x$ cumple

$$\frac{1}{x + h} < \frac{\ln(x + h) - \ln x}{h} < \frac{1}{x}$$

Haciendo que h tienda a cero por la derecha, se obtiene (por el Teorema del Sándwich aplicado a límites unilaterales)

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\ln(x + h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$$

Figura 3.10

Un argumento similar permite demostrar que si $0 < x + h < x$, entonces

$$\frac{1}{x} < \frac{\ln(x + h) - \ln x}{h} < \frac{1}{x + h}$$

por lo que

$$\lim_{h \to 0-} \frac{\ln(x + h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$$

Combinando estos dos límites laterales se obtiene el resultado deseado:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x + h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$$

Las dos propiedades $(d/dx)\ln x = 1/x$ y $\ln 1 = 0$ son suficientes para determinar completamente la función $\ln x$ (esto se deduce del Teorema 13 de la Sección 2.6). A partir de estas dos propiedades se puede deducir que $\ln x$ cumple las leyes apropiadas de los logaritmos.

TEOREMA 2 **Propiedades del logaritmo natural**

(i) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (ii) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

(iii) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ (iv) $\ln(x^r) = r \ln x$

Como no deseamos *suponer* que las exponenciales son continuas (como hicimos en la Sección 3.2), diremos por el momento que (iv) sólo es válido para exponentes r que sean números racionales.

DEMOSTRACIÓN Sólo demostraremos el apartado (i), ya que los otros apartados se demuestran por el mismo método. Si $y > 0$ es una constante, entonces por la Regla de la Cadena,

$$\frac{d}{dx}(\ln(xy) - \ln x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{para todo } x > 0$$

El Teorema 13 de la Sección 2.6 indica que $\ln(xy) - \ln x = C$ (una constante) para $x > 0$. Haciendo $x = 1$ se tiene $C = \ln y$ y se deduce la identidad (i).

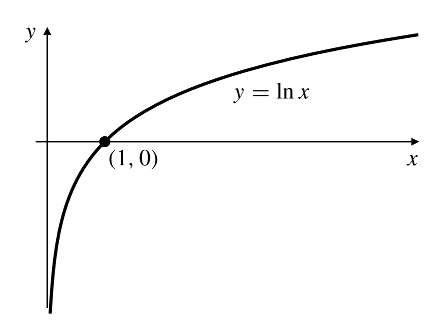


Figura 3.11 Gráfica de $\ln x$.

El apartado (iv) del Teorema 2 demuestra que $\ln(2^n) = n\ln 2 \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, tenemos también que $\ln(1/2)^n = -n\ln 2 \to -\infty$ cuando $n \to \infty$. Como $(d/dx)\ln x = 1/x > 0$ para $x > 0$, se deduce que $\ln x$ es creciente, por lo que debemos tener (*véase* la Figura 3.11)

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \qquad \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$$

Ejemplo 1 Demuestre que $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$. Teniendo en cuenta lo anterior calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$.

Solución Si $x > 0$, entonces

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

por el Teorema 1. Si $x < 0$, entonces, utilizando la Regla de la Cadena,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Por tanto, $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$, y en cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Ejemplo 2 Calcule las derivadas de (a) $\ln|\cos x|$ y (b) $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Simplifique sus respuestas tanto como sea posible.

Solución

(a) Utilizando el resultado del Ejemplo 1 y la Regla de la Cadena, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\ln|\cos x| = \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) = -\tan x$$

(*b*)
$$\frac{d}{dx}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{x + \sqrt{2+1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\,\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

La función exponencial

La función $\ln x$ es uno a uno en su dominio, el intervalo $(0, \infty)$, por lo que tiene inversa en dicho intervalo. Por el momento, denominaremos a su inversa $\exp x$. Entonces,

$$y = \exp x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y \quad (y > 0)$$

Como $\ln 1 = 0$, tenemos que $\exp 0 = 1$. El dominio de exp es $(-\infty, \infty)$, el rango de ln. El rango de exp es $(0, \infty)$, el dominio de ln. Tenemos las siguientes identidades de cancelación:

$$\ln(\exp x) = x \quad \text{para todo } x \text{ real} \quad \text{y} \quad \exp(\ln x) = x \quad \text{para } x > 0$$

Se pueden deducir varias propiedades de exp a partir de las propiedades correspondientes de ln. No es sorprendente que sean propiedades que podría esperarse tuviera la función exponencial.

TEOREMA 2 **Propiedades de la función exponencial**

(i) $(\exp x)^r = \exp(rx)$ (ii) $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$

(iii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ (iv) $\exp(x - y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

Por el momento, la identidad (i) sólo es válida para números r racionales.

DEMOSTRACIÓN Sólo demostraremos la identidad (i). Las restantes son similares. Si $u = (\exp x)^r$, entonces, por el Teorema 2(iv), $\ln u = r \ln(\exp x) = rx$. Por tanto, $u = \exp(rx)$.

Presentamos a continuación una definición muy importante:

$$\text{Sea} \quad e = \exp(1)$$

El número e cumple $\ln e = 1$, por lo que el área limitada por la curva $y = 1/t$, el eje t y las rectas verticales $t = 1$ y $t = e$ debe ser igual a una unidad cuadrada. *Véase* la Figura 3.12. El número e es uno de los más importantes en matemáticas. Como el número π, es irracional y no es raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales (estos números se denominan **trascendentes**). Su valor está entre 2 y 3 y sus cifras iniciales son

$$e = 2.7\,1828\,1828\,45\,90\,45...$$

Mas adelante veremos que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

fórmula mediante la que se puede calcular el valor de e con cualquier precisión deseada.

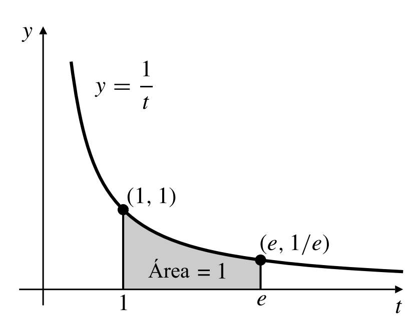


Figura 3.12 Definición de e.

El Teorema 3(i) indica que $\exp r = \exp(1r) = (\exp 1)^r = e^r$ se cumple para todo número racional r. Realizaremos ahora una observación crucial. Sólo conocemos el significado de e^r si r es un número racional (si $r = m/n$, entonces $e^r = \sqrt[n]{e^m}$). Pero $\exp x$ está definida para todo x *real*, sea racional o no. Como $e^r = \exp r$ cuando r es racional, se puede usar $\exp x$ como *definición* de lo que significa e^x para cualquier número real x, y no habrá contradicción en el caso de que x sea racional.

$$e^x = \exp x \qquad \text{para todo } x \text{ real}$$

El Teorema 3 se puede reformular en términos de e^x:

(i) $(e^x)^y = e^{xy}$ (ii) $e^{x+y} = e^x e^y$

(iii) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ (iv) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

La gráfica de e^x es la reflexión de la gráfica de su inversa, $\ln x$, respecto a la recta $y = x$. La Figura 3.13 permite comparar ambas gráficas. Obsérvese que el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica de $y = e^x$ cuando $x \to -\infty$. Tenemos que

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

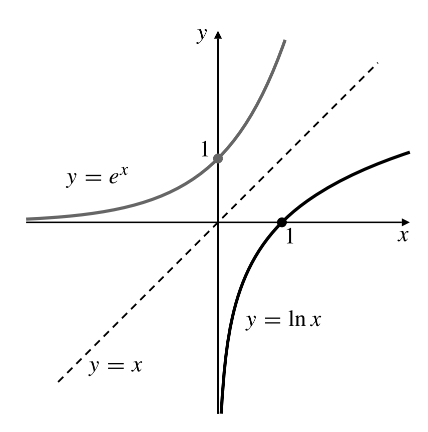


Figura 3.13 Gráficas de e^x y $\ln x$.

Como $\exp x = e$ *es* realmente una función exponencial, su inversa *es* realmente un logaritmo:

$$\ln x = \log_e x$$

La derivada de $y = e^x$ se calcula por diferenciación implícita:

$$\begin{aligned} y = e^x \quad &\Rightarrow \quad x = \ln y \\ &\Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y = e^x \end{aligned}$$

Por tanto, la función exponencial tiene la destacable propiedad de que es su propia derivada y, por tanto, también su propia primitiva:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

Ejemplo 3 Calcule las derivadas de

(a) e^{x^2-3x}, (b) $\sqrt{1+e^{2x}}$ y (c) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Solución

(a) $$\frac{d}{dx}\,e^{x^2-3x} = e^{x^2-3x}(2x-3) = (2x-3)e^{x^2-3x}$$

(b) $$\frac{d}{dx}\sqrt{1+e^{2x}} = \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\,(e^{2x}(2)) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

(c) $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x-(-e^{-x})) - (e^x-e^{-x})(e^x+(-e^{-x}))}{(e^x+e^{-x})^2}\\ &= \frac{(e^x)^2 + 2e^xe^{-x} + (e^{-x})^2 - [(e^x)^2 - 2e^xe^{-x} + (e^{-x})^2]}{(e^x+e^{-x})^2}\\ &= \frac{4e^{x-x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 4 Sea $f(t) = e^{at}$. Calcule (a) $f^{(n)}(t)$ y (b) $\int f(t)\,dt$.

Solución (a) Tenemos que
$$\begin{aligned} f'(t) &= ae^{at}\\ f''(t) &= a^2e^{at}\\ f'''(t) &= a^3e^{at}\\ &\vdots\\ f^{(n)}(t) &= a^ne^{at}.\end{aligned}$$

(b) Además, $\displaystyle\int f(t)\,dt = \int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}\,e^{at} + C$, ya que $\displaystyle\frac{d}{dt}\,\frac{1}{a}\,e^{at} = e^{at}$.

Exponenciales y logaritmos generales

Podemos utilizar el hecho de que e^x está ahora definido para *todo* número real x, para definir la exponencial arbitraria a^x (siendo $a > 0$) para todo número real x. Si r es racional, entonces $\ln(a^r) = r\ln a$, y, por tanto, $a^r = e^{r\ln a}$. Sin embargo, $e^{x\ln a}$ está definido para todo número real x, por lo que podemos utilizarlo como definición de a^x, sin posibilidad de que surja contradicción si x es racional.

DEFINICIÓN 7 **La exponencial general a^x**

$$a^x = e^{x\ln a}, \qquad (a > 0, \quad x \text{ real})$$

Ejemplo 5 Evalúe 2^π, utilizando las teclas del logaritmo natural (ln) y de la exponencial (exp o e^x) de una calculadora científica, pero no utilizando las teclas y^x o ^.

Solución $2^\pi = e^{\pi\ln 2} = 8.824\,977\,8...$ Si la calculadora tiene una tecla ^ o teclas x^y o y^x, es posible que las funciones estén implementadas utilizando a su vez las funciones exp y ln.

Las leyes de los exponentes para a^x, tal como se presentaron en la Sección 3.2, se pueden obtener ahora a partir de las de e^x, y también como la derivada:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a$$

También podemos verificar la Regla General de la Potencia para x^a, siendo a un número real, siempre que $x > 0$.

$$\frac{d}{dx}x^a = \frac{d}{dx}e^{a\ln x} = e^{a\ln x}\frac{a}{x} = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}$$

No se debe confundir x^π, que es una función potencial de x, con π^x, que es una función exponencial de x.

Ejemplo 6 Demuestre que la gráfica de $f(x) = x^\pi - \pi^x$ tiene pendiente negativa en $x = \pi$.

Solución $f'(x) = \pi x^{\pi-1} - \pi^x \ln \pi$

$$f'(\pi) = \pi\pi^{\pi-1} - \pi^\pi \ln\pi = \pi^\pi(1 - \ln\pi).$$

Como $\pi > 3 > e$, tenemos que $\ln\pi > \ln e = 1$, por lo que $1 - \ln\pi < 0$. Como $\pi^\pi = e^{\pi\ln\pi} > 0$, tenemos que $f'(\pi) < 0$. Por tanto, la gráfica de $y = f(x)$ tiene pendiente negativa en $x = \pi$. ■

Ejemplo 7 Calcule el punto crítico de $y = x^x$.

Solución No se puede diferenciar x^x tratándolo como una potencia (como x^a), ya que el exponente varía. Tampoco se puede tratar como una función exponencial (como a^x) porque la base varía. Pero podemos diferenciarlo si lo escribimos primero en términos de la función exponencial $x^x = e^{x\ln x}$ y utilizamos después la Regla de la Cadena y la Regla del Producto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{x\ln x} = e^{x\ln x}\left(\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x^x(1 + \ln x)$$

x^x está definida sólo para $x > 0$, y nunca vale 0 (¿por qué?). Por tanto, el punto crítico se produce cuando $1 + \ln x = 0$, es decir, $\ln x = -1$ o $x = 1/e$. ■

Finalmente, obsérvese que $(d/dx)a^x = a^x \ln a$ es negativo para todo x si $0 < a < 1$ y es positivo para todo x si $a > 1$. Por tanto, a^x es uno a uno y tiene función inversa, $\log_a x$, siempre que $a > 0$ y $a \neq 1$. Sus propiedades se deducen de la misma forma que en la Sección 3.2. Si $y = \log_a x$, entonces $x = a^y$ y, utilizando diferenciación implícita con respecto a x, se obtiene

$$1 = a^y \ln a \frac{dy}{dx} = x\ln a\frac{dy}{dx}$$

Por tanto, la derivada de $\log_a x$ se expresa como

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

Como $\log_a x$ se puede expresar en función de logaritmos en cualquier otra base, por ejemplo e,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Normalmente sólo utilizaremos logaritmos naturales. No obstante, hay excepciones en química, acústica y otras ciencias donde se usan «escalas logarítmicas» para medir cantidades en las que un incremento de una unidad en la medida corresponde a multiplicar por 10 la cantidad. Para definir esas escalas se usan logaritmos en base 10. En ciencias de computación, donde las potencias de 2 tienen un papel central, los logaritmos en base 2 aparecen muy a menudo.

Diferenciación logarítmica

Supongamos que deseamos diferenciar una función de la forma

$$y = (f(x))^{g(x)} \qquad (\text{para } f(x) > 0)$$

Como la variable aparece tanto en la base como en el exponente, ni la regla general de la potencia, $(d/dx)x^a = ax^{a-1}$, ni la regla exponencial, $(d/dx)a^x = a^x \ln a$, se pueden aplicar directamente. Un método para calcular la derivada de una función como ésa es expresarla en la forma

$$y = e^{g(x)\ln f(x)}$$

y diferenciar después utilizando la Regla del Producto para el exponente. Éste es el método utilizado en el Ejemplo 7.

La derivada del Ejemplo 7 se puede obtener también tomando logaritmos naturales en los dos miembros de la ecuación $y = x^x$ y diferenciando implícitamente:

$$\ln y = x \ln x$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x + \frac{x}{x} = 1 + \ln x$$
$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

Esta última técnica se denomina **diferenciación logarítmica**.

Ejemplo 8 Calcule dy/dt si $y = (\operatorname{sen} t)^{\ln t}$, con $0 < t < \pi$.

Solución Tenemos que $\ln y = \ln t \operatorname{sen} t$. Entonces,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}\ln \operatorname{sen} t + \ln t \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$
$$\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{\ln \operatorname{sen} t}{t} + \ln t \cot t\right)$$
$$= (\operatorname{sen} t)^{\ln t}\left(\frac{\ln \operatorname{sen} t}{t} + \ln t \cot t\right)$$

■

La diferenciación logarítmica es también útil para calcular derivadas de funciones expresadas como productos y cocientes de muchos factores. Al tomar logaritmos se transforman los productos y cocientes en sumas y diferencias. Esto en general facilita el cálculo con respecto a la utilización de las Reglas del Producto y del Cociente, especialmente si la derivada debe calcularse en un punto concreto.

Ejemplo 9 Diferencie $y = [(x + 1)(x + 2)(x + 3)]/(x + 4)$.

Solución

$$\ln|y| = \ln|x + 1| + \ln|x + 2| + \ln|x + 3| - \ln|x + 4|$$

Entonces,

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$$y' = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+4}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right)$$

$$= \frac{(x+2)(x+3)}{x+4} + \frac{(x+1)(x+3)}{x+4} + \frac{(x+1)(x+2)}{x+4}$$

$$- \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+4)^2}$$

Ejemplo 10 Calcule $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1}$ si $u = \sqrt{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}$.

Solución

$$\ln u = \frac{1}{2}\,(\ln(x+1) + \ln(x^2+1) + \ln(x^3+1))$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3x^2}{x^3+1}\right)$$

En $x = 1$ tenemos que $u = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Por tanto,

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

Ejercicios 3.3

Simplifique las expresiones de los Ejercicios 1-10.

1. $e^3/\sqrt{e^5}$

2. $\ln(e^{1/2}e^{2/3})$

3. $e^{5\ln x}$

4. $e^{(3\ln 9)/2}$

5. $\ln \frac{1}{e^{3x}}$

6. $e^{2\ln\cos x} + \left(\ln e^{\operatorname{sen} x}\right)^2$

7. $3\ln 4 - 4\ln 3$

8. $4\ln\sqrt{x} + 6\ln(x^{1/3})$

9. $2\ln x + 5\ln(x-2)$

10. $\ln(x^2 + 6x + 9)$

Despeje x en las ecuaciones de los Ejercicios 11-14.

11. $2^{x+1} = 3^x$

12. $3^x + 9^{1-x}$

13. $\frac{1}{2^x} = \frac{5}{8^{x+3}}$

14. $2^{x^2-3} = 4^x$

Obtenga los dominios de las funciones de los Ejercicios 15-16.

15. $\ln\frac{x}{2-x}$

16. $\ln(x^2 - x - 2)$

Resuelva las inecuaciones de los Ejercicios 17-18.

17. $\ln(2x-5) > \ln(7-2x)$

18. $\ln(x^2-2) \leqslant \ln x$

En los Ejercicios 19-48, diferencie las funciones dadas. Si es posible, simplifique sus respuestas.

19. $y = e^{5x}$

20. $y = xe^x - x$

21. $y = \frac{x}{e^{2x}}$

22. $y = x^2 e^{x/2}$

23. $y = \ln(3x-2)$

24. $y = \ln|3x-2|$

25. $y = \ln(1 + e^x)$

26. $f(x) = e^{(x^2)}$

27. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

28. $x = e^{3t}\ln t$

29. $y = e^{(e^x)}$

30. $y = \frac{e^x}{1 + e^x}$

31. $y = e^x \operatorname{sen} x$

32. $y = e^{-x}\cos x$

33. $y = \ln\ln x$

34. $y = x\ln x - x$

35. $y = x^2\ln x - \frac{x^2}{2}$

36. $y = \ln|\operatorname{sen} x|$

37. $y = 5^{2x+1}$

38. $y = 2^{(x^2-3x+8)}$

39. $g(x) = t^x x^t$

40. $h(t) = t^x - x^t$

41. $f(s) = \log_a (bs + c)$

42. $g(x) = \log_x (2x + 3)$

43. $y = x^{\sqrt{x}}$

44. $y = (1/x)^{\ln x}$

45. $y = \ln |\sec x + \tan x|$

46. $y = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$

47. $y = \ln (\sqrt{x^2 + a^2} - x)$

48. $y = (\cos x)^x - x^{\cos x}$

49. Calcule la n-ésima derivada de $f(x) = xe^{ax}$.

50. Demuestre que la n-ésima derivada de $(ax^2 + bx + c)e^x$ es una función de la misma forma pero con diferentes constantes.

51. Calcule las cuatro primeras derivadas de e^{x^2}.

52. Calcule la n-ésima derivada de $\ln (2x + 1)$.

53. Diferencie (a) $f(x) = (x^x)^x$ y (b) $g(x) = x^{(x^x)}$. ¿Qué función crece más rápidamente cuando x crece?

$*$**54.** Resuelva la ecuación $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = a$, siendo $a > 0$. La torre de exponentes crece indefinidamente.

Utilice diferenciación logarítmica para calcular las derivadas que se piden en los Ejercicios 55-57.

55. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$. Obtenga $f'(x)$.

56. $F(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x}(1 - x)^{1/3}}{(1 + 5x)^{4/5}}$. Obtenga $F'(0)$.

57. $f(x) = \dfrac{(x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)}$ Obtenga $f'(2)$. Obtenga también $f'(1)$.

58. ¿En qué puntos tiene tangente horizontal la gráfica de $y = x^2 e^{-x^2}$?

59. Sea $f(x) = xe^{-x}$. Determine dónde es f creciente y dónde es decreciente. Dibuje aproximadamente la gráfica de f.

60. Obtenga la ecuación de una recta de pendiente 4 que sea tangente a la gráfica de $y = \ln x$.

61. Obtenga la ecuación de una recta que sea tangente a la curva $y = e^x$ y pase por el origen.

62. Obtenga la ecuación de una recta que sea tangente a la curva $y = \ln x$ y pase por el origen.

63. Obtenga la ecuación de una recta que sea tangente a $y = 2^x$ y pase por el punto (1, 0).

64. ¿Para qué valores de $a > 0$ corta la curva $y = a^x$ a la recta $y = x$?

65. Calcule la pendiente de la curva $e^{xy} \ln \dfrac{x}{y} = x + \dfrac{1}{y}$ en $(e, 1/e)$.

66. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $xe^y + y - 2x = \ln 2$ en el punto $(1, \ln 2)$.

67. Calcule la derivada de $f(x) = Ax \cos \ln x + Bx \operatorname{sen} \ln x$. Utilice el resultado como ayuda para calcular las integrales indefinidas

$$\int \cos \ln x \, dx \quad \text{y} \quad \int \operatorname{sen} \ln x \, dx$$

$*$**68.** Sea $F_{A,B}(x) = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x$. Demuestre que $(d/dx)F_{A,B}(x) = F_{A+B,B-A}(x)$.

$*$**69.** Utilizando los resultados del Ejercicio 68, calcule

(a) $(d^2/dx^2)F_{A,B}(x)$ y (b) $(d^3/dx^3)e^x \cos x$.

$*$**70.** Calcule $\dfrac{d}{dx}(Ae^{ax} \cos bx + Be^{ax} \operatorname{sen} x)$ y utilice el resultado como ayuda para evaluar

(a) $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx \, dx$ y (b) $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx$.

71. Demuestre la identidad (ii) del Teorema 2 examinando la derivada del miembro izquierdo menos el miembro derecho como se hizo en la demostración de la identidad (i).

72. Deduzca la identidad (iii) del Teorema 2 a partir de las identidades (i) y (ii).

73. Demuestre la identidad (iv) del Teorema 2 para exponentes racionales r mediante el mismo método utilizado en el Ejercicio 71.

$*$**74.** Sea $x > 0$ y sea $F(x)$ el área encerrada por la curva $y = t^2$, el eje t y las rectas verticales $t = 0$ y $t = x$. Utilizando el método de la demostración del Teorema 1, demuestre que $F'(x) = x^2$. A continuación, obtenga una fórmula explícita de $F(x)$. ¿Cuál es el área de la región encerrada por $y = t^2$, $y = 0$, $t = 0$ y $t = 2$?

$*$**75.** Realice los siguientes pasos para demostrar que $2 < e < 3$. Sea $f(t) = 1/t$ para $t > 0$.

(a) Demuestre que el área por debajo $y = f(t)$, por encima de $y = 0$ y entre $t = 1$ y $t = 2$ es menor que una unidad cuadrada. Deduzca que $e > 2$.

(b) Demuestre que todas las tangentes a la gráfica de f están por debajo de dicha gráfica. *Sugerencia*: $f''(t) = 2/t^3 > 0$.

(c) Obtenga las rectas T_2 y T_3 que son tangentes a $y = f(t)$ en $t = 2$ y $t = 3$, respectivamente.

(d) Calcule el área A_2 por debajo de T_2 y por encima de $y = 0$, entre $t = 1$ y $t = 2$. Calcule también el área A_3 por debajo de T_3 y por encima de $y = 0$, entre $t = 2$ y $t = 3$.

(e) Demuestre que $A_2 + A_3 > 1$ unidad cuadrada. Deduzca que $e < 3$.

3.4 Crecimiento y decrecimiento

En esta sección estudiaremos el uso de funciones exponenciales para modelar las tasas de crecimiento de cantidades para las que dicha tasa de crecimiento está directamente relacionada con su tamaño. El crecimiento de estas cantidades está generalmente gobernado por ecuaciones diferenciales en cuya solución aparecen funciones exponenciales. Antes de entrar en materia, prepararemos el camino examinando la forma de crecimiento de las funciones exponencial y logarítmica.

Crecimiento de exponenciales y logaritmos

En la Sección 3.3 demostramos que tanto e^x como $\ln x$ crecen (hacia infinito) cuando x crece. Sin embargo e^x aumenta muy rápidamente cuando x crece, y $\ln x$ crece muy lentamente. De hecho, e^x crece, para x grande, más deprisa que cualquier potencia positiva de x (no importa lo grande que sea la potencia), mientras que $\ln x$ crece más lentamente que cualquier potencia positiva de x (no importa lo pequeña que sea la potencia). Para verificar este comportamiento comenzaremos por una inecuación que cumple $\ln x$. La recta $y = x - 1$ es tangente a la curva $y = \ln x$ en el punto $(1, 0)$. El teorema que sigue afirma que la curva está por debajo de esa recta (*véase* la Figura 3.14).

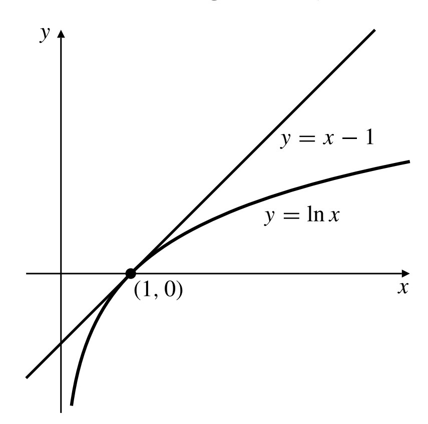


Figura 3.14 $\ln x \leqslant x - 1$ para $x > 0$.

TEOREMA 4 Si $x > 0$, entonces $\ln x \leqslant x - 1$.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \ln x - (x - 1)$ para $x > 0$. Entonces $g(1) = 0$ y

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ < 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como se observó en la Sección 2.6, estas inecuaciones implican que g crece en $(0, 1)$ y decrece en $(1, \infty)$. Por tanto, $g(x) \leqslant g(1) = 0$ para todo $x > 0$ y $\ln x \leqslant x - 1$ para esos valores de x.

TEOREMA 5 **Propiedades de crecimiento de exp y ln**

Si $a > 0$, entonces

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0$

Cada uno de estos límites hace una afirmación sobre quién «gana» en una competición entre una exponencial o un logaritmo y una potencia. Por ejemplo, en el apartado (a), el denominador e^x crece cuando $x \to \infty$, por lo que hace que la fracción x^a/e^x tienda a 0. Por otra parte, si a es un número positivo grande, el numerador x^a también crece y hace que la fracción tienda a infinito. Lo que afirma el apartado (a) es que en esta competición entre la exponencial y la potencia, la exponencial es más fuerte y gana; por tanto, la fracción tiende a 0. La competición del Teorema 5 se puede expresar como sigue:

En una lucha entre una potencia y una exponencial, gana la exponencial.
En una lucha entre una potencia y un logaritmo, gana la potencia.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos primero el apartado (b). Sea $x > 1$, $a > 0$ y sea $s = a/2$. Como $\ln(x^s) = s\ln x$, tenemos que, utilizando el Teorema 4,

$$0 < s\ln x = \ln(x^s) \leqslant x^s - 1 < x^s$$

Por tanto, $0 < \ln x < \dfrac{1}{s}\, x^s$ y, dividiendo por $x^a = x^{2s}$,

$$0 < \frac{\ln x}{x^a} < \frac{1}{s}\,\frac{x^s}{x^{2s}} = \frac{1}{sx^s}$$

Pero $1/(sx^s) \to 0$ cuando $x \to \infty$ (ya que $s > 0$). Por tanto, por el Teorema del Sándwich,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

Seguidamente deduciremos el apartado (d) a partir del apartado (b) sustituyendo $x = 1/t$. Como $x \to 0+$ tenemos que $t \to \infty$, y

$$\lim_{x\to 0+} x^a \ln x = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1/t)}{t^a} = \lim_{t\to\infty} \frac{-\ln t}{t^a} = -0 = 0$$

Ahora deduciremos el apartado (a) a partir del apartado (b). Si $x = \ln t$, entonces $t \to \infty$ cuando $x \to \infty$, por lo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^a}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\ln t}{t^{1/a}}\right)^a = 0^a = 0$$

Finalmente, (c) se deduce de (a) mediante la sustitución $x = -t$:

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = \lim_{t\to\infty} |-t|^a e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^a}{e^t} = 0$$

Modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial

En muchos procesos naturales intervienen cantidades que crecen o decrecen con una velocidad proporcional a su tamaño. Por ejemplo, la masa de un cultivo de bacterias que crece en un medio que proporciona los nutrientes adecuados crecerá con una velocidad proporcional a dicha masa. El valor de una inversión con interés compuesto crece con una velocidad proporcional a dicho valor. La masa de material radiactivo no descompuesto en una muestra de crece con una velocidad proporcional a dicha masa.

Todos estos fenómenos, y otros que muestran un comportamiento similar, se pueden modelar matemáticamente de la misma forma. Si $y = y(t)$ indica el valor de una cantidad y en el instante t, y si y cambia con una velocidad proporcional a su tamaño, entonces

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

siendo k la constante de proporcionalidad. La ecuación anterior se denomina **ecuación diferencial de crecimiento o decrecimiento exponencial** ya que, para cualquier valor de la constante C, la función $y = Ce^{kt}$ cumple la ecuación. De hecho, si $y(t)$ representa cualquier solución de la ecuación diferencial $y' = ky$, entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{e^{kt}}\right) = \frac{e^{kt}y'(t) - ke^{kt}y(t)}{e^{2kt}} = \frac{y'(t) - ky(t)}{e^{kt}} = 0 \quad \text{para todo } t$$

Entonces $y(t)/e^{kt} = C$, una constante, e $y(t) = Ce^{kt}$. Como $y(0) = Ce^0 = C$,

> El problema de valor inicial $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ tiene como solución única $y = y_0e^{kt}$

Si $y_0 > 0$, entonces $y(t)$ es una función creciente con t si $k > 0$ y es una función decreciente con t si $k < 0$. Se dice que la cantidad y presenta un **crecimiento exponencial** si $k > 0$ y un **decrecimiento exponencial** si $k < 0$. *Véase* la Figura 3.15.

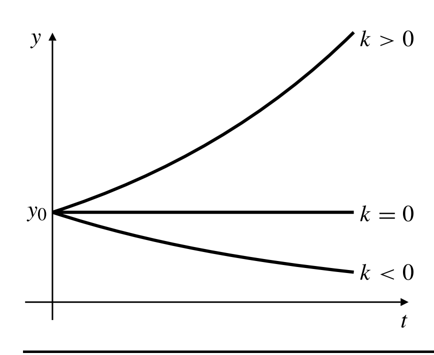


Figura 3.15 Soluciones del problema de valor inicial $dy/dt = ky$, $y(0) = y_0$, para $k > 0$, $k = 0$ y $k < 0$. ■

Ejemplo 1 **(Crecimiento de un cultivo de células)** Cierto cultivo de células crece con una velocidad proporcional al número de células presentes. Si el cultivo contiene inicialmente 500 células y 800 tras 24 horas, ¿cuántas células habrá después de otras 12 horas?

Solución Sea $y(t)$ el número de células presentes t horas después del instante en el que había 500 células. Por tanto, $y(0) = 500$ y $y(24) = 800$. Como $dy/dt = ky$, tenemos que

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 500e^{kt}$$

Por tanto, $800 = y(24) = 500e^{24k}$, con lo que $24k = \ln \frac{800}{500} = \ln(1.6)$. Se deduce que $k = (1/24)\ln(1.6)$ y

$$y(t) = 500e^{(t/24)\ln(1.6)} = 500(1.6)^{t/24}$$

Deseamos conocer el valor de y cuando $t = 36$: $y(36) = 500e^{(36/24)\ln(1.6)} = 500(1.6)^{3/2} \approx 1012$. El número de células creció hasta 1012 doce horas después de que hubiera 800 células. ■

El crecimiento exponencial se caracteriza por un **tiempo de doblaje fijo**. Si T es el instante en el que y dobla el tamaño que tenía en $t = 0$, entonces $2y(0) = y(T) = y(0)e^{kT}$. Por tanto, $e^{kT} = 2$. Como $y(t) = y(0)e^{kt}$, tenemos que

$$y(t + T) = y(0)e^{k(t+T)} = e^{kT}y(0)e^{kt} = 2y(t)$$

es decir, siempre se requieren T unidades de tiempo para que y doble su valor. De forma similar, el decrecimiento exponencial requiere siempre un tiempo fijo para reducir el valor a la mitad (denominado generalmente **semivida**). Si $y(T) = \frac{1}{2}y(0)$, entonces $e^{kT} = \frac{1}{2}$ y

$$y(t + T) = y(0)e^{k(t+T)} = \frac{1}{2}\,y(t)$$

Ejemplo 2 **(Decaimiento radiactivo)** Un material radiactivo tiene una semivida de 1200 años. ¿Qué porcentaje de la radiactividad original de la muestra queda después de 10 años? ¿Cuántos años son necesarios para reducir la radiactividad en un 10%?

Solución Sea $p(t)$ el porcentaje de la radiactividad inicial después de t años. Entonces, $p(0) = 100$ y $p(1200) = 50$. Como la radiactividad decrece con una velocidad proporcional a sí misma, $dp/dt = kp$ y

$$p(t) = 100e^{kt}$$

Pero $50 = p(1200) = 100e^{1200k}$, por lo que

$$k = \frac{1}{1200}\ln\frac{50}{100} = -\frac{\ln 2}{1200}$$

El porcentaje que queda después de 10 años es

$$p(10) = 100e^{10k} = 100e^{-10(\ln 2)/1200} \approx 99.424$$

Si después de t queda el 90% de la radiactividad, entonces

$$90 = 100e^{kt}$$

$$kt = \ln\frac{90}{100}$$

$$t = \frac{1}{k}\ln(0.9) = -\frac{1200}{\ln 2}\ln(0.9) \approx 182.4$$

por lo que se requerirá un poco más de 182 años para reducir la radiactividad el 10%. ■

Algunas veces en el crecimiento o decrecimiento exponencial interviene una cantidad que cambia con una velocidad proporcional a la diferencia entre sí misma y un valor fijo:

$$\frac{dy}{dt} = k(y - a)$$

En este caso se debería utilizar el cambio de la variable dependiente $u(t) = y(t) - a$ para convertir la ecuación diferencial a una forma estándar. Obsérvese que $u(t)$ cambia con la misma velocidad que $y(t)$ (es decir, $du/dt = dy/dt$), por lo que cumple

$$\frac{du}{dt} = ku$$

Ejemplo 3 **(Ley del enfriamiento de Newton)** Un objeto caliente que se introduce en un entorno más frío se enfriará con una velocidad proporcional al exceso de su temperatura con respecto a la del entorno. Si una taza de café situada en una habitación que se mantiene a una temperatura de 20 °C se enfría de 80 °C a 50 °C en cinco minutos, ¿cuánto tiempo tardará en enfriarse hasta 40 °C?

Solución Sea $y(t)$ la temperatura del café t minutos después del instante en el que estaba a 80 ºC. Entonces $y(0) = 80$ y $y(5) = 50$. La ley de Newton indica que $dy/dt = k(y - 20)$ en este caso, por tanto $u(t) = y(t) - 20$. Entonces, $u(0) = 60$ y $u(5) = 30$. Tenemos que

$$\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} - k(y - 20) = ku$$

Entonces,

$$\begin{aligned} u(t) &= 60e^{kt} \\ 30 = u(5) &= 60e^{5k} \\ 5k &= \ln\tfrac{1}{2} = -\ln 2 \end{aligned}$$

Deseamos calcular el instante t en el que $y(t) = 40$, es decir, $u(t) = 20$:

$$\begin{aligned} 20 = u(t) &= 60e^{-(t/5)\ln 2} \\ -\frac{t}{5}\ln 2 &= \ln\frac{20}{60} = -\ln 3 \\ t &= 5\,\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 7.92 \end{aligned}$$

El café tardará aproximadamente $7.92 - 5 = 2.92$ minutos en enfriarse de 50 ºC a 40 ºC. ■

Interés de inversiones

Supongamos que se invierten 10 000 € con una tasa anual de interés del 8%. El valor de la inversión transcurrido un año será de 10 000 (1.08) = 10 800 €. Si esta cantidad se invierte un segundo año con la misma tasa de interés crecerá hasta valer $10\,000\,(1.08)^2 = 11\,664$. En general, n años después de la realización de la inversión original, el valor será $10\,000\,(1.08)^n$.

Supongamos ahora que el 8% de interés se *computa semianualmente*, de forma que el interés que realmente se paga es una tasa del 4% en un periodo de seis meses. Tras un año (dos periodos de interés) los 10 000 € habrán crecido hasta valer $10\,000\,(1.04)^2 = 10\,816$ €. Esto representa 16 € más que lo que se obtuvo cuando el 8% se calculó para todo un año. Los 16 € extra son el interés que se paga en el segundo periodo de seis meses por los 400 € ganados en el primer periodo de seis meses. Continuando de esta manera, si el 8% de interés se computa *mensualmente* (12 periodos al año y cada periodo con un interés de $\frac{8}{12}$%) o *diariamente* (365 periodos al año y cada periodo con un interés de $\frac{8}{365}$, entonces los 10.000 € originales crecerían en un año $10\,000\left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{12} = 10\,830$ € o $10\,000\left(1 + \frac{8}{36\,500}\right)^{365} = 10\,832.78$ €, respectivamente.

Para cualquier tasa de interés *nominal*, la inversión crece más si el periodo de cómputo es más corto. En general una inversión original de A € invertida al r% anual y computada n veces al año crecerá en un año hasta

$$A\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n \text{ €}$$

Parece natural preguntarnos qué ocurrirá con nuestra inversión si hacemos que el número de periodos al año tienda a infinito, es decir, calculamos el interés de forma *continua*. La respuesta es que en un año A € crecerán hasta valer

$$A \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n = Ae^{r/100} \text{ €}$$

Por ejemplo, con un interés del 8% anual computado de forma continua, nuestros 10 000 € crecerán en un año hasta valer $10\,000\,e^{0.008} \approx 10\,832.87$ € (nótese que sólo son unos pocos cénti-

mos más que cuando lo computamos diariamente). Para justificar este resultado necesitamos el siguiente teorema.

TEOREMA 6 Para todo número real x,

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

DEMOSTRACIÓN Si $x = 0$, no hay nada que demostrar. Ambos miembros de la igualdad valen uno. Si $x \neq 0$, sea $h = x/n$. Cuando n tiende a infinito, h tiende a 0. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} x\,\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \\
&= x\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} && \text{(siendo } h = x/n\text{)} \\
&= x\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} && \text{(ya que } \ln 1 = 0\text{)} \\
&= x\left(\frac{d}{dt}\ln t\right)\Big|_{t=1} && \text{(por la definición de derivada)} \\
&= x\,\frac{1}{t}\Big|_{t=1} = x
\end{aligned}$$

Como ln es diferenciable, es continuo. Por tanto, por el Teorema 7 de la Sección 1.4,

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x$$

Tomando exponenciales en los dos miembros se obtiene la fórmula requerida.

En el caso de $x = 1$ la fórmula dada en el Teorema 6 toma la siguiente forma:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Podemos utilizar esta fórmula para calcular aproximaciones a e, como se muestra en la Tabla 2. Al obtener los números de esta tabla hemos hecho trampa en cierto sentido. Se obtuvieron utilizando la función y^x en una calculadora científica. Sin embargo, esta función se calcula realmente como $e^{x\ln y}$. En todo caso, la fórmula de esta tabla no es una forma muy eficiente de calcular e con una gran precisión. Para $n = 100\,000$ sólo son correctas cuatro cifras decimales. Una forma mucho mejor es utilizar la serie

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$$

como veremos en la Sección 4.8.

Tabla 2.

n	$\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.593 74...
100	2.704 81...
1000	2.716 92...
10 000	2 718 15...
100 000	2.718 27...

Un comentario final sobre las tasas de interés. Las instituciones financieras algunas veces utilizan tasas de interés *efectivas* en vez de tasas de interés *nominales*. La tasa efectiva indica cuál será el efecto real de la tasa de interés transcurrido un año. Es decir, 10 000 € invertidos con una tasa efectiva del 8% crecerán hasta valer 10 800 € en un año, independientemente del periodo de cómputo. Una tasa nominal del 8% anual computada diariamente es equivalente a una tasa efectiva de aproximadamente 8.3278%.

Crecimiento logístico

Pocas cantidades en la naturaleza pueden sostener un crecimiento exponencial durante periodos extensos de tiempo. El crecimiento generalmente estará limitado por restricciones externas. Por ejemplo, supongamos que un pequeño número de conejos (de ambos sexos) se introduce en una pequeña isla donde no había conejos previamente, y donde no existen depredadores que puedan comerse a los conejos. En virtud de su fertilidad natural, el número de conejos podría crecer exponencialmente, pero este crecimiento al final estará limitado por la cantidad de alimento disponible para los conejos. Supongamos que la isla puede proporcionar suficiente alimento para sostener indefinidamente una población de L conejos. Si hay $y(t)$ conejos en la población en el instante t, podemos esperar que $y(t)$ crezca con una velocidad proporcional a $y(t)$ siempre que $y(t)$ sea lo suficientemente pequeño (mucho menor que L). Un posible modelo para este comportamiento es la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$

que se denomina **ecuación logística** ya que modela un crecimiento limitado por el *suministro* de recursos necesarios. Obsérvese que $dy/dt > 0$ si $0 < y < L$ y que esta velocidad es pequeña si y es pequeña (hay pocos conejos para reproducirse) o si y tiene un valor cercano a L (hay casi tantos conejos como los recursos disponibles pueden alimentar). Obsérvese también que $dy/dt < 0$ si $y > L$. Si hay más animales de los que los recursos pueden alimentar, los conejos mueren con mayor velocidad que nacen. Por supuesto, las poblaciones en estado estacionario $y = 0$ y $y = L$ son soluciones de la ecuación logística; en ambos casos $dy/dt = 0$. En la Sección 7.9 examinaremos técnicas para resolver ecuaciones diferenciales como la ecuación logística. Por ahora, invitaremos al lector a verificar por diferenciación que la solución que cumple $y(0) = y_0$ es

$$y = \frac{Ly_0}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}$$

Obsérvese que, como se esperaba, si $0 < y_0 < L$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = L, \qquad \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$$

La solución dada anteriormente también sirve para $y_0 > L$. Sin embargo, esta solución no se aproxima a 0 cuando t tiende a $-\infty$ en este caso. Tiene una asíntota vertical en cierto valor negativo de t (*véase* el Ejercicio 30 posterior). La Figura 3.16 muestra varias gráficas de soluciones de la ecuación logística para varios valores positivos de y_0.

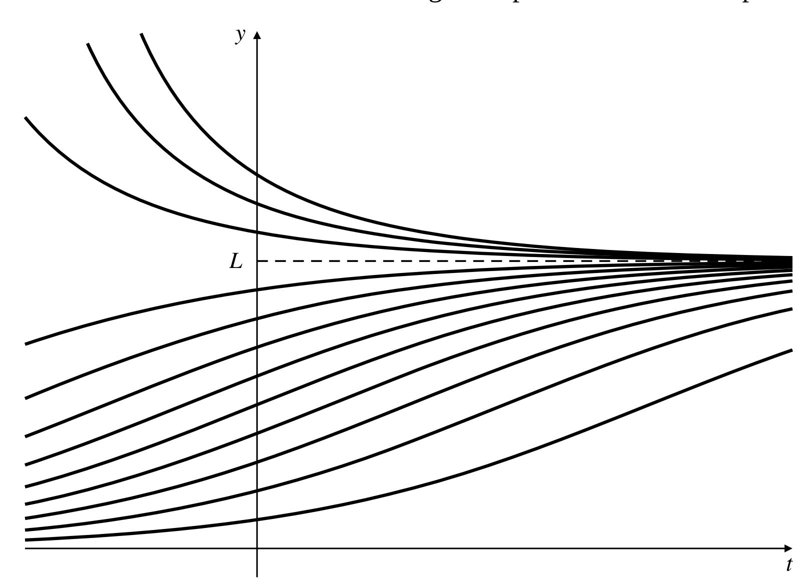


Figura 3.16 Algunas curvas logísticas.

Ejercicios 3.4

Calcule los límites de los Ejercicios 1-8.

1. $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x}$

2. $\lim_{x\to\infty} x^{-3} e^{x}$

3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 5}$

4. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x - 2e^{-x}}{x + 3e^{-x}}$

5. $\lim_{x\to 0+} x \ln x$

6. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x}$

7. $\lim_{x\to 0} x(\ln|x|)^2$

8. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}$

9. (Crecimiento bacteriano) Las bacterias de un cierto cultivo crecen con velocidad proporcional a la cantidad de bacterias presentes. Si inicialmente hay 100 bacterias presentes y la cantidad se dobla en una hora, ¿cuántas bacterias habrá después de hora y media?

10. (Disolución de azúcar) El azúcar se disuelve en el agua con velocidad proporcional a la cantidad que queda sin disolver. Si inicialmente hay 50 kilos de azúcar, y tras cinco horas sólo quedan 20 kilos, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir hasta que se disuelva el 90% del azúcar?

11. (Decaimiento radiactivo) Una sustancia radiactiva se desintegra con una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si el 30% de las sustancias se desintegra en 15 años, ¿cuál es la semivida de la sustancia?

12. (Semivida del radio) Si la semivida del radio es de 1690 años, ¿qué porcentaje de la cantidad presente quedará después de (a) 100 años, (b) 1000 años?

13. Calcule la semivida de una sustancia radiactiva si después de un año queda todavía el 99.57% de la cantidad inicial.

14. (Crecimiento bacteriano) En un cierto cultivo donde la velocidad del crecimiento de bacterias es proporcional al número presente, el número se triplica en tres días. Si al final del séptimo día hay 10 millones de bacterias presentes en el cultivo, ¿cuántas había inicialmente?

15. (Peso de un recién nacido) En las primeras semanas después de nacer, un bebé gana peso con velocidad proporcional a su peso. Un bebé que pesa cuatro kilos en el momento de nacer pesa 4.4 kilos después de dos semanas. ¿Cuánto pesaba el bebé cinco días después de nacer?

16. **(Corriente eléctrica)** Cuando se elimina la fuerza electromotriz en un circuito eléctrico simple que contiene inductancia y resistencia pero no capacitancia la velocidad de decrecimiento de la corriente es proporcional a dicha corriente. Si la corriente es $I(t)$ amperios t segundos después del corte, y si $I = 40$ cuando $t = 0$ y $I = 15$ cuando $t = 0.01$, obtenga una fórmula para $I(t)$.

17. **(Interés compuesto)** ¿Cuánto dinero hay que invertir hoy con una tasa de interés compuesto nominal del 4% para que crezca hasta un valor de 10.000 € en 7 años?

18. **(Interés compuesto)** El dinero invertido con interés compuesto (con cómputo instantáneo) se acumula con una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si una inversión inicial de 1000 € crece hasta valer 1500 € exactamente en cinco años, calcule (a) el tiempo de doblaje de la inversión y (b) la tasa anual efectiva del interés que se paga.

19. **(Poder adquisitivo)** Si el poder adquisitivo del dólar decrece con una velocidad efectiva del 9% anual, ¿cuánto tiempo se requerirá para que el poder adquisitivo se reduzca a 25 centavos?

∗20. **(Tasa de interés efectiva)** Un banco afirma que paga interés en una cuenta de inversión con una tasa efectiva del 9.5%. Si el interés se computa realmente de forma mensual, ¿cuál es la tasa nominal de interés que se paga en la cuenta?

∗21. Suponga que se introducen 1000 conejos en una isla donde no hay depredadores naturales. Durante los cinco años siguientes la población de conejos crece exponencialmente. Tras los dos primeros años la población creció hasta 3500 conejos. Después de los cinco primeros años un virus se propagó en la isla, con lo que la población de conejos decreció exponencialmente. Dos años después de que se introdujera el virus (por tanto, siete años después de que se introdujeran los conejos en la isla), la población de conejos descendió a 3000 individuos. ¿Cuántos conejos habrá en la isla 10 años después de su introducción?

22. En un determinado experimento en una isla aislada se utilizan ratas de laboratorio. Inicialmente se llevan a la isla R ratas y se liberan allí. Teniendo a su disposición suficiente alimento y sin depredadores naturales en la isla, la población de ratas crece exponencialmente y dobla su tamaño en tres meses. Al final del quinto mes, y cada cinco meses desde entonces, se capturan y se matan 1000 ratas. ¿Cuál es el mínimo valor de R que garantiza a los científicos que nunca se quedarán sin ratas?

Ecuaciones diferenciales de la forma $y' = a + by$

23. Suponga que $f(x)$ cumple la ecuación diferencial

$$f'(x) = a + bf(x)$$

siendo a y b constantes.

(a) Resuelva la ecuación diferencial sustituyendo $u(x) = a + bf(x)$ y resolviendo la ecuación diferencial más sencilla que resulta en $u(x)$.

(b) Resuelva el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a + by \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

24. **(Concentración de medicamentos en la sangre)** Se introduce por vía intravenosa un medicamento con velocidad constante. Tras finalizar su introducción es eliminado por el cuerpo con una velocidad proporcional a su concentración en la sangre. La concentración $x(t)$ del medicamento en la sangre cumple la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = a - bx$$

siendo a y b constantes positivas.

(a) ¿Cuál es la concentración límite $\lim_{t\to\infty} x(t)$ del medicamento en la sangre?

(b) Calcule la concentración del medicamento en la sangre en el instante t, sabiendo que la concentración era cero en $t = 0$.

(c) ¿Cuánto tiempo habrá de transcurrir desde $t = 0$ para que la concentración alcance la mitad de su valor límite?

25. **(Enfriamiento)** Utilice la ley de enfriamiento de Newton para determinar la lectura de un termómetro cinco minutos después de tomarla en un horno que estaba a 72 °C con respeto una habitación que estaba a 20 °C, si la lectura desciende a 48 °C tras un minuto.

26. **(Enfriamiento)** Un objeto se sitúa en un congelador que se mantiene una temperatura de −5 °C. Si el objeto se enfría de 45 °C a 20 °C en 40 minutos ¿cuántos minutos deberán transcurrir para que se enfríe a 0 °C?

27. **(Calentamiento)** Si un objeto en una habitación se calienta de 5 °C a 10 °C en cuatro minutos, y si la habitación se mantiene a 20 °C, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que aquel objeto se caliente hasta 15 °C? Suponga que el objeto se calienta con una velocidad proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura de la habitación.

La ecuación logística

∗28. Suponga que la cantidad $y(t)$ muestra un crecimiento logístico. Si los valores de $y(t)$ en los instantes $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$ son y_0, y_1 y y_2, respectivamente, calcule la ecuación que cumple el valor límite L de $y(t)$, y despeje L. Si $y_0 = 3$, $y_1 = 5$ y $y_2 = 6$, calcule L.

∗29. Demuestre que una solución $y(t)$ de la ecuación logística con $0 < y(0) < L$ crece más rápidamente cuando su valor es $L/2$ (*Sugerencia*: No es necesario utilizar la fórmula de la ecuación para ver esto).

∗30. Si $y_0 > L$, calcule el intervalo en el que la solución dada de la ecuación logística es válida. ¿Qué sucede con la solución cuando t se acerca al extremo izquierdo de este intervalo?

∗31. Si $y_0 < 0$, calcule el intervalo en el que la solución dada de la ecuación logística es válida. ¿Qué sucede con la solución cuando t se aproxima al extremo derecho de este intervalo?

32. **(Modelado de epidemias)** El número y de personas infectadas por un virus altamente contagioso se modela mediante la curva logística

$$y = \frac{L}{1 + Me^{-kt}}$$

donde t se mide en meses a partir del instante inicial del brote. En ese instante había 200 personas infectadas, y el número creció hasta 1000 tras un mes. Finalmente, el número creció hasta 10 000. Calcule los valores de los parámetros L, M y k del modelo.

33. Continuando con el Ejercicio 32, ¿cuántas personas estaban infectadas tres meses después del descubrimiento del brote, y con qué rapidez crecía su número con el tiempo?

3.5 Funciones trigonométricas inversas

Las seis funciones trigonométricas son periódicas y, por tanto, no son uno a uno. Sin embargo, tal como hicimos con la función x^2 en la Sección 3.1, podemos restringir sus dominios de forma que las funciones restringidas sean uno a uno e invertibles.

Función inversa del seno (o arcoseno)

Definamos una función $\operatorname{Sen} x$ (nótese la letra mayúscula) como $\operatorname{sen} x$, restringida de forma que su dominio sea el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$:

DEFINICIÓN 8 **La función restringida Sen x**

$$\operatorname{Sen} x = \operatorname{sen} x \qquad \text{si } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Como su derivada $\cos x$ es positiva en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, la función $\operatorname{Sen} x$ es creciente en su dominio, por lo que es una función uno a uno. Su dominio es $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y su rango $[-1, 1]$ (*véase* la Figura 3.17).

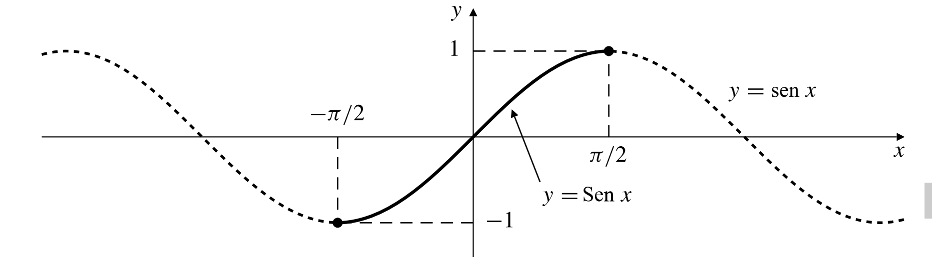


Figura 3.17 La gráfica de $\operatorname{Sen} x$ forma parte de la gráfica de $\operatorname{sen} x$.

Como es uno a uno, Sen tiene función inversa que se indica como sen^{-1} (o en algunos libros y programas de ordenador como arcsen, Arcsen o asen) y que se denomina función **inversa del seno** o **arcoseno**.

DEFINICIÓN 9 **La función inversa $\mathrm{sen}^{-1} x$ o $\mathrm{arcsen}\, x$**

$$y = \mathrm{sen}^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{Sen}\, y$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \mathrm{sen}\, y \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

La gráfica de sen^{-1} se muestra en la Figura 3.18. Es la reflexión de la gráfica de Sen con respecto a la recta $y = x$. El dominio de sen^{-1} es $[-1, 1]$ (el rango de Sen), y el rango de sen^{-1} es $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (el dominio de Sen). Las identidades de cancelación para Sen y sen^{-1} son

$$\mathrm{sen}^{-1}(\mathrm{Sen}\, x) = \mathrm{arcsen}\,(\mathrm{Sen}\, x) = x \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$\mathrm{Sen}\,(\mathrm{sen}^{-1} x) = \mathrm{Sen}\,(\mathrm{arcsen}\, x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

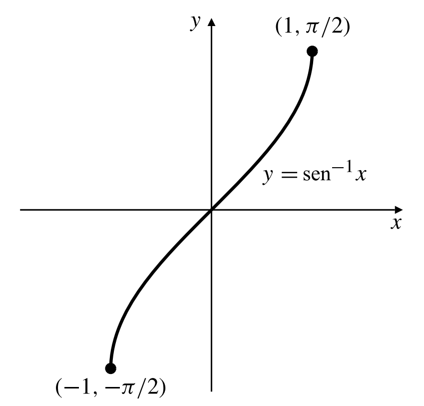


Figura 3.18 La función arcoseno.

Observación Como en el caso de la función inversa general f^{-1}, sen^{-1} *no* representa $1/\mathrm{sen}\, x$ (que ya conocemos como $\csc x$). Hay que ver $\mathrm{sen}^{-1} x$ como «el ángulo entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuyo seno es x».

Ejemplo 1

(a) $\mathrm{sen}^{-1}\,(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ (ya que $\mathrm{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$).

(b) $\mathrm{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$ (ya que $\mathrm{sen}\,(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$).

(c) $\mathrm{sen}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$ (ya que $\mathrm{sen}\,(-\frac{\pi}{2}) = -1$).

(d) $\mathrm{sen}^{-1} 2$ no está definida (2 no está en el rango del seno).

■

Ejemplo 2 Calcule (a) $\mathrm{sen}\,(\mathrm{sen}^{-1} 0.7)$, (b) $\mathrm{sen}^{-1}(\mathrm{sen}\, 0.3)$, (c) $\mathrm{sen}^{-1}(\mathrm{sen}\frac{4\pi}{5})$ y (d) $\cos\,(\mathrm{sen}^{-1} 0.6)$.

Solución

(a) $\mathrm{sen}\,(\mathrm{sen}^{-1} 0.7) = 0.7$ (identidad de cancelación).

(b) $\mathrm{sen}^{-1}(\mathrm{sen}\, 0.3) = 0.3$ (identidad de cancelación).

(c) El número $\frac{4\pi}{5}$ no está en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, por lo que no se puede aplicar la identidad de cancelación directamente. Sin embargo, $\mathrm{sen}\frac{4\pi}{5} = \mathrm{sen}\,(\pi - \frac{\pi}{5}) = \mathrm{sen}\frac{\pi}{5}$ por la identidad del ángulo suplementario. Por tanto, $\mathrm{sen}^{-1}(\mathrm{sen}\frac{4\pi}{5}) = \mathrm{sen}^{-1}(\mathrm{sen}\frac{\pi}{5}) = \frac{\pi}{5}$ (por cancelación).

(d) Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1} 0.6$, como se muestra en el triángulo rectángulo de la Figura 3.19, cuya hipotenusa es 1 y su cateto opuesto θ es igual a 0.6. Por el Teorema de Pitágoras, el cateto adyacente θ es $\sqrt{1-(0.6)^2} = 0.8$. Por tanto, $\cos(\operatorname{sen}^{-1} 0.6) = \cos\theta = 0.8$.

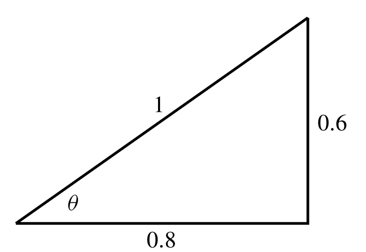


Figura 3.19

Ejemplo 3 Simplifique la expresión $\tan(\operatorname{sen}^{-1} x)$.

Solución Se desea calcular la tangente de un ángulo cuyo seno es x. Supongamos primero que $0 \leqslant x < 1$. Como en el Ejemplo 2, se dibuja un triángulo rectángulo (Figura 3.20) con un ángulo θ, y se designan los lados de forma que $\theta = \operatorname{sen}^{-1} x$. El cateto opuesto a θ es x y la hipotenusa vale 1. El cateto restante es $\sqrt{1-x^2}$ y tenemos que

$$\tan(\operatorname{sen}^{-1} x) = \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Como los dos miembros de la ecuación anterior son funciones impares de x, se obtiene el mismo resultado para $-1 < x < 0$..

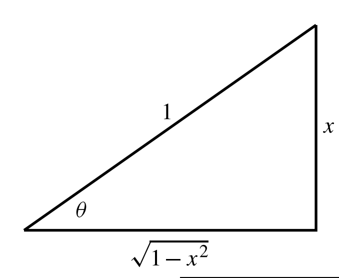


Figura 3.20

A continuación utilizaremos la diferenciación implícita para calcular la derivada de la función inversa del seno. Si $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, entonces $x = \operatorname{sen} y$, y $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Diferenciando con respecto a x, se obtiene

$$1 = (\cos y)\,\frac{dy}{dx}$$

Como $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, sabemos que $\cos y \geqslant 0$. Por tanto,

$$\cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

y $dy/dx = 1/\cos y = 1/\sqrt{1-x^2}$;

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Nótese que la función inversa del seno es diferenciable solamente en el intervalo *abierto* $(-1, 1)$. La pendiente de su gráfica tiende a infinito cuando $x \to -1+$ o cuando $x \to 1-$ (*véase* la Figura 3.18).

Ejemplo 4 Calcule la derivada de $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ y después evalúe $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, siendo $a > 0$.

Solución Utilizando la Regla de la Cadena,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\,\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}}\,\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{si } a > 0$$

Por tanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad (a > 0)$$

Ejemplo 5 Calcule la solución y del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4}{\sqrt{2 - x^2}} & (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}) \\ y(1) = 2\pi \end{cases}$$

Solución Utilizando la integral del ejemplo anterior, tenemos que

$$y = \int \frac{4}{\sqrt{2 - x^2}}\,dx = 4\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

para alguna constante C. Además, $2\pi = y(1) = 4\operatorname{sen}^{-1}(1/\sqrt{2}) + C = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) + C = \pi + C$. Por lo tanto, $C = \pi$ y $y = 4\operatorname{sen}^{-1}(x/\sqrt{2}) + \pi$.

Ejemplo 6 **(Curva en diente de sierra)** Sea $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$ para todo número real x.

(a) Calcule y simplifique $f'(x)$.

(b) ¿Dónde es f diferenciable? ¿Dónde es f continua?

(c) Utilice los resultados de (a) y (b) para dibujar aproximadamente la gráfica de f.

Solución (a) Utilizando la Regla de la Cadena y la igualdad pitagórica se calcula

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2}}(\cos x) \\ &= \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } \cos x > 0 \\ -1 & \text{si } \cos x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) f es diferenciable en todos los puntos donde $\cos x \neq 0$, es decir, en todas partes excepto en los múltiplos impares de $\pi/2$, concretamente $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$

Como el seno es continuo en todas partes y toma valores en el intervalo $[-1, 1]$, y ya que sen^{-1} es continua en el intervalo $[-1, 1]$, se deduce que f es continua en toda la recta real.

(c) Como f es continua, su gráfica no tiene interrupciones. La gráfica está formada por segmentos de rectas cuyas pendientes van alternando entre 1 y -1 en los intervalos entre los múltiplos impares consecutivos de $\pi/2$. Como $f'(x) = 1$ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (siendo $\cos x \geqslant 0$), la gráfica debe ser como se muestra en la Figura 3.21.

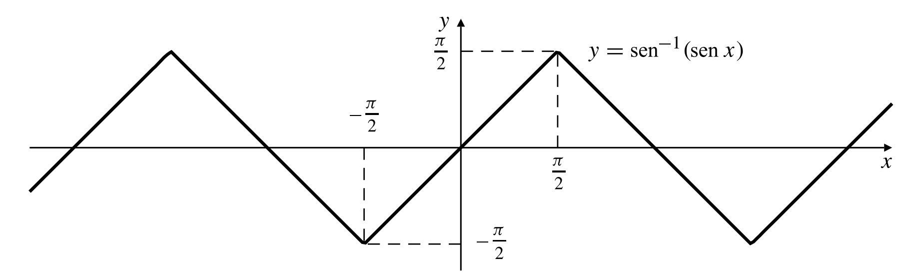


Figura 3.21 Gráfica en diente de sierra.

Función inversa de la tangente (o arcotangente)

La función inversa de la tangente se define de forma similar a la inversa del seno. Comenzaremos por restringir la tangente a un intervalo en el que sea uno a uno. En este caso utilizaremos el intervalo abierto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. *Véase* la Figura 3.22(a).

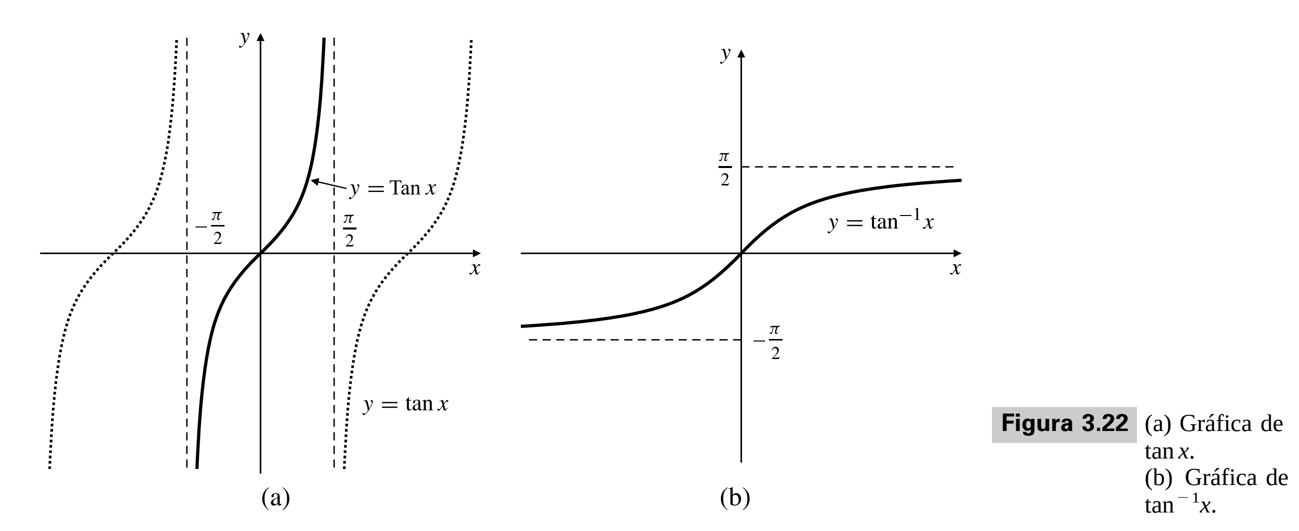


Figura 3.22 (a) Gráfica de $\tan x$. (b) Gráfica de $\tan^{-1}x$.

DEFINICIÓN 10 **La función restringida Tan x**

$$\operatorname{Tan} x = \tan x \qquad \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

La inversa de la función Tan se denomina **función inversa de la tangente** y se indica como $\tan^{-1}$ (o arctan, Arctan o atan). El dominio de $\tan^{-1}$ es toda recta real (el rango de Tan). Su rango es el intervalo abierto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

DEFINICIÓN 11 **La función inversa de la tangente $\tan^{-1}x$ o $\arctan x$**

$$y = \tan^{-1}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{Tan} y$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \tan y \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

La gráfica de $\tan^{-1}$ se muestra en la Figura 3.22(b); corresponde a la reflexión de la gráfica de Tan respecto a la recta $y = x$.

Las identidades de cancelación para Tan y $\tan^{-1}$ son

$$\tan^{-1}(\operatorname{Tan} x) = \arctan(\operatorname{Tan} x) = x \qquad \text{para } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Tan}(\tan^{-1} x) = \operatorname{Tan}(\arctan x) = x \qquad \text{para } -\infty < x < \infty$$

Ejemplo 7 Evalúe: (a) $\tan(\tan^{-1} 3)$, (b) $\tan^{-1}\left(\tan \dfrac{3\pi}{4}\right)$ y (c) $\cos(\tan^{-1} 2)$.

Solución

(a) $\tan(\tan^{-1} 3) = 3$ por cancelación.

(b) $\tan^{-1}(\tan\frac{3\pi}{4}) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

(c) $\cos(\tan^{-1} 2) = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ por las relaciones del triángulo de la Figura 3.23. De forma alternativa, tenemos que $\tan(\tan^{-1} 2) = 2$, por lo que $\sec^2(\tan^{-1} 2) = 1 + 2^2 = 5$. Entonces $\cos^2(\tan^{-1} 2) = \frac{1}{5}$. Como el coseno es positivo en el rango de $\tan^{-1}$, tenemos que $\cos(\tan^{-1} 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

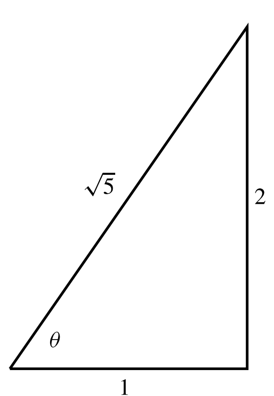


Figura 3.23

La derivada de la función tangente inversa se puede obtener también por diferenciación implícita: si $y = \tan^{-1} x$, entonces $x = \tan y$ y

$$1 = (\sec^2 y)\frac{dy}{dx} = (1 + \tan^2 y)\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)\frac{dy}{dx}$$

Entonces,

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ejemplo 8 Calcule $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, y a partir del resultado anterior evalúe $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx$.

Solución Tenemos que

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{a^2}}\,\frac{1}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Ejemplo 9 Demuestre que $\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \tan^{-1} x - \dfrac{\pi}{4}$ para $x > -1$.

Solución Sea $f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - \tan^{-1} x$. En el intervalo $(-1, \infty)$ tenemos, por la Regla de la Cadena y la Regla del Cociente,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}\,\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{(x+1)^2}{(x^2+2x+1)+(x^2-2x+1)}\,\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{2+2x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $f(x) = C$ (constante) en ese intervalo. Para obtener C se calcula $f(0)$:

$$C = f(0) = \tan^{-1}(-1) - \tan^{-1} 0 = -\frac{\pi}{4}$$

Así, la identidad dada se cumple en $(-1, \infty)$. ■

Observación Algunos programas de computador, especialmente las hojas de cálculo, implementan dos versiones de la función arcotangente, denominados generalmente «atan» y «atan2». La función atan es simplemente la función $\tan^{-1}$ que ya hemos definido; atan (y/x) devuelve el ángulo en radianes entre la recta que va del origen al punto (x, y) y el eje x positivo, suponiendo que (x, y) está en los cuadrantes I o IV del plano. La función atan2 es una función de dos variables: atan2 (x, y) devuelve ese ángulo para cualquier punto (x, y) que no esté en el eje y. *Véase* la Figura 3.24. Algunos programas, por ejemplo Matlab, invierten el orden de las variables x e y en su función atan2. Maple utiliza `arctan(x)` y `arctan(y, x)` para sus versiones de arcotangente de una y dos variables.

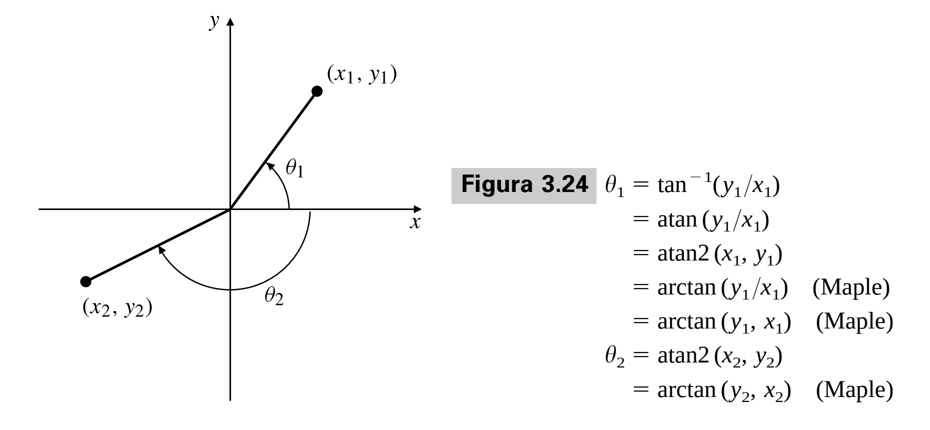


Figura 3.24
$$\begin{aligned} \theta_1 &= \tan^{-1}(y_1/x_1) \\ &= \text{atan}\,(y_1/x_1) \\ &= \text{atan2}\,(x_1, y_1) \\ &= \text{arctan}\,(y_1/x_1) \quad \text{(Maple)} \\ &= \text{arctan}\,(y_1, x_1) \quad \text{(Maple)} \\ \theta_2 &= \text{atan2}\,(x_2, y_2) \\ &= \text{arctan}\,(y_2, x_2) \quad \text{(Maple)} \end{aligned}$$

Otras funciones trigonométricas inversas

La función $\cos x$ es uno a uno en el intervalo $[0, \pi]$, lo que podríamos definir la **función inversa del coseno**, $\cos^{-1} x$ (o $\arccos x$, $\text{Arccos}\, x$ o $\text{acos}\, x$), de forma que

$$y = \cos^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

Sin embargo $\cos y = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - y)$ (identidad del ángulo complementario), y $\frac{\pi}{2} - y$ está en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cuando $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Así, la definición anterior nos lleva a

$$y = \cos^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$$

Es más fácil utilizar este resultado para definir directamente $\cos^{-1} x$:

DEFINICIÓN 12 La función inversa del coseno $\cos^{-1} x$ o $\arccos x$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{para} \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Las identidades de cancelación para $\cos^{-1} x$ son

$$\cos^{-1}(\cos x) = \arccos(\cos x) = x \qquad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi$$
$$\cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x \qquad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

La derivada de $\cos^{-1} x$ es el negativo de la de $\operatorname{sen}^{-1} x$ (¿por qué?):

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La gráfica de $\cos^{-1}$ se muestra en la Figura 3.25(a).

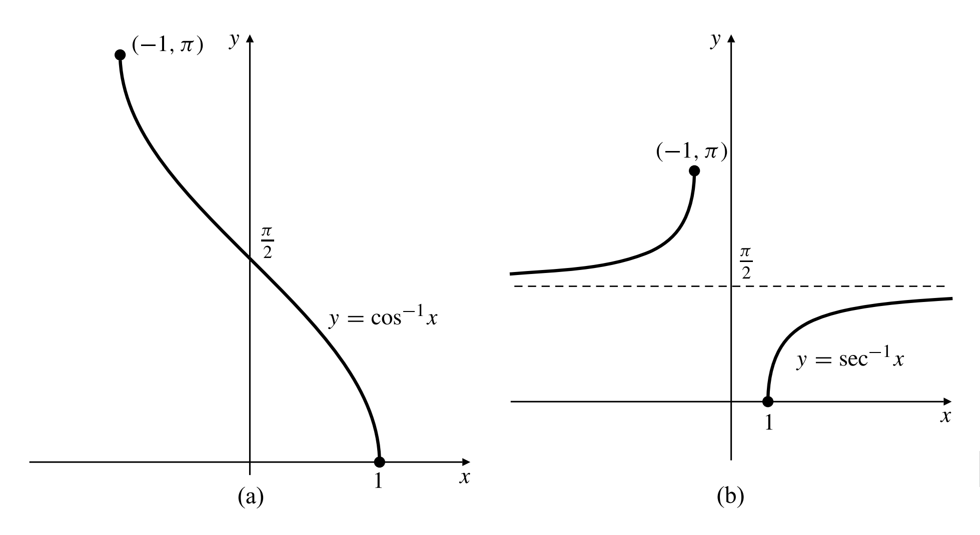


Figura 3.25 Gráficas de $\cos^{-1}$ y $\sec^{-1}$.

Las calculadoras científicas en general implementan sólo las funciones trigonométricas primarias: seno, coseno y tangente, y sus inversas. Las funciones secundarias: secante, cosecante y cotangente, se calculan utilizando la tecla $1/x$ de la calculadora. Para calcular $\sec x$ se calcula $\cos x$ y se toma el inverso de la respuesta. Las funciones inversas de las funciones trigonométricas secundarias se expresan también fácilmente por medio de las de sus funciones recíprocas. Por ejemplo, se define:

DEFINICIÓN 13 **La función inversa de la secante $\sec^{-1} x$ (o arcsec x)**

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{para } |x| \geqslant 1$$

El dominio de $\sec^{-1}$ es la unión de los intervalos $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, y su rango es $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$. La gráfica de $y = \sec^{-1} x$ se muestra en la Figura 3.25(b). Es la reflexión respecto a la recta $y = x$ de la parte de la gráfica de $\sec x$ para x entre 0 y π. Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\sec(\sec^{-1} x) &= \sec\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \qquad \text{para } |x| \geqslant 1 \\
\sec^{-1}(\sec x) &= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sec x}\right) \\
&= \cos^{-1}(\cos x) = x \qquad \text{para } x \text{ en } [0, \pi],\ x \neq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Algunos autores prefieren definir $\sec^{-1}$ como la inversa de la restricción de $\sec x$ a los intervalos separados $[0, \pi/2)$ y $[\pi, 3\pi/2)$, porque esto evita la aparición del valor absoluto en la fórmula de la derivada. Sin embargo, es mucho más difícil calcular valores con esa definición. Nuestra definición facilita la obtención de valores como $\sec^{-1}(-3)$ con una calculadora. Las calculadoras científicas en general sólo incorporan las funciones inversas del seno, el coseno y la tangente.

Se puede calcular la derivada de $\sec^{-1}$ a partir de la de $\cos^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{d}{dx} \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = \frac{1}{x^2}\frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}
\end{aligned}$$

Nótese que hemos tenido que utilizar $\sqrt{x^2} = |x|$ en la última línea. Hay valores negativos de x en el dominio de $\sec^{-1}$. Obsérvese en la Figura 3.25(b) que la pendiente de $y = \sec^{-1}(x)$ es siempre positiva.

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

La fórmula de integración correspondiente toma formas diferentes en los intervalos donde $x \geqslant 1$ o $x \leqslant -1$:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,dx = \begin{cases} \sec^{-1} x + C & \text{en intervalos donde } x \geqslant 1 \\ -\sec^{-1} x + C & \text{en intervalos donde } x \leqslant -1 \end{cases}$$

Finalmente, nótese que $\csc^{-1}$ y $\cot^{-1}$ se definen de forma similar a $\sec^{-1}$. Se utilizan raramente.

DEFINICIÓN 14 Las funciones inversas de la cosecante y la cotangente

$$\csc^{-1}x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (|x| \geqslant 1); \qquad \cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x \neq 0)$$

Ejercicios 3.5

En los Ejercicios 1-12, calcule las expresiones dadas.

1. $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{2}\right)$

3. $\tan^{-1}(-1)$

4. $\sec^{-1}\sqrt{2}$

5. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}0.7)$

6. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}0.7)$

7. $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{2\pi}{3}\right)$

8. $\operatorname{sen}^{-1}(\cos 40^{o})$

9. $\cos^{-1}(\operatorname{sen}(-0.2))$

10. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{3}\right)\right)$

11. $\cos\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{2}\right)$

12. $\tan(\tan^{-1}200)$

En los Ejercicios 13-18, simplifique las expresiones dadas.

13. $\operatorname{sen}(\cos^{-1}x)$

14. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}x)$

15. $\cos(\tan^{-1}x)$

16. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}x)$

17. $\tan(\cos^{-1}x)$

18. $\tan(\sec^{-1}x)$

En los Ejercicios 19-32, diferencie las funciones dadas y simplifique su resultado hasta donde sea posible.

19. $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)$

20. $y = \tan^{-1}(ax+b)$

21. $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

22. $f(x) = x\operatorname{sen}^{-1}x$

23. $f(t) = t\tan^{-1}t$

24. $u = z^2\sec^{-1}(1+z^2)$

25. $F(x) = (1+x^2)\tan^{-1}x$

26. $y = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{a}{x}$

27. $G(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\operatorname{sen}^{-1}2x}$

28. $H(t) = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}t}{\operatorname{sen}t}$

29. $f(x) = (\operatorname{sen}^{-1}x^2)^{1/2}$

30. $y = \cos^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$

31. $y = \sqrt{a^2-x^2} + a\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{a} \qquad (a > 0)$

32. $y = a\cos^{-1}\left(1-\dfrac{x}{a}\right) - \sqrt{2ax-x^2} \qquad (a > 0)$

33. Calcule la pendiente de la curva $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{y}\right) = \dfrac{\pi x}{y^2}$ en el punto (1, 2).

34. Obtenga las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1}x$ que tienen pendiente 2.

35. Demuestre que, en sus respectivos dominios, sen^{-1} y $\tan^{-1}$ son funciones crecientes y $\cos^{-1}$ es una función decreciente.

36. La derivada de $\sec^{-1}x$ es positiva para todo x de su dominio $\sec^{-1}$. ¿Implica esto que $\sec^{-1}$ es creciente en su dominio? ¿Por qué?

37. Dibuje aproximadamente la gráfica de $\csc^{-1}x$ y calcule su derivada.

38. Dibuje aproximadamente la gráfica de $\cot^{-1}x$ y calcule su derivada.

39. Demuestre que $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ para $x > 0$. ¿Cuánto vale la suma si $x < 0$?

40. Calcule la derivada de $g(x) = \tan(\tan^{-1}x)$ y dibuje aproximadamente la gráfica de g.

En los Ejercicios 41-44, dibuje las gráficas de las funciones dadas calculando y simplificando en primer lugar la derivada de la función. ¿Dónde es continua cada función? ¿Dónde es diferenciable?

***41.** $\cos^{-1}(\cos x)$

***42.** $\operatorname{sen}^{-1}(\cos x)$

***43.** $\tan^{-1}(\tan x)$

***44.** $\tan^{-1}(\cot x)$

45. Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1}x = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ si $|x| < 1$.

46. Demuestre que

$$\sec^{-1}x = \begin{cases} \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} & \text{si } x \geqslant 1 \\ \pi - \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}$$

47. Demuestre que $\tan^{-1}x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ para todo x.

48. Demuestre que

$$\sec^{-1}x = \begin{cases} \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \\ \pi - \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}$$

∗49. Demuestre que la función $f(x)$ del Ejemplo 9 es también constante en el intervalo $(-\infty, -1)$. Calcule el valor de la constante. *Sugerencia*: Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

∗50. Calcule la derivada de $f(x) = x - \tan^{-1}(\tan x)$. ¿Qué implica su respuesta sobre $f(x)$? Calcule $f(0)$ y $f(\pi)$. ¿Hay aquí una contradicción?

∗51. Calcule la derivada de $f(x) = x - \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$ para $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ y dibuje la gráfica de f en ese intervalo.

En los Ejercicios 52-55, resuelva los problemas de valor inicial.

❖52. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

❖ 53. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{9+x^2} \\ y(3) = 2 \end{cases}$

❖54. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ y(1/2) = 1 \end{cases}$

❖ 55. $\begin{cases} y' = \dfrac{4}{\sqrt{25-x^2}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3.6 Funciones hiperbólicas

Cualquier función definida en la recta real se puede expresar (de forma única) como la suma de una función par y una función impar (*véase* el Ejercicio 35 de la Sección P.5). Las **funciones hiperbólicas** $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$ son, respectivamente, las funciones par e impar cuya suma es la función exponencial e^x.

DEFINICIÓN 15 **Las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico**

Para cualquier número real x el **coseno hiperbólico**, $\cosh x$, y **seno hiperbólico**, $\operatorname{senh} x$, se definen como

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Recuérdese que el coseno y el seno se denominan *funciones circulares* debido a que, para todo t, el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ está en la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. De forma similar, cosh y senh se denominan *funciones hiperbólicas* porque el punto $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ está en la hipérbola rectangular cuya ecuación es $x^2 - y^2 = 1$,

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1 \qquad \text{para todo } t \text{ real}$$

Para ver esto, obsérvese que

$$\begin{aligned}\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\,(e^{2t} + 2 + e^{-2t} - (e^{2t} - 2 + e^{-2t})) \\ &= \frac{1}{4}\,(2+2) = 1\end{aligned}$$

En este caso t no se puede interpretar como longitud de un arco ni como un ángulo, como hacíamos en el caso circular; sin embargo, el *área* del *sector hiperbólico* que está limitado por $y = 0$, la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y la recta que va del origen a $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ es de $t/2$ unidades cuadradas (*véase* el Ejercicio 21 de la Sección 8.4), lo mismo que el área del sector circular limitado por $y = 0$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta que va del origen a $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ (*véase* la Figura 3.26).

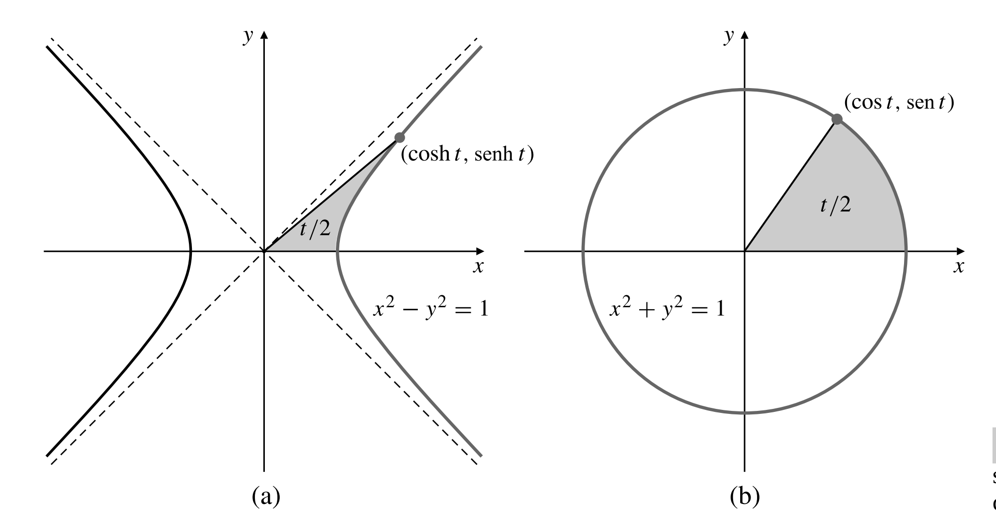


Figura 3.26 Las dos áreas sombreadas miden $t/2$ unidades cuadradas.

Obsérvese que, de forma similar a los correspondientes valores de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, tenemos que

$$\cosh 0 = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{senh} 0 = 0$$

y que $\cosh x$, como $\cos x$, es una función par y $\operatorname{senh} x$, como $\operatorname{sen} x$, es una función impar:

$$\cosh(-x) = \cosh x, \qquad \operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$$

Las gráficas de cosh y senh se muestran en la Figura 3.27. La gráfica de $y = \cosh x$ se denomina **catenaria**. Una cadena que cuelga por sus extremos tomará la forma de una catenaria.

Muchas otras propiedades de las funciones hiperbólicas se parecen a las de sus correspondientes funciones circulares, algunas veces con los signos cambiados.

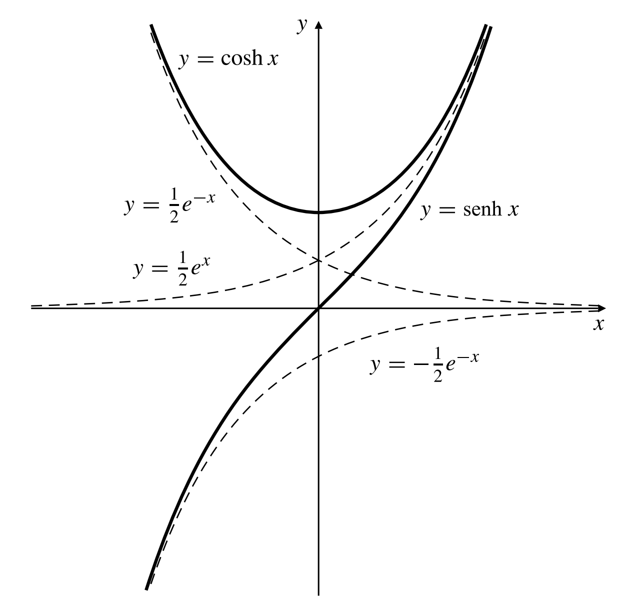


Figura 3.27 Gráficas de cosh y senh y algunas funciones exponenciales con respecto a las que son asintóticas.

Ejemplo 1 Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$$

Solución Tenemos que

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}(-1)}{2} = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \cosh x$$

■

Las siguientes fórmulas de adición y del ángulo doble se pueden comprobar algebraicamente utilizando la definición de cosh y senh, junto con las leyes de los exponentes:

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$
$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = 1 + 2\operatorname{senh}^2 x = 2\cosh^2 x - 1$$
$$\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh} x \cosh x.$$

Por analogía con las funciones trigonométricas, se pueden definir otras cuatro funciones hiperbólicas en función de cosh y senh.

DEFINICIÓN 16 **Otras funciones hiperbólicas**

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Multiplicando el numerador y un denominador de la fracción que define $\tanh x$ por e^{-x} y e^x, respectivamente, se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \tanh x = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

de forma que la gráfica de $y = \tanh x$ tiene dos asíntotas horizontales. La gráfica de $\tanh x$ (Figura 3.28) recuerda en su forma a las de $x/\sqrt{1 + x^2}$ y $(2/\pi)\tan^{-1} x$, pero, por supuesto, no son idénticas.

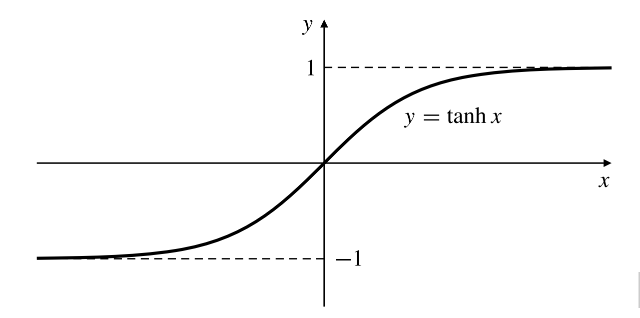


Figura 3.28 Gráfica de $\tanh x$.

Las derivadas de las restantes funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

se calculan rápidamente a partir de las de $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$ utilizando las Reglas de la Inversa y del Cociente. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{(\cosh x)(\cosh x) - (\operatorname{senh} x)(\operatorname{senh} x)}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

Observación La distinción entre funciones trigonométricas e hiperbólicas desaparece en buena parte si se utilizan como variables números complejos en vez de números reales. Si i es la unidad imaginaria (de forma que $i^2 = -1$), entonces

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

(*Véase* el Apéndice I). Por tanto,

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x, \qquad \cos(ix) = \cosh(-x) = \cosh x,$$

$$\operatorname{senh}(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \operatorname{sen} x, \qquad \operatorname{sen}(ix) = \frac{1}{i}\operatorname{senh}(-x) = i \operatorname{senh} x$$

Funciones hiperbólicas inversas

Las funciones senh y tanh son crecientes y, por tanto, uno a uno e invertibles en toda la recta real. Sus inversas se denominan senh^{-1} y $\tanh^{-1}$, respectivamente:

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{senh} y$$

$$y = \tanh^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tanh y$$

Como las funciones hiperbólicas se definen mediante exponenciales, cabe esperar que sus inversas se puedan expresar mediante logaritmos.

Ejemplo 2 Exprese $\operatorname{senh}^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$ mediante logaritmos.

Solución Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}$. Entonces,

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{(e^y)^2 - 1}{2e^y}$$

Para obtener la segunda fracción, hemos multiplicado el numerador y el denominador de la primera fracción por e^y. Por tanto,

$$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$$

Ésta es una ecuación de segundo grado en e^y, que se puede resolver mediante la correspondiente fórmula:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Nótese que $\sqrt{x^2 + 1} > x$. Como e^y no puede ser negativa, hay que emplear el signo positivo:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Por tanto, $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, y tenemos que

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Hagamos ahora $y = \tanh^{-1} x$. Entonces,

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \quad (-1 < x < 1)$$

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}, \qquad y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

Así,

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \qquad (-1 < x < 1)$$

■

Como cosh no es uno a uno, hay que restringir su dominio antes de definir su función inversa. Definamos el valor principal de cosh como

$$\operatorname{Cosh} x = \cosh x \qquad (x \geqslant 0)$$

La función inversa, $\cosh^{-1}$, se define entonces así:

$$\begin{aligned} y = \cosh^{-1} x \quad &\Leftrightarrow \quad x = \operatorname{Cosh} y \\ &\Leftrightarrow \quad x = \cosh y \qquad (y \geqslant 0) \end{aligned}$$

Tal como hicimos con senh^{-1}, se puede obtener la fórmula

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad (x \geqslant 1)$$

Ejercicios 3.6

1. Verifique las fórmulas de las derivadas de $\operatorname{sech} x$, $\operatorname{csch} x$ y $\coth x$ dadas en esta sección.

2. Verifique las fórmulas de suma

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$
$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

Para ello exprese los miembros derechos de cada igualdad en función de exponenciales. Obtenga fórmulas similares para $\cosh(x-y)$ y $\operatorname{senh}(x-y)$.

3. Obtenga fórmulas de suma para $\tanh(x+y)$ y $\tanh(x-y)$ a partir de las de senh y cosh.

4. Dibuje las gráficas de $y = \coth x$, $y = \operatorname{sech} x$ y $y = \operatorname{csch} x$, indicando sus asíntotas.

5. Calcule las derivadas de $\operatorname{senh}^{-1} x$, $\cosh^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$. Seguidamente exprese las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad \int \frac{dx}{1-x^2}$$

mediante funciones hiperbólicas inversas.

6. Calcule las derivadas de las funciones $\operatorname{senh}^{-1}(x/a)$, $\cosh^{-1}(x/a)$ y $\tanh^{-1}(x/a)$ (con $a > 0$), y utilice los resultados para obtener fórmulas de ciertas integrales indefinidas.

7. Simplifique las siguientes expresiones: (a) $\operatorname{senh} \ln x$, (b) $\cosh \ln x$, (c) $\tanh \ln x$, (d) $\dfrac{\cosh \ln x + \operatorname{senh} \ln x}{\cosh \ln x - \operatorname{senh} \ln x}$

8. Sea $\operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{senh}^{-1}(1/x)$. Calcule el dominio, rango y derivada de $\operatorname{csch}^{-1} x$ y dibuje aproximadamente su gráfica. Exprese $\operatorname{csch}^{-1} x$ mediante logaritmos.

9. Repita el Ejercicio 8 para $\coth^{-1} x$.

∗10. Defina $\operatorname{Sech} x$ como una versión de $\operatorname{sech} x$ restringida adecuadamente y repita el Ejercicio 8 para la función $\operatorname{Sech}^{-1} x$.

❖11. Demuestre que las funciones $f_{A,B}(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ y $g_{C,D}(x) = C\cosh kx + D \operatorname{senh} kx$ son ambas soluciones de la ecuación diferencial $y'' - k^2 y = 0$ (ambas son soluciones generales). Exprese $f_{A,B}$ en función de $g_{C,D}$ y exprese $g_{C,D}$ en función de $f_{A,B}$.

❖12. Demuestre que $h_{L,M}(x) = L\cosh k(x-a) + M \operatorname{senh} k(x-a)$ es también una solución de la ecuación diferencial del ejercicio anterior. Exprese $h_{L,M}$ por medio de la función anterior $f_{A,B}$.

❖13. Resuelva el problema de valor inicial $y'' - k^2 y = 0$, $y(a) = y_0$, $y'(a) = v_0$. Exprese la solución mediante la función $h_{L,M}$ del Ejercicio 12.

3.7 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial de la forma

$$ay'' = by' + cy = 0 \qquad (*)$$

siendo a, b y c constantes y $a \neq 0$ se denomina ecuación diferencial **homogénea, lineal, de segundo orden** con coeficientes constantes. La denominación *segundo orden* se refiere a la presencia de una segunda derivada. Los términos *lineal* y *homogénea* se refieren al hecho de que si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son dos soluciones de la ecuación, entonces también lo es $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$ para cualquier valor de las constantes A y B:

$$\text{Si } ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) = 0 \text{ y } ay_2''(t) + by_2'(t) = cy_2(t) = 0$$
$$\text{y si } y(t) = Ay_1(t) + By_2(t), \text{ entonces } ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

La Sección 17.1 contiene más detalles sobre esta terminología. En esta sección supondremos que la variable independiente en nuestras funciones es t en vez de x, por lo que la prima ($'$) indica la derivada d/dt. Esto es porque en la mayoría de las aplicaciones de estas ecuaciones la variable independiente es el tiempo.

Las ecuaciones del tipo (*) aparecen en muchas aplicaciones de las matemáticas. En particular se pueden usar para modelar vibraciones mecánicas tales como el movimiento de una masa suspendida de un muelle elástico o la corriente en ciertos circuitos eléctricos. En la mayor parte de sus aplicaciones las tres constantes a, b y c son positivas, aunque algunas veces puede ser $b = 0$.

Procedimiento para resolver $ay'' + by' + cy = 0$

En la Sección 3.4 observamos que la ecuación diferencial de primer orden con coeficientes constantes $y' = ky$ tenía como solución $y = Ce^{kt}$. Intentemos encontrar una solución de la ecuación (*) de la forma $y = e^{rt}$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (*), se obtiene

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

Como e^{rt} nunca es cero, $y = e^{rt}$ será una solución de la ecuación diferencial (*) si y sólo si r satisface la **ecuación auxiliar** de segundo grado

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (**)$$

cuyas raíces se obtienen mediante la fórmula cuadrática:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

donde $D = b^2 - 4ac$ se denomina **discriminante** de la ecuación auxiliar (**).

Hay que considerar tres casos, en función de que el discriminante D sea positivo, cero o negativo.

CASO I Supongamos que $D = b^2 - 4ac > 0$. Entonces la ecuación auxiliar tiene dos raíces reales diferentes, r_1 y r_2, dadas por

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Algunas veces estas raíces se pueden obtener fácilmente factorizando el miembro izquierdo de la ecuación auxiliar. En este caso tanto $y = y_1(t) = e^{r_1t}$ como $y = y_2(t) = e^{r_2t}$ son soluciones de la ecuación diferencial (*), y ninguna es múltiplo de la otra. Como indicamos anteriormente, la función

$$y = Ae^{r_1t} + Be^{r_2t}$$

es también una solución para cualquier valor de las constantes A y B. Como la ecuación diferencial es de segundo orden y esta solución contiene dos constantes arbitrarias, podemos sospechar que es la **solución general**, es decir, que toda solución de la ecuación diferencial se puede escribir de esta forma. El Ejercicio 18 al final de esta sección indica una forma de demostrar esto.

CASO II Supongamos que $D = b^2 - 4ac = 0$. Entonces la ecuación auxiliar tiene dos raíces iguales $r_1 = r_2 = -b/(2a) = r$. Ciertamente $y = e^{rt}$ es una solución de (*). Se puede obtener la solución general haciendo $y = e^{rt}u(t)$ y calculando:

$$y' = e^{rt}(u'(t) + ru(t))$$
$$y'' = e^{rt}(u''(t) + 2ru'(t) + r^2u(t))$$

Incluyendo estas expresiones en (*), se obtiene

$$e^{rt}(au''(t) + (2ar + b)u'(t) + (ar^2 + br + c)u(t)) = 0$$

Como $e^{rt} \neq 0$, $2ar + b = 0$ y r cumple (**), esta ecuación se reduce a $u''(t) = 0$, cuya solución general es $u(t) = A + Bt$ para constantes arbitrarias A y B. Por tanto, la solución general de (*) en este caso es

$$y = Ae^{rt} + Bte^{rt}$$

CASO III Supongamos que $D = b^2 - 4ac < 0$. Entonces la ecuación auxiliar (**) tiene raíces complejas conjugadas que se expresan como

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = k \pm i\omega$$

siendo $k = -b/(2a)$, $\omega = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$ e i la unidad imaginaria ($i^2 = -1$, *véase* el Apéndice I). Como en el Caso I, las funciones $y_1^*(t) = e^{(k+i\omega)t}$ y $y_2^*(t) = e^{(k-i\omega)t}$ son dos soluciones independientes de (*), pero no toman valores reales. Sin embargo, como

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

como se indica en la sección anterior y en el Apéndice II, se pueden encontrar dos funciones con valores reales que son soluciones de (*) combinando adecuadamente y_1^* y y_2^*:

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\, y_1^*(t) + \frac{1}{2}\, y_2^*(t) = e^{kt} \cos(\omega t)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2i}\, y_1^*(t) - \frac{1}{2i}\, y_2^*(t) = e^{kt} \operatorname{sen}(\omega t)$$

Por tanto, la solución general de (*) en este caso es

$$y = Ae^{kt} \cos(\omega t) + Be^{kt} \operatorname{sen}(\omega t)$$

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento para resolver (*) en cada uno de los tres casos.

Ejemplo 1 Obtenga la solución general de $y'' + y' - 2y = 0$.

Solución La ecuación auxiliar es $r^2 + r - 2 = 0$ o $(r + 2)(r - 1) = 0$. Las raíces auxiliares son $r_1 = -2$ y $r_2 = 1$, que son reales y distintas. De acuerdo con el Caso I, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = Ae^{-2t} + Be^{t}$$

Ejemplo 2 Obtenga la solución general de $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Solución La ecuación auxiliar es $r^2 + 6r + 9 = 0$ o $(r + 3)^2 = 0$, que tiene dos raíces iguales $r = -3$. De acuerdo con el Caso II, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = Ae^{-3t} + Bte^{-3t}$$

Ejemplo 3 Obtenga la solución general de $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Solución La ecuación auxiliar es $r^2 + 4r + 13 = 0$, cuyas soluciones son

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i$$

Por tanto, $k = -2$ y $\omega = 3$. De acuerdo con el Caso III, la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y = Ae^{-2t}\cos(3t) + Be^{-2t}\operatorname{sen}(3t)$$

■

Los problemas de valor inicial relacionados con $ay'' + by' + cy = 0$ especifican valores de y e y' en un punto inicial. Estos valores se pueden usar para determinar los valores de las constantes A y B de la solución general, para que el problema de valor inicial tenga una solución única.

Ejemplo 4 Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

Solución La ecuación auxiliar es $r^2 + 2r + 2 = 0$, cuyas raíces son

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

Por tanto, se aplica el Caso III, $k = -1$ y $\omega = 1$. La ecuación diferencial tiene como solución general

$$y = Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\operatorname{sen} t$$

Además,

$$\begin{aligned} y' &= e^{-t}(-A\cos t - B\operatorname{sen} t - A\operatorname{sen} t + B\cos t) \\ &= (B - A)e^{-t}\cos t - (A + B)e^{-t}\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = -3$, se obtiene $A = 2$ y $B - A = -3$. Por tanto, $B = -1$ y el problema de valor inicial tiene como solución

$$y = 2e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t$$

■

Movimiento armónico simple

Muchos fenómenos naturales muestran un comportamiento periódico. El movimiento de un reloj de péndulo, la vibración de una cuerda de guitarra o de la membrana de un tambor, la altura de una persona que monta en una noria, el movimiento de un objeto encima de las olas, y la tensión producida por un generador de corriente alterna son sólo unos pocos ejemplos en los que las magnitudes dependen del tiempo de una forma periódica. Como son periódicas, las funciones circulares como el seno y el coseno proporcionan un modelo útil de estos comportamientos.

Ocurre a menudo que una cantidad que se desplaza desde un valor de equilibrio experimenta una fuerza de recuperación que tiende a moverla en la dirección de dicho equilibrio. Además del ejemplo obvio del movimiento elástico en física, podemos imaginar que ese modelo se puede aplicar, por ejemplo, a una población biológica en equilibrio con su suministro de alimentos o al precio de un artículo en una economía elástica en que un incremento del precio causa una disminución de la demanda y, por tanto, un descenso del precio. En los modelos más simples, la fuerza de recuperación es proporcional a la cantidad de desplazamiento desde el equilibrio. Esta fuerza hace que la magnitud oscile de forma sinusoidal. Decimos entonces que la magnitud ejecuta un *movimiento armónico simple*.

Como ejemplo concreto, supongamos una masa m suspendida en equilibrio de un muelle, de forma que la tensión hacia arriba del muelle está compensada por la fuerza gravitatoria que actúa sobre la masa. Si la masa se desplaza verticalmente una distancia y desde su posición de equilibrio, la tensión del muelle cambia y la fuerza extra que realiza el muelle se dirige a llevar la

masa a su posición de equilibrio (*véase* la Figura 3.29). Esta fuerza es proporcional al desplazamiento (Ley de Hooke). Su valor es $-ky$, siendo k una constante positiva denominada **constante de elasticidad**. Despreciando el peso del muelle, esta fuerza aplica a la masa m una aceleración d^2y/dt^2 que cumple $m(d^2y/dt^2) = -ky$, debido a la Segunda Ley de Newton (masa × aceleración = fuerza). Dividiendo esta ecuación por m se obtiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \qquad \text{siendo } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

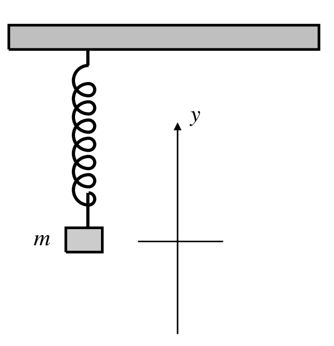


Figura 3.29

La ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

se denomina **ecuación del movimiento armónico simple**. Su ecuación auxiliar, $r^2 + \omega^2 = 0$, tiene raíces complejas $r = \pm i\omega$, por lo que su solución general es

$$y = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$$

siendo A y B constantes arbitrarias.

Para algunos valores de las constantes R y t_0, la función

$$y = R\cos(\omega(t - t_0))$$

es también una solución general de la ecuación diferencial del movimiento armónico simple. Si se desarrolla esta fórmula utilizando la fórmula de suma del coseno, se obtiene

$$\begin{aligned} y &= R\cos\omega t_0 \cos\omega t + R\operatorname{sen}\omega t_0 \operatorname{sen}\omega t \\ &= A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} &A = R\cos(\omega t_0), && B = R\operatorname{sen}(\omega t_0) \\ &R^2 = A^2 + B^2, && \tan(\omega t_0) = B/A \end{aligned}$$

Las constantes A y B se relacionan con la posición y_0 y la velocidad v_0 de la masa m en el instante $t = 0$:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) = A\cos 0 + B\operatorname{sen} 0 = A \\ v_0 &= y'(0) = -A\omega\operatorname{sen} 0 + B\omega\cos 0 = B\omega \end{aligned}$$

La constante $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ se denomina **amplitud** del movimiento. Como $\cos x$ oscila entre -1 y 1, el desplazamiento y varía entre $-R$ y R. Nótese en la Figura 3.30 que la gráfica del desplazamiento en función del tiempo es la curva $y = R\cos\omega t$ desplazada t_0 unidades a la derecha. El número t_0 se denomina **desplazamiento temporal**. La cantidad relacionada ωt_0 se denomina **desplazamiento de fase**. El **periodo** de esta curva es $T = 2\pi/\omega$; es el intervalo entre dos

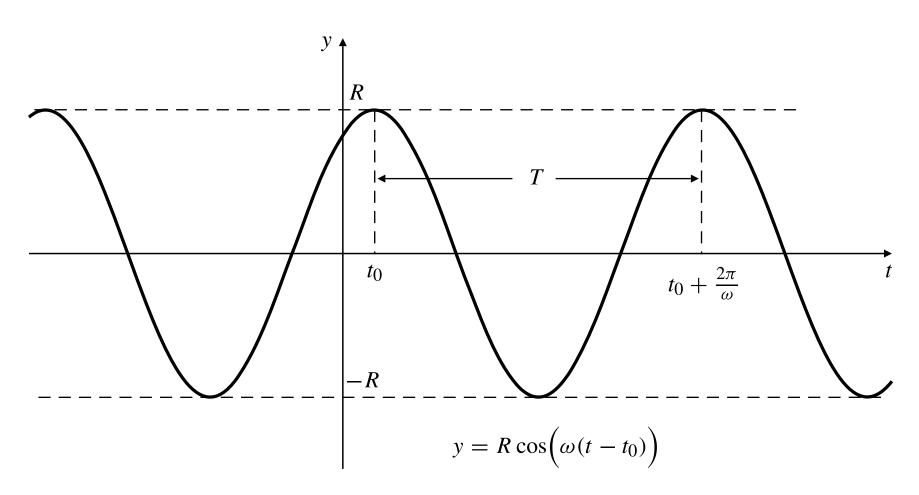


Figura 3.30 Movimiento armónico simple.

instantes consecutivos donde la masa está a la misma altura y moviéndose en la misma dirección. El inverso del periodo $1/T$ se denomina **frecuencia** del movimiento. Generalmente se mide en hercios (Hz), es decir, ciclos por segundo. La cantidad $\omega = 2\pi/T$ se denomina **frecuencia circular**. Se mide en radianes por segundo ya que 1 ciclo = 1 revolución = 2π radianes.

Ejemplo 5 Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = -6 \\ y'(0) = 32 \end{cases}$$

Calcule la amplitud, frecuencia y periodo de la solución.

Solución En este caso $\omega^2 = 16$, por lo que $\omega = 4$. La solución es de la forma

$$y = A\cos(4t) + B\,\mathrm{sen}\,(4t)$$

Como $y(0) = -6$, tenemos que $A = -6$. Además, $y'(t) = -4A\,\mathrm{sen}\,(4t) + 4B\cos(4t)$. Como $y'(0) = 32$, tenemos que $4B = 32$ o $B = 8$. Así, la solución es

$$y = -6\cos(4t) + 8\,\mathrm{sen}\,(4t)$$

La amplitud es $\sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$, la frecuencia es $\omega/(2\pi) \approx 0.637$ Hz y el periodo es $2\pi/\omega \approx 1.57$ s. ■

Ejemplo 6 **(Problema de la masa y el muelle)** Suponga que una masa de 100 g está suspendida de un muelle y que se requiere una fuerza de 3×10^4 dinas (3×10^4 g-cm/s^2) para producir un desplazamiento de 1/3 cm desde el equilibrio. En el instante $t = 0$ la masa se desplaza 2 cm por debajo de la posición de equilibrio y comienza a desplazarse hacia arriba con una velocidad de 60 cm/s. Obtenga la función que modela su desplazamiento posterior en cualquier instante $t > 0$. Calcule la frecuencia, el periodo, la amplitud y el desplazamiento temporal del movimiento. Exprese la posición de la masa en el instante t en función de la amplitud y el desplazamiento temporal.

Solución La constante de elasticidad k se obtiene aplicando la Ley de Hooke, $F = -ky$. En este caso, $F = -3 \times 10^4$ g-cm/s^2 es la fuerza del muelle sobre la masa desplazada 1/3 cm:

$$-3 \times 10^4 = -\frac{1}{3}\,k$$

por tanto, $k = 9 \times 10^4$ g/s^2. Entonces, la frecuencia circular es $\omega = \sqrt{k/m} = 30$ rad/s, la frecuencia es $\omega/2\pi = 15/\pi \approx 4.77$ Hz y el periodo es $2\pi/\omega \approx 0.209$ s.

Como el desplazamiento en el instante $t = 0$ es $y_0 = -2$ y la velocidad en ese instante es $v_0 = 60$, la ecuación del desplazamiento posterior es $y = A\cos(30t) + B\,\mathrm{sen}(30t)$, con $A = y_0 = -2$ y $B = v_0/\omega = 60/30 = 2$. Así,

$$y = -2\cos(30t) + 2\,\mathrm{sen}(30t), \qquad (y \text{ en cm, } t \text{ en segundos})$$

La amplitud del movimiento es $R = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$ cm. El desplazamiento temporal debe cumplir

$$-2 = A = R\cos(\omega t_0) = 2\sqrt{2}\cos(30t_0)$$
$$2 = B = R\,\mathrm{sen}(\omega t_0) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(30t_0)$$

por lo que $\mathrm{sen}(30t_0) = 1/\sqrt{2} = -\cos(30t_0)$. Entonces el desplazamiento de fase es $30t_0 = 3\pi/4$ radianes, y el desplazamiento temporal es $t_0 = \pi/40 \approx 0.0785$ s. La posición de la masa para $t > 0$ se puede expresar también como

$$y = 2\sqrt{2}\cos\left[30\left(t - \frac{\pi}{40}\right)\right]$$

Movimiento armónico amortiguado

Si a y c son positivas y $b = 0$, entonces la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0$$

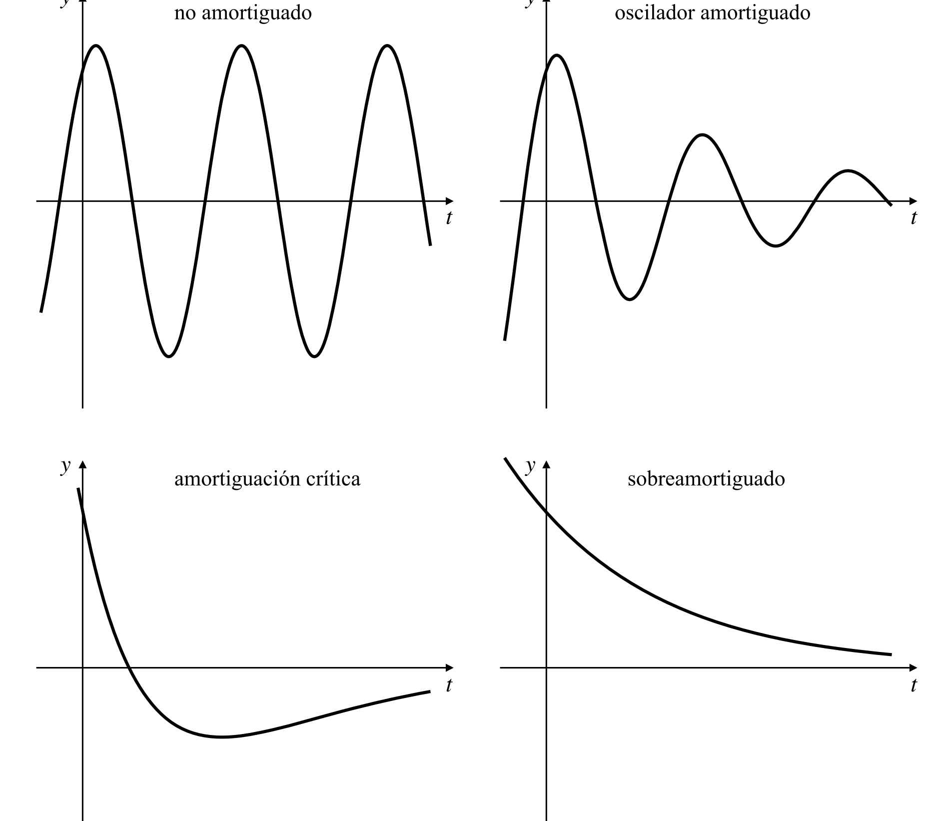


Figura 3.31 Oscilador no amortiguado ($b = 0$). Oscilador amortiguado ($b > 0$, $b^2 < 4ac$). Caso de amortiguamiento crítico ($b > 0$, $b^2 = 4ac$). Caso sobreamortiguado ($b > 0$, $b^2 > 4ac$).

corresponde a la ecuación diferencial del movimiento armónico simple y tiene soluciones oscilatorias de amplitud fija, como se ha visto anteriormente. Si $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$, entonces las raíces de la ecuación auxiliar son o bien números negativos, o bien, si $b^2 < 4ac$, números complejos $k \pm i\omega$ con partes reales negativas $k = -b/(2a)$ (Caso III). En este último caso las soluciones todavía son oscilatorias, pero la amplitud disminuye exponencialmente cuando $t \to \infty$ debido al factor $e^{kt} = e^{-(b/2a)t}$ (*véase* el Ejercicio 17 posterior). Un sistema cuyo comportamiento se puede modelar mediante una ecuación de este tipo se dice que presenta un **movimiento armónico amortiguado**. Si $b^2 = 4ac$ (Caso II), se dice que el sistema tiene **amortiguación crítica**, y si $b^2 > 4ac$ (Caso I), se dice que está **sobreamortiguado**. En estos casos el comportamiento ya no es oscilatorio (*véase* la Figura 3.31, imaginando que la masa suspendida del muelle está dentro de un bidón de aceite).

Ejercicios 3.7

En los Ejercicios 1-12, calcule las soluciones generales de las ecuaciones dadas.

1. $y'' + 7y' + 10y = 0$

2. $y'' - 2y' - 3y = 0$

3. $y'' + 2y' = 0$

4. $4y'' - 4y' - 3y = 0$

5. $y'' + 8y' + 16y = 0$

6. $y'' - 2y' + y = 0$

7. $y'' - 6y' + 10y = 0$

8. $9y'' + 6y' + y = 0$

9. $y'' + 2y' + 5y = 0$

10. $y'' - 4y' + 5y = 0$

11. $y'' + 2y' + 3y = 0$

12. $y'' + y' + y = 0$

En los Ejercicios 13-15, resuelva los problemas de valor inicial dados.

13. $\begin{cases} 2y'' + 5y' - 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

***16.** Demuestre que si $\varepsilon \neq 0$, la función $y_\varepsilon(t) = \dfrac{e^{(1+\varepsilon)t} - e^t}{\varepsilon}$ cumple la ecuación $y'' - (2+\varepsilon)y' + (1+\varepsilon)y = 0$. Calcule $y(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t)$ y verifique que, tal como se esperaba, es una solución de $y'' - 2y' + y = 0$.

***17.** Si $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$, demuestre que todas las soluciones de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$ cumplen $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

***18.** Demuestre que la solución dada en la presentación del Caso I, concretamente $y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, es la solución general para este caso. Proceda como sigue: primero, haga $y = e^{r_1 t}u$; demuestre que u cumple la ecuación

$$u'' - (r_2 - r_1)u' = 0$$

Haga después $v = u'$, con lo que v debe cumplir $v' = (r_2 - r_1)v$. La solución general de esta ecuación es $v = Ce^{(r_2 - r_1)t}$, como se demuestra en la presentación de la ecuación $y' = ky$ en la Sección 3.4. Calcule u e y.

Movimiento armónico simple

Los Ejercicios 19-22 se refieren todos a la ecuación diferencial del movimiento armónico simple:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \qquad (\omega \neq 0) \qquad (\dagger)$$

En conjunto permiten demostrar que $y = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t$ es una *solución general* de esta ecuación, es decir, toda solución tiene esta forma para algunos valores de las constantes A y B.

***19.** Demuestre que $y = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t$ es una solución de (†).

***20.** Si $f(t)$ es una solución de (†), demuestre que $\omega^2(f(t))^2 + (f'(t))^2$ es constante.

***21.** Si $g(t)$ es una solución de (†) que cumple $g(0) = g'(0) = 0$, demuestre que $g(t) = 0$ para todo t.

***22.** Suponga que $f(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (†). Demuestre que $f(t) = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t$, siendo $A = f(0)$ y $B\omega = f'(0)$.
(*Sugerencia*: Sea $g(t) = f(t) - A\cos\omega t - B\,\mathrm{sen}\,\omega t$).

***23.** Si $b^2 - 4ac < 0$, demuestre que el cambio $y = e^{kt}u(t)$, con $k = -b/(2a)$, transforma $ay'' + by'' + cy = 0$ en la ecuación $u'' + \omega^2 u = 0$, siendo $\omega^2 = (4ac - b^2)/(4a^2)$.
Junto con el resultado del Ejercicio 22, esto confirma el procedimiento para el Caso III, en el caso de que no nos gustara del todo el argumento basado en números complejos que se ha dado en el texto.

En los Ejercicios 24-25, resuelva los problemas de valor inicial dados. Determine en cada problema la frecuencia circular, la frecuencia, el periodo y la amplitud de la solución.

24. $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$ **25.** $\begin{cases} y'' + 100y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

***26.** Demuestre que $y = \alpha \cos(\omega(t - c)) + \beta \operatorname{sen}(\omega(t - c))$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + \omega^2 y = 0$ y que cumple $y(c) = \alpha$ y $y'(c) = \beta\omega$. Exprese la solución en la forma $y = A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)$ para ciertos valores de las constantes A y B que dependen de α, β, c y ω.

27. Resuelva $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(2) = 3 \\ y'(2) = -4 \end{cases}$

28. Resuelva $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(a) = A \\ y'(a) = B \end{cases}$

29. ¿Qué masa habría de suspenderse del muelle del Ejemplo 6 para obtener un sistema cuya frecuencia natural de oscilación sea de 10 Hz? Calcule el desplazamiento de esa masa desde su posición de equilibrio t segundos después de desplazarla 1 cm hacia abajo desde su posición de equilibrio y soltarla hacia arriba con velocidad inicial de 2 cm/s. ¿Cuál es la amplitud de este movimiento?

30. Una masa de 400 g suspendida de un muelle oscila con una frecuencia de 24 Hz. ¿Cuál será la frecuencia si la masa de 400 g se sustituye con una masa de 900 g? ¿Y con una masa de 100 g?

***31.** Demuestre que si t_0, A y B son constantes, $k = -b/(2a)$ y $\omega = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$, entonces

$$y = e^{kt}[A\cos(\omega(t - t_0)) + B\operatorname{sen}(\omega(t - t_0))]$$

es una alternativa a la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ para el Caso III ($b^2 - 4ac < 0$). Esta forma de la solución general es útil para resolver problemas de valor inicial donde se especifican $y(t_0)$ y $y'(t_0)$.

***32.** Demuestre que si t_0, A y B son constantes, $k = -b/(2a)$ y $\omega = \sqrt{b^2 - 4ac}/(2a)$, entonces

$$y = e^{kt}[A\cosh(\omega(t - t_0)) + B\operatorname{senh}(\omega(t - t_0))]$$

es una alternativa a la solución general para $ay'' + by' + cy = 0$ para el Caso I ($b^2 - 4ac > 0$). Esta forma de la solución general es útil para resolver problemas de valor inicial donde se especifican $y(t_0)$ y $y'(t_0)$.

Utilice las formas de solución proporcionadas en los dos ejercicios anteriores para resolver los problemas de valor inicial de los Ejercicios 33-34.

33. $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(3) = 2 \\ y'(3) = 0 \end{cases}$

34. $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 0 \end{cases}$

35. Utilizando el cambio de la variable dependiente $u(x) = c - k^2 y(x)$, resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = c - k^2 y(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

***36.** Una masa está unida a un muelle horizontal de forma que se puede deslizar por encima de una mesa. Mediante una selección adecuada de las unidades, la posición $x(t)$ de la masa en el instante t está gobernada por la ecuación diferencial

$$x'' = -x + F$$

donde el término $-x$ es debido a la elasticidad del muelle y F es debido al rozamiento de la masa con la mesa. Cuando la masa se mueve, la fuerza de rozamiento debe ser de módulo constante y dirigida en dirección opuesta a la velocidad de la masa. Cuando la masa se para, la fuerza de rozamiento debe ser constante y de dirección opuesta a la fuerza del muelle a menos que la fuerza del muelle sea de menor magnitud, en cuyo caso la fuerza de rozamiento sólo cancela la fuerza del muelle y la masa permanecería en reposo. En este problema, suponga que el módulo de la fuerza de rozamiento es 1/5. De acuerdo con lo anterior,

$$F = \begin{cases} -\dfrac{1}{5} & \text{si } x' > 0 \text{ o si } x' = 0 \text{ y } x < -\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{5} & \text{si } x' < 0 \text{ o si } x' = 0 \text{ y } x > \dfrac{1}{5} \\ x & \text{si } x' = 0 \text{ y } |x| \leqslant \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Calcule la posición $x(t)$ de la masa en todos los instantes $t > 0$ si $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **Enuncie las leyes de los exponentes.**
- **Enuncie las leyes de los logaritmos.**
- **¿Cuál es el significado del número e?**
- **¿Qué significan las siguientes afirmaciones y frases?**
  - ◇ f es uno a uno.
  - ◇ f es invertible.
  - ◇ La función f^{-1} es la inversa de la función f.
  - ◇ $a^b = c$
  - ◇ $\log_a b = c$
  - ◇ Logaritmo natural de x.
  - ◇ Diferenciación logarítmica.
  - ◇ Semivida de una cantidad que varía.
  - ◇ La magnitud y presenta crecimiento exponencial.
  - ◇ La magnitud y presenta crecimiento logístico.
  - ◇ $y = \operatorname{sen}^{-1} x$.
  - ◇ $y = \tan^{-1} x$.
  - ◇ La magnitud y presenta movimiento armónico simple.
  - ◇ La magnitud y presenta movimiento armónico amortiguado.
- **Defina las funciones $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$ y $\tanh x$.**
- **¿Qué clase de funciones satisfacen la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes?**

Ejercicios de repaso

1. Si $f(x) = 3x + x^3$, demuestre que f tiene inversa y calcule la pendiente de $y = f^{-1}(x)$ en $x = 0$.

2. Sea $f(x) = \sec^2 x \tan x$. Demuestre que f es creciente en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y, a partir de eso, que es uno a uno e invertible en dicho intervalo. ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? Calcule $(f^{-1})'(2)$. *Sugerencia*: $f(\pi/4) = 2$.

Los Ejercicios 3-5 se refieren a la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

3. Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

4. ¿En qué intervalos es f creciente? ¿Y decreciente?

5. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de $f(x)$?

6. Calcule los puntos de la gráfica de $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$, $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$, donde dicha gráfica tiene tangente horizontal.

7. Suponga que una función $f(x)$ cumple $f'(x) = x\,f(x)$ para todo número real x, y $f(2) = 3$. Calcule la derivada de $f(x)/e^{x^2/2}$ y utilice el resultado como ayuda para obtener explícitamente $f(x)$.

8. Se enrolla un trozo de arcilla de modelar en forma de cilindro circular. Si la longitud del cilindro crece con una velocidad proporcional a sí misma, demuestre que el radio decrece con una velocidad proporcional a sí mismo.

9. (a) ¿Qué tasa de interés nominal, computada de forma continua, hará que una inversión se doble en cinco años?

(b) ¿En cuántos días se incrementará el tiempo de doblaje del apartado (a) si la tasa de interés nominal disminuye un 0.5%?

10. (Un cálculo pobre del logaritmo natural) 

(a) Demuestre que si $a > 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$$

A partir de aquí demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a$$

(b) La mayoría de las calculadoras, incluso las no científicas, tienen una tecla para calcular la raíz cuadrada. Si n es una potencia de dos, es decir $n = 2^k$, entonces $a^{1/n}$ se puede calcular introduciendo a y pulsando k veces la tecla de la raíz cuadrada:

$$a^{1/2^k} = \sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{a}}} \quad (k \text{ raíces cuadradas})$$

Después se puede restar 1 y multiplicar por n para obtener una aproximación de $\ln a$. Utilice $n = 2^{10} = 1024$ y $n = 2^{11} = 2048$ para obtener aproximaciones del $\ln 2$. Basándose en la exactitud de las dos aproximaciones, obtenga un valor para ln 2 con tantos decimales como le parezca adecuado.

11. Una función no constante f cumple

$$\frac{d}{dx}(f(x))^2 = (f'(x))^2$$

para todo x. Si $f(0) = 1$, calcule $f(x)$.

12. Si $f(x) = (\ln x)/x$, demuestre que $f'(x) > 0$ para $0 < x < e$ y $f'(x) < 0$ para $x > e$, de forma que $f(x)$ tenga un valor máximo en $x = e$. Utilice esto para demostrar que $e^\pi > \pi^e$.

13. Calcule la ecuación de la recta que pasa por el origen y es tangente a la curva $y = x^x$.

14. (a) Obtenga $x \neq 2$ tal que $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln 2}{2}$.

(b) Obtenga $b > 1$ de forma que *no exista* $x \neq b$ tal que $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln b}{b}$.

15. La cuenta de inversión A tiene interés simple con una cierta tasa. La cuenta de inversión B tiene la misma tasa nominal, pero se computa de forma instantánea. Si se invierten 1000 € en cada cuenta, B produce tras un año 10 € más de interés que A. Calcule la tasa de interés nominal que tienen ambas cuentas.

16. Exprese las funciones $\cos^{-1} x$, $\cot^{-1} x$ y $\csc^{-1} x$ en función de $\tan^{-1}$.

17. Exprese las funciones $\cos^{-1} x$, $\cot^{-1} x$ y $\csc^{-1} x$ en función de sen^{-1}.

18. **(Un problema de calentamiento)** Una botella de leche a 5 °C se saca de una nevera y se lleva una habitación que se mantiene a 20 °C. Después de 12 minutos la temperatura de la leche es de 12 °C. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la leche se caliente hasta 18 °C?

19. **(Un problema de enfriamiento)** Una olla con agua caliente a 96 °C se lleva a una sala con aire acondicionado. El agua se enfría hasta 60 °C tras diez minutos y hasta 40 °C en los diez minutos siguientes. ¿Cuál es la temperatura de la habitación?

20. Demuestre que $e^x > 1 + x$ si $x \neq 0$.

21. Utilice inducción matemática para demostrar que

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

con $x > 0$ y n cualquier entero positivo.

Problemas avanzados

***1.** (a) Demuestre que la función $f(x) = x^x$ es estrictamente creciente en el intervalo $[e^{-1}, \infty)$.

(b) Si g es la función inversa de la función f del apartado (a), demuestre que

$$\lim_{y\to\infty} \frac{g(y)\ln(\ln y)}{\ln y} = 1$$

Sugerencia: Empiece con la ecuación $y = x^x$ y tome dos veces logaritmos en los dos miembros.

Dos modelos para incorporar la resistencia del aire en el análisis del movimiento de un cuerpo que cae

2. **(Resistencia del aire proporcional a la velocidad)** Un objeto cae por la acción de la gravedad cerca de la superficie de la tierra, y el aire opone a su movimiento una resistencia proporcional a su velocidad. Por tanto, su velocidad v responde a la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv \qquad (*)$$

siendo k una constante positiva que depende de factores como la forma y densidad del objeto y la densidad del aire.

(a) Calcule la velocidad del objeto en función del tiempo t, suponiendo que su velocidad en v_0 era $t = 0$.

(b) Calcule la velocidad límite $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Observe que esto se puede hacer bien directamente a partir de (*) o a partir de la solución obtenida en el apartado (a).

(c) Si el objeto estaba a una altura y_0 en el instante $t = 0$, calcule su altura $y(t)$ en cualquier instante durante su caída.

***3.** **(Resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad)** En ciertas condiciones, un modelo mejor del efecto de la resistencia del aire sobre un objeto móvil es aquel en el que la resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad. Dado un objeto que cae bajo aceleración gravitatoria constante g, la ecuación del movimiento es

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv|v|$$

con $k > 0$. Nótese que se utiliza $v|v|$ en vez de v^2 para asegurarse de que la resistencia actúa siempre en dirección opuesta a la velocidad. Dado un objeto que cae desde el reposo en el instante $t = 0$, tenemos que $v(0) = 0$ y $v(t) < 0$ para $t > 0$, de forma que la ecuación del movimiento es

$$\frac{dv}{dt} = -g + kv^2$$

No estamos (todavía) en condiciones de resolver esta ecuación. Sin embargo, podemos verificar su solución.

(a) Verifique que la velocidad para $t \geqslant 0$ está dada por

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{1 - e^{2t\sqrt{gk}}}{1 + e^{2t\sqrt{gk}}}$$

(b) ¿Cuál es la velocidad límite $\lim_{t\to\infty} v(t)$?

(c) Verifique también que si el objeto que cae estaba a una altura de y_0 en el instante $t = 0$, entonces su altura en instantes posteriores durante su caída se puede expresar como

$$y(t) = y_0 + \sqrt{\frac{g}{k}}\, t - \frac{1}{k} \ln\left(\frac{1 + e^{2t\sqrt{gk}}}{2}\right)$$

4. (Modelo de difusión de una nueva tecnología) Cuando se introduce una nueva tecnología superior, el porcentaje p de clientes potenciales que la adoptan se puede modelar mediante un incremento logístico con el tiempo. Sin embargo, se están introduciendo constantemente tecnologías más nuevas, por lo que la adopción de una en particular decaerá exponencialmente con el tiempo. El modelo que sigue muestra ese comportamiento:

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{e^{-bt}M}\right)$$

Esta ecuación diferencial sugiere que el crecimiento en p es logístico pero que el comportamiento asintótico no es una constante, sino $e^{-bt}M$, que decrece exponencialmente con el tiempo.

(a) Demuestre que el cambio de variable $p = e^{-bt}y(t)$ transforma la ecuación anterior en una ecuación logística estándar, y obtenga una fórmula explícita de $p(t)$ suponiendo que $p(0) = p_0$. Será necesario suponer que $M < 100k/(b + k)$ para asegurar que $p(t) < 100$.

(b) Si $k = 10$, $b = 1$, $M = 90$ y $p_0 = 1$, ¿cuánto puede aumentar $p(t)$ antes de que empiece a decrecer?

CAPÍTULO 4

Aplicaciones de las derivadas

En otoño de 1972 el Presidente Nixon anunció que la velocidad de incremento de la inflación estaba disminuyendo. Era la primera vez que un presidente en el cargo utilizaba la tercera derivada como ayuda en la causa de su reelección.

Hugo Rossi
Mathematics is an Edifice, not a Toolbox
Notices of the AMS, v. 43, Oct. 1996

Introducción El cálculo diferencial se puede utilizar para analizar muchos tipos de problemas y situaciones que surgen en disciplinas aplicadas. El cálculo ha hecho y continuará haciendo contribuciones significativas en todos los campos del esfuerzo humano, utilizando medidas cuantitativas para alcanzar sus objetivos. Desde la economía hasta la física y desde la biología a la sociología, se pueden encontrar problemas cuyas soluciones se pueden plantear utilizando los procedimientos del cálculo.

En este capítulo vamos a examinar varias clases de problemas en los que se pueden aplicar las técnicas que hemos aprendido. Estos problemas surgen dentro y fuera de las matemáticas. Consideraremos los siguientes tipos de problemas:

1. Problemas de tasas relacionadas, donde se analizan las velocidades de cambio de magnitudes relacionadas.
2. Problemas de gráficos, donde se utilizan las derivadas para ilustrar el comportamiento de funciones.
3. Problemas de optimización, donde una determinada cantidad se maximiza o se minimiza.
4. Métodos de obtención de raíces, para obtener soluciones numéricas de ecuaciones.
5. Problemas de aproximación, donde se utilizan polinomios para aproximar funciones complicadas.
6. Cálculo de límites.

No hay que asumir que la mayoría de los problemas que se presentan aquí son problemas del «mundo real». Esos problemas son en general demasiado complejos para ser tratados en un curso de cálculo general. Sin embargo, los problemas que consideraremos, aunque en algún caso son artificiales, demuestran cómo se puede aplicar el cálculo en situaciones concretas.

4.1 Tasas relacionadas

Cuando dos o más magnitudes que cambian con el tiempo están relacionadas por una función, esta función se puede diferenciar con respecto al tiempo para producir una ecuación que relaciona las velocidades de cambio de dichas magnitudes. Una de esas velocidades se puede entonces determinar cuando las otras, y los valores de las magnitudes, son conocidos. Consideraremos a continuación un par de ejemplos antes de formular una lista de procedimientos para tratar estos problemas.

Ejemplo 1 Una aeronave vuela horizontalmente con una velocidad de 600 km/h. ¿Con qué velocidad aumenta la distancia entre la aeronave y una baliza de radio un minuto después de que la aeronave pasa 5 km directamente por encima de la estación?

Solución Resulta de utilidad hacer un diagrama: *véase* la Figura 4.1. Sea C el punto de la trayectoria de la aeronave que está directamente por encima de la baliza B. Sea A la posición de la aeronave t min después de pasar por C, y sean x y s las distancias CA y BA, respectivamente. Observando el triángulo rectángulo BCA tenemos que

$$s^2 = x^2 + 5^2$$

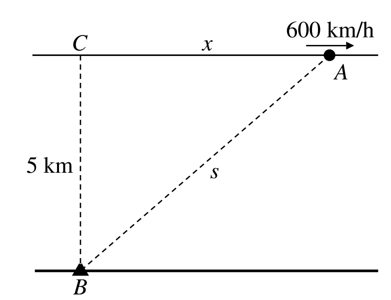


Figura 4.1

Diferenciando implícitamente esta función con respecto a t se obtiene

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

Sabemos que $dx/dt = 600$ km/h $= 10$ km/min. Por tanto, $x = 10$ km en el instante $t = 1$ min. En ese instante $s = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$ km y crece con una velocidad

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x}{s}\frac{dx}{dt} = \frac{10}{5\sqrt{5}}(600) = \frac{1200}{\sqrt{5}} \approx 536.7 \text{ km/h}$$

Un minuto después de que la aeronave pase por encima de la baliza, su distancia a dicha baliza crece con una velocidad aproximada de 537 km/h.

Ejemplo 2 ¿Con qué velocidad cambia el área de un rectángulo si uno de sus lados tiene una longitud de 10 cm y dicha longitud crece con una velocidad de 2 cm/s, y el otro lado mide 8 cm y su longitud decrece con una velocidad de 3 cm/s?

Solución Sean x cm e y cm las longitudes de los lados del rectángulo en el instante t, respectivamente. Por tanto, el área en el instante t es $A = xy$ cm^2 (*véase* la Figura 4.2). Deseamos conocer el valor de dA/dt cuando $x = 10$ y $y = 8$, dado que $dx/dt = 2$ y $dy/dt = -3$ (nótese el signo negativo para indicar que y es decreciente). Como todas las cantidades de la ecuación $A = xy$ son funciones del tiempo, se puede diferenciar implícitamente dicha ecuación con respecto al tiempo y obtener

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\substack{x=10\\y=8}} = \left.\left(\frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt}\right)\right|_{\substack{x=10\\y=8}} = 2(8) + 10(-3) = -14$$

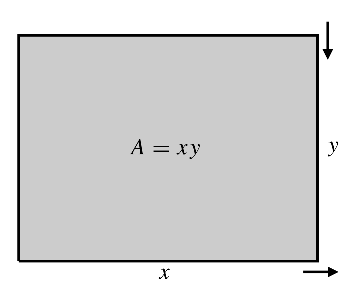


Figura 4.2 Rectángulo cuyos lados cambian.

En el instante en cuestión, el área del rectángulo decrece con una velocidad de 14 cm^2/s. ■

Procedimiento para problemas de tasas relacionadas

A la vista de los ejemplos anteriores podemos formular algunos procedimientos generales para resolver problemas de tasas relacionadas.

Cómo resolver problemas de tasas relacionadas

1. Lea el problema cuidadosamente. Intente comprender las relaciones entre las variables ¿Qué se da? ¿Qué hay que obtener?
2. Si es necesario, haga un dibujo.
3. Defina los símbolos que desee utilizar que no estén definidos en el planteamiento del problema. Exprese las magnitudes dadas, las requeridas y sus velocidades de cambio por medio de dichos símbolos.
4. A partir de una lectura cuidadosa del problema o de la observación del dibujo, identifique una o más ecuaciones que relacionen las variables que representan las magnitudes (serán necesarias tantas ecuaciones como magnitudes o velocidades de cambio haya que obtener en el problema).
5. Diferencie implícitamente las ecuaciones con respecto al tiempo, considerando todas las variables de las magnitudes como funciones del tiempo. Antes de realizar la diferenciación se podrán realizar cambios algebraicos en las ecuaciones (por ejemplo, se pueden despejar las magnitudes cuyas velocidades de cambio hay que obtener), pero, en general, es más fácil diferenciar las ecuaciones en su forma original y despejar posteriormente.
6. Sustituya los valores dados de las magnitudes y de sus velocidades de cambio, y después despeje las magnitudes desconocidas y sus velocidades de cambio en las ecuaciones resultantes.
7. Obtenga las conclusiones en respuesta a las preguntas planteadas. ¿Es la respuesta razonable? Si no, vuelva atrás y compruebe su solución para ver qué es lo que no es correcto.

Ejemplo 3 Un faro L está situado en una pequeña isla a 2 km del punto más cercano A de una costa recta. Si la lámpara del faro gira con una velocidad de 3 revoluciones por minuto, ¿con qué rapidez se mueve el punto de luz P sobre la orilla cuando está a 4 km de A?

Solución Obsérvese la Figura 4.3. Sea x la distancia AP, y sea θ el ángulo PLA. Entonces $x = 2\tan\theta$ y

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

Figura 4.3

Ahora

$$\frac{d\theta}{dt} = 3 \text{ rev/min} \times 2\pi \text{ radianes/rev} = 6\pi \text{ radianes/min}$$

Cuando $x = 4$, tenemos que $\tan\theta = 2$ y $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 5$. Por tanto,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \times 5 \times 6\pi = 60\pi \approx 188.5$$

El punto de luz se mueve por la línea de costa con una velocidad de aproximadamente 189 km/min cuando está a 4 km de A.

Nótese que ha sido esencial convertir la velocidad de cambio de θ de revoluciones por minuto a radianes por minuto. Si θ no se midiera en radianes no podríamos decir que $(d/d\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$. ■

Ejemplo 4 Un tanque de agua agujereado tiene la forma de un cono circular recto invertido con una profundidad de 5 m y un radio en la parte superior de 2 m. Cuando la profundidad del agua del tanque es de 4 m, el agua está saliendo con una velocidad de 1/12 m^3/min. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el nivel de agua del tanque en ese instante?

Solución Sean r y h el radio en la superficie y la profundidad del agua en el tanque en el instante t (ambos se miden en metros). Por tanto, el volumen V (en m^3) de agua en el tanque en el instante t es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Utilizando semejanza de triángulos (*véase* la Figura 4.4), se puede obtener una relación entre r y h:

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{5}, \qquad \text{por tanto,} \quad r = \frac{2h}{5} \qquad \text{y} \qquad V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{5}\right)^2 h = \frac{4\pi}{75}h^3$$

Diferenciando esta ecuación con respecto a t se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{25}h^2\frac{dh}{dt}$$

Como $dV/dt = -1/12$ cuando $h = 4$, tenemos que

$$\frac{-1}{12} = \frac{4\pi}{25}(4^2)\frac{dh}{dt}, \qquad \text{por tanto,} \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{25}{768\pi}$$

Cuando la profundidad del agua en el tanque es de 4 m, su nivel desciende con una velocidad de $25/(768\pi)$ m/min, o aproximadamente 1.036 cm/min. ■

Ejemplo 5 En un cierto instante una aeronave que vuela hacia el este a 400 km/h pasa directamente por encima de un coche que viaja hacia el sudoeste a 100 km/h en una carretera recta y sin pendientes. Si la aeronave vuela a una altura de 1 km, ¿con qué velocidad aumenta la distancia entre la aeronave y el coche 36 segundos después de que la aeronave pase directamente por encima del coche?

Solución En este ejemplo es esencial un buen diagrama. *Véase* la Figura 4.5. Sea t el tiempo medido en horas desde el instante en que la aeronave estaba en la posición A directamente encima del coche en la

posición C. Sean X e Y las posiciones de la aeronave y el coche, respectivamente, en el instante t. Sea x la distancia AX, y la distancia CY y s la distancia XY, todas ellas medidas en kilómetros. Sea Z el punto 1 km por encima de Y. Como el ángulo $XAZ = 45^{\circ}$, el Teorema de Pitágoras y el Teorema del Coseno permiten obtener

$$\begin{aligned} s^2 &= 1 + (ZX)^2 = 1 + x^2 + y^2 - 2xy\cos 45^{\circ} \\ &= 1 + x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2s\frac{ds}{dt} &= 2s\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - \sqrt{2}\frac{dx}{dt}y - \sqrt{2}x\frac{dy}{dt} \\ &= 400(2x - \sqrt{2}y) + 100(2y - \sqrt{2}x) \end{aligned}$$

ya que $dx/dt = 400$ y $dy/dt = 100$. Cuando $t = 1/100$ (es decir, 36 segundos después de $t = 0$), tenemos que $x = 4$ y $y = 1$. Entonces,

$$s^2 = 1 + 16 + 1 - 4\sqrt{2} = 18 - 4\sqrt{2}$$

$$s \approx 3.5133$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2s}(400(8 - \sqrt{2}) + 100(2 - 4\sqrt{2})) \approx 322.86$$

La aeronave y el coche se están separando con una velocidad de aproximadamente 323 km/h después de 36 segundos.

Nótese que ha sido necesario convertir los 36 segundos a horas. En general todas las medidas deben estar en unidades compatibles. ∎

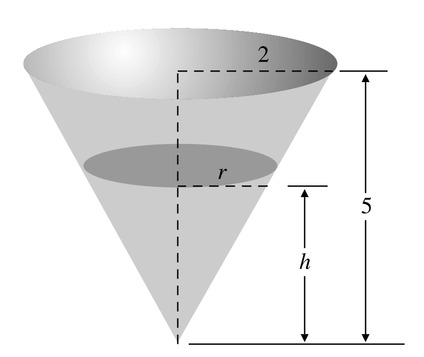


Figura 4.4 El tanque cónico del Ejemplo 4.

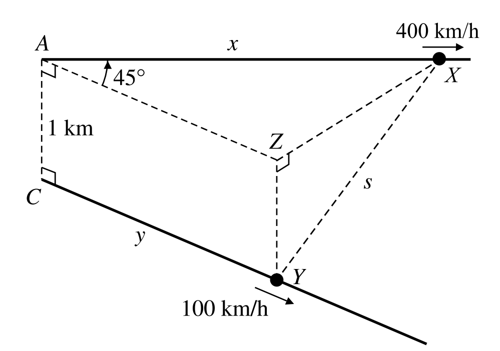


Figura 4.5 Trayectorias de la aeronave y del coche en el Ejemplo 5.

Ejercicios 4.1

1. Calcule la velocidad de cambio del área de un cuadrado cuyo lado mide 8 cm, si la longitud del lado se incrementa con una velocidad de 2 cm/min.

2. El área de un cuadrado decrece con una velocidad de 2 pies^2/s. ¿Con qué velocidad cambia la longitud del lado cuando dicho lado mide 8 pies?

3. Un guijarro que se lanza a un estanque forma una onda circular que se expande hacia fuera desde el punto del impacto. ¿Con qué velocidad crece el área encerrada por la onda cuando su radio es de 20 cm y crece con una velocidad de 4 cm/s?

4. El área de un círculo disminuye con una velocidad de 2 cm^2/min. ¿Con qué velocidad cambia el radio del círculo cuando su área es de 100 cm^2?

5. El área de un círculo crece con una velocidad de 1/3 km^2/h. Exprese la velocidad de cambio del radio del círculo en función de (a) el radio r y (b) el área A del círculo.

6. En un cierto instante la longitud de un rectángulo es de 16 m y su anchura es de 12 m. La anchura crece con una velocidad de 3 m/s. ¿Con qué velocidad cambia la longitud si el área del rectángulo no cambia?

7. Se introduce aire en un globo esférico. El volumen del globo crece con una velocidad de 20 cm^3/s cuando el radio mide 30 cm. ¿Con qué velocidad crece el radio en ese instante? (El volumen de un globo esférico de radio r unidades es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ unidades cúbicas).

8. Cuando el diámetro de una bola de hielo es de 6 cm, disminuye con una velocidad de 0.5 cm/h debido a la fusión del hielo. ¿Con qué velocidad disminuye el volumen de la bola de hielo en ese instante?

9. ¿Con qué velocidad cambia el área de la superficie de un cubo cuando su volumen es de 64 cm^3 y crece con una velocidad de 2 cm^3/s?

10. El volumen de un cilindro circular recto es de 60 cm^3 y crece con una velocidad de 2 cm^3/min en el instante en el que el radio es de 5 cm y crece con una velocidad de 1 cm/min. ¿Con qué velocidad cambia con el tiempo a la altura del cilindro?

11. ¿Con qué velocidad cambia el volumen de una caja rectangular cuando su longitud es de 6 cm, su anchura de 5 cm y su profundidad de 4 cm, si la longitud y la profundidad crecen con una velocidad de 1 cm/s y la anchura decrece con una velocidad de 2 cm/s?

12. El área de un rectángulo crece con una velocidad de 5 m^2/s cuando su longitud crece con una velocidad de 10 m/s. Si la longitud es de 20 m y la anchura de 16 m, ¿con qué velocidad cambia la anchura?

13. Un punto se mueve por la curva $y = x^2$. ¿Con qué velocidad cambia y cuando $x = -2$ y x decrece con una velocidad de 3?

14. Un punto se mueve a la derecha por la parte del primer cuadrante de la curva $x^2y^3 = 72$. Cuando las coordenadas del punto son (3, 2), su velocidad horizontal es de 2 unidades/s. ¿Cuál es su velocidad vertical?

15. El punto P se mueve de forma que en el instante t está en la intersección de las curvas $xy = t$ y $y = tx^2$. ¿Con qué velocidad cambia la distancia de P al origen en el instante $t = 2$?

16. **(Radares de velocidad)** Un policía está cerca de una autopista utilizando una pistola radar para multar a los coches que circulan con exceso de velocidad (*véase* la Figura 4.6). Apunta la pistola hacia un coche que pasa por su posición y, cuando la pistola está apuntando con un ángulo de 45º a la dirección de la autopista, mide que la distancia entre el coche y la pistola crece con una velocidad de 100 km/h. ¿Con qué velocidad se mueve el coche?

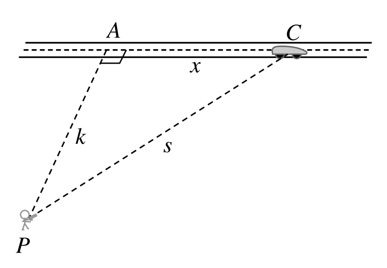


Figura 4.6

17. Si la pistola radar del Ejercicio 16 apunta a un coche que viaja a 90 km/h por una carretera recta, ¿cuál será la lectura en el instante en que apunta en una dirección que forma un ángulo de 30º con la carretera?

18. La parte superior de una escalera de 5 m de largo se apoya contra una pared vertical. Si la base de la escalera se aleja de la base de la pared con una velocidad de 1/3 m/s, ¿con qué velocidad se desliza hacia abajo la parte superior de la escalera cuando está a 3 m de altura por encima de la base de la pared?

19. Un hombre de 2 m de altura camina hacia un farol a una velocidad de 0.5 m/s. Si la lámpara del farol está a 5 m de altura, ¿con qué velocidad decrece la longitud de la sombra del hombre cuando está a 3 m del farol? ¿Con qué velocidad se está moviendo en ese instante la sombra de su cabeza?

20. Una mujer de 6 pies de alto camina con una velocidad de 2 pies/s por un camino recto sobre la tierra. Hay un farol de 5 pies de alto a un lado del camino. Una luz a 15 pies de altura proyecta la sombra de la mujer sobre el suelo. ¿Con qué velocidad cambia la longitud de la sombra de la mujer cuando ésta está a 12 pies del punto del camino más cercano al farol?

21. **(Coste de producción)** Al propietario de una mina de carbón le cuesta C € al día mantener una producción de x toneladas, siendo $C = 10\,000 + 3x + x^2/8000$. ¿A qué velocidad crece la producción cuando ésta vale 12 000 t y el coste diario crece a razón de 600 € al día?

22. **(Distancia entre barcos)** A la una de la tarde el barco A está a 25 km al norte del barco B. Si el barco A navega al oeste con una velocidad de 16 km/h y el barco B navega al sur con una velocidad de 20 km/h, ¿a qué velocidad cambia la distancia entre los dos barcos a la una y media de la tarde?

23. ¿Cuál es la primera hora después de las tres de la tarde a la que las manecillas del reloj están juntas?

24. **(Seguimiento de un globo)** Un globo que se lanza en el punto A sube verticalmente con una velocidad constante de 5 m/s. El punto B está al mismo nivel que el punto A y dista 100 m de éste. ¿Con qué velocidad cambia el ángulo de elevación del globo en B cuando dicho globo está a 200 m por encima de A?

25. Se vierte serrín en una pila con una velocidad de 1/2 m^3/min. Si la pila mantiene la forma de un cono circular recto cuya altura es igual a la mitad del diámetro de su base, ¿con qué velocidad crece la altura de la pila cuando dicha pila tiene 3 m de altura?

26. **(Tanque cónico)** Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular recto invertido con un radio de 10 m en su parte superior y una profundidad de 8 m. Se vierte agua en el interior del cono con una velocidad de $1/10\ \text{m}^3/\text{min}$. ¿Con qué velocidad crece la profundidad del agua en el tanque cuando dicha profundidad es de 4 m?

27. **(Tanque con fugas)** Repita el Ejercicio 26 con el supuesto añadido de que el agua sale por el fondo del tanque con una velocidad de $h^3/1000\ \text{m}^3/\text{min}$ cuando la profundidad de agua en el tanque es de h m. ¿Cuánto se puede llenar el tanque en este caso?

28. **(Otro tanque con fugas)** Se introduce agua en otro tanque con fugas con una velocidad de $10\ \text{m}^3/\text{min}$. El tanque tiene la forma de un cono invertido, de 9 m de profundidad y de 6 m de diámetro en su parte superior. La superficie de agua en el tanque sube con una velocidad de 20 cm por hora cuando la profundidad es de 6 m. ¿Con qué velocidad está saliendo agua del tanque en ese instante?

29. **(Vuelo de una cometa)** ¿Con qué velocidad hay que soltar cuerda si la cometa que estamos haciendo volar está a 30 m de altura, a 40 m de distancia horizontal desde nuestra posición, y alejándose horizontalmente con una velocidad de 10 m por minuto?

30. **(Noria)** Suponga que está en una noria de 20 m de diámetro. La noria da vueltas a 1 revolución por minuto. ¿Con qué velocidad está subiendo o bajando cuando está a una distancia horizontal de 6 m de la línea vertical que pasa por el centro de la noria?

31. **(Distancia entre aeronaves)** Una aeronave está 144 km al este de un aeropuerto y viaja hacia el oeste a 200 km/h. Al mismo tiempo, una segunda aeronave a la misma altitud dista 60 km al norte del aeropuerto y viaja hacia el norte a 150 km/h. ¿Con qué velocidad cambia la distancia entre las dos aeronaves?

32. **(Tasa de producción)** Si una factoría de camiones emplea a x trabajadores y tiene unos gastos de operación diarios de y €, puede producir $P = (1/3)x^{0.6}y^{0.4}$ camiones al año. ¿Con qué velocidad disminuyen los gastos diarios cuando su valor es de 10 000 € y el número de trabajadores es de 40, si el número de trabajadores crece a razón de uno por día y la producción permanece constante?

33. Una lámpara está situada en el punto (3, 0) del plano xy. Una hormiga camina por el primer cuadrante del plano y la lámpara arroja su sombra en el eje y. ¿Con qué velocidad se mueve la sombra de la hormiga por el eje y cuando dicha hormiga está en la posición (1, 2) y se mueve de forma que su coordenada x crece con una velocidad de 1/3 unidades/s y su coordenada y disminuye con una velocidad de 1/4 unidades/s?

34. Una autopista recta y un canal recto se cruzan formando ángulos rectos. La autopista cruza sobre el canal por un puente de 20 m de altura sobre el agua. Un barco que viaja con una velocidad de 20 km/h pasa bajo el puente en el mismo instante en que un coche que viaja a 80 km/h pasa sobre el puente. ¿Con qué velocidad se están separando el barco y el coche tras un minuto?

35. **(Llenado de un abrevadero)** La sección cruzada de un abrevadero es un triángulo equilátero con su lado superior horizontal. Si el abrevadero tiene 10 m de longitud y 30 cm de profundidad, y se está llenando de agua con una velocidad de $1/4\ \text{m}^3/\text{min}$, ¿con qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando dicho nivel es de 20 cm por encima del vértice inferior?

36. **(Vaciado de una piscina)** Una piscina rectangular tiene 8 m de anchura y 20 m de longitud (*véase* la Figura 4.7). Su fondo es un plano con pendiente, y la profundidad crece desde 1 m en el lado menos hondo hasta 3 m en el lado más profundo. Se vacía el agua de la piscina con una velocidad de $1\ \text{m}^3/\text{min}$. ¿Con qué velocidad desciende la superficie del agua cuando la profundidad del agua en el extremo más profundo es de (a) 2.5 m, (b) 1 m?

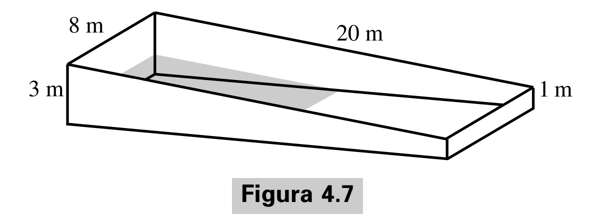


Figura 4.7

∗37. Un extremo de una escalera de 10 m de largo se apoya en el suelo y dicha escalera descansa también sobre la parte superior de una valla de 3 m de altura (*véase* la Figura 4.8). Si el pie de la escalera está a 4 m de distancia de la base de la valla y se aleja de dicha base a una velocidad de 1/5 m/s, ¿con qué velocidad se mueve el extremo superior de la escalera (a) verticalmente y (b) horizontalmente?

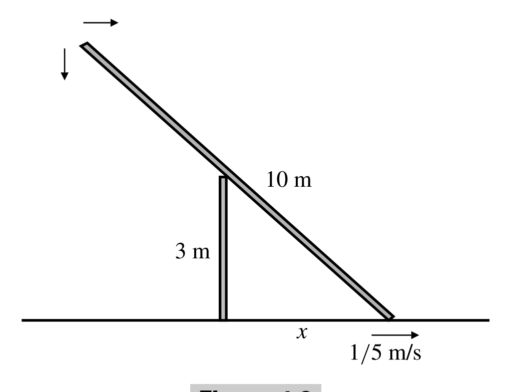


Figura 4.8

∗**38.** Dos cajones, A y B se encuentran en el suelo de un almacén. Están unidos por una cuerda de 15 m de longitud, y cada cajón está enganchado a la cuerda a nivel del suelo. La cuerda se mantiene tensa y se pasa por una polea P sujeta a una viga a 4 m de altura con respecto a un punto Q en el suelo directamente entre las dos cajas (*véase* la Figura 4.9). Si la caja A está a 3 m de Q y se aleja de dicho punto Q a una velocidad de 1/2 m/s, ¿a qué velocidad se mueve la caja B hacia el punto Q?

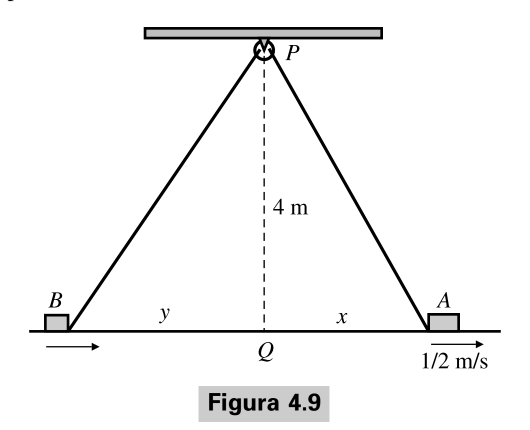


Figura 4.9

39. **(Seguimiento de un cohete)** Poco después de su lanzamiento, un cohete está a 100 km de altura y a 50 km de distancia desde el punto de lanzamiento. Si viaja a una velocidad de 4 km por segundo formando un ángulo de 30º respecto a la horizontal, ¿con qué velocidad cambia su ángulo de elevación medido desde el punto de lanzamiento?

40. **(Sombra de una bola que cae)** Una lámpara está situada a 20 m de altura sobre un poste. En el instante $t = 0$ se arroja una bola desde un punto situado a nivel de la lámpara y a 10 metros de distancia de la misma. La bola cae por efecto de la gravedad (aceleración de 9.8 m/s^2) hasta que llega al suelo. ¿Con qué velocidad se mueve la sombra de la bola por el suelo (a) 1 s después de ser lanzada y (b) en el instante en que llega al suelo?

41. **(Seguimiento de un cohete)** Se lanza un cohete en el instante $t = 0$ que se eleva verticalmente con una aceleración de 10 m/s^2. Se monitoriza el progreso del cohete en una estación de seguimiento localizada a una distancia horizontal de 2 km del punto de lanzamiento. ¿Con qué velocidad vertical gira la antena de la estación de seguimiento 10 s después del lanzamiento?

4.2 Problemas de valores extremos

La primera derivada de una función es una fuente de información de mucha utilidad sobre el comportamiento de dicha función. Como ya hemos visto, el signo de f' indica si f es creciente o decreciente. En esta sección utilizaremos esta información para obtener los valores máximos y mínimos de funciones. En la Sección 4.5 emplearemos las técnicas desarrolladas aquí para resolver problemas que requieren la obtención de valores máximos y mínimos.

Valores máximo y mínimo

Recuérdese (*véase* la Sección 1.4) que una función tiene un valor máximo en x_0 si $f(x) \leqslant f(x_0)$ para todo x perteneciente al dominio de f. El valor máximo es $f(x_0)$. Para ser más precisos, ese tipo de máximo debería denominarse máximo *absoluto* o *global* debido a que es el máximo valor que toma la función f en todo su dominio.

DEFINICIÓN 1 **Valores extremos absolutos**

Una función f tiene un **valor máximo absoluto** $f(x_0)$ en el punto x_0 de su dominio si $f(x) \leqslant f(x_0)$ se cumple para todo x perteneciente al dominio de f.

Una función f tiene un **valor mínimo absoluto** $f(x_1)$ en el punto x_1 de su dominio si $f(x) \geqslant f(x_1)$ se cumple para todo x perteneciente al dominio de f.

Una función puede tener como mucho un valor máximo o mínimo absolutos, aunque ese valor se puede alcanzar en muchos puntos. Por ejemplo, $f(x) = \operatorname{sen} x$ tiene un valor máximo de 1 en todo punto que cumpla $x = (\pi/2) + 2n\pi$, siendo n un entero. Por supuesto, no es necesario que una función tenga valores extremos absolutos. La función $f(x) = 1/x$ se hace arbitrariamente grande cuando x se aproxima a 0 por la derecha, por lo que no tiene un máximo absoluto finito

(recuérdese que ∞ no es un número, por lo que no puede ser un valor de f). Incluso una función acotada puede no tener valores máximo y mínimo absolutos. La función $g(x) = x$, con dominio especificado como el intervalo *abierto* (0, 1), no tiene máximo ni mínimo absoluto. El rango de g es también el intervalo (0, 1), y no existe ningún valor máximo o mínimo en este intervalo. Por supuesto, si el dominio de g se extendiera al intervalo *cerrado* [0, 1], entonces g tendría un valor máximo, 1, y un valor mínimo, 0.

Los valores máximo y mínimo de una función se denominan colectivamente **valores extremos**. El teorema que sigue es un replanteamiento (y una ligera generalización) del Teorema 8 de la Sección 1.4. Se mostrará de gran utilidad en algunas circunstancias en las que se desea calcular valores extremos.

TEOREMA 1 **Existencia de valores extremos**

Si el dominio de la función f es un intervalo *cerrado* y *finito*, o se puede expresar como una unión finita de intervalos de ese tipo, y si f es *continua* en dicho dominio, entonces f debe tener un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto.

Considérese la gráfica $y = f(x)$ que se muestra en la Figura 4.10. Evidentemente, el valor mínimo absoluto de f es $f(x_2)$, y el valor mínimo absoluto es $f(x_3)$. Además de esos valores extremos, f tiene otros valores máximos y mínimos «locales» correspondientes a puntos de la gráfica con valores mayores o menores que sus puntos vecinos. Obsérvese que f tiene *valores máximos locales* en a, x_2, x_4 y x_6, y valores mínimos locales en x_1, x_3, x_5 y b. El máximo absoluto es el mayor de los máximos locales; el mínimo absoluto es el menor de los mínimos locales.

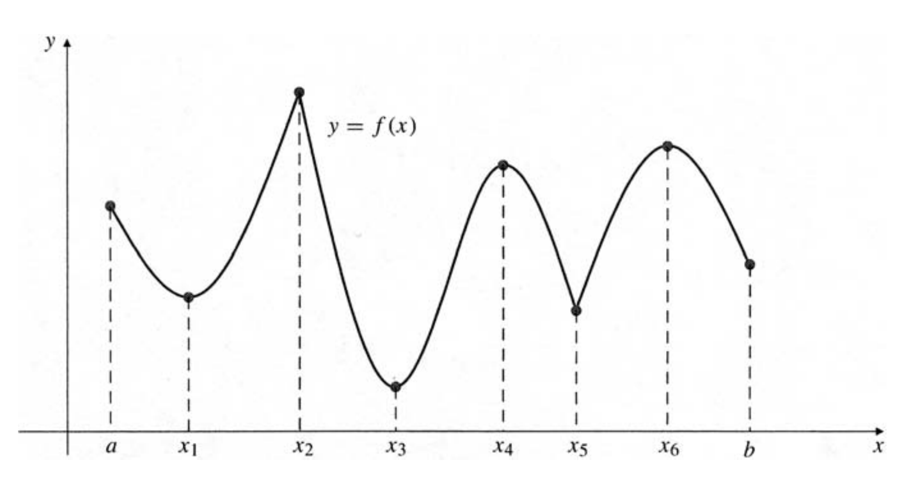


Figura 4.10 Valores extremos locales.

DEFINICIÓN 2 **Valores extremos locales**

Una función f tiene un **valor máximo local** $f(x_0)$ en el punto x_0 de su dominio si existe un número $h > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(x_0)$ siempre que x esté en el dominio de f y $|x - x_0| < h$.

Una función f tiene un **valor mínimo local** $f(x_1)$ en el punto x_1 de su dominio si existe un número $h > 0$ tal que $f(x) \geqslant f(x_1)$ siempre que x esté en el dominio de f y $|x - x_1| < h$.

Por tanto, f tiene un valor máximo (o mínimo) en x si tiene un valor máximo (o mínimo) absoluto en x cuando su dominio se restringe a puntos suficientemente cercanos a x. Geométricamente, la gráfica de f es al menos tan alta (o tan baja) en x como en sus puntos vecinos.

Puntos críticos, puntos singulares y extremos

La Figura 4.10 sugiere que una función $f(x)$ puede tener valores extremos locales sólo en puntos x de tres tipos especiales:

(i) **Puntos críticos** de f (puntos x en $\mathcal{D}(f)$ donde $f'(x) = 0$).
(ii) **Puntos singulares** de f (puntos x en $\mathcal{D}(f)$ donde $f'(x)$ no está definida).
(iii) **Extremos** del dominio de f (puntos en $\mathcal{D}(f)$ que no pertenecen a ningún intervalo abierto contenido en $\mathcal{D}(f)$).

En la Figura 4.10, x_1, x_3, x_4 y x_6 son puntos críticos, x_2 y x_5 son puntos singulares, y a y b son extremos.

TEOREMA 2 **Localización de valores extremos**

Si la función f está definida en un intervalo I y tiene un valor máximo local (o mínimo local) en el punto $x = x_0$ de I, entonces x_0 debe ser un punto crítico de f, un punto singular de f o un extremo de I.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que f tiene un máximo local en x_0 y que x_0 no es ni un extremo del dominio de f ni un punto singular de f. Entonces para algún $h > 0$, $f(x)$ está definido en el intervalo abierto $(x_0 - h, x_0 + h)$ y tiene un máximo absoluto (para ese intervalo) en x_0. Además existe $f'(x_0)$. Por el Teorema 14 de la Sección 2.6, $f'(x_0) = 0$. La demostración para el caso en el que f tiene un mínimo local en x_0 es similar.

Aunque una función no puede tener valores extremos excepto en sus puntos críticos, puntos singulares y extremos, no es obligatorio que tenga valores extremos en esos puntos. La Figura 4.11 muestra la gráfica de una función con un punto crítico x_0 y un punto singular x_1 y ninguno de ellos es un valor extremo. Es más difícil dibujar la gráfica de una función cuyo dominio tenga un extremo en el cual dicha función no tenga un valor extremo. *Véase* el Ejercicio 49 al final de esta sección donde se presenta un ejemplo de una función de ese tipo.

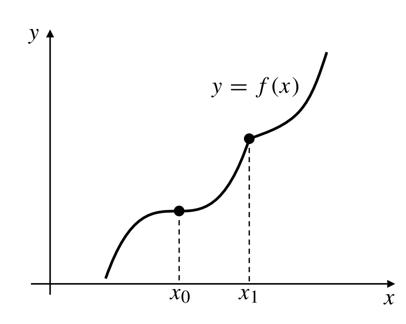


Figura 4.11 No es obligatorio que una función tenga valores extremos en un punto crítico ni en un punto singular.

Cálculo de valores extremos absolutos

Si una función f está definida en un intervalo cerrado o en una unión finita de intervalos cerrados, el Teorema 1 asegura que f debe tener un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto. El Teorema 2 nos indica cómo obtenerlos. Sólo es necesario comprobar los valores de f en los puntos críticos, puntos singulares y extremos.

Ejemplo 1 Calcule los valores máximo y mínimo de la función

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

en el intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Solución Como g es un polinomio, puede no tener puntos singulares. Para obtener los puntos críticos, se calcula

$$\begin{aligned} g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 &= 3(x^2 - 2x - 3) \\ &= 3(x+1)(x-3) \\ &= 0 \quad \text{si} \quad x = -1 \text{ o } x = 3 \end{aligned}$$

Sin embargo, $x = 3$ no pertenece al dominio de g, por lo que puede ignorarse. Sólo es necesario considerar los valores de g en los puntos críticos $x = -1$ y en los extremos $x = -2$ y $x = 2$.

$$g(-2) = 0, \qquad g(-1) = 7, \qquad g(2) = -20$$

El valor máximo de $g(x)$ en $-2 \leqslant x \leqslant 2$ es 7, en el punto crítico $x = -1$, y el valor mínimo es -20, en el extremo $x = 2$. *Véase* la Figura 4.12.

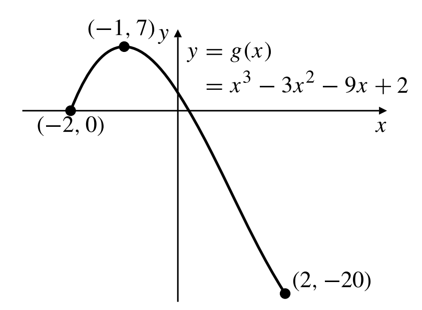


Figura 4.12 g tiene valores máximo y mínimo en 7 y -20, respectivamente.

Ejemplo 2 Calcule los valores máximo y mínimo de $h(x) = 3x^{2/3} - 2x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución La derivada de h es

$$h'(x) = 3\left(\frac{2}{3}\right)x^{-1/3} - 2 = 2(x^{-1/3} - 1)$$

Nótese que $x^{-1/3}$ no está definida en el punto $x = 0$ en $\mathcal{D}(h)$, por lo que $x = 0$ es un punto singular de h. Además, h tiene un punto crítico en $x^{-1/3} = 1$, es decir, en $x = 1$, que además es también un extremo del dominio de h. Por tanto, hay que examinar los valores de h en los puntos $x = 0$ y $x = 1$, así como en el otro extremo $x = -1$. Tenemos que

$$h(-1) = 5, \qquad h(0) = 0, \qquad h(1) = 1$$

La función h tiene un valor máximo de 5 en el extremo -1 y un valor mínimo de 0 en el punto singular $x = 0$. *Véase* la Figura 4.13.

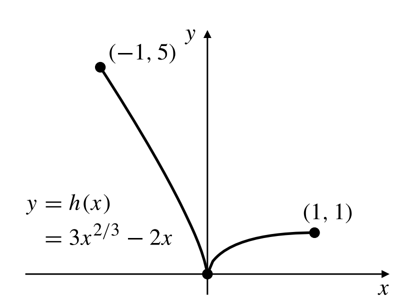


Figura 4.13 h tiene un valor mínimo absoluto de 0 en un punto singular.

El test de la primera derivada

La mayoría de las funciones que aparecen en cálculo elemental tienen derivadas distintas de cero en todo su dominio excepto posiblemente en un número finito de puntos críticos, puntos singula-

res y extremos de dicho dominio. En los intervalos entre esos puntos la derivada existe y no es cero, por lo que la función es o bien creciente o bien decreciente allí. Si f es continua y creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a la derecha, entonces debe tener un valor máximo local en x_0. El siguiente teorema agrupa varios resultados de este tipo.

TEOREMA 3 **El test de la primera derivada**

PARTE I. Comprobación de puntos críticos interiores y de puntos singulares.
Supongamos que f es continua en x_0, y x_0 no es un extremo del dominio de f.

(a) Si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0 tal que $f'(x) > 0$ en (a, x_0) y $f'(x) < 0$ en (x_0, b), entonces f tiene un valor máximo local en x_0.
(b) Si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0 tal que $f'(x) < 0$ en (a, x_0) y $f'(x) > 0$ en (x_0, b), entonces f tiene un valor mínimo local en x_0.

PARTE II. Comprobación de los extremos del dominio.
Supongamos que a es un extremo izquierdo del dominio de f y que f es continua por la derecha en a.

(c) Si $f'(x) > 0$ en algún intervalo (a, b), entonces f tiene un valor mínimo local en a.
(d) Si $f'(x) < 0$ en algún intervalo (a, b), entonces f tiene un valor máximo local en a.

Supongamos que b es un extremo derecho del dominio de f y que f es continua por la izquierda en b.

(e) Si $f'(x) > 0$ en algún intervalo (a, b), entonces f tiene un valor máximo local en b.
(f) Si $f'(x) < 0$ en algún intervalo (a, b), entonces f tiene un valor mínimo local en b.

Observación Si f' es positivo (o negativo) en *ambos* lados de un punto crítico singular, entonces f no tiene un valor máximo ni mínimo en ese punto.

Ejemplo 3 Calcule los valores extremos locales y absolutos de $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ en el intervalo $[-2, 2]$. Dibuje aproximadamente la gráfica de f.

Solución Empezaremos por calcular y factorizar la derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$$

Los puntos críticos son 0, -1 y 1. Los valores correspondientes son $f(0) = -3$, $f(-1) = f(1) = -4$. No existen puntos singulares. Los valores de f en los extremos -2 y 2 son $f(-2) = f(2) = 5$. La forma factorizada de $f'(x)$ es también adecuada para determinar el signo de $f'(x)$ en los intervalos entre esos extremos y puntos críticos. Donde un número impar de factores de $f'(x)$ sean negativos, $f(x)$ será a su vez negativa. Donde un número par de factores sean negativos, $f'(x)$ será positiva. Resumimos en forma de tabla las propiedades de los signos de $f'(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de $f(x)$ que se desprende de dichos signos:

x	PE -2		PC -1		PC 0		PC 1		PE 2
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	máx	↘	mín	↗	máx	↘	mín	↗	máx

Nótese cómo las flechas indican de forma visual la clasificación de los extremos (EP) y puntos críticos (CP) tal como quedan determinados por el test de la primera derivada. En secciones posteriores haremos

un uso extenso de este tipo de tablas. La gráfica de f se muestra en la Figura 4.14. Como el dominio es un intervalo cerrado y finito, f debe tener valores máximo y mínimo absolutos. Son 5 (en ± 2) y -4 (en ± 1).

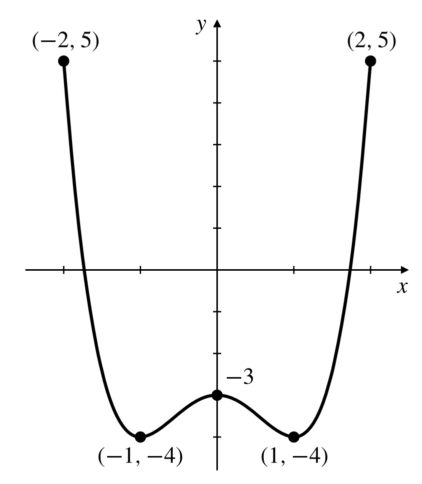


Figura 4.14 Gráfica de $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Ejemplo 4 Calcule y clasifique los valores extremos absolutos y locales de la función $f(x) = x - x^{2/3}$ con dominio $[-1, 2]$. Dibuje aproximadamente la gráfica de f.

Solución $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\, x^{-1/3} = (x^{1/3} - \frac{2}{3})/x^{1/3}$. Existe un punto singular, $x = 0$ y un punto crítico, $x = 8/27$. Los extremos son $x = -1$ y $x = 2$. Los valores de f en esos puntos son $f(-1) = -2$, $f(0) = 0$, $f(8/27) = -4/27$ y $f(2) = 2 - 2^{2/3} \approx 0.4126$ (*véase* la Figura 4.15). Otro punto interesante de la gráfica es el corte con el eje x en $x = 1$. La tabla que sigue resume la información sobre f':

x	PE -1		PS 0		PC $8/27$		PE 2
f'		$+$	indef	$-$	0	$+$	
f	mín	↗	máx	↘	mín	↗	máx

Existen dos mínimos locales y dos máximos locales. El máximo absoluto de f es $2 - 2^{2/3}$ en $x = 2$. El mínimo absoluto es -2 en $x = -1$.

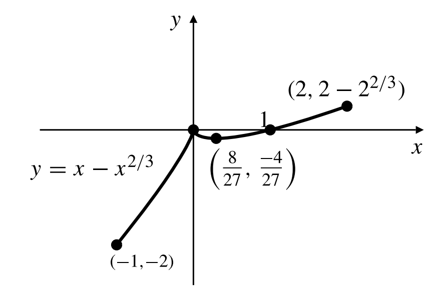


Figura 4.15 Gráfica del Ejemplo 4.

Funciones no definidas en intervalos cerrados y finitos

Si la función f no está definida en un intervalo cerrado y finito, entonces el Teorema 1 no se puede utilizar para garantizar la existencia de valores máximos y mínimos de f. Por supuesto, f puede tener tales valores extremos. En muchas situaciones prácticas desearemos calcular los va-

lores extremos de funciones definidas en intervalos abiertos y/o infinitos. El siguiente teorema adapta el Teorema 1 para contemplar algunas de esas situaciones.

TEOREMA 4 **Existencia de valores extremos en intervalos abiertos**

Si f es una función continua en el intervalo abierto (a, b), y si

$$\lim_{x\to a+} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to b-} f(x) = M$$

entonces se cumplen las siguientes conclusiones:

(i) Si $f(u) > L$ y $f(u) > M$ para algún u en (a, b), entonces f tiene un valor máximo absoluto en (a, b).

(ii) Si $f(v) < L$ y $f(v) < M$ para algún v en (a, b), entonces f tiene un valor mínimo absoluto en (a, b).

En este teorema a puede ser $-\infty$, en cuyo caso $\lim_{x\to a+}$ debería sustituirse por $\lim_{x\to -\infty}$, y b puede ser ∞, en cuyo caso $\lim_{x\to b-}$ debe sustituirse por $\lim_{x\to\infty}$. Además, tanto L como M o ambos pueden ser ∞ o $-\infty$.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos el apartado (i), ya que la demostración del apartado (ii) es similar. Tenemos que existe un número u en (a, b) tal que $f(u) > L$ y $f(u) > M$. Aquí, L y M son números finitos o $-\infty$. Como $\lim_{x\to a+} f(x) = L$ debe existir un número x_1 en (a, u) tal que

$$f(x) < f(u) \qquad \text{siempre que} \qquad a < x < x_1$$

De forma similar, debe existir un número x_2 en (u, b) tal que

$$f(x) < f(u) \qquad \text{siempre que} \qquad x_2 < x < b$$

Véase la Figura 4.16. Por tanto, $f(x) < f(u)$ en todos los puntos de (a, b) que no estén en el subintervalo cerrado finito $[x_1, x_2]$. Por el Teorema 1, la función f, continua en $[x_1, x_2]$, debe tener un valor máximo absoluto en ese intervalo, que podemos denominar w. Como u pertenece al intervalo $[x_1, x_2]$, debemos tener que $f(w) \geqslant f(u)$, por lo que $f(w)$ es el valor máximo de $f(x)$ en todo (a, b).

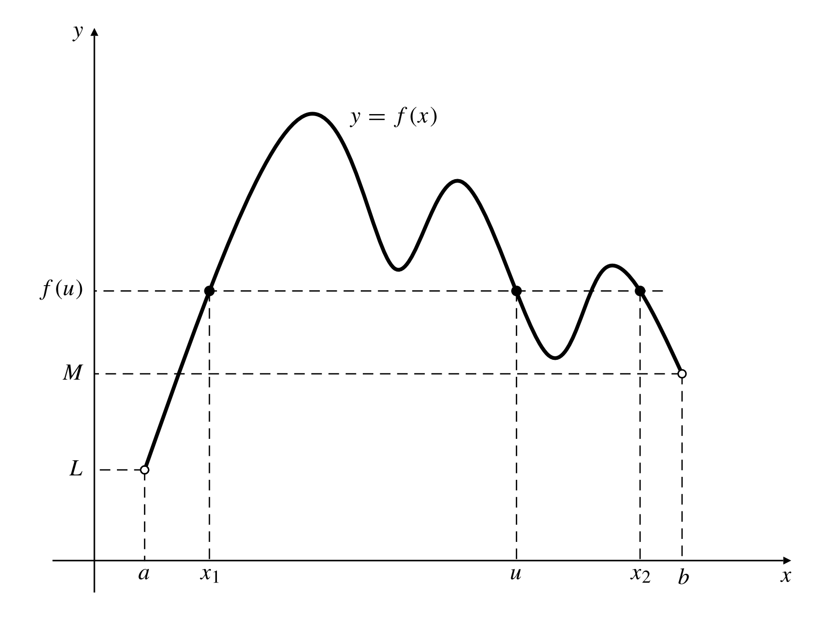


Figura 4.16

El Teorema 2 puede utilizarse para buscar valores extremos. En un intervalo abierto no hay extremos que considerar, pero todavía es posible mirar los valores de una función en los puntos críticos o singulares del intervalo.

Ejemplo 5 Demuestre que $f(x) = x + (4/x)$ tiene un valor mínimo absoluto en el intervalo $(0, \infty)$ y calcule ese valor mínimo.

Solución Tenemos que

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Como $f(1) = 5 < \infty$, el Teorema 4 garantiza que f debe tener un valor mínimo absoluto en algún punto de $(0, \infty)$. Para calcular el valor mínimo hay que comprobar los valores de f en los puntos críticos o singulares del intervalo. Tenemos que

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

que sólo vale 0 en $x = 2$ y $x = -2$. Como el dominio de f es $(0, \infty)$, no existen puntos singulares y sólo hay un punto crítico, concretamente $x = 2$, donde f tiene el valor $f(2) = 4$. Éste debe ser el valor mínimo de f en $(0, \infty)$ (*véase* la Figura 4.17).

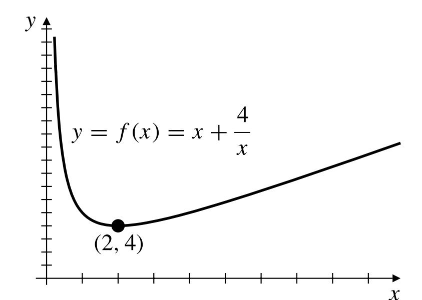


Figura 4.17 f tiene un valor mínimo de 4 en $x = 2$.

Ejemplo 6 Sea $f(x) = xe^{-x^2}$. Calcule y clasifique los puntos críticos de f, evalúe $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ y utilice estos resultados como ayuda para dibujar aproximadamente la gráfica de f.

Solución $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0$ sólo si $1 - 2x^2 = 0$ ya que la exponencial es siempre positiva. Por tanto, los puntos críticos son $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tenemos que $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$. f' es positiva (o negativa) cuando $1 - 2x^2$ es positiva (o negativa). La siguiente tabla resume los intervalos en los que f es creciente o decreciente:

x		PC $-1/\sqrt{2}$		PC $1/\sqrt{2}$	→
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	mín	↗	máx	↘

Nótese que $f(0) = 0$ y que f es una función impar ($f(-x) = -f(x)$), de forma que la gráfica es simétrica respecto al origen. Además,

$$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = \left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\right)\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}\right) = 0 \times 0 = 0$$

ya que $\lim_{x\to\pm\infty} x^2e^{-x^2} = \lim_{u\to\infty} ue^{-u} = 0$ por el Teorema 5 de la Sección 3.4. Como $f(x)$ es positiva en $x = 1/\sqrt{2}$ y es negativa en $x = -1/\sqrt{2}$, f debe tener valores máximo y mínimo absolutos por el Teorema 4.

Estos valores sólo pueden ser los valores $\pm 1/\sqrt{2e}$ en los dos puntos críticos. La gráfica se muestra en la Figura 4.18. El eje x es una asíntota en $x \to \pm\infty$.

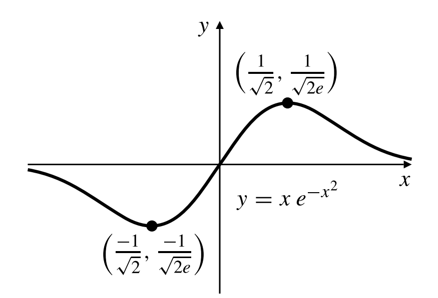


Figura 4.18 Gráfica del Ejemplo 6.

Ejercicios 4.2

En los Ejercicios 1-17, determine si las funciones dadas tienen valores extremos locales o absolutos, y obtenga sus valores si es posible.

1. $f(x)=x+2$ en $[-1, 1]$
2. $f(x)=x+2$ en $(-\infty, 0]$
3. $f(x)=x+2$ en $[-1, 1)$
4. $f(x) = x^2 - 1$
5. $f(x)=x^2-1$ en $[-2, 3]$
6. $f(x) = x^2 - 1$ en $(2, 3)$
7. $f(x)=x^3+x-4$ en $[a, b]$
8. $f(x)=x^3+x-4$ en (a, b)
9. $f(x)=x^5+x^3+2x$ en $(a, b]$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
11. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $(0, 1)$
12. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $[2, 3]$
13. $|x-1|$ en $[-2, 2]$
14. $|x^2-x-2|$ en $[-3, 3]$
15. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
16. $f(x) = (x+2)^{2/3}$
17. $f(x) = (x-2)^{1/3}$

En los Ejercicios 18-40, localice y clasifique todos los valores extremos de las funciones dadas. Determine si algunos de esos valores extremos son absolutos. Dibuje aproximadamente las gráficas de las funciones.

18. $f(x) = x^2 + 2x$
19. $f(x) = x^3 - 3x - 2$
20. $f(x) = (x^2-4)^2$
21. $f(x) = x^3(x-1)^2$
22. $f(x) = x^2(x-1)^2$
23. $f(x) = x(x^2-1)^2$
24. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
25. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$
26. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$
27. $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$
28. $f(x) = x + \operatorname{sen} x$
29. $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x$
30. $f(x) = x - 2\tan^{-1} x$
31. $f(x) = 2x - \operatorname{sen}^{-1} x$
32. $f(x) = e^{-x^2/2}$
33. $f(x) = x2^{-x}$
34. $f(x) = x^2 e^{-x^2}$
35. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
36. $f(x) = |x+1|$
37. $f(x) = |x^2-1|$
38. $f(x) = \operatorname{sen}|x|$
39. $f(x) = |\operatorname{sen} x|$
$*$**40.** $f(x) = (x-1)^{2/3} - (x+1)^{2/3}$

En los Ejercicios 41-46, determine si las funciones dadas tienen valores absolutos máximos o mínimos. Justifique sus respuestas. Calcule los valores extremos si es posible.

41. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
42. $\dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$
43. $x\sqrt{4-x^2}$
44. $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$
$*$**45.** $\dfrac{1}{x\operatorname{sen} x}$ en $(0, \pi)$
$*$**46.** $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

47. Si una función tiene un valor máximo absoluto, ¿debe tener valores máximos locales? Si una función tiene un valor máximo local, ¿debe tener un valor máximo absoluto? Justifique sus respuestas.

48. Si la función f tiene un valor máximo absoluto y $g(x) = |f(x)|$, ¿debe tener g un valor máximo absoluto? Justifique su respuesta.

$*$**49. (Una función sin máximo ni mínimo en un extremo)** Sea

$$f(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en $[0, \infty)$ y diferenciable en $(0, \infty)$, pero que en el extremo $x = 0$ no tiene ni un máximo local ni un mínimo local.

4.3 Concavidad y puntos de inflexión

Como la primera derivada, la segunda derivada de una función proporciona también información de utilidad sobre el comportamiento de dicha función y la forma de su gráfica. Determina si la gráfica se *curva hacia arriba* (es decir, su pendiente es creciente) o se *curva hacia abajo* (es decir, su pendiente es decreciente) a medida que nos movemos por la gráfica hacia la derecha.

DEFINICIÓN 3

Se dice que la función f es **convexa** en un intervalo abierto I si es diferenciable en dicho intervalo y su derivada f' es una función creciente en I. De forma similar, la función f es **cóncava** en I si existe f' y es decreciente en I.

Los términos «convexa» y «cóncava» se utilizan para describir tanto la gráfica de la función como la función en sí misma.

Nótese que la concavidad sólo se define para funciones diferenciables, e incluso para éstas, sólo en los intervalos en los que sus derivadas no son constantes. De acuerdo con la definición anterior, en los intervalos donde la gráfica de una función sea una línea recta, la función no es cóncava ni convexa. Se dice que la función no tiene concavidad en dicho intervalo. También se dice que una función tiene concavidad opuesta en dos intervalos si es cóncava en un intervalo y convexa en el otro.

La función f cuya gráfica se muestra en la Figura 4.19 es convexa en el intervalo (a, b) y cóncava en el intervalo (b, c).

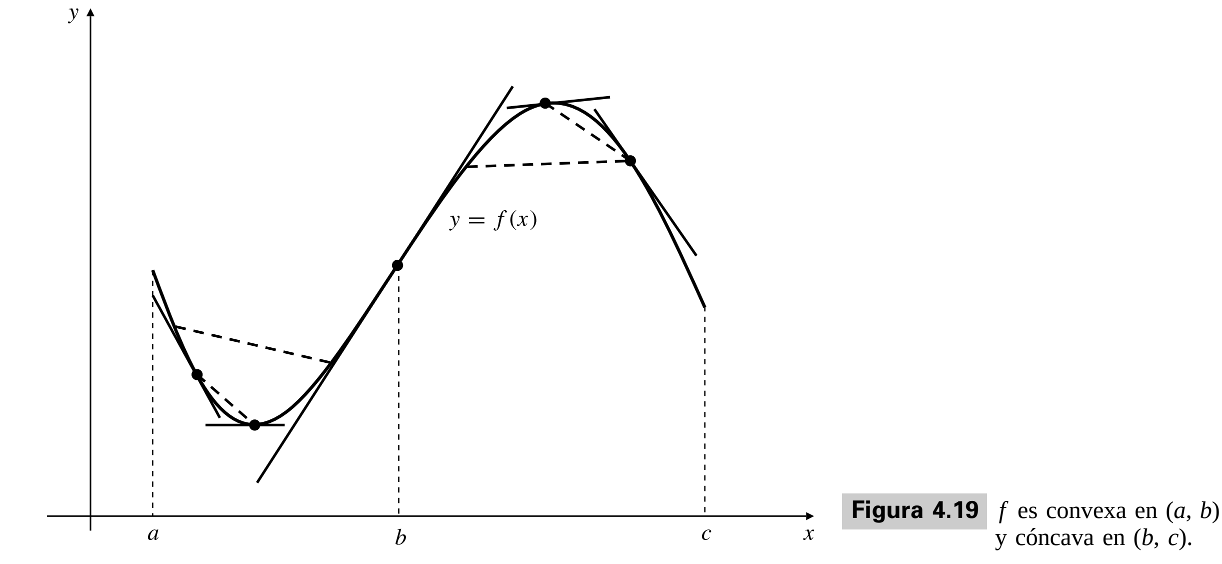


Figura 4.19 f es convexa en (a, b) y cóncava en (b, c).

Es conveniente tener en cuenta algunas consideraciones geométricas sobre la concavidad:

(i) Si f es convexa en un intervalo, entonces, en dicho intervalo, su gráfica está por encima de sus tangentes, y las cuerdas que unen puntos de su gráfica están por encima de dicha gráfica.

(ii) Si f es cóncava en un intervalo entonces, en dicho intervalo, su gráfica está por debajo de sus tangentes, y las cuerdas que unen puntos de su gráfica están por debajo de dicha gráfica.

(iii) Si la gráfica de f tiene una tangente en un punto, y si la concavidad de f es contraria en lados opuestos de dicho punto, entonces la gráfica de la función corta a su tangente en ese punto (esto ocurre en el punto $(b, f(b))$ de la Figura 4.19). Los puntos en los que ocurre eso se denominan *puntos de inflexión* de la gráfica de f.

DEFINICIÓN 4 **Puntos de inflexión**

Se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un **punto de inflexión** de la curva $y = f(x)$ (o que la función $f(x)$ *tiene* un **punto de inflexión** en $x = x_0$) si se cumplen las dos condiciones siguientes:

(a) La gráfica $y = f(x)$ tiene una tangente en x_0.
(b) La concavidad de f toma valores opuestos en lados opuestos de x_0.

Nótese que la condición (a) implica que o bien f es diferenciable en x_0 o bien su gráfica tiene una tangente vertical en ese punto, y (b) implica que la gráfica cruza a su tangente en x_0. Un punto de inflexión de una función f es un punto de la gráfica de la función diferente de lo que se entiende como punto crítico o punto singular. Una función puede tener o no tener un punto de inflexión en un punto crítico o un punto singular. En general, un punto P es un punto de inflexión (o simplemente *una inflexión*) de una curva C (que no tiene que ser necesariamente la gráfica de una función) si C tiene una tangente en P y los arcos de C que se extienden en direcciones opuestas desde P están en lados opuestos de dicha tangente.

Las Figuras 4.20-4.22 ilustran algunas situaciones en las que aparecen puntos críticos, puntos singulares y puntos de inflexión.

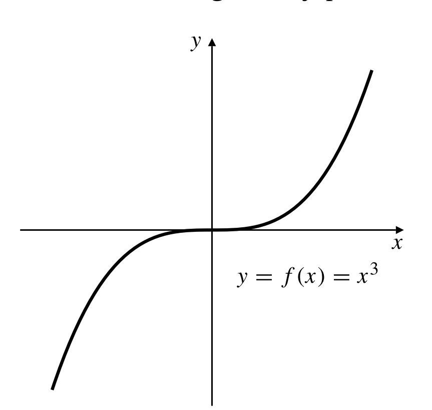


Figura 4.20 $x = 0$ es un punto crítico de $f(x) = x^3$ y f tiene un punto de inflexión en dicho punto.

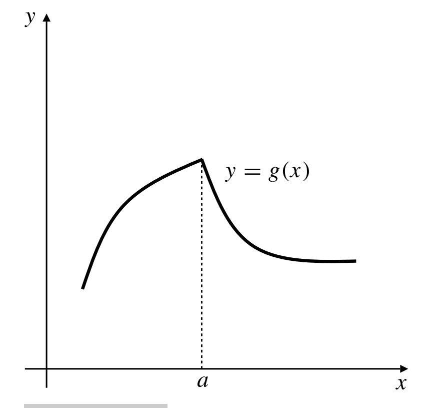


Figura 4.21 La concavidad de g es contraria en lados opuestos de a, pero su gráfica no tiene tangente en ese punto y, por tanto, no hay punto de inflexión allí.

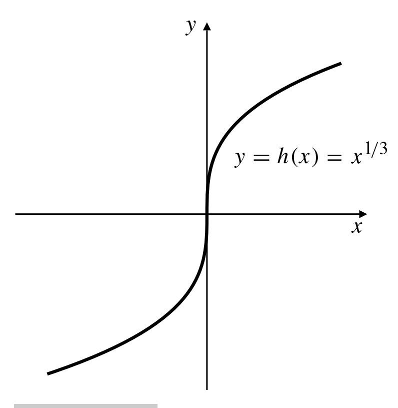


Figura 4.22 La gráfica de h tiene un punto de inflexión en el origen incluso aunque $x = 0$ es un punto singular de h.

Si una función f tiene derivada segunda f'', el signo de dicha derivada segunda nos indica si la primera derivada f' es creciente o decreciente y, por tanto, determina la concavidad de f.

TEOREMA 5 **Concavidad y segunda derivada**

(a) Si $f''(x) > 0$ en un intervalo I, entonces f es convexa en I.
(b) Si $f''(x) < 0$ en un intervalo I, entonces f es cóncava en I.
(c) Si f tiene un punto de inflexión en x_0 y existe $f''(x_0)$, entonces $f''(x_0) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Los apartados (a) y (b) se deducen al aplicar el Teorema 12 de la Sección 2.6 a la derivada f' de f. Si f tiene un punto de inflexión en x_0 y existe $f''(x_0)$, entonces f debe ser diferenciable en un intervalo abierto que contiene a x_0. Como f' es creciente a un lado de x_0 y decreciente al otro lado, debe tener valor máximo o mínimo local en x_0. Por el Teorema 2, $f''(x_0) = 0$.

El Teorema 5 nos indica que para obtener (las coordenadas x de) puntos de inflexión de una función f dos veces diferenciable, sólo se necesita buscar en los puntos donde $f''(x) = 0$. Sin embargo, no todos esos puntos tienen que ser puntos de inflexión. Por ejemplo, $f(x) = x^4$, cuya gráfica se muestra en la Figura 4.23, no tiene un punto de inflexión en $x = 0$, incluso aunque $f''(0) = 12x^2|_{x=0} = 0$. De hecho, x^4 es convexa para todo intervalo.

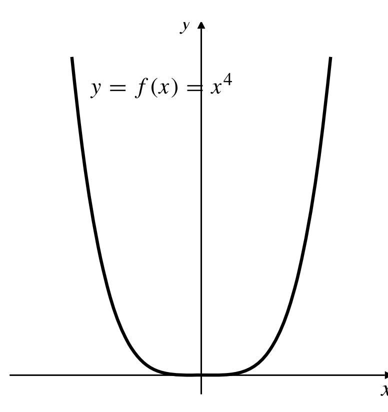


Figura 4.23 $f''(0) = 0$, pero f no tiene un punto de inflexión en 0.

Ejemplo 1 Determine los intervalos de concavidad de $f(x) = x^6 - 10x^4$ y los puntos de inflexión de su gráfica.

Solución Tenemos que

$$f'(x) = 6x^5 - 40x^3$$
$$f''(x) = 30x^4 - 120x^2 = 30x^2(x-2)(x+2)$$

Habiendo factorizado $f''(x)$ de esta forma, podemos ver que sólo se anula en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. En los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $f''(x) > 0$, por lo que f es convexa. En $(-2, 0)$ y $(0, 2)$, $f''(x) < 0$, por lo que f es cóncava. $f''(x)$ cambia de signo cuando pasamos por -2 y 2. Como $f(\pm 2) = -96$, la gráfica de f tiene puntos de inflexión en $(\pm 2, 96)$. Sin embargo, $f''(x)$ no cambia de signo en $x = 0$, ya que $x^2 > 0$ para valores de x positivos y negativos. Por tanto, no hay punto de inflexión en 0. Como en el caso de la primera derivada, la información del signo de $f''(x)$ y sus consecuencias sobre la concavidad de f se pueden expresar convenientemente en una tabla:

x		-2		0		2	
f''	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	infl	$\cap$		$\cap$	infl	$\cup$

La gráfica de f se dibuja en la Figura 4.24.

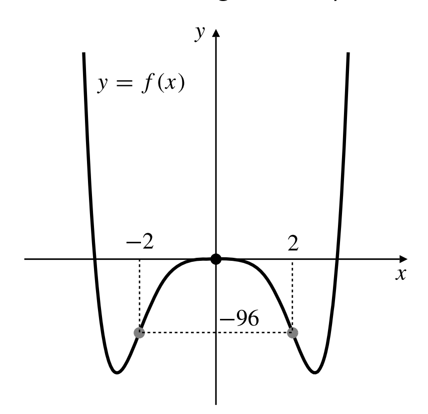


Figura 4.24 Gráfica de $f(x) = x^6 - 10x^4$.

Ejemplo 2 Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los valores de los extremos locales y la concavidad de $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$. Utilice la información para dibujar aproximadamente la gráfica de f.

Solución

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3) = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \text{ y } x = 3/2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1) = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \text{ y } x = 1$$

El comportamiento de f se resume en la siguiente tabla:

x		PC 0		1		PC 3/2	
f'	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
f	↘ ∪	infl	↘ ∩	infl	↘ ∪	mín	↗ ∪

Nótese que f tiene un punto de inflexión en el punto crítico $x = 0$. Calculamos los valores de f en los «valores de interés de x» en la tabla:

$$f(0) = 1, \qquad f(1) = 0, \qquad f\left(\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{11}{16}$$

La Figura 4.25 muestra la gráfica de f.

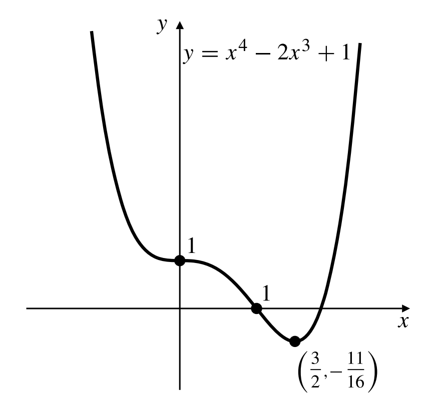


Figura 4.25 La función del Ejemplo 2.

El test de la segunda derivada

Una función f tendrá un valor máximo (o mínimo) local en un punto crítico si su gráfica es cóncava o convexa en un intervalo que contenga dicho punto. De hecho, a menudo se utiliza el valor de la segunda derivada en el punto crítico para determinar si la función tiene un valor máximo o mínimo local allí.

TEOREMA 6 **Test de la segunda derivada**

(a) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un valor máximo local en x_0.
(b) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un valor mínimo local en x_0.
(c) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$, entonces no se puede extraer ninguna conclusión; f puede tener un máximo local en x_0, o un mínimo local, o, en vez de eso, un punto de inflexión.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$. Como

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = f''(x_0) < 0$$

se deduce que $f'(x_0 + h) < 0$ para todo h positivo suficientemente pequeño, y $f'(x_0 + h) > 0$ para todo h negativo suficientemente pequeño. Por el test de la primera derivada (Teorema 3), f debe tener un valor máximo local en x_0. La demostración para el caso de mínimo local es similar.

Las funciones $f(x) = x^4$ (Figura 4.23), $f(x) = -x^4$ y $f(x) = x^3$ (Figura 4.20) satisfacen $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. Pero x^4 tiene un valor mínimo en $x = 0$, $-x^4$ tiene un valor máximo en $x = 0$ y x^3 no tiene ni máximo ni mínimo en $x = 0$, sino que presenta un punto de inflexión. Por tanto, no se pueden extraer conclusiones sobre la naturaleza de un punto crítico basándose solamente en el conocimiento de que $f''(x) = 0$ en dicho punto.

Ejemplo 3 Calcule y clasifique los puntos críticos de $f(x) = x^2e^{-x}$.

Solución

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \text{ y } x = 2$$
$$f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$$
$$f''(0) = 2 > 0, \qquad f''(2) = -2e^{-2} < 0$$

Por tanto, f tiene un valor mínimo local en $x = 0$ y un valor máximo local en $x = 2$. *Véase* la Figura 4.26.

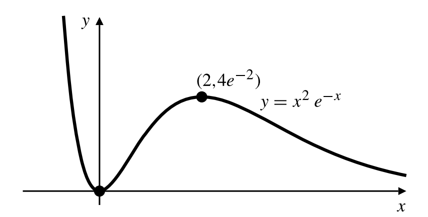


Figura 4.26 Puntos críticos de $f(x) = x^2e^{-x}$.

En muchas funciones, la segunda derivada es más complicada de calcular que la primera derivada, por lo que el test de la primera derivada es más fácil de utilizar para clasificar puntos críticos que el test de la segunda derivada. Nótese también que el test de la primera derivada sólo puede clasificar valores extremos que aparezcan en puntos críticos, puntos singulares y extremos.

Es posible generalizar el test de la segunda derivada para obtener tests sobre derivadas superiores que puedan considerar algunas situaciones en que la segunda derivada es cero en un punto crítico (*véase* el Ejercicio 40 al final de esta sección).

Ejercicios 4.3

En los Ejercicios 1-22, determine los intervalos de concavidad constante de las funciones dadas, y localice sus puntos de inflexión.

1. $f(x) = \sqrt{x}$

2. $f(x) = 2x - x^2$

3. $f(x) = x^2 + 2x + 3$

4. $f(x) = x - x^3$

5. $f(x) = 10x^3 - 3x^5$

6. $f(x) = 10x^3 + 3x^5$

7. $f(x) = (3 - x^2)^2$

8. $f(x) = (2 + 2x - x^2)^2$

9. $f(x) = (x^2 - 4)^3$

10. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3}$

11. $f(x) = \operatorname{sen} x$

12. $f(x) = \cos 3x$

13. $f(x) = x + \operatorname{sen} 2x$

14. $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x$

15. $f(x) = \tan^{-1} x$

16. $f(x) = xe^x$

17. $f(x) = e^{-x^2}$

18. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{x}$

19. $f(x) = \ln(1 + x^2)$ **20.** $f(x) = (\ln x)^2$

21. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x - \dfrac{25}{3}$

22. $f(x) = (x - 1)^{1/3} + (x + 1)^{1/3}$

23. Discuta la concavidad de la función lineal $f(x) = ax + b$. ¿Tiene puntos de inflexión?

Clasifique los puntos críticos de las funciones de los Ejercicios 24-35 utilizando el test de la segunda derivada siempre que sea posible.

24. $f(x) = 3x^3 - 36x - 3$ **25.** $f(x) = x(x - 2)^2 + 1$

26. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ **27.** $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$

28. $f(x) = \dfrac{x}{2^x}$ **29.** $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

30. $f(x) = xe^x$ **31.** $f(x) = x \ln x$

32. $f(x) = (x^2 - 4)^2$ **33.** $f(x) = (x^2 - 4)^3$

34. $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ **35.** $f(x) = x^2 e^{-2x^2}$

36. Sea $f(x) = x^2$ si $x \geqslant 0$ y $f(x) = -x^2$ si $x < 0$. ¿Es 0 un punto crítico de f? ¿Tiene f un punto de inflexión allí? ¿Es $f''(x) = 0$? Si una función tiene una tangente no vertical en un punto de inflexión, ¿se tiene que hacer cero necesariamente la segunda derivada de la función en ese punto?

***37.** Verifique que si f es convexa en un intervalo, entonces su gráfica está por encima de sus tangentes en dicho intervalo. *Sugerencia*: Suponga que f es convexa en un intervalo abierto que contiene a x_0. Sea $h(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Demuestre que h tiene un valor mínimo local en x_0 y, por tanto, que $h(x) \geqslant 0$ en el intervalo. Demuestre que $h(x) > 0$ si $x \neq x_0$.

***38.** Verifique que la gráfica $y = f(x)$ cruza a su tangente en un punto de inflexión. *Sugerencia*: Considere separadamente los casos en los que la tangente es vertical y no vertical.

39. Sea $f_n(x) = x^n$ y $g_n(x) = -x^n$, $(n = 2, 3, 4, ...)$. Determine si estas funciones tienen un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión en $x = 0$.

40. **(Test de derivadas superiores)** Utilice las conclusiones del Ejercicio 39 para plantear una generalización del test de la segunda derivada que se pueda aplicar cuando

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \; f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

para algún $k \geqslant 2$.

***41.** Este problema demuestra que ningún test que se base solamente en los signos de las derivadas en x_0 puede determinar para toda función con un punto crítico en x_0 si en ese punto tiene un máximo o un mínimo local o un punto de inflexión. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Demuestre lo siguiente:

(a) $\lim_{x \to 0} x^{-n} f(x) = 0$ para $n = 0, 1, 2, 3, ...$

(b) $\lim_{x \to 0} P(1/x) f(x) = 0$ para todo polinomio P.

(c) Para $x \neq 0$, $f^{(k)}(x) = P_k(1/x) f(x) (k = 1, 2, 3, ...)$, siendo P_k un polinomio.

(d) $f^{(k)}(0)$ existe y es igual a 0 para $k = 1, 2, 3, ...$

(e) f tiene un mínimo local en $x = 0$; $-f$ tiene un máximo local en $x = 0$.

(f) Si $g(x) = x f(x)$, entonces $g^{(k)}(0) = 0$ para todo entero positivo k y g tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

***42.** Una función puede tener un punto crítico y no tener en dicho punto un máximo local ni un mínimo local ni un punto de inflexión. Demuestre que esto es así considerando la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f'(0) = f(0) = 0$, por lo que el eje x es tangente a la gráfica de f en $x = 0$; pero $f'(x)$ no es continua en $x = 0$, por lo que no existe $f''(0)$. Demuestre que la concavidad de f no es constante en ningún intervalo con extremo 0.

4.4 Dibujo de la gráfica de una función

Al dibujar la gráfica $y = f(x)$ de una función f, hay tres fuentes de información de utilidad:

(i) **La propia función f**, mediante la que se pueden determinar las coordenadas de algunos puntos de la gráfica, su simetría, y si existen asíntotas.

(ii) **Su primera derivada f'**, de donde se pueden determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la localización de los valores extremos locales.

(iii) **Su segunda derivada f''**, de donde se puede determinar la concavidad y los puntos de inflexión, y algunas veces los valores extremos.

Los puntos (ii) y (iii) se han considerado en las dos secciones anteriores. En esta sección vamos a ver lo que se puede aprender de la propia función sobre la forma de su gráfica, y después ilustraremos el procedimiento completo de dibujo con varios ejemplos utilizando las tres fuentes de información.

Se podría dibujar la gráfica pintando las coordenadas de muchos puntos y uniéndolos mediante una curva suave adecuada. Esto es lo que hacen el software de computador y las calculadoras gráficas. Cuando esto se hace a mano (sin computador ni calculadora), este método simple es muy tedioso y además puede ocultar los aspectos más interesantes de la gráfica (puntos singulares, valores extremos, etc.). También se podría dibujar la pendiente en cada uno de los puntos y, dibujando rectas cortas que pasaran por esos puntos con las pendientes adecuadas, asegurarnos de que la gráfica pasa por todos los puntos que se han dibujado, con la pendiente correcta. Un procedimiento más eficiente es obtener las coordenadas de unos pocos puntos y utilizar información cualitativa sobre la función y su primera y segunda derivadas para determinar la *forma* de la gráfica entre esos puntos.

Además de los puntos críticos, singulares y de inflexión, una gráfica puede tener otros puntos «interesantes». La **abscisa** y **ordenada en el origen** (los puntos en los que la gráfica corta a los ejes coordenados) se encuentran entre dichos puntos. Cuando se dibuja cualquier gráfica es interesante intentar obtener estos puntos, es decir, todos los puntos de coordenadas $(x, 0)$ y $(0, y)$ que estén en la gráfica. Por supuesto, no todas las gráficas tienen que tener esos puntos, e incluso aunque existan, puede no ser posible calcularlos exactamente. Siempre que una gráfica esté compuesta de varios trozos no conectados (denominados **componentes**) se deben obtener las coordenadas de *al menos un punto de cada componente*. A veces es también útil determinar las pendientes en estos puntos. Las asíntotas verticales (que se comentarán posteriormente) separan generalmente la gráfica de una función en componentes.

Advertir que una función dada posee alguna simetría puede ayudar mucho a obtener un buen dibujo de su gráfica. En la Sección P.4 presentamos las funciones pares e impares y observamos que las funciones impares tienen gráficas que son simétricas respecto al origen, y que las funciones pares tienen gráficas que son simétricas respecto al eje y, como se muestra en la Figura 4.27. Éstas son las simetrías más fáciles de advertir, pero las funciones pueden tener otras simetrías. Por ejemplo, la gráfica de $2 + (x - 1)^2$ es simétrica respecto a la recta $x = 1$ y la gráfica de $2 + (x - 3)^3$ es simétrica respecto al punto $(3, 2)$.

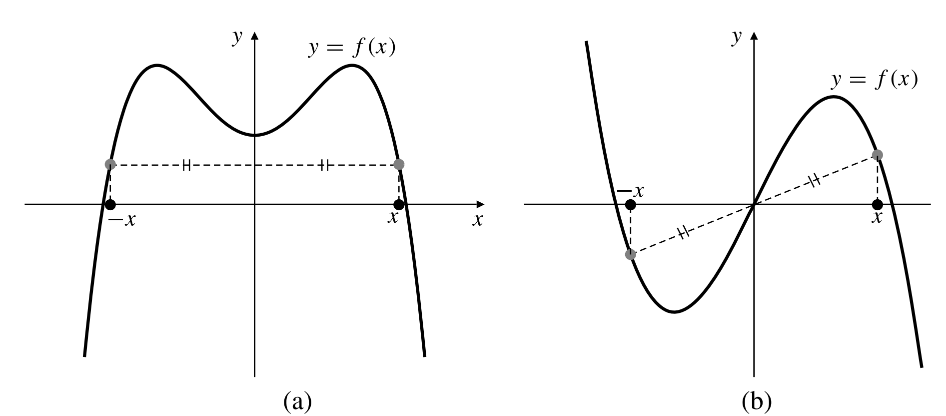


Figura 4.27
(a) La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y.
(b) La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Asíntotas

Algunas de las curvas que hemos dibujado en las secciones anteriores tenían **asíntotas**, es decir, rectas a las que la curva se acerca arbitrariamente cuando se aleja a una distancia infinita del origen. Las asíntotas pueden ser de tres tipos: verticales, horizontales y oblicuas.

DEFINICIÓN 5

La gráfica de $y = f(x)$ tiene una **asíntota vertical** en $x = a$ si

$$\text{o bien} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o bien} \quad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty, \quad \text{o ambas}$$

Esta situación tiende a aparecer cuando $f(x)$ es un cociente de dos expresiones y el denominador es cero en $x = a$.

Ejemplo 1 Calcule las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$. ¿Cómo se aproxima la gráfica a esas asíntotas?

Solución El denominador $x^2 - x = x(x - 1)$ se aproxima a 0 cuando x se aproxima a 0 o 1, por lo que f tiene asíntotas verticales en $x = 0$ y $x = 1$ (*véase* la Figura 4.28). Como $x(x - 1)$ es positivo en $(-\infty, 0)$ y en $(1, \infty)$ y es negativo en $(0, 1)$, tenemos que

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^2 - x} = \infty \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x^2 - x} = \infty$$

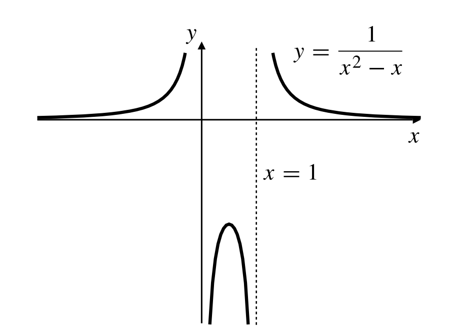


Figura 4.28

DEFINICIÓN 6

La gráfica de $y = f(x)$ tiene una **asíntota horizontal** en $y = L$ si

$$\text{o bien} \quad \lim_{x\to \infty} f(x) = L \quad \text{o bien} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L, \quad \text{o ambas}$$

Ejemplo 2 Calcule las asíntotas horizontales de

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ y (b) $g(x) = \dfrac{x^4 + x^2}{x^4 + 1}$.

Solución

(a) La función f tiene la asíntota horizontal $y = 0$ (*véase* la Figura 4.28) ya que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2 - x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x^2}{1 - (1/x)} = \frac{0}{1} = 0$$

(b) La función $g(x)$ tiene la asíntota horizontal $y = 1$ (*véase* el Figura 4.29) ya que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 + x^2}{x^4 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + (1/x^2)}{1 + (1/x^4)} = \frac{1}{1} = 1$$

Obsérvese que la gráfica de g cruza a su asíntota dos veces (un error común entre los estudiantes es que las curvas no pueden cruzar a sus asíntotas; el Ejercicio 41 al final de la sección presenta un ejemplo de una curva que cruza a su asíntota infinitas veces).

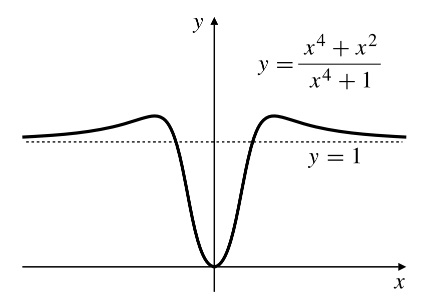


Figura 4.29

Las asíntotas horizontales de las funciones f y g del Ejemplo 2 son **bilaterales**, lo que significa que la gráfica se acerca a la asíntota cuando x se aproxima a infinito y a menos infinito. La función $\tan^{-1}x$ tiene dos asíntotas **unilaterales**, $y = \pi/2$ (cuando $x \to \infty$) y $y = -(\pi/2)$ (cuando $x \to -\infty$). *Véase* la Figura 4.30.

Puede suceder que la gráfica de una función $f(x)$ se aproxima a una recta no horizontal cuando x tiende a ∞ o a $-\infty$ (o en ambos casos). Dicha recta se denomina *asíntota oblícua* de la gráfica.

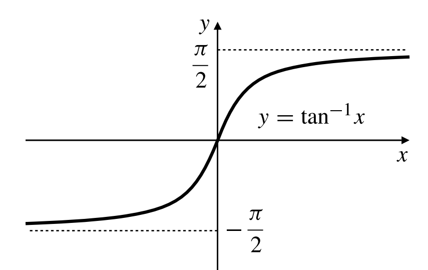


Figura 4.30 Asíntotas horizontales unilaterales.

DEFINICIÓN 7

La recta $y = ax + b$ (siendo $a \neq 0$) es una **asíntota oblicua** de la gráfica de $y = f(x)$ si

o bien $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ o bien $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ o ambas

Ejemplo 3 Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 4.31(a). La recta $y = x$ es una asíntota oblicua *bilateral* de la gráfica de f porque

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ejemplo 4 La gráfica de $y = \dfrac{xe^x}{1 + e^x}$, que se muestra en la Figura 4.31(b), tiene una asíntota horizontal $y = 0$ por la izquierda y una la asíntota oblicua $y = x$ por la derecha:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{1 + e^x} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{y}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{xe^x}{1 + e^x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x(e^x - 1 - e^x)}{1 + e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{1 + e^x} = 0$$

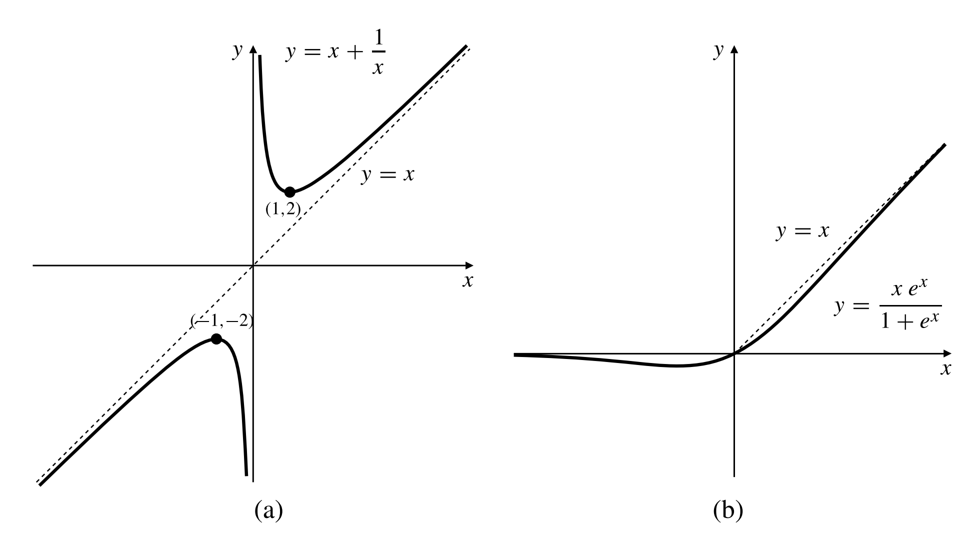


Figura 4.31
(a) $y = f(x)$ tiene una asíntota oblicua bilateral $y = x$.
(b) Esta gráfica tiene una asíntota horizontal por la izquierda y una asíntota oblicua por la derecha.

Recuérdese que una **función racional** es una función de la forma $f(x) = P(x)/Q(x)$, siendo P y Q polinomios. De acuerdo con las observaciones realizadas en las Secciones P.6, 1.2 y 1.3, las asíntotas de una función racional son muy específicas.

Asíntotas de una función racional

Supongamos que $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, siendo P_m y Q_n polinomios de grados m y n, respectivamente. Supongamos también que P_m y Q_n no tienen factores lineales comunes. Entonces:

(a) La gráfica de f tiene una asíntota vertical en todos los puntos x en los que se cumpla que $Q_n(x) = 0$.
(b) La gráfica de f tiene una asíntota horizontal bilateral $y = 0$ si $m < n$.
(c) La gráfica de f tiene una asíntota horizontal bilateral $y = L$ ($L \neq 0$) si $m = n$. L es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado de P_m y Q_n.
(d) La gráfica de f tiene una asíntota oblicua bilateral si $m = n + 1$. Esta asíntota se puede obtener dividiendo Q_n por P_m para obtener un cociente lineal $ax + b$ y un resto, R, que es un polinomio de grado como mucho $n - 1$. Es decir,

$$f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q_n(x)}$$

La asíntota oblicua es $y = ax + b$.
(e) La gráfica de f no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas si $m > n + 1$.

Ejemplo 5 Calcule la asíntota oblicua de $y = \dfrac{x^3}{x^2 + x + 1}$.

Solución El cociente se puede obtener dividiendo directamente los polinomios:

$$\begin{array}{r|l} & x - 1 \\ \hline x^2 + x + 1 & x^3 \\ & x^3 + x^2 + x \\ \hline & -x^2 - x \\ & -x^2 - x - 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2 + x + 1} = x - 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

o bien podemos hacer:

$$\frac{x^3}{x^2+x+1} = \frac{x^3+x^2+x-x^2-x-1+1}{x^2+x+1} = x-1+\frac{1}{x^2+x+1}$$

En cualquier caso, podemos ver que la ecuación de la asíntota oblicua es $y = x - 1$. ■

Ejemplos de dibujo formal de curvas

Presentamos a continuación una lista de cosas a considerar cuando se nos pide hacer un dibujo de la gráfica de $y = f(x)$. Por supuesto no siempre será posible obtener todos los puntos mencionados en la lista.

Lista para dibujo de curvas

1. Calcule $f'(x)$ y $f''(x)$, y exprese los resultados en forma factorizada.
2. Examine $f(x)$ para determinar su dominio y los siguientes elementos:
   (a) Asíntotas verticales (buscar ceros de denominadores).
   (b) Asíntotas horizontales u oblicuas (considerar $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$).
   (c) Simetrías obvias (¿es f par o impar?).
   (d) Ordenada y abscisa en el origen (puntos con coordenadas $(x, 0)$ o $(0, y)$), extremos u otros puntos «obvios». Esta lista se puede ampliar si se conocen puntos críticos, puntos singulares y punto de inflexión. Finalmente, hay que asegurarse de que se conocen las coordenadas de al menos un punto en cada componente de la gráfica.
3. Examine $f'(x)$ para buscar:
   (a) Puntos críticos.
   (b) Puntos en los que f' no esté definida (que incluirán los puntos singulares, los extremos del dominio de f y las asíntotas verticales).
   (c) Los intervalos en los que f' es positiva o negativa. Es una buena idea reunir esta información en forma de tabla como las que se han usado en los ejemplos anteriores. En la tabla se pueden indicar también las conclusiones sobre el crecimiento y decrecimiento de f y la clasificación de algunos puntos críticos y singulares como máximos y mínimos locales.
4. Examine $f''(x)$ para buscar:
   (a) Puntos en los que $f''(x) = 0$.
   (b) Puntos en los que $f''(x)$ no esté definida (entre los que se encontrarán los puntos singulares, los extremos, las asíntotas verticales, y posiblemente también otros puntos donde f' esté definida pero f'' no).
   (c) Intervalos donde f'' sea positiva o negativa y donde f será, por tanto, convexa o cóncava. Utilice una tabla.
   (d) Los puntos de inflexión.

Una vez que se haya obtenido tanta información como sea posible, debe realizarse un cuidadoso dibujo que refleje *todo* lo que se ha aprendido sobre la función. Considere el mejor sitio para situar los ejes y qué escala utilizar en cada uno de modo que las «características interesantes» de la gráfica se muestren de la forma más clara posible. Hay que tener cuidado con las aparentes inconsistencias en la información, es decir, con las sospechas de que hemos cometido un error en alguna parte. Por ejemplo, si hemos determinado que $f(x) \to \infty$ cuando x se acerca a la asíntota vertical $x = a$ por la derecha y también que f es decreciente y cóncava en el intervalo (a, b), entonces probablemente habremos cometido un error (intente dibujar esa situación y ver por qué).

Ejemplo 6 Dibuje la gráfica de $y = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x}$.

Solución Resulta de utilidad expresar la función y de la forma

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{2}{x}$$

ya que así no sólo se muestra claramente que $y = (x/2) + 1$ es una asíntota oblicua, sino que se hace más fácil calcular las derivadas

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2}, \qquad y'' = \frac{4}{x^3}$$

De y: Dominio: todo x excepto 0. Asíntota vertical: $x = 0$.
Asíntota oblicua: $y = \dfrac{x}{2} + 1$, $y - \left(\dfrac{x}{2} + 1\right) = \dfrac{2}{x} \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$.
Simetría: ninguna obvia (y no es par ni impar).
Abscisas y ordenadas en el origen: ninguna. $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 \geqslant 3$ para todo x, e y no está definida en $x = 0$.
De y': Puntos críticos: $x = \pm 2$; puntos $(-2, -1)$ y $(2, 3)$.
y' no está definida en $x = 0$ (asíntota vertical).
De y'': $y'' = 0$ en ningún punto; y'' no está definida en $x = 0$.

x		PC -2		ASY 0		PC 2	
y'	$+$	0	$-$	indef	$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	indef	$+$		$+$
y	$\nearrow$ $\cap$	máx	$\searrow$ $\cap$	indef	$\searrow$ $\cup$	mín	$\nearrow$ $\cup$

La gráfica se muestra en la Figura 4.32.

Ejemplo 7 Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$.

Solución Tenemos que

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}, \qquad f''(x) = \frac{6(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

De f: Dominio: todo x excepto ± 2. Asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 2$.
Asíntota horizontal: $y = 1$ (cuando $x \to \pm\infty$).
Simetría: respecto al eje y (y es par).
Abscisas y ordenadas en el origen: $(0, 1/4)$, $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
Otros puntos: $(-3, 8/5)$, $(3, 8/5)$ (las dos asíntotas verticales dividen la gráfica en tres componentes; necesitamos puntos en cada uno de ellas. Las componentes externas requieren puntos con $|x| > 2$).
De f': Punto crítico: $x = 0$: f' no está definida en $x = 2$ o $x = -2$.
De f'': $f''(x) = 0$ en ningún punto; f'' no está definida en $x = 2$ o $x = -2$.

x		ASY -2		PC 0		ASY 2	
f'	$+$	indef	$+$	0	$-$	indef	$-$
f''	$+$	indef	$-$		$-$	indef	$+$
f	$\nearrow$ $\cup$	indef	$\nearrow$ $\cap$	máx	$\searrow$ $\cap$	indef	$\searrow$ $\cup$

La gráfica se muestra en la Figura 4.33.

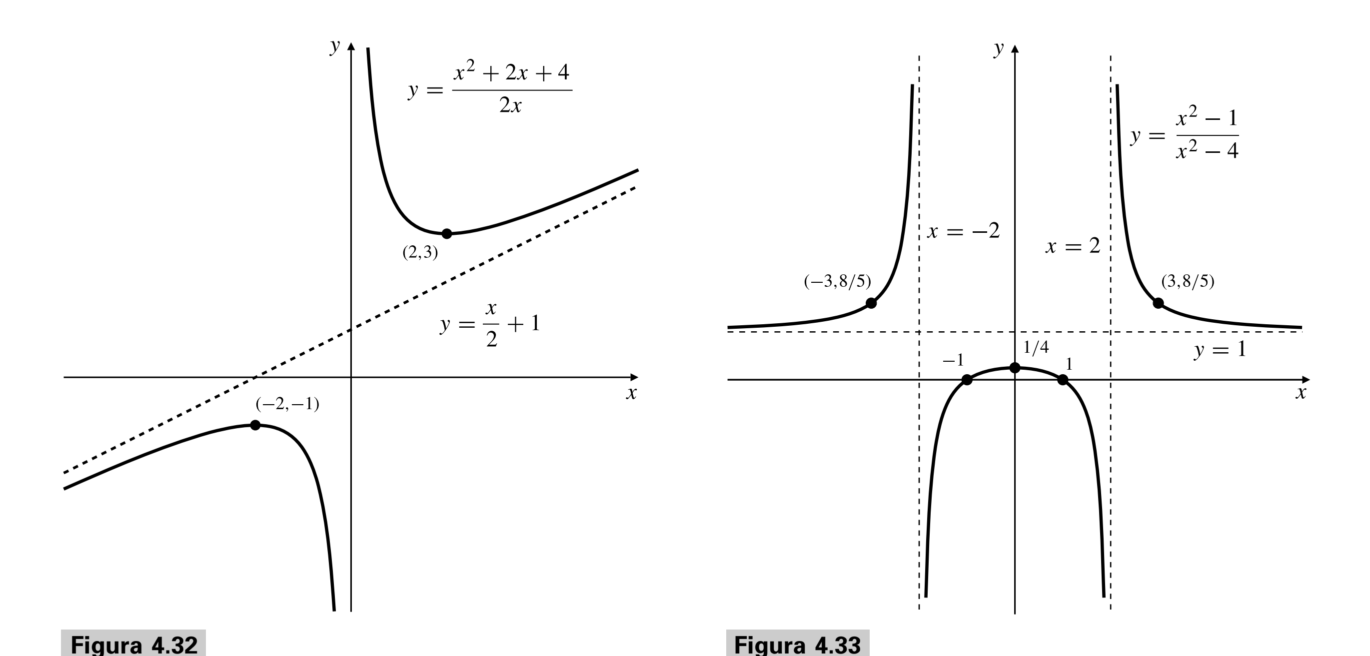


Figura 4.32

Figura 4.33

Ejemplo 8 Dibuje la gráfica de $y = xe^{-x^2/2}$.

Solución Tenemos que $y' = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$, $y'' = x(x^2 - 3)e^{-x^2/2}$.

De y: Dominio: todo x.

Asíntota horizontal: $y = 0$. Nótese que, si $t = x^2/2$, entonces $|xe^{-x^2/2}| = \sqrt{2t}\,e^{-t} \to 0$ cuando $t \to \infty$ (cuando $x \to \pm\infty$).

Simetría: respecto al origen (y es impar). Abscisas y ordenadas en el origen: (0, 0).

De y': Puntos críticos: $x = \pm 1$; puntos $(\pm 1, \pm 1/\sqrt{e}) \approx (\pm 1, \pm 0.61)$.

De y'': $y'' = 0$ en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$; puntos (0, 0), $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}e^{-3/2}) \approx (\pm 1.73 \pm 0.39)$.

x		$-\sqrt{3}$		PC -1		0		PC 1		$\sqrt{3}$	
y'	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\searrow$ $\cap$	infl	$\searrow$ $\cup$	mín	$\nearrow$ $\cup$	infl	$\nearrow$ $\cap$	máx	$\searrow$ $\cap$	infl	$\searrow$ $\cup$

La gráfica se muestra en la Figura 4.34.

Ejemplo 9 Dibuje la gráfica de $f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. *Véase* la Figura 4.35.

Solución $f'(x) = \dfrac{4}{3}\dfrac{x}{(x^2-1)^{1/3}}, \qquad f''(x) = \dfrac{4}{9}\dfrac{x^2-3}{(x^2-1)^{4/3}}.$

De f: Dominio: todo x.
Asíntotas: ninguna ($f(x)$ crece como $x^{4/3}$ cuando $x \to \pm\infty$).
Simetría: respecto al eje f (f es una función par).
Abscisas y ordenadas en el origen: $(\pm 1, 0)$, $(0, 1)$.
De f': Puntos críticos: $x = 0$; puntos singulares $x = \pm 1$.
De f'': $f''(x) = 0$ en $x = \pm\sqrt{3}$; puntos $(\pm\sqrt{3}, 2^{2/3}) \approx (\pm 1.73, 1.59)$; $f''(x)$ no está definida en $x = \pm 1$.

x		$-\sqrt{3}$		PS -1		PC 0		PS 1		$\sqrt{3}$	→
f'	$-$		$-$	indef	$+$	0	$-$	indef	$+$		$+$
f''	$+$	0	$-$	indef	$-$		$-$	indef	$-$	0	$+$
f	↘ ∪	infl	↘ ∩	mín	↗ ∩	máx	↘ ∩	mín	↗ ∩	infl	↗ ∪

■

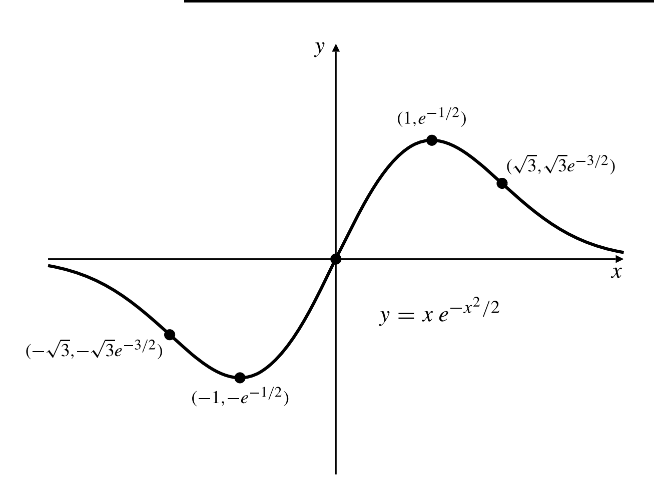


Figura 4.34

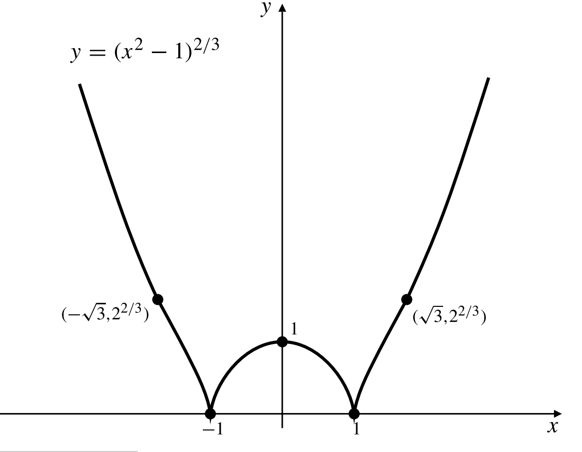


Figura 4.35



Observación **Uso de una herramienta de gráficos** Las técnicas para el dibujo de curvas que se han comentado anteriormente sólo son útiles para dibujar gráficas de funciones lo suficientemente simples como para permitir calcular y analizar sus derivadas. En la práctica, muchas veces será necesario utilizar una calculadora gráfica o un computador para dibujar la gráfica de forma rápida y sencilla. Para utilizar estas herramientas gráficas de forma más efectiva, hay que decidir en qué ventanas de visualización y qué escalas horizontal y vertical utilizar. Una selección inadecuada de la ventana de visualización puede hacer que se pierdan características significativas de la gráfica. A continuación se presenta un comando de Maple que sirve para visualizar la gráfica de la función del Ejemplo 6, junto con su asíntota oblicua. Pedimos a Maple que dibuje $(x^2 + 2x + 4)/(2x)$ y $1 + (x/2)$.

```
> plot({x^2+2*x+4)/(2*x), 1+(x/2)}, x=-6..6, -7..7);
```

Conseguir que Maple dibuje la gráfica del Ejemplo 9 no es tan sencillo. Como Maple no trabaja con potencias fraccionarias de números negativos, incluso aunque tomen valores positivos reales, hay que dibujar $|x^2 - 1|^{2/3}$ o si no la parte de la gráfica entre -1 y 1 se perderá.

```
> plot((abs(x^2-1))^(2/3), x=-4..4, -1..5);
```

Ejercicios 4.4

1. La Figura 4.36 muestra las gráficas de una función f, sus dos derivadas a f' y f'', y otra función g. ¿Qué gráfica corresponde a cada función?

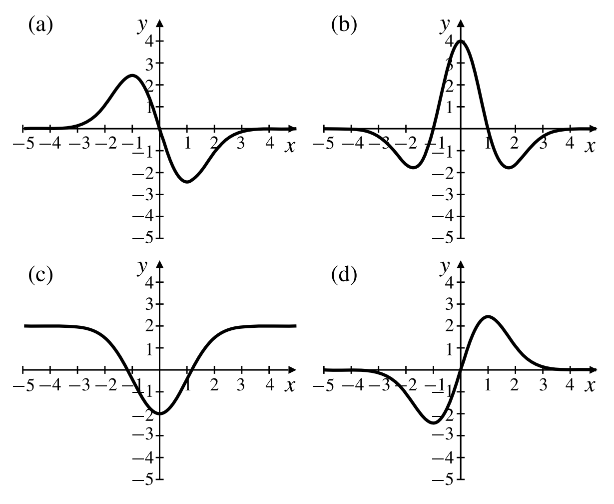


Figura 4.36

2. Indique, para cada una de las funciones que se dibujan en la Figura 4.36, qué información se puede determinar (aproximadamente) por simple inspección de la gráfica (simetría, asíntotas, abscisa y ordenada en el origen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos críticos y singulares, máximos y mínimos locales, intervalos de concavidad constante, y puntos de inflexión).

3. La Figura 4.37 muestra las gráficas de cuatro funciones:

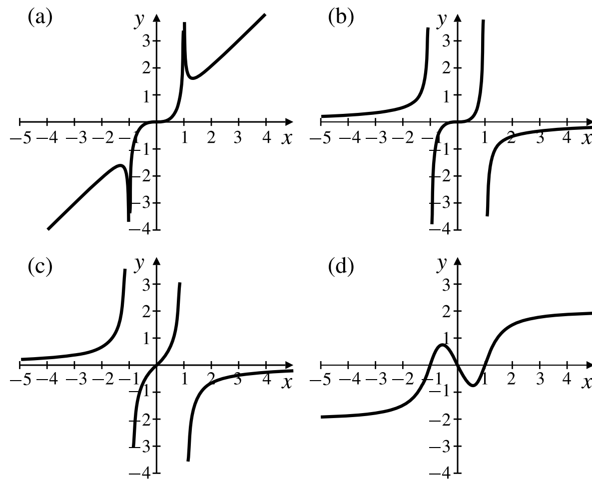


Figura 4.37

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} \qquad g(x) = \frac{x^3}{1-x^4}$$

$$h(x) = \frac{x^3-x}{\sqrt{x^6+1}} \qquad k(x) = \frac{x^3}{\sqrt{|x^4-1|}}$$

¿Qué gráfica corresponde a cada función?

4. Repita el Ejercicio 2 para las gráficas de la Figura 4.37.

En los Ejercicios 5-6, dibuje la gráfica de una función que tenga las propiedades dadas. Identifique los puntos críticos, puntos singulares, máximos y mínimos locales y puntos de inflexión. Suponga que f es continua y que sus derivadas existen en todas partes excepto que se pueda inferir lo contrario de forma implícita o explícita.

5. $f(0)=1$, $f(\pm 1)=0$, $f(2)=1$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$, $f'(x)>0$ en $(-\infty, 0)$ y en $(1, \infty)$, $f'(x)<0$ en $(0, 1)$, $f''(x)>0$ en $(-\infty, 0)$ y en $(0, 2)$, y $f''(x)<0$ en $(2, \infty)$.

6. $f(-1)=0$, $f(0)=2$, $f(1)=1$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)+1-x)=0$, $f'(x)>0$ en $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ y $(2, \infty)$, $f'(x)<0$ en $(0, 2)$, $\lim_{x\to-1} f(x)=\infty$, $f''(x)>0$ en $(-\infty, -1)$ y en $(1, 3)$, y $f''(x)<0$ en $(-1, 1)$ y en $(3, \infty)$.

En los Ejercicios 7-39, dibuje las gráficas de las funciones dadas, utilizando cualquier información que se pueda obtener de la función, y de su primera y segunda derivadas.

7. $y=(x^2-1)^3$

8. $y=x(x^2-1)^2$

9. $y=\dfrac{2-x}{x}$

10. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

11. $y=\dfrac{x^3}{1+x}$

12. $y=\dfrac{1}{4+x^2}$

13. $y=\dfrac{1}{2-x^2}$

14. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

15. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

16. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

17. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

18. $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

19. $y=\dfrac{x^2-4}{x+1}$

20. $y=\dfrac{x^2-2}{x^2-1}$

21. $y=\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}$

22. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

23. $y=\dfrac{x^5}{(x^2-1)^2}$

24. $y=\dfrac{(2-x)^2}{x^3}$

25. $y = \dfrac{1}{x^3 - 4x}$

26. $y = \dfrac{x}{x^2 + x - 2}$

27. $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^3}$

28. $y = x + \operatorname{sen} x$

29. $y = x + 2\operatorname{sen} x$

30. $y = e^{-x^2}$

31. $y = xe^x$

32. $y = e^{-x}\operatorname{sen} x,\ (x \geqslant 0)$

33. $y = x^2 e^{-x^2}$

34. $y = x^2 e^x$

35. $y = \dfrac{\ln x}{x},\ (x > 0)$

36. $y = \dfrac{\ln x}{x^2},\ (x > 0)$

37. $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

38. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

39. $y = (x^2 - 1)^{1/3}$

40. ¿Qué es $\lim_{x\to 0+} x \ln x$? ¿Y $\lim_{x\to 0} x \ln|x|$? Si $f(x) = x\ln|x|$ para $x \neq 0$, ¿es posible definir $f(0)$ de forma que f sea continua en toda la recta real? Dibuje la gráfica de f.

41. ¿Qué recta es una asíntota de la curva $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}$? ¿En qué puntos cruza la curva a esta asíntota?

4.5 Problemas de valores extremos

En esta sección vamos a resolver varios problemas del mundo real que, al ser trasladados a términos matemáticos, requieren el cálculo del valor máximo o mínimo de una función de una variable. Estos problemas pueden variar desde muy simples a muy complejos y difíciles. Se pueden formular en terminologías apropiadas de otras disciplinas, o ya pueden estar parcialmente traducidos a un contexto más matemático. Ya hemos encontrado algunos de esos problemas en capítulos anteriores.

Consideremos primero un par de ejemplos antes de proceder a formular principios generales para tratar estos problemas.

Ejemplo 1 Se desea construir una jaula de animales rectangular, uno de cuyos lados aprovecha una pared existente y los otros tres se cierran con una valla. Si se dispone de 100 m de valla, ¿cuál es la máxima área posible para la jaula?

Solución Este problema, como muchos otros, es esencialmente geométrico. Es conveniente realizar un dibujo, como se ha hecho en la Figura 4.38. Sean x e y la longitud y la anchura ante la jaula, respectivamente, y sea el área A m^2. Por tanto, $A = xy$. Como la longitud total de la valla es de 100 m, tenemos que $x + 2y = 100$. A es función de dos variables, x e y, pero estas variables no son independientes, sino que están relacionadas por la *restricción* $x + 2y = 100$. A partir de la ecuación de la restricción se puede despejar una variable en función de la otra, y por tanto A se puede expresar en función de una sola variable:

$$x = 100 - 2y$$
$$A = A(y) = (100 - 2y)y = 100y - 2y^2$$

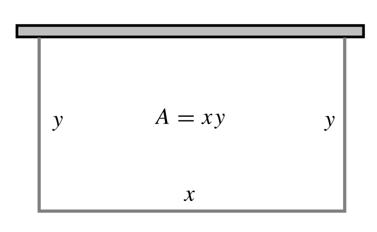


Figura 4.38

Evidentemente, se requiere que $y \geqslant 0$ y $y \leqslant 50$ (es decir, $x \geqslant 0$), para que el área tenga sentido (de otro modo sería negativa). Por lo tanto, debemos maximizar la función $A(y)$ en el intervalo [0, 50]. Como A es continua en este intervalo cerrado y finito, debe tener un valor máximo, por el Teorema 1. Claramente, $A(0) = A(50) = 0$ y $A(y) > 0$ para $0 < y < 50$. Por tanto, el máximo no puede estar en un extremo. Como A no tiene puntos singulares, el máximo debe estar en un punto crítico. Para obtener los puntos críticos, hacemos

$$0 = A'(y) = 100 - 4y$$

Por tanto, $y = 25$. Como A debe tener un valor máximo y sólo hay uno posible, el máximo debe estar en $y = 25$. La máxima área posible de la jaula es, por tanto, $A(25) = 1250$ m^2. ■

Ejemplo 2 Un faro L se sitúa en una pequeña isla 5 km al norte de un punto A sobre la costa este-oeste. Se tiende un cable desde L hasta un punto B en la costa, 10 km al este de A. El cable se despliega por el agua formando una línea recta desde L hasta un punto C en la costa entre A y B, y desde allí hasta B siguiendo la línea de la costa (*véase* la Figura 4.39). La parte del cable que se despliega en el agua cuesta 5000 € por kilómetro, y la parte que se despliega por la costa cuesta 3000 € por kilómetro.

(a) ¿Dónde habría que situar el punto C para minimizar el coste total del cable?
(b) ¿Donde habría que situar el punto C si B está sólo a 3 km de A?

Solución

(a) Sea C un punto situado a x km de A hacia B. Por tanto, $0 \leqslant x \leqslant 10$. La longitud de LC es $\sqrt{25+x^2}$, y la longitud de CB es de $10 - x$ km, como se muestra en la Figura 4.39. Por tanto, el coste total del cable es T €, siendo

$$T = T(x) = 5000\sqrt{25+x^2} + 3000(10 - x), \qquad (0 \leqslant x \leqslant 10)$$

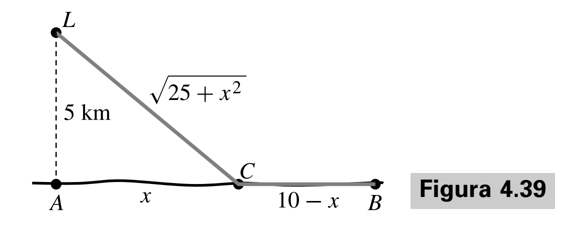


Figura 4.39

T es continua en el intervalo cerrado y finito [0, 10], por lo que tiene un valor mínimo que puede estar en uno de los extremos $x = 0$ o $x = 10$, o en un punto crítico en el intervalo (0, 10) (T no tiene puntos singulares). Para calcular los puntos críticos, hacemos

$$0 = \frac{dT}{dx} = \frac{5000x}{\sqrt{25+x^2}} - 3000$$

Así,

$$5000x = 3000\sqrt{25+x^2}$$
$$25x^2 = 9(25 + x^2)$$
$$16x^2 = 225$$
$$x^2 = \frac{225}{16} = \frac{15^2}{4^2}$$

Los puntos críticos son $x = \pm 15/4$. Sólo un punto crítico, $x = 15/4 = 3.75$, está en el intervalo (0, 10). Como $T(0) = 55\,000$, $T(15/4) = 50\,000$, y $T(10) \approx 55\,902$, el punto crítico es evidentemente el valor mínimo de $T(x)$. Para obtener un coste mínimo, C debería estar a 3.75 km de A.

(b) Si B esta a 3 km de A, la función de coste total en este caso es

$$T(x) = 5000\sqrt{25+x^2} + 3000(3 - x), \qquad (0 \leqslant x \leqslant 3)$$

que se diferencia de la función de coste total $T(x)$ del apartado (a) sólo en la constante añadida (9000 en vez de 30 000). Por tanto, tiene los mismos puntos críticos, $x = \pm 15/4$, ninguno de los cuales está en el intervalo (0, 3). Como $T(0) = 34\,000$ y $T(3) \approx 29\,155$, en este caso hay que escoger $x = 3$. Para minimizar el coste total, el cable debería ir directamente desde L hasta B. ■

Procedimiento para resolver problemas de valores extremos

Basándose en los ejemplos que se han mostrado anteriormente, se puede formular un procedimiento de pasos a comprobar para resolver problemas de optimización.

Solución de problemas de valores extremos

1. Lea el problema cuidadosamente, quizá más de una vez. Es necesario entender claramente qué información se da y qué es lo que se pide.
2. Haga un gráfico si es necesario. Muchos problemas tienen una componente geométrica, y un buen diagrama puede ser a menudo una parte esencial del procedimiento de solución.
3. Defina los símbolos que desee utilizar y que no estén ya especificados en el planteamiento del problema.
4. Exprese la cantidad Q a ser maximizada o minimizada en función de una o más variables.
5. Si Q depende de n variables, siendo $n > 1$, obtenga $n - 1$ ecuaciones (restricciones) que relacionen estas variables (si esto no se puede hacer, el problema no se puede resolver utilizando técnicas de una variable).
6. Utilice las restricciones para eliminar variables y exprese Q en función de una sola variable. Determine el intervalo o intervalos a los que debe pertenecer esta variable para que el problema tenga sentido. Alternativamente, considere las restricciones como una forma de definir implícitamente $n - 1$ variables, y por tanto de definir Q en función de la variable restante (en general, en los problemas de valores extremos, es mejor evitar si se puede este método implícito).
7. Calcule el valor extremo requerido de la función Q utilizando las técnicas de la Sección 4.2. No olvide considerar los puntos críticos, puntos singulares y extremos. Asegúrese de dar un argumento convincente para justificar que el valor extremo es el buscado. Por ejemplo, si se está buscando un máximo, el valor obtenido no debería ser un mínimo.
8. Exprese una conclusión que responda a la cuestión planteada. ¿Es *razonable* la respuesta a la cuestión? Si no es así, vuelva a revisar la solución para ver qué es erróneo.

Ejemplo 3 Calcule la longitud de la escalera más corta que se pueda desplegar desde una pared vertical, sobre una valla de 2 m de altura situada a 1 m de distancia de la pared, hasta un punto en el suelo fuera de la valla.

Solución Sea θ el ángulo de inclinación de la escalera, como se muestra en la Figura 4.40. Utilizando los dos triángulos rectángulos de la figura, se puede obtener la longitud L de la escalera en función de θ:

$$L = L(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{2}{\operatorname{sen}\theta}$$

donde $0 < \theta < \pi/2$. Como

$$\lim_{\theta\to(\pi/2)-} L(\theta) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\theta\to 0+} L(\theta) = \infty$$

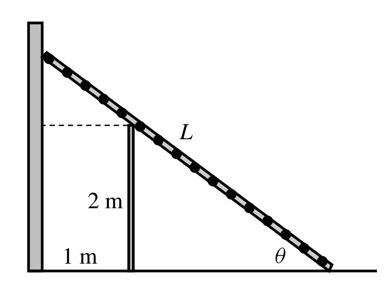


Figura 4.40

$L(\theta)$ debe tener un valor mínimo en $(0, \pi/2)$, que estará en un punto crítico (L no tiene puntos singulares en $(0, \pi/2)$). Para calcular los puntos críticos, hacemos

$$0 = L'(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\operatorname{sen}^3\theta - 2\cos^3\theta}{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}$$

Los puntos críticos deben cumplir $\operatorname{sen}^3\theta = 2\cos^3\theta$, o, en otros términos, $\tan^3\theta = 2$. No es necesario resolver esta ecuación para obtener $\theta = \tan^{-1}(2^{1/3})$, ya que lo que realmente necesitamos es el correspondiente valor de $L(\theta)$. Obsérvese que

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + 2^{2/3}$$

Se deduce que

$$\cos\theta = \frac{1}{(1+2^{2/3})^{1/2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{2^{1/3}}{(1+2^{2/3})^{1/2}}$$

Por tanto, el valor mínimo de $L(\theta)$ es

$$\frac{1}{\cos\theta} + \frac{2}{\operatorname{sen}\theta} = (1+2^{2/3})^{1/2} + 2\,\frac{(1+2^{2/3})^{1/2}}{2^{1/3}} = (1+2^{2/3})^{3/2} \approx 4.16$$

La escalera más corta que se puede desplegar desde la madera sobre la valla hasta el suelo por fuera tiene aproximadamente 4.16 m de longitud.

Ejemplo 4 Calcule la forma más económica de una lata cilíndrica.

Solución Este problema está planteado de forma más bien imprecisa. Debemos considerar qué significa «más económica» e incluso «forma». Sin información adicional, podemos adoptar uno de estos dos puntos de vista:

(i) El volumen de la lata es fijo, y debemos calcular las dimensiones que minimizan el área total de la superficie.
(ii) La superficie total es fija (es decir, la cantidad de metal que se utiliza es fija), y debemos calcular las dimensiones que maximizan el volumen.

Posteriormente plantearemos otras posibles interpretaciones. Como un cilindro está determinado por su radio y su altura (*véase* la Figura 4.41), su forma está determinada por la relación radio/altura. Sean r, h, S y V, respectivamente, el radio, altura, área total de superficie y volumen de la lata. El volumen de un cilindro es el área de la base multiplicada por la altura:

$$V = \pi r^2 h$$

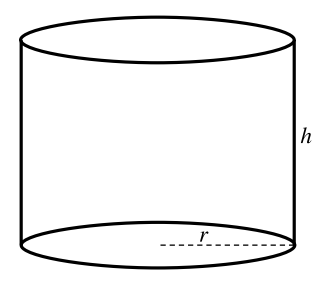


Figura 4.41

La superficie de la lata está formada por la pared cilíndrica y los discos circulares de las tapas. Cada uno de los discos tiene área πr^2, y la pared cilíndrica es realmente un rectángulo enrollado de base $2\pi r$ (la circunferencia de la lata) y altura h. Por tanto, el área total de la superficie de la lata es

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Utilicemos la interpretación (i): V es constante y hay que minimizar S. Podemos utilizar la ecuación de V para eliminar una de las dos variables r y h de las que depende S. Supongamos que despejamos $h = V/(\pi r^2)$ y sustituimos en la ecuación de S, para obtener S como una función únicamente de r:

$$S = S(r) = 2\pi r\,\frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 \qquad (0 < r < \infty)$$

Evidentemente, $\lim_{r\to 0+} S(r) = \infty$ y $\lim_{r\to\infty} S(r) = \infty$. Como es diferenciable y por tanto continua en $(0, \infty)$, $S(r)$ debe tener un valor mínimo y debe estar en un punto crítico. Para calcular los puntos críticos,

$$0 = S'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$$

$$r^3 = \frac{2V}{4\pi} = \frac{1}{2\pi}\,\pi r^2 h = \frac{1}{2}\,r^2 h$$

Por tanto, $h = 2r$ en el punto crítico de S. Bajo la interpretación (i), la lata más económica tiene una forma tal que su altura es igual al diámetro de su base. Animamos al lector a comprobar que la interpretación (ii) conduce a la misma conclusión.

■

Observación Hay otra forma de resolver el Ejemplo 4 que muestra directamente que las interpretaciones (i) y (ii) conducen a la misma solución. Comenzamos de nuevo con las dos ecuaciones

$$V = \pi r^2 h \quad \text{y} \quad S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Considerando h como función de r y diferenciando implícitamente, se obtiene

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi rh + \pi r^2 \frac{dh}{dr}$$

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi h + 2\pi r \frac{dh}{dr} + 4\pi r$$

Bajo la interpretación (i), V es constante y deseamos obtener un punto crítico de S. Bajo la interpretación (ii), S es constante y deseamos obtener un punto crítico de V. En *cualquier* caso $dV/dr = 0$ y $dS/dr = 0$. Por tanto, ambas interpretaciones producen

$$2\pi rh + \pi r^2 \frac{dh}{dr} = 0 \quad \text{y} \quad 2\pi h + 4\pi r + 2\pi r \frac{dh}{dr} = 0$$

Si se divide la primera ecuación por πr^2 la segunda ecuación por $2\pi r$ y se restan para eliminar dh/dr se tiene de nuevo $h = 2r$.

Observación **Modificación del Ejemplo 4** Dada la información imprecisa proporcionada en el planteamiento del problema del Ejemplo 4, las interpretaciones (i) y (ii) son lo mejor que podemos hacer. El problema podría tener un mayor significado económico (desde el punto de vista, por ejemplo, de un fabricante de latas) si se añaden más elementos. Por ejemplo:

(a) La mayoría de las latas utilizan un material más grueso para la pared cilíndrica que para los discos de las tapas. Si el material de la pared cilíndrica cuesta A € por unidad de área y el material de las tapas cuesta B € por unidad de área, una opción sería minimizar el coste total de materiales dado un volumen concreto de la lata. ¿Cuál es la forma óptima si $A = 2B$?

(b) Generalmente, las latas se fabrican en números grandes y el material para su fabricación se corta de láminas de metal. Las paredes cilíndricas se realizan cortando rectángulos, y los rectángulos se pueden cortar de la lámina de metal sin dejar material sobrante o dejando el mínimo posible. Sin embargo, siempre habrá una proporción de material sobrante cuando se cortan los discos de las tapas. La proporción exacta dependerá de la forma en que se disponen los discos. La Figura 4.42 muestra dos posibles disposiciones. ¿Cuál es la forma óptima de la lata si se utiliza un empaquetamiento cuadrado de los discos? ¿Y si se utiliza un empaquetamiento hexagonal? Estas modificaciones del problema original alterarán la forma óptima hasta cierto punto. En problemas «reales» hay que tener en cuenta muchos factores para obtener la «mejor» estrategia.

(c) El problema no considera ningún otro coste de fabricación de la lata excepto el coste de la lámina de metal. Pueden existir también costes asociados a unir los extremos opuestos del rectángulo para construir el cilindro y para unir los discos de las tapas al cilindro. Estos costes pueden ser proporcionales a las longitudes de los segmentos a unir.

En la mayoría de los ejemplos anteriores el valor máximo o mínimo aparece en un punto crítico. No será éste el caso en nuestro ejemplo final.

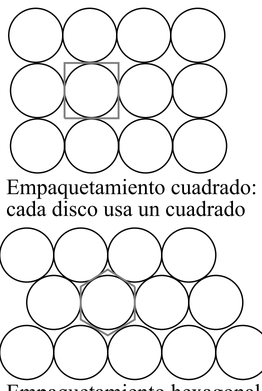


Figura 4.42 Empaquetamientos cuadrado y hexagonal de discos en un plano.

Ejemplo 5 Un hombre puede correr al doble de velocidad a la que puede nadar. Se encuentra de pie en el borde de una piscina circular de 40 m de diámetro y desea llegar al punto diametralmente opuesto B en el menor tiempo posible. ¿Dónde se debería situar el punto C para minimizar el tiempo total que lleva ir de A hasta B?

Solución Es conveniente expresar la posición de C en función del ángulo AOC, siendo O el centro de la piscina (*véase* la Figura 4.43). Sea θ este ángulo. Claramente $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ (si $\theta = 0$ el hombre nadaría todo el camino; si $\theta = \pi$ correría todo el camino). El radio de la piscina es de 20 m, por lo que el arco $AC = 20\theta$. Como el ángulo $BOC = \pi - \theta$, tenemos que el ángulo $BOL = (\pi - \theta)/2$ y la cuerda $BC = 2BL = 40\,\mathrm{sen}\,((\pi - \theta)/2)$.

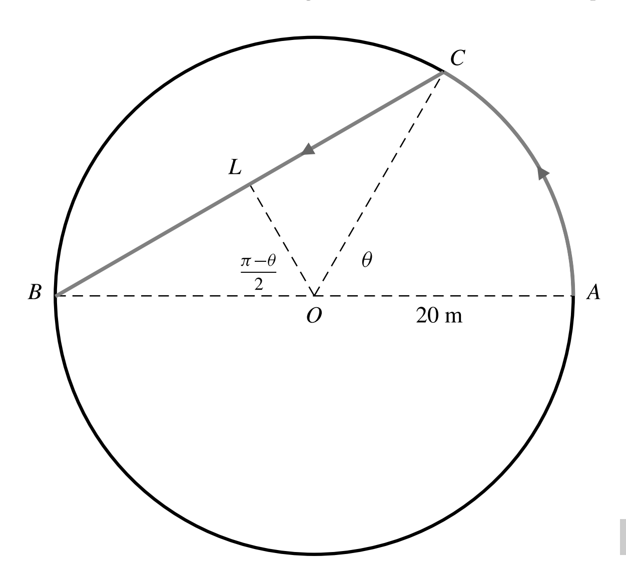


Figura 4.43 Desplazamiento desde A hasta B corriendo y nadando.

Supongamos que el hombre nada a una velocidad de k m/s y, por tanto, corre a una velocidad de $2k$ m/s. Si t es el tiempo total que necesita para ir desde A hasta B, entonces

$$t = t(\theta) = \text{tiempo corriendo} + \text{tiempo nadando}$$
$$= \frac{20\theta}{2k} + \frac{40}{k}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi - \theta}{2}$$

Se supone que no se emplea tiempo en saltar al agua en el punto C. El dominio de t es $[0, \pi]$ y t no tiene puntos singulares. Como t es continua en un intervalo cerrado y finito, debe tener un valor mínimo y ese valor debe estar en un punto crítico o en un extremo. Para el caso de los puntos críticos,

$$0 = t'(\theta) = \frac{10}{k} - \frac{20}{k}\cos\frac{\pi - \theta}{2}$$

Por tanto,

$$\cos\frac{\pi-\theta}{2}=\frac{1}{2},\qquad \frac{\pi-\theta}{2}=\frac{\pi}{3},\qquad \theta=\frac{\pi}{3}$$

Éste es el único valor crítico de θ que está en el intervalo $[0, \pi]$. Tenemos que

$$t\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{10\pi}{3k}+\frac{40}{k}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{10}{k}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)\approx\frac{45.11}{k}$$

Debemos buscar también en los extremos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$:

$$t(0)=\frac{40}{k},\qquad t(\pi)=\frac{10\pi}{k}\approx\frac{31.4}{k}$$

Evidentemente $t(\pi)$ es el mínimo de esos tres tiempos. Para ir desde A hasta B tan rápidamente como sea posible, el hombre deberá correr todo el tiempo. ■

Observación Este problema muestra la importancia de comprobar si los puntos candidatos corresponden a máximos o mínimos. En este caso, el punto crítico $\theta = \pi/3$ proporciona la *peor* estrategia posible: correr un tercio del camino y nadar después el resto requiere el máximo tiempo, no el mínimo.

Ejercicios 4.5

1. Dos números positivos suman 7. ¿Cuál es el máximo valor posible de su producto?

2. El producto de dos números positivos es 8. ¿Cuál es el mínimo valor posible de su suma?

3. Dos números no negativos suman 60. ¿De qué números se trata si el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro es máximo?

4. Dos números suman 16. ¿De qué números se trata si el producto del cubo de uno y la quinta potencia del otro es tan grande como sea posible?

5. La suma de dos números no negativos vale 10. ¿Cuál es el mínimo valor de la suma del cubo de un número y el cuadrado del otro?

6. Dos números no negativos suman n. ¿Cuál es el mínimo valor posible de la suma de sus cuadrados?

7. Entre todos los rectángulos de un área dada, demuestre que el cuadrado tiene el perímetro mínimo.

8. Entre todos los rectángulos de un perímetro dado, demuestre que el cuadrado tiene el área máxima.

9. Entre todos los triángulos isósceles de un perímetro dado, demuestre que el triángulo equilátero es el de área máxima.

10. Calcule la máxima área posible de un triángulo isósceles si la longitud de cada uno de sus dos lados iguales es de 10 m.

11. Calcule el área del máximo rectángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio R si un lado del rectángulo está sobre el diámetro del semicírculo.

12. Calcule el máximo perímetro posible de un rectángulo inscrito en un semicírculo de radio R si un lado del rectángulo está sobre el diámetro del semicírculo (es interesante notar que el rectángulo del máximo perímetro tiene una forma diferente que el de máxima área, obtenido en el Ejercicio 11).

13. Un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados se inscribe en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Calcule la máxima área posible de este rectángulo.

14. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en C y área S. Calcule la máxima área de un rectángulo inscrito en el triángulo si (a) una esquina del rectángulo está en C o (b) un lado del rectángulo está en la hipotenusa AB.

15. Calcule la máxima área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales tienen 10 cm de longitud. Utilice la mitad de la longitud del tercer lado del triángulo como variables para expresar el área de dicho triángulo.

16. Repita el Ejercicio 15, pero utilice como variable para expresar el área del triángulo el ángulo entre los dos lados iguales. ¿Qué solución es más fácil?

17. **(Diseño de una cartelera)** Se desea construir una cartelera con 100 m^2 de área y con márgenes de 2 m en la parte superior e inferior y de 4 m en cada lado. Calcule las dimensiones exteriores de la cartelera si su área total debe ser mínima.

18. **(Diseño de una caja)** Se desea construir una caja partiendo de una lámina de cartón de 70 cm × 150 cm, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y después doblando las cuatro solapas resultantes para hacer los lados de la caja (la caja no tiene tapa). ¿Cuál es el máximo volumen posible de la caja?

19. **(Uso de descuentos para maximizar el beneficio)** Un fabricante de automóviles vende 2000 coches al mes, con un beneficio medio de 1000 € por coche. Las prospectivas de mercado indican que por cada 50 € de descuento que el fabricante ofrezca a los compradores podría vender 200 coches más al mes. ¿Cuánto descuento debería ofrecer para maximizar el beneficio mensual?

20. **(Maximización del beneficio de renta)** Las 80 habitaciones de un motel se podrían alquilar todas las noches si el director cobrara 40 € o menos por habitación. Si se cobra $(40 + x)$ € por habitación, entonces $2x$ habitaciones permanecerán vacantes. Si cada habitación alquilada le cuesta al director 10 € al día y cada habitación no alquilada 2 € al día, ¿qué precio debería cobrar el director por habitación para maximizar su beneficio diario?

21. **(Minimización del tiempo de viaje)** Nos encontramos en un todoterreno en el desierto, 12 km al sur del punto *A* más cercano de una carretera recta este-oeste. Se desea alcanzar un punto *B* en la carretera 10 km al este de *A*. Si nuestro todoterreno puede correr en promedio a 15 km/h sobre la arena y a 39 km/h por la carretera ¿hacia qué punto de la carretera habría que dirigirse para minimizar el tiempo de viaje hasta *B*?

22. Repita el Ejercicio 21, suponiendo que *B* se encuentra sólo a 4 km de *A*.

23. Un alambre de 1 m de longitud se corta en dos trozos. Un trozo se dobla en forma de circunferencia y el otro en forma de cuadrado. Calcule la longitud de la parte utilizada para el cuadrado si la suma de las áreas del círculo y el cuadrado es (a) máxima y (b) mínima.

24. Calcule el área del máximo rectángulo que se puede dibujar de forma que cada uno de sus lados pase por un vértice diferente de un rectángulo cuyos lados son a y b.

25. ¿Cuál es la longitud del mínimo segmento que tiene uno de sus extremos en el eje x, el otro en el eje y y pasa por el punto $(9, \sqrt{3})$?

26. **(Doblando una esquina)** Calcule la longitud máxima que puede tener una viga para que pueda doblar horizontalmente la esquina que comunica un vestíbulo de anchura a m con otro vestíbulo de anchura b m (*véase* la Figura 4.44; suponga que la viga no tiene anchura).

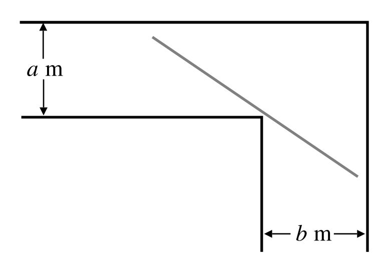


Figura 4.44

27. Si la altura de ambos vestíbulos del Ejercicio 26 es de c m, y no es necesario que la viga sea transportada horizontalmente, ¿qué longitud máxima podría tener la viga para seguir doblando la esquina? *Sugerencia*: Este ejercicio se puede resolver fácilmente teniendo en cuenta el resultado del ejercicio anterior.

28. La valla del Ejemplo 3 se destruye y se construye una nueva valla a 2 m de separación del muro. ¿Cuál puede ser la máxima altura de la valla si se debe poder extender una escalera de 6 m desde el muro, sobre la valla y hasta el suelo en el exterior de la valla?

29. Calcule la mínima distancia desde el origen a la curva $x^2y^4 = 1$.

30. Calcule la mínima distancia desde el punto (8, 1) a la curva $y = 1 + x^{3/2}$.

31. Calcule las dimensiones del máximo cilindro circular recto que se puede inscribir en una esfera de radio R.

32. Calcule las dimensiones del cilindro circular de máximo volumen que se puede inscribir en un cono cuyo radio en la base vale R y su altura es H, si la base del cilindro coincide con la base del cono.

33. Una caja de base cuadrada sin tapa tiene un volumen de 4 m^3. Calcule las dimensiones de la caja más económica.

34. **(Construcción de una pirámide)** Se construye una pirámide de base cuadrada con cuatro caras, cada una de las cuales tienen la forma de un triángulo isósceles, cortando cuatro triángulos de una pieza cuadrada de cartulina de 2 pies (como se muestra en la Figura 4.45) y doblando los triángulos resultantes para formar las paredes de la pirámide. ¿Cuál es el máximo volumen que puede tener la pirámide? *Sugerencia*: El volumen de una pirámide con área de la base A y altura h medida perpendicular a la base es $V = \frac{1}{3} Ah$.

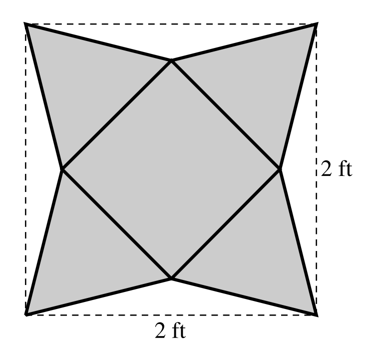


Figura 4.45

35. **(Obtención de la máxima luminosidad)** Una ventana tiene un perímetro de 10 m y su forma es rectangular

con el lado superior reemplazado por un semicírculo. Calcule las dimensiones del rectángulo si la ventana admite la máxima cantidad de luz.

36. **(Diseño de un tanque de combustible)** Un tanque de combustible tiene la forma de un cilindro cerrado por semiesferas en cada uno de los extremos. Si el coste de las semiesferas por unidad de área es el doble que el de la pared del cilindro, y si el volumen del tanque es V, calcule el radio y la altura de la parte cilíndrica que minimizan el coste total. El área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$, y su volumen es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

37. **(Reflexión de la luz)** La luz viaja de forma que emplea el mínimo tiempo posible en ir de un punto a otro. Un rayo de luz procedente del punto C se refleja en un espejo plano AB en X y después pasa por el punto D (*véase* la Figura 4.46). Demuestre que los rayos CX y XD forman ángulos iguales con la normal a AB en X (*Observación*: Puede darse una demostración basada en geometría elemental sin utilizar el cálculo o se puede minimizar el tiempo empleado en el recorrido CXD).

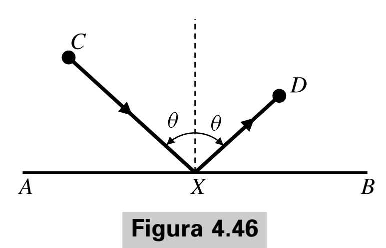


Figura 4.46

*__38.__ **(Ley de Snell)** Si la luz viaja con velocidad v_1 en un medio y con velocidad v_2 en un segundo medio, y si los dos medios están separados por una interfaz plana, demuestre que un rayo de luz que va del punto A en un medio al punto B en el otro se desvía en la interfaz de forma que

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2}$$

siendo i y r los ángulos de incidencia y de refracción, como se muestra en la Figura 4.47. Esto se conoce como Ley de Snell. Deduzca esta ley a partir del principio de mínimo tiempo presentado en el Ejercicio 37.

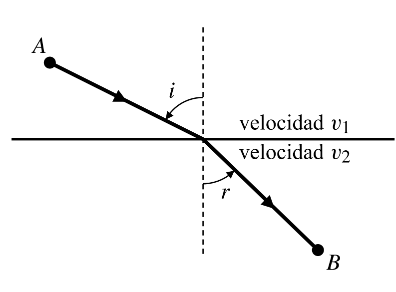


Figura 4.47

39. **(Corte de la viga más rígida)** La rigidez de una viga de madera de sección cruzada rectangular es proporcional a la anchura y al cubo de la profundidad de la sección cruzada. Calcule la anchura y la profundidad de la viga de máxima rigidez que se puede cortar utilizando un tronco de radio R.

40. Calcule la ecuación de la recta de máxima pendiente que es tangente a la curva $y = 1 + 2x - x^3$.

41. Una cantidad Q crece de acuerdo con la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = kQ^3(L - Q)^5$$

siendo k y L constantes positivas. ¿Qué valor tiene Q cuando está creciendo con la máxima velocidad?

*__42.__ Calcule el mínimo volumen posible de un cono circular recto que puede contener a una esfera de radio R (el volumen de un cono de radio en la base r y altura h es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$).

*__43.__ **(Carga de un ferry)** Un ferry realiza el recorrido entre tierra y la isla de Dedlos. La capacidad máxima del ferry es de 1000 coches, pero cargarlo cerca de su máxima capacidad consume mucho tiempo. Se sabe que el número de coches que se pueden cargar en t horas es

$$f(t) = 1000\,\frac{t}{e^{-t} + t}$$

Nótese que $\lim_{t\to\infty} f(t) = 1000$, como podría esperarse. Además, se sabe que se requieren $x/1000$ horas descargar x coches. El tiempo de navegación a la isla o desde la isla es de una hora. Suponga que siempre hay en cada viaje más coches esperando que los que se pueden cargar. ¿Cuántos coches deberían cargarse en el ferry en cada viaje para maximizar el movimiento medio de los coches hacia y desde la isla? (Puede ser necesaria una calculadora gráfica o un software de computador como la rutina `fsolve` de Maple para calcular el punto crítico apropiado).

*__44.__ **(La mejor vista de un mural)** ¿A qué distancia hay que mirar de un mural para conseguir la mejor vista si el mural tiene 10 pies de altura y su parte inferior está 2 pies por encima del nivel de nuestros ojos? *Véase* la Figura 4.48.

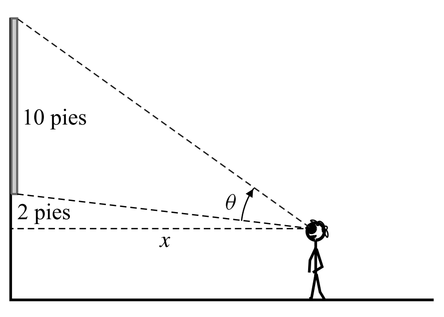
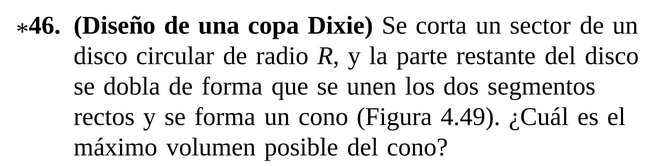


Figura 4.48

∗**45. (Mejora de la jaula del Ejemplo 1)** Se construye una jaula, uno de cuyos límites coincide con un muro recto. La otra parte de la jaula se cierra mediante una valla con la forma de un arco de circunferencia. Si hay disponibles 100 m de valla, ¿cuál es el área de la jaula más grande posible? ¿En qué fracción de un círculo se curva la valla?



∗**46. (Diseño de una copa Dixie)** Se corta un sector de un disco circular de radio R, y la parte restante del disco se dobla de forma que se unen los dos segmentos rectos y se forma un cono (Figura 4.49). ¿Cuál es el máximo volumen posible del cono?

∗**47. (Minimización del pliegue)** Una esquina de una tira de papel de anchura a cm se dobla de forma que llegue justo al lado opuesto (Figura 4.50). Calcule la mínima longitud posible de la línea de pliegue.

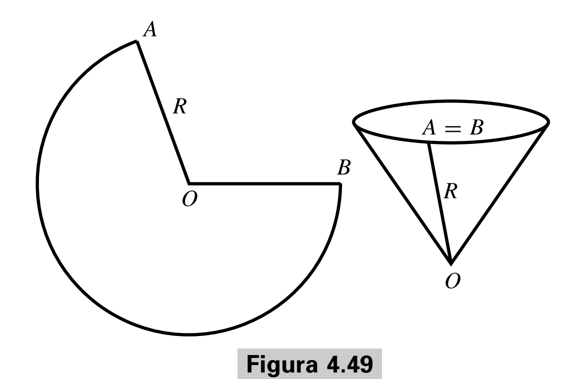


Figura 4.49

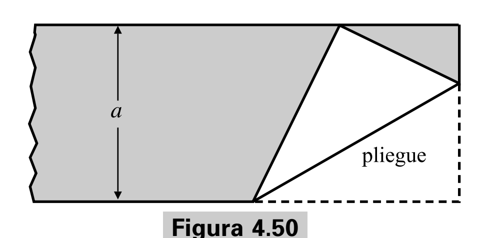


Figura 4.50

4.6 Cálculo de raíces de ecuaciones

El cálculo de soluciones (raíces) de ecuaciones es un problema matemático importante, al cual el cálculo ha hecho contribuciones significativas. Sólo hay unas pocas clases de ecuaciones de la forma $f(x)=0$ que se pueden resolver de forma exacta. Entre ellas están las **ecuaciones lineales**:

$$ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

y las **ecuaciones cuadráticas**:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las ecuaciones cúbicas (polinomios de tercer grado) y de cuarto grado también se pueden resolver, pero las fórmulas son muy complicadas. En general, estas ecuaciones y un buen número de otras se resolverán aproximadamente utilizando métodos numéricos, a menudo con ayuda de la calculadora o el computador.

En la Sección 1.4 se presentó el método de la bisección para aproximar la raíz de una ecuación de la forma $f(x) = 0$. Este método utiliza el Teorema del Valor Medio y depende sólo de la continuidad de f y de nuestra habilidad para obtener un intervalo $[x_1, x_2]$ donde se pueda encontrar la raíz, porque $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tengan signos opuestos. Este método es lento. Requiere entre tres y cuatro iteraciones para obtener la raíz que está siendo aproximada con una precisión suficiente.

Si sabemos más cosas sobre f, además de que es continua, podemos desarrollar métodos mejores (es decir, más rápidos) para calcular las raíces de $f(x) = 0$. En esta sección estudiaremos dos métodos de este tipo:

(a) **El método de Newton**, que requiere que f sea diferenciable y que en general es muy eficiente.
(b) **La iteración del punto fijo**, que se aplica a ecuaciones de forma diferente: $f(x) = x$.

Como el método de la bisección, ambos métodos requieren tener una cierta idea inicial de dónde se encuentra la raíz, y generan secuencias de aproximaciones para aproximarse más y más a la misma.

Método de Newton

Se desea calcular una **raíz** de la ecuación $f(x) = 0$, es decir, un número r tal que $f(r) = 0$. Ese número se denomina también **cero** de la función f. Si f es diferenciable cerca de la raíz, entonces se pueden utilizar rectas tangentes para producir la secuencia de aproximaciones a la raíz que se acerque rápidamente a dicha raíz. La idea es como sigue (*véase* la Figura 4.51). Se parte de una aproximación inicial a la raíz, por ejemplo $x = x_0$. Se dibuja la recta tangente a $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ y se calcula x_1, el punto donde esta recta tangente corta al eje x. Bajo ciertas condiciones, x_1 estará más cerca de la raíz que x_0. Este proceso se puede repetir sucesivamente para obtener una secuencia de números x_2, x_3, ..., y se van acercando a la raíz r. El número x_{n+1} es el corte con el eje x de la tangente $y = f(x)$ en $(x_n, f(x_n))$.

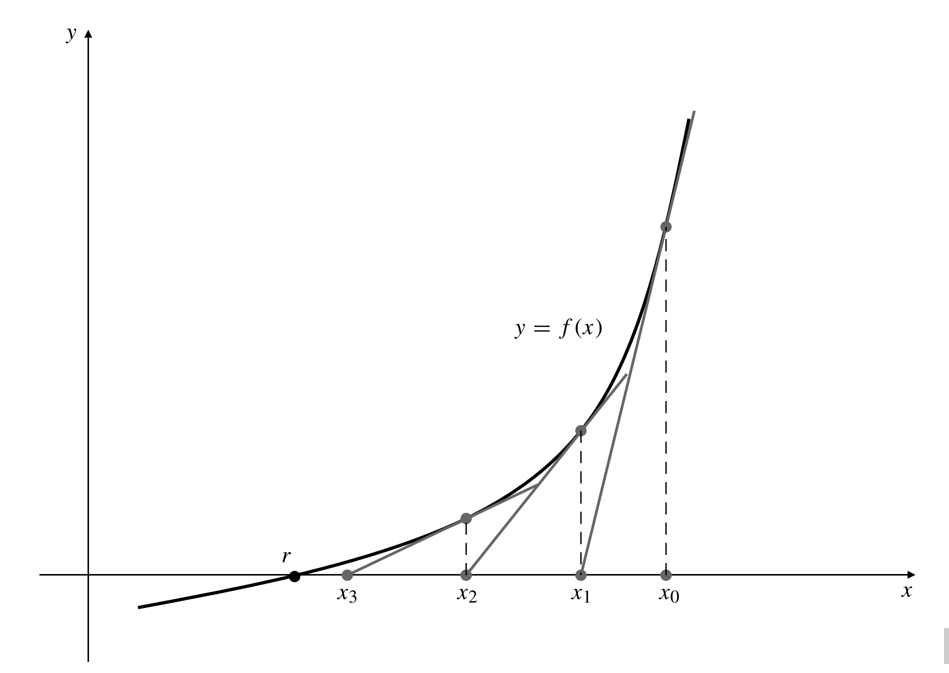


Figura 4.51

La ecuación de la recta tangente $y = f(x)$ en $x = x_0$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Como el punto $(x_1, 0)$ está en esta recta, tenemos que $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$. Por tanto,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Fórmulas similares producen x_2 a partir de x_1, después x_3 a partir de x_2, y así sucesivamente. La fórmula para obtener x_{n+1} a partir x_n es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

y se conoce con el nombre de **fórmula del Método de Newton**. Generalmente, se utilizará una calculadora o un ordenador para obtener las aproximaciones sucesivas x_1, x_2, x_3, ..., y observar si los números parecen converger a un límite. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = r$ existe, y si f/f' es continua cerca de r, entonces r debe ser una raíz de f ya que

$$r = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = r - \frac{f(r)}{f'(r)}$$

de donde se deduce que $f(r) = 0$. Este método se conoce con el nombre de **Método de Newton** o **Método de Newton-Raphson**.

Ejemplo 1 Utilice el Método de Newton para calcular la raíz real única de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ con una precisión de 10 cifras decimales.

Solución Tenemos que $f(x) = x^3 - x - 1$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$. Como f es continua y como $f(1) = -1$ y $f(2) = 5$, la ecuación tiene una raíz en el intervalo [1, 2]. Empecemos con el valor inicial $x_0 = 1.5$. La fórmula del Método de Newton en este caso es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 - 1}$$

de forma que, por ejemplo, la aproximación x_1 es

$$x_1 = \frac{2(1.5)^3 + 1}{3(1.5)^2 - 1} \approx 1.347\ 826...$$

Utilizando una calculadora científica se obtienen los valores de la Tabla 1:

Tabla 1.

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.5	0.875 000 000 000···
1	1.347 826 086 96···	0.100 682 173 091···
2	1.325 200 398 95···	0.002 058 361 917···
3	1.324 718 174 00···	0.000 000 924 378···
4	1.324 717 957 24···	0.000 000 000 000···
5	1.324 717 957 24···	

Evidentemente, $r = 1.324\ 717\ 957\ 2$ con una precisión redondeada a 10 cifras decimales. ■

Obsérvese el comportamiento del número x_n. En la tercera iteración, x_3, aparentemente hemos conseguido una precisión de 6 cifras decimales, y con x_4, unos 10 dígitos decimales. Una característica del Método de Newton es que, cuando se empieza cerca de la raíz, la convergencia puede ser muy rápida. Es ilustrativo comparar estos resultados con los obtenidos para la misma ecuación por el método de la bisección en el Ejemplo 12 de la Sección 1.4. Allí se conseguían tres cifras decimales de precisión tras 11 iteraciones.

Ejemplo 2 Resuelva la ecuación $x^3 = \cos x$ con una precisión de 11 cifras decimales.

Solución Deseamos obtener la coordenada x, r, de la intersección de las curvas $y = x^3$ y $y = \cos x$. Observando la Figura 4.52 parece que las curvas se cortan ligeramente a la derecha de $x = 1$. Empezaremos con el valor inicial $x_0 = 0.8$. Si $f(x) = x^3 - \cos x$, entonces $f'(x) = 3x^2 + \operatorname{sen} x$. La fórmula del Método de Newton es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - \cos x_n}{3x_n^2 + \operatorname{sen} x_n} = \frac{2x_n^3 + x_n \operatorname{sen} x_n + \cos x_n}{3x_n^2 + \operatorname{sen} x_n}$$

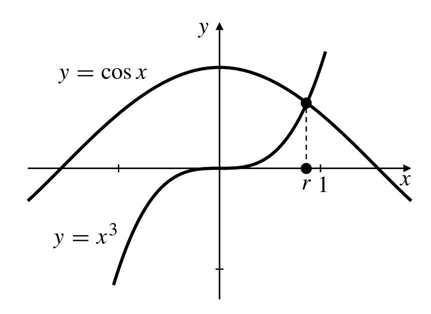


Figura 4.52 Resolución de $x^3 = \cos x$.

Las aproximaciones x_1, x_2, ..., se muestran en la Tabla 2:

Tabla 2.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0.8	−0.184 706 709 347···
1	0.870 034 801 135···	0.013 782 078 762···
2	0.865 494 102 425···	0.000 006 038 051···
3	0.865 474 033 493···	0.000 000 001 176···
4	0.865 474 033 102···	0.000 000 000 000···
5	0.865 474 033 102···	

Las dos curvas se cortan en $x = 0.865\,474\,033\,10$, con una precisión de 11 cifras decimales. ∎

Observación El Ejemplo 2 muestra la utilidad de dibujar una gráfica para determinar un posible valor inicial x_0. Incluso un dibujo muy aproximado de la gráfica de $y = f(x)$ puede mostrar cuántas raíces tiene aproximadamente la ecuación $f(x) = 0$ y por dónde están. En general, cuanto más precisa sea la aproximación inicial a la raíz verdadera, menor número de iteraciones serán necesarias para conseguir la precisión deseada. De forma similar, para una ecuación de la forma $g(x) = h(x)$, hacer un dibujo de las gráficas de g y h (sobre los mismos ejes) puede sugerir aproximaciones para el comienzo de la iteración para encontrar los puntos de intersección. A partir de los valores iniciales, se puede aplicar después el Método de Newton para mejorar las aproximaciones.

Observación Cuando se utiliza el Método de Newton para resolver una ecuación de la forma $g(x) = h(x)$ (como la del Ejemplo 2), hay que transformar la ecuación a la forma $f(x) = 0$ y aplicar el Método de Newton a f. En general, basta utilizar $f(x) = g(x) - h(x)$, aunque $f(x) = (g(x)/h(x)) - 1$ es también una posibilidad.

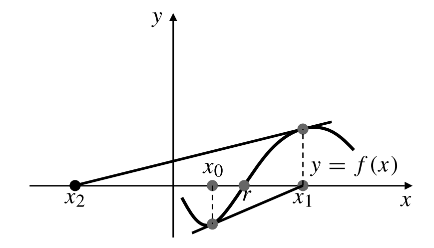


Figura 4.53 En este caso las iteraciones del Método de Newton no convergen a la raíz.

Observación Si disponemos de una calculadora programable, podemos aprender a programar la fórmula del Método de Newton para una ecuación dada, de forma que para generar nuevas iteraciones baste con pulsar unos pocos botones. Si nuestra calculadora dispone además de capacidades gráficas, se pueden utilizar para localizar un buen valor inicial.

El Método de Newton no siempre funciona tan bien como lo hace en los ejemplos anteriores. Si la primera derivada f' es muy pequeña cerca de la raíz, o si la segunda derivada f'' es muy grande cerca de la raíz, una sola iteración de la fórmula nos puede llevar desde un punto muy cercano a la raíz a un punto muy lejano. La Figura 4.53 ilustra esta posibilidad (*véanse* también los Ejercicios 15 y 16 al final de esta sección).

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para que las aproximaciones del Método de Newton converjan a una raíz r de la ecuación $f(x) = 0$ si el valor inicial x_0 está lo suficientemente cerca de dicha raíz.

TEOREMA 7 **Límites de error del Método de Newton**

Supongamos que f, f' y f'' son continuas en un intervalo I que contiene a x_n, x_{n+1} y a una raíz $x = r$ de $f(x) = 0$. Supongamos también que existen constantes K y $L > 0$ tales que para todo x perteneciente a I se cumple

(i) $|f''(x)| \leqslant K$ y

(ii) $|f'(x)| \geqslant L$

Entonces,

(a) $|x_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{K}{2L}|x_{n+1} - x_n|^2$ y

(b) $|x_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{K}{2L}|x_n - r|^2$

Las condiciones (i) y (ii) aseguran que cerca de r la pendiente de $y = f(x)$ no es demasiado pequeña y que no cambia con demasiada rapidez. Si $K/(2L) < 1$, el teorema demuestra que x_n converge rápidamente a r cuando n se hace lo suficientemente grande para que $|x_n - r| < 1$.

La demostración del Teorema 7 depende del Teorema del Valor Medio. No la daremos aquí ya que este teorema es de uso práctico limitado. En la práctica, se calcularán aproximaciones sucesivas utilizando la fórmula de Newton y se observará si parecen converger a un límite. Si lo hacen, y si los valores de f en esas aproximaciones tienden a 0, podemos confiar en que hemos localizado una raíz.

Iteración del punto fijo

Un número r que cumple la ecuación $f(r) = r$ se denomina **punto fijo** de la función f porque al aplicar la función f el número no cambia. Para ciertas clases de funciones, se pueden encontrar sus puntos fijos comenzando con un valor inicial x_0 y calculando sucesivas aproximaciones $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... En general,

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Empecemos investigando un ejemplo simple:

Ejemplo 3 Calcule una raíz de la ecuación $\cos x = 5x$.

Solución Esta ecuación es de la forma $f(x) = x$, con $f(x) = \frac{1}{5}\cos x$. Como $\cos x$ tiende a 1 cuando x tiende a 0, vemos que $\frac{1}{5}\cos x$ tenderá a $\frac{1}{5}$ cuando $x = \frac{1}{5}$. Esto sugiere que un valor inicial razonable del punto fijo es $x_0 = \frac{1}{5} = 0.2$. Los valores de las aproximaciones posteriores

$$x_1 = \frac{1}{5}\cos(x_0), \qquad x_2 = \frac{1}{5}\cos(x_1), \qquad x_3 = \frac{1}{5}\cos(x_2), \ldots$$

se presentan en la Tabla 3. La raíz es 0.196 164 28 con una precisión de ocho cifras decimales.

Tabla 3.

n	x_n
0	0.2
1	0.196 013 32
2	0.196 170 16
3	0.196 164 05
4	0.196 164 29
5	0.196 164 28
6	0.196 164 28

■

¿Por qué funciona el método utilizado en el Ejemplo 3? ¿Funcionará con cualquier función f? Para responder a estas preguntas, examinemos la línea poligonal de la Figura 4.54. Empezando en x_0, se dirige verticalmente a la curva $y = f(x)$ hasta una coordenada x de valor x_1. Después se dirige horizontalmente a la recta $y = x$, cruzándola en un punto cuya coordenada x sigue valiendo x_1. Después el proceso se repite; la recta va verticalmente hasta la curva $y = f(x)$ y horizontalmente hasta $y = x$ llegando al punto $x = x_2$. La línea continúa de esta forma siguiendo un movimiento en espiral cada vez más cercana a la intersección de $y = f(x)$ y $y = x$. Cada valor de x_n está más cerca del punto fijo r que el valor anterior.

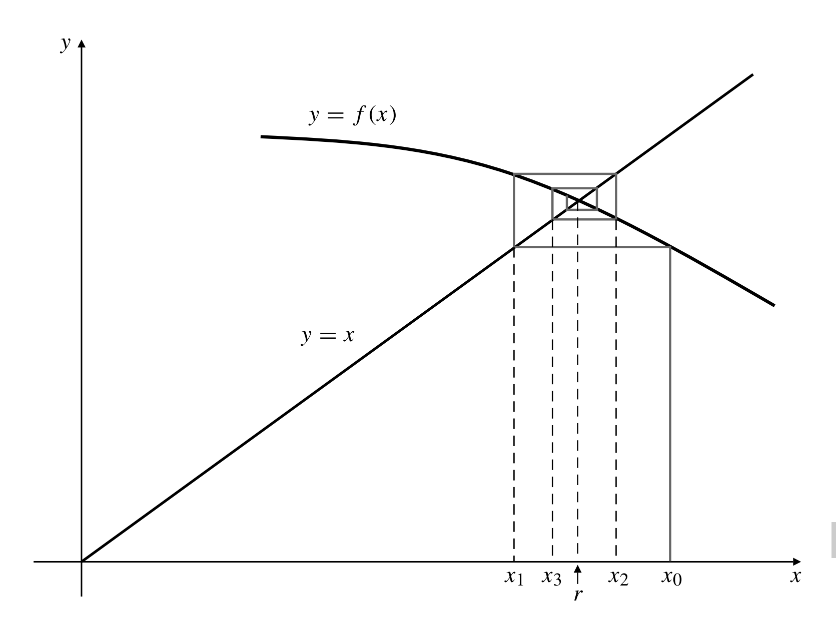


Figura 4.54 Iteraciones de $x_{n+1} = f(x_n)$ que se dirigen en espiral hacia el punto fijo.

Consideremos ahora función f cuya gráfica se muestra en la Figura 4.55(a). Si intentamos seguir el mismo método en este caso, empezando con x_0, la línea poligonal se dirige en espiral hacia afuera, lejos de la raíz, y los valores resultantes x_n no convergen a la raíz como lo hacían en el Ejemplo 3. Para ver por qué el método funciona con la función de la Figura 4.54, pero no lo hace con la función de la Figura 4.55(a), obsérvense las pendientes de las dos gráficas $y = f(x)$, cerca del punto fijo r. Ambas pendientes son negativas, pero en la Figura 4.54 el valor absoluto de la pendiente es menor que 1, mientras que el valor absoluto de la pendiente de f en la Figura 4.55(a) es mayor que 1. Observando cuidadosamente las gráficas, debemos ver claramente que éste es el hecho que hace que los puntos x_n se acerquen a r en la Figura 4.54 y se alejen de r en la Figura 4.55(a).

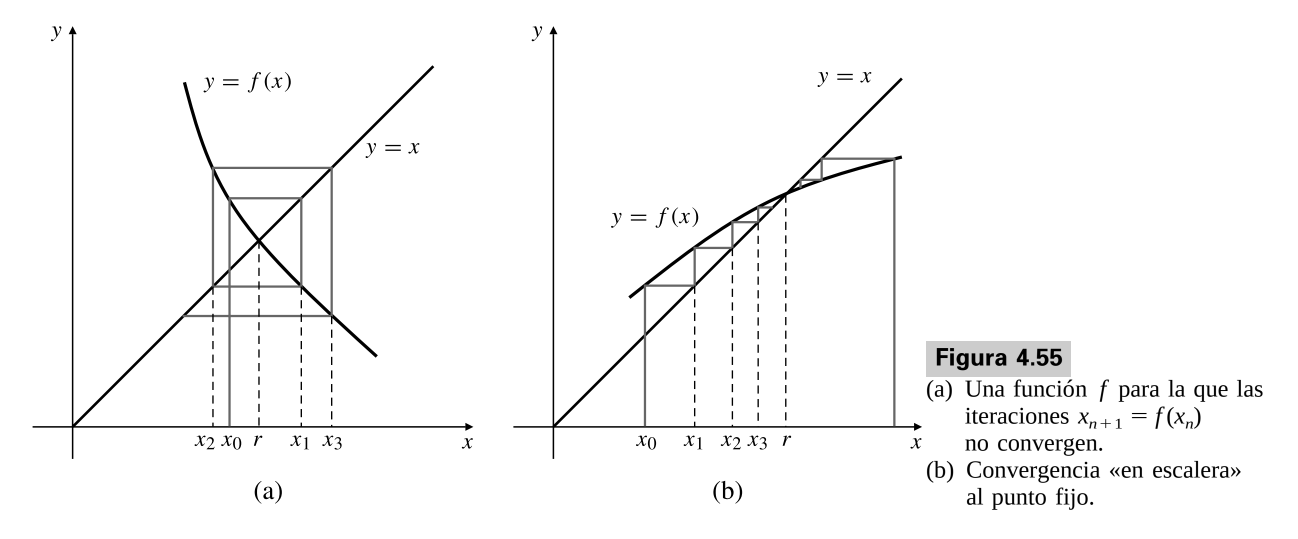


Figura 4.55
(a) Una función f para la que las iteraciones $x_{n+1} = f(x_n)$ no convergen.
(b) Convergencia «en escalera» al punto fijo.

Un tercer ejemplo, que se puede ver en la Figura 4.55(b), muestra que el método puede funcionar también para funciones cuyas gráficas tengan pendientes positivas cerca del punto fijo r, suponiendo que la pendiente sea menor que 1. En este caso, la línea poligonal forma una «escalera» en vez de una «espiral», y las aproximaciones sucesivas x_n crecen hacia la raíz si $x_0 < r$ y decrecen hacia la raíz si $x_0 > r$.

El siguiente teorema garantiza que la iteración del método del punto fijo funcionará para una clase particular de funciones.

TEOREMA 8 **Un teorema del punto fijo**

Supongamos que f está definida en un intervalo $I = [a, b]$ y cumple las dos siguientes condiciones:

(i) $f(x)$ pertenece a I siempre que x pertenezca a I.
(ii) Existe una constante K, con $0 < K < 1$, tal que para todos u y v pertenecientes a I,

$$|f(u) - f(v)| \leqslant K|u - v|$$

Entonces f tiene un punto fijo f en I, que es $f(r) = r$, y empezando con cualquier número x_0, la iteración

$$x_1 = f(x_0), \qquad x_2 = f(x_1), \ \ldots$$

converge a r.

Invitamos al lector a demostrar este teorema mediante el método que se sugiere en los Ejercicios 24 y 25 al final de esta sección.

Rutinas «Solve»

Muchos de los modelos más avanzados de calculadoras científicas y la mayoría de los programas matemáticos para computador disponen de rutinas para resolver numéricamente ecuaciones generales o, en algunos casos, incluso simbólicamente. Estas rutinas «Solve» suponen continuidad a los lados izquierdo y derecho de las ecuaciones dadas y a menudo requieren que el usuario especifique un intervalo en el cual buscar la raíz o una aproximación inicial al valor de dicha raíz, o ambas cosas. Generalmente, la calculadora o el software de computador tendrán también capacidades gráficas, y las podremos utilizar para obtener una idea de cuántas raíces tiene la

ecuación y ver aproximadamente su localización, antes de utilizar las rutinas de resolución. También es posible especificar una *tolerancia* sobre la diferencia de los dos miembros de la ecuación. Por ejemplo, si deseamos obtener una solución de la ecuación $f(x) = 0$, puede ser más importante para nosotros asegurarnos de que una solución aproximada $\hat{x}$ satisface $|f(\hat{x})| < 0.0001$ que asegurarnos de que $\hat{x}$ está dentro de una distancia particular de la raíz real.

Los métodos utilizados por las rutinas de resolución varían de una calculadora o aplicación software a otra, y suelen ser muy sofisticados, pues utilizan diferenciación numérica y otras técnicas para obtener la raíz muy rápidamente, incluso aunque el intervalo de búsqueda sea grande.

Si disponemos de una calculadora científica avanzada o un software de computador con posibilidades similares, merece la pena leer los manuales que describen cómo hacer un uso efectivo de las ecuaciones de resolución. Las aplicaciones de matemáticas para resolver problemas «del mundo real» generalmente requieren obtener soluciones aproximadas de ecuaciones que son insolubles por métodos exactos.

Ejercicios 4.6

En los Ejercicios 1-10, utilice el Método de Newton para resolver las ecuaciones dadas con la precisión permitida por su calculadora.

1. Calcule $\sqrt{2}$ resolviendo $x^2 - 2 = 0$.

2. Calcule $\sqrt{3}$ resolviendo $x^2 - 3 = 0$.

3. Calcule la raíz de $x^3 + 2x - 1 = 0$ entre 0 y 1.

4. Calcule la raíz de $x^3 + 2x^2 - 2 = 0$ entre 0 y 1.

5. Calcule las dos raíces de $x^4 - 8x^2 - x + 16 = 0$ en [1, 3].

6. Calcule las tres raíces de $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ en $[-3, 1]$.

7. Resuelva $\operatorname{sen} x = 1 - x$. Realice un dibujo como ayuda para obtener un valor inicial x_0.

8. Resuelva $\cos x = x^2$. ¿Cuántas raíces existen?

9. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $\tan x = x$? Calcule la que está entre $\pi/2$ y $3\pi/2$.

10. Resuelva $\dfrac{1}{1 + x^2} = \sqrt{x}$ expresándola en la forma

$$(1 + x^2)\sqrt{x} - 1 = 0$$

11. Si su calculadora dispone de una rutina «Solve», o si dispone de un software de computador con una rutina de ese tipo, utilícelas para resolver las ecuaciones de los 10 ejercicios anteriores.

En los Ejercicios 12-13 calcule los valores máximo y mínimo de las funciones.

12. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}$ **13.** $\dfrac{\cos x}{1 + x^2}$

14. Sea $f(x) = x^2$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene claramente como solución $x = 0$. Obtenga las iteraciones del Método de Newton x_1, x_2 y x_3 empezando con $x_0 = 1$.

(a) ¿Qué es x_n?

(b) ¿Cuántas iteraciones se necesitan para calcular la raíz con un error menor que 0.0001 en valor absoluto?

(c) ¿Cuántas iteraciones se necesitan para obtener una aproximación x_n para la que $|f(x_n)| < 0.0001$?

(d) ¿Por qué las iteraciones del Método de Newton convergen en este caso más lentamente que en los ejemplos presentados en esta sección?

15. **(Oscilación)** Aplique el Método de Newton a

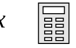
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

empezando con el valor inicial $x_0 = a > 0$. Calcule x_1 y x_2. ¿Qué sucede? (realice un dibujo). Si observara este comportamiento cuando estuviera utilizando el Método de Newton para calcular la raíz de una ecuación, ¿qué haría a continuación?

16. **(Oscilaciones divergentes)** Aplique el Método de Newton a $f(x) = x^{1/3}$ con $x_0 = 1$. Calcule x_1, x_2, x_3 y x_4. ¿Qué sucede? Obtenga una fórmula para x_n.

17. **(Oscilaciones convergentes)** Aplique el Método de Newton a $f(x) = x^{2/3}$ con $x_0 = 1$. Calcule x_1, x_2, x_3, y x_4. ¿Qué sucede? Obtenga una fórmula para x_n.

Utilice la iteración del punto fijo para resolver las ecuaciones de los Ejercicios 18-22. Obtenga una precisión de cinco cifras decimales.

18. $1 + \frac{1}{4}\operatorname{sen} x = x$ 

19. $\cos\dfrac{x}{3} = x$

20. $(x + 9)^{1/3} = x$

21. $\dfrac{1}{2 + x^2} = x$

22. Resuelva $x^3 + 10x - 10 = 0$ expresándola en la forma $1 - \frac{1}{10}x^3 = x$. 

23. Sea $f(x)$ una función diferenciable cuya derivada $f'(x)$ nunca vale cero. Sea

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Demuestre que r es una raíz de $f(x) = 0$ si y sólo si r es un punto fijo de $N(x)$. ¿Qué son en este caso las aproximaciones sucesivas $x_{n+1} = N(x_n)$, empezando en x_0?

Los Ejercicios 24-25 constituyen una demostración del Teorema 8.

∗24. La condición (ii) del Teorema 8 implica que f es continua en $I = [a, b]$. Utilice la condición (i) para demostrar que f tiene un punto fijo r en I. *Sugerencia*: Aplique el Teorema del Valor Medio a $g(x) = f(x) - x$ en $[a, b]$.

∗25. Utilice la condición (ii) del Teorema 8 e inducción matemática para demostrar que

$$|x_n - r| \leqslant K^n|x_0 - r|$$

Como $0 < K < 1$, sabemos que $K^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} x_n = r$.

4.7 Aproximaciones lineales

Muchos problemas de matemática aplicada son difíciles de resolver exactamente, y todo lo que podemos esperar es obtener soluciones aproximadas que sean correctas dentro de unos límites pequeños de tolerancia aceptables. En esta sección examinaremos cómo el conocimiento de los valores de una función y de su primera derivada en un punto nos puede servir para obtener valores aproximados de la función en puntos cercanos.

La tangente a la gráfica $y = f(x)$ en $x = a$ describe el comportamiento de dicha gráfica cerca del punto $P = (a, f(a))$, mejor que cualquier otra línea recta que pase por P, porque pasa por dicho punto en la misma dirección que la curva $y = f(x)$ (*véase* la Figura 4.56). Explotaremos este hecho utilizando la altura hasta la tangente para calcular valores aproximados de $f(x)$ para valores de x cercanos a a. La ecuación de la recta tangente es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

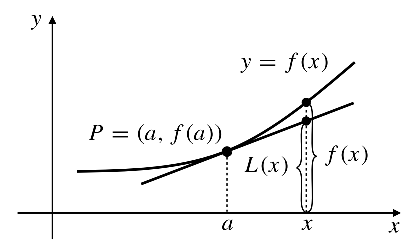


Figura 4.56 Linealización de la función f alrededor de a.

Denominaremos al miembro derecho de esta ecuación linealización de f alrededor de a (o linealización de $f(x)$ en $x = a$).

DEFINICIÓN 8

La **linealización** de la función f alrededor de a es la función L definida como

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Se dice que $f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ proporciona una **aproximación lineal** de los valores de f cerca de a.

Ejemplo 1 Calcule linealizaciones de (a) $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en $x = 0$ y (b) $g(t) = 1/t$ en $t = 1/2$.

Solución

(a) Tenemos que $f(0) = 1$ y, como $f'(x) = 1/(2\sqrt{1 + x})$, $f'(0) = 1/2$. La linealización de f cerca del 0 es

$$L(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}$$

(b) Tenemos que $g(1/2) = 2$ y, como $g'(t) = -1/t^2$, $g'(1/2) = -4$. La linealización de $g(t)$ en $t = 1/2$ es

$$L(t) = 2 - 4\left(t - \frac{1}{2}\right) = 4 - 4t$$

Aproximación de valores de funciones

Ya hemos utilizado la linealización en la Sección 2.7, donde se disfrazó como la fórmula

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\,\Delta x$$

y se empleó para aproximar un pequeño cambio $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ en los valores de la función f correspondiente a un pequeño cambio en el argumento de la función del valor a al valor $a + \Delta x$. Esto es exactamente la aproximación lineal

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

Ejemplo 2 Una bola de hielo se funde de forma que su radio disminuye de 5 cm a 4.92 cm. ¿Cuánto disminuye aproximadamente el volumen de la bola?

Solución El volumen V de una bola de radio r se expresa como $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, por lo que

$$\Delta V \approx \frac{4}{3}\,\pi(3r^2)\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$$

Para $r = 5$ y $\Delta r = -0.08$ tenemos que

$$\Delta V \approx 4\pi(5^2)(-0.08) = -8\pi \approx -25.13$$

El volumen de la bola disminuye aproximadamente 25 cm^3.

El siguiente ejemplo ilustra el uso de la linealización para obtener un valor aproximado de una función cerca de un punto cuando se conocen los valores de la función y de su derivada.

Ejemplo 3 Utilice la linealización de $\sqrt{x}$ en $x = 25$ para obtener un valor aproximado de $\sqrt{26}$.

Solución Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Como sabemos que $f(25) = 5$ y $f'(25) = 1/10$, la linealización de $f(x)$ en $x = 25$ es

$$L(x) = 5 + \frac{1}{10}\,(x - 25)$$

Haciendo $x = 26$ se obtiene

$$\sqrt{26} = f(26) \approx L(26) = 5 + \frac{1}{10}\,(26 - 25) = 5.1$$

Si se utiliza la función raíz cuadrada de una calculadora se puede obtener el «verdadero valor» de $\sqrt{26}$ (realmente, sólo otra aproximación, aunque presumiblemente mejor): $\sqrt{26} = 5.099\,019\,5...$, pero si tenemos una calculadora no se necesita la primera aproximación. Las aproximaciones son útiles cuando no es fácil obtener el valor verdadero. Sin embargo, si no conocemos el valor verdadero, al menos nos gustaría disponer de alguna forma de determinar la calidad de la aproximación, es decir, desearíamos conocer una *estimación del error*. Después de todo, *cualquier núme-*

ro es un aproximación de $\sqrt{26}$, pero el error puede ser inaceptablemente grande. Por ejemplo, el tamaño del error en la aproximación $\sqrt{26} \approx 1\,000\,000$ es mayor que 999 994.

Análisis del error

En cualquier aproximación, se define el **error** como

$$\text{error} = \text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}$$

Si la linealización de f alrededor de a se usa para aproximar $f(x)$ en $x = a$, es decir,

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

entonces el error $E(x)$ de esta aproximación es

$$E(x) = f(x) - L(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

Es la distancia vertical en x entre la gráfica de f y la tangente a esa gráfica en $x = a$, como se muestra en la Figura 4.57. Obsérvese que si x está «cerca de» a, entonces $E(x)$ será pequeño comparado con la distancia horizontal entre x y a.

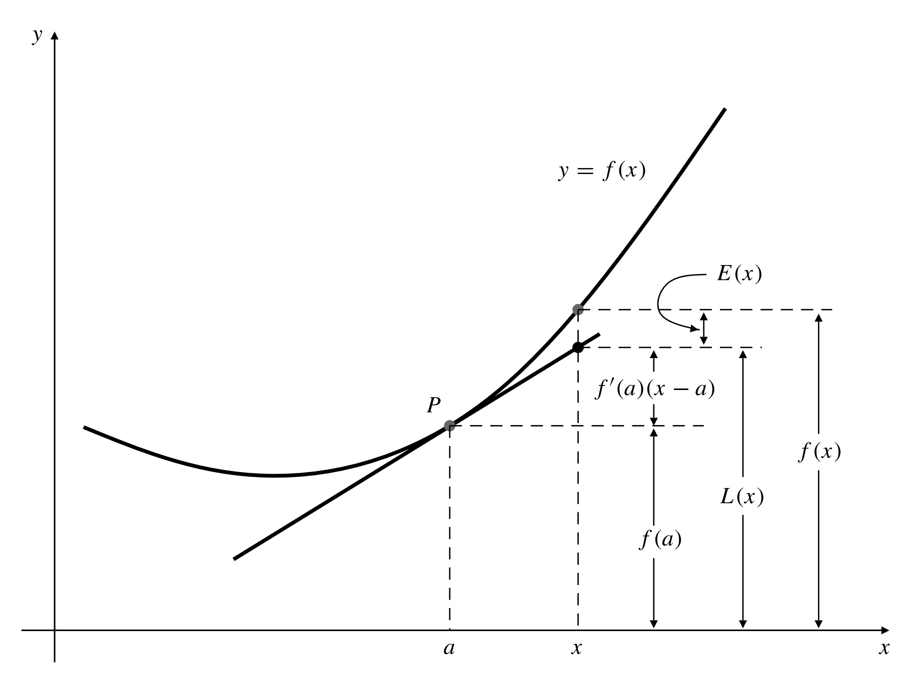


Figura 4.57 $f(x)$ y su linealización $L(x)$ en $x = a$. $E(x)$ es el error de la aproximación $f(x) \approx L(x)$.

El siguiente teorema y sus corolarios nos dan una forma de estimar este error si se conocen límites para la *segunda derivada* de f.

TEOREMA 9 **Una fórmula para el error de la linealización**

Si existe $f''(t)$ para todo t en un intervalo que contenga a a y a x, entonces existe algún punto s entre a y x tal que el error $E(x) = f(x) - L(x)$ en la aproximación lineal $f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ cumple

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x - a)^2$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $x > a$ (la demostración para $x < a$ es similar). Como

$$E(t) = f(t) - f(a) - f'(a)(t - a)$$

Tenemos que $E'(t) = f'(t) - f'(a)$. Aplicamos el Teorema del Valor Medio Generalizado (Teorema 16 de la Sección 2.6) a las dos funciones $E(t)$ y $(t - a)^2$ en $[a, x]$. Teniendo en cuenta que $E(a) = 0$, se obtiene un número u en (a, x) tal que

$$\frac{E(x)}{(x-a)^2} = \frac{E(x) - E(a)}{(x-a)^2 - (a-a)^2} = \frac{E'(u)}{2(u-a)} = \frac{f'(u) - f'(a)}{2(u-a)} = \frac{1}{2} f''(s)$$

para algún s en (a, u); la última expresión es una consecuencia de aplicar de nuevo el Teorema del Valor Medio, esta vez a f' en $[a, u]$. Entonces,

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-a)^2$$

como se quería demostrar.

Los tres corolarios siguientes son consecuencias inmediatas del Teorema 9.

Corolario A. Si $f''(t)$ tiene signo constante (es decir, es siempre positivo o siempre negativo) entre a y x, entonces el error $E(x)$ en la aproximación lineal $f(x) \approx L(x)$ en el Teorema tiene ese mismo signo; si $f''(t) > 0$ entre a y x, entonces $f(x) > L(x)$; si $f''(t) < 0$ entre a y x, entonces $f(x) < L(x)$.

Corolario B. Si $|f''(t)| < K$ para todo t entre a y x, entonces $|E(x)| < (K/2)(x - a)^2$.

Corolario C. Si $f''(t)$ cumple $M < f''(t) < N$ para todo t entre a y x (siendo M y N constantes), entonces

$$L(x) + \frac{M}{2}(x-a)^2 < f(x) < L(x) + \frac{N}{2}(x-a)^2$$

Si M y N tienen el mismo signo, una aproximación mejor a $f(x)$ es el punto medio de este intervalo que contiene a $f(x)$:

$$f(x) \approx L(x) + \frac{M+N}{4}(x-a)^2$$

Para esta aproximación el error es menor que la mitad de la longitud del intervalo:

$$|\text{Error}| < \frac{N-M}{4}(x-a)^2$$

Ejemplo 4 Determine el signo y estime el tamaño del error en la aproximación $\sqrt{26} \approx 5.1$ obtenida en el Ejemplo 3. Obtenga a continuación un intervalo en el que pueda asegurar que está $\sqrt{26}$.

Solución Para $f(t) = t^{1/2}$, tenemos que

$$f'(t) = \frac{1}{2} t^{-1/2} \quad \text{y} \quad f''(t) = -\frac{1}{4} t^{-3/2}$$

Para $25 < t < 26$, tenemos que $f''(t) < 0$, por lo que $\sqrt{26} = f(26) < L(26) = 5.1$. Además, $t^{3/2} > 25^{3/2} = 125$, por lo que $|f''(t)| < (1/4)(1/125) = 1/500)$ y

$$|E(26)| < \frac{1}{2} \times \frac{1}{500} \times (26-25)^2 = \frac{1}{1000} = 0.001$$

Por tanto, $f(26) > L(26) - 0.001 = 5.099$ y $\sqrt{26}$ está en el intervalo $(5.099, 5.1)$.

Observación Se puede utilizar el Corolario C del Teorema 9 y el hecho de que $\sqrt{26} < 5.1$ para calcular un intervalo mejor (es decir, más pequeño) que contenga a $\sqrt{26}$ de la siguiente forma. Si $25 < t < 26$, entonces $125 = 25^{3/2} < t^{3/2} < 26^{3/2} < 5.1^3$. Por tanto,

$$M = -\frac{1}{4 \times 125} < f''(t) < -\frac{1}{4 \times 5.1^3} = N$$

$$\sqrt{26} \approx L(26) + \frac{M+N}{4} = 5.1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4 \times 125} + \frac{1}{4 \times 5.1^3}\right) \approx 5.099\,028\,8$$

$$|\text{Error}| < \frac{N-M}{4} = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{5.1^3} + \frac{1}{125}\right) \approx 0.000\,028\,8$$

Entonces $\sqrt{26}$ está en el intervalo (5.099 00, 5.099 06).

Ejemplo 5 Utilice una linealización adecuada para obtener un valor aproximado de $\cos(36^{\text{o}}) = \cos(\pi/5)$. ¿Es el verdadero valor mayor o menor que la aproximación? Estime el tamaño del error y proporcione un intervalo en el que pueda asegurar que está $\cos(36^{\text{o}})$.

Solución Sea $f(t) = \cos t$, de forma que $f'(t) = -\operatorname{sen} t$ y $f''(t) = -\cos t$. El valor de a más próximo a 36^{o} para el que conocemos $\cos a$ es $a = 30^{\text{o}} = \pi/6$, por lo que utilizamos la linealización alrededor de ese punto:

$$L(x) = \cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Como $(\pi/5) - (\pi/6) = \pi/30$, nuestra aproximación es

$$\cos(36^{\text{o}}) = \cos\frac{\pi}{5} \approx L\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{30}\right) \approx 0.813\,67$$

Si $(\pi/6) < t < (\pi/5)$, entonces $f''(t) < 0$ y $|f''(t)| < \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Por tanto, $\cos(36^{\text{o}}) < 0.813\,67$ y

$$|E(36^{\text{o}})| < \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 < 0.004\,75$$

Por tanto, $0.813\,67 - 0.004\,75 < \cos(36^{\text{o}}) < 0.813\,67$, por lo que $\cos(36^{\text{o}})$ está en el intervalo (0.808 92, 0.813 67). ■

Observación El error en la linealización de $f(x)$ en $x = a$ se puede interpretar en términos de diferenciales (*véase* la Sección 2.2) de la siguiente forma. Si $\Delta x = dx = x - a$, entonces el cambio en $f(x)$ cuando pasamos de $x = a$ a $x = a + \Delta x$ es $f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta y$, y el correspondiente cambio en la linealización $L(x)$ es $f'(a)(x - a) = f'(a)\,dx$, que es justamente el valor de $x = a$ del diferencial $dy = f'(x)\,dx$. Por tanto,

$$E(x) = \Delta y - dy$$

El error $E(x)$ es pequeño comparado con Δx cuando Δx tiende a 0, como se puede ver en la Figura 4.57. De hecho,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0$$

Si $|f''(t)| \leqslant K$ (constante) cerca de $t = a$, se puede realizar una aseveración más fuerte:

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{(\Delta x)^2}\right| = \left|\frac{E(x)}{(\Delta x)^2}\right| \leqslant \frac{K}{2}, \quad \text{por tanto,} \quad |\Delta y - dy| \leqslant \frac{K}{2}(\Delta x)^2$$

Ejercicios 4.7

En los Ejercicios 1-10, calcule la linealización de las funciones dadas alrededor de los puntos dados.

1. x^2 alrededor de $x = 3$
2. x^{-3} alrededor de $x = 2$
3. $\sqrt{4-x}$ alrededor de $x = 0$
4. $\sqrt{3 + x^2}$ alrededor de $x = 1$
5. $1/(1 + x^2)$ alrededor de $x = 2$
6. $1/\sqrt{x}$ alrededor de $x = 4$
7. $\operatorname{sen} x$ alrededor de $x = \pi$
8. $\cos(2x)$ alrededor de $x = \pi/3$
9. $\operatorname{sen}^2 x$ alrededor de $x = \pi/6$
10. $\tan x$ alrededor de $x = \pi/4$
11. ¿Cuánto crece aproximadamente el área de un cuadrado si la longitud de su lado pasa de 10 cm a 10.4 cm?
12. ¿Cuánto hay que reducir aproximadamente la longitud del lado de un cubo que mide 20 cm para reducir el volumen de dicho cubo en 12 cm^3?
13. Una nave espacial orbita la tierra a una distancia de 4100 millas desde su centro. ¿Cuánto disminuirá la circunferencia de su órbita si su radio disminuye en 10 millas?
14. **(Aceleración de la gravedad)** La aceleración a de la gravedad a una altitud de h millas sobre la superficie de la tierra se puede expresar como
$$a = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$
siendo $g \approx 32$ pies/s^2 la aceleración en la superficie de la tierra y $R \approx 3960$ millas el radio de la tierra. ¿En qué porcentaje disminuirá a si h crece desde 0 hasta 10 millas?

En los Ejercicios 15-22, utilice una linealización adecuada para aproximar el valor indicado. Determine el signo del error y estime su tamaño. Utilice esta información para especificar un intervalo en el que se pueda asegurar que esté el valor.

15. $\sqrt{50}$
16. $\sqrt{47}$
17. $\sqrt[4]{85}$
18. $\dfrac{1}{2.003}$
19. $\cos 46^{\circ}$
20. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}$
21. $\operatorname{sen}(3.14)$
22. $\operatorname{sen} 33^{\circ}$

Utilice el Corolario C del Teorema 9 de la manera que sugiere la observación que sigue al Ejemplo 4 para obtener mejores intervalos y mejores aproximaciones a los valores de los Ejercicios 23-26.

23. $\sqrt{50}$ a partir de la primera aproximación del Ejercicio 15.
24. $\sqrt{47}$ a partir de la primera aproximación del Ejercicio 16.
25. $\cos 36^{\circ}$ a partir de la primera aproximación del Ejemplo 5.
26. $\operatorname{sen} 33^{\circ}$ a partir de la primera aproximación del Ejercicio 22.
27. Si $f(2) = 4$, $f'(2) = -1$ y $0 \leqslant f''(x) \leqslant 1/x$ para $x > 0$, calcule el mínimo intervalo en el que se pueda asegurar que está $f(3)$.
28. Si $f(2) = 4$, $f'(2) = -1$ y $\dfrac{1}{2x} \leqslant f''(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ para $2 \leqslant x \leqslant 3$, calcule la mejor aproximación posible para $f(3)$.
29. Si $g(2) = 1$, $g'(2) = 2$ y $|g''(x)| < 1 + (x-2)^2$ para todo $x > 0$, calcule la mejor aproximación posible para $g(1.8)$. ¿Cómo puede ser de grande el error?
30. Demuestre que la linealización de $\operatorname{sen}\theta$ en $\theta = 0$ es $L(\theta) = \theta$. ¿Cómo puede ser de grande el error porcentual en la aproximación $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ si $|\theta|$ es menor que 17°?
31. Un globo esférico se infla de forma que su radio crece desde 20 cm a 20.20 cm en un minuto. ¿Cuánto ha crecido aproximadamente su volumen en ese minuto?

4.8 Polinomios de Taylor

La linealización de la función $f(x)$ en $x = a$, es decir, la función lineal
$$P_1(x) = L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$
describe el comportamiento de f cerca de a mejor que cualquier otro polinomio de grado 1 porque tanto P_1 como f tienen el mismo valor y la misma derivada en a:
$$P_1(a) = f(a) \quad \text{y} \quad P_1'(a) = f'(a)$$

Se utiliza el símbolo P_1 en vez de L para subrayar el hecho de que la linealización es un polinomio de grado máximo 1.

Se pueden obtener mejores aproximaciones a $f(x)$ utilizando polinomios de segundo grado o de grado superior y ajustando más derivadas en $x = a$. Por ejemplo, si f es dos veces diferenciable cerca de a, entonces el polinomio

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

cumple $P_2(a) = f(a)$, $P_2'(a) = f'(a)$ y $P_2''(a) = f''(a)$ y describe el comportamiento de f alrededor de a mejor que cualquier otro polinomio de grado máximo 2.

En general, si $f^{(n)}(x)$ existe en un intervalo abierto que contiene a $x = a$, entonces el polinomio

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

se ajusta a f y a sus n primeras derivadas en $x = a$,

$$P_n(a) = f(a), \qquad P_n'(a) = f'(a), \quad ..., \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

y, por tanto, describe el comportamiento de $f(x)$ cerca de $x = a$ mejor que cualquier otro polinomio de grado máximo n. P_n se denomina **polinomio de Taylor de orden *n* para *f* alrededor de *a*** (los polinomios de Taylor alrededor de 0 se denominan generalmente polinomios de **Maclaurin**). El polinomio de Taylor de orden 0 para f alrededor de a es la función constante a $P_0(x) = f(a)$. El polinomio de Taylor de orden n para f alrededor de a se denomina a veces polinomio de Taylor de *grado n*, pero su grado será en realidad menor que n si $f^{(n)}(a) = 0$.

Ejemplo 1 Calcule los siguientes polinomios de Taylor:

(a) $P_2(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$ cerca de $x = 25$.

(b) $P_3(x)$ para $g(x) = \ln x$ cerca de $x = e$.

Solución (a) $f'(x) = (1/2)x^{-1/2}$, $f''(x) = -(1/4)x^{-3/2}$. Por tanto,

$$P_2(x) = f(25) + f'(25)(x - 25) + \frac{f''(25)}{2!}(x - 25)^2$$

$$= 5 + \frac{1}{10}(x - 25) - \frac{1}{1000}(x - 25)^2$$

(b) $g'(x) = \frac{1}{x}$, $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $g'''(x) = \frac{2}{x^3}$. Por tanto,

$$P_3(x) = g(e) + g'(e)(x - e) + \frac{g''(e)}{2!}(x - e)^2 + \frac{g'''(e)}{3!}(x - e)^3$$

$$= 1 + \frac{1}{e}(x - e) - \frac{1}{2e^2}(x - e)^2 + \frac{1}{3e^3}(x - e)^3$$

■

Ejemplo 2 Calcule el polinomio de Maclaurin de orden n $P_n(x)$ para e^x. Utilice $P_0(1)$, $P_1(1)$, $P_2(1)$, ... para calcular valores aproximados de $e = e^1$. Deténgase cuando piense que tiene tres cifras decimales correctas.

Solución Como todas las derivadas de e^x valen e^x, y por tanto valen uno en $x = 0$, el polinomio de Maclaurin de orden n para e^x (es decir, el polinomio de Taylor en $x = 0$) es

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Por tanto, tenemos para $x = 1$, añadiendo un término más en cada paso:

$$P_0(1) = 1$$

$$P_1(1) = 1 + \frac{1}{1!} = 2$$

$$P_2(1) = P_1(1) + \frac{1}{2!} = P_1(1) + \frac{1}{2} = 2.5$$

$$P_3(1) = P_2(1) + \frac{1}{3!} = P_2(1) + \frac{1}{6} = 2.6666$$

$$P_4(1) = P_3(1) + \frac{1}{4!} = P_3(1) + \frac{1}{24} = 2.7083$$

$$P_5(1) = P_4(1) + \frac{1}{5!} = P_4(1) + \frac{1}{120} = 2.7166$$

$$P_6(1) = P_5(1) + \frac{1}{6!} = P_5(1) + \frac{1}{720} = 2.7180$$

$$P_7(1) = P_6(1) + \frac{1}{7!} = P_6(1) + \frac{1}{5040} = 2.7182$$

Parece que $e \approx 2.718$ con una precisión de tres cifras decimales. En el Ejemplo 5 posterior verificaremos que de hecho $P_7(1)$ produce mucha mayor precisión. Las gráficas de e^x y de sus cuatro primeros polinomios de Maclaurin se muestran en la Figura 4.58.

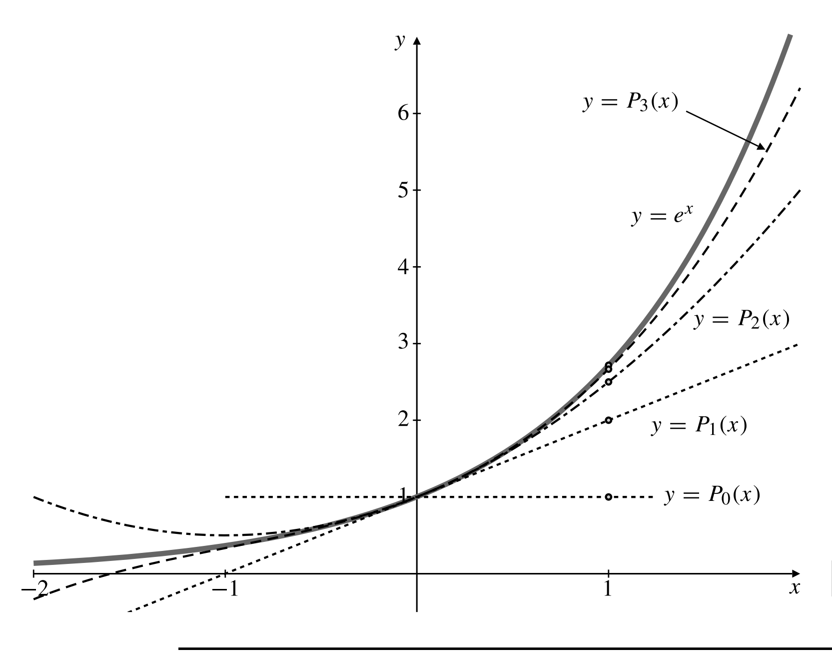


Figura 4.58 Algunos polinomios de Maclaurin para e^x.

Ejemplo 3 Calcule los polinomios de Maclaurin $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ y $P_4(x)$ para $f(x) = \operatorname{sen} x$. Escriba después los polinomios generales de Maclaurin $P_{2n-1}(x)$ y $P_{2n}(x)$ para esa función.

Solución Tenemos que $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$ y $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x = f(x)$, por lo que el patrón se repite para derivadas superiores. Como

$$f(0) = 0, \qquad f''(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = 0, \qquad f^{(6)} = 0$$
$$f'(0) = 1 \qquad f'''(0) = -1 \qquad f^{(4)}(0) = 1, \qquad f^{(7)} = -1$$

tenemos que

$$P_1(x) = 0 + x = x$$
$$P_2(x) = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 = x = P_1(x)$$
$$P_3(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3!}$$
$$P_4(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 = x - \frac{x^3}{3!} = P_3(x)$$

En general, $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$ y $f^{(2n)}(0) = 0$, por lo que

$$P_{2n-1}(x) = P_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Fórmula de Taylor

El siguiente teorema proporciona una fórmula para el error en una aproximación de Taylor $f(x) \approx P_n(x)$, similar a la proporcionada para la aproximación lineal en el Teorema 9.

TEOREMA 10 **Teorema de Taylor**

Si la derivada de orden $(n+1)$, $f^{(n+1)}(t)$, existe para todo t en un intervalo que contiene a a y a x, y si $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n para f alrededor de a, es decir,

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

entonces el error $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ en la aproximación $f(x) \approx P_n(x)$ se expresa como

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

siendo s un número entre a y x. La fórmula resultante

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{para algún } s \text{ entre } a \text{ y } x$$

se denomina **fórmula de Taylor con resto de Lagrange**. El término del resto de Lagrange es la fórmula explícita dada anteriormente para $E_n(x)$.

Nótese que el término de error (resto de Lagrange) en la fórmula de Taylor se parece al siguiente término del polinomio de Taylor si continuáramos dicho polinomio para incluir un término más (de grado $n + 1$) EXCEPTO porque la derivada $f^{(n+1)}$ no se evalúa en a, sino en algún punto c (en general desconocido) entre a y x. Esto facilita recordar la fórmula de Taylor.

DEMOSTRACIÓN Obsérvese que el caso $n = 0$ de la fórmula de Taylor, concretamente,

$$f(x) = P_0(x) + E_0(x) = f(a) + \frac{f'(s)}{1!}(x - a)$$

es justamente el Teorema del Valor Medio

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(s) \quad \text{para algún } s \text{ entre } a \text{ y } x$$

Nótese también que el caso $n = 1$ es justamente la fórmula del error para la linealización dada en el Teorema 9.

Completaremos la demostración para valores de n mayores utilizando inducción matemática (*véase* la demostración del Teorema 2 en la Sección 2.3). Supongamos entonces que ya hemos demostrado el caso $n = k - 1$, donde $k \geqslant 2$ es un entero. Esto es, estamos suponiendo que si f es una función cualquiera cuya k-ésima derivada existe en un intervalo que contiene a a y a x, entonces

$$E_{k-1}(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x - a)^k$$

siendo s algún número entre a y x. Consideremos el caso siguiente $n = k$. Como en la demostración del Teorema 9, suponemos que $x > a$ (el caso $x < a$ es similar) y aplicamos el Teorema del Valor Medio Generalizado a las funciones $E_k(t)$ y $(t - a)^{k+1}$ en $[a, x]$. Como $E_k(a) = 0$, obtenemos un número u en el intervalo (a, x) tal que

$$\frac{E_k(x)}{(x - a)^{k+1}} = \frac{E_k(k) - E_k(a)}{(x - a)^{k+1} - (a - a)^{k+1}} = \frac{E_k'(u)}{(k + 1)(u - a)^k}$$

Ahora

$$\begin{aligned} E_k'(u) &= \frac{d}{dt}\bigg(f(t) - f(a) - f'(a)(t - a) - \frac{f''(a)}{2!}(t - a)^2 \\ &\qquad - \cdots - \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t - a)^k \bigg)\bigg|_{t=u} \\ &= f'(u) - f'(a) - f''(a)(u - a) - \cdots - \frac{f^{(k)}(a)}{(k - 1)!}(u - a)^{k-1} \end{aligned}$$

Esta última expresión es justamente $E_{k-1}(u)$ para la función f' en vez de f. Por el supuesto de inducción es igual a

$$\frac{(f')^{(k)}(s)}{k!}(u - a)^k = \frac{f^{(k+1)}(s)}{k!}(u - a)^k$$

para algún valor s entre a y u. Por tanto,

$$E_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(s)}{(k + 1)!}(x - a)^{k+1}$$

Hemos demostrado que el caso $n = k$ del Teorema de Taylor es verdadero si el caso $n = k - 1$ es verdadero, lo que completa la demostración por inducción.

Observación Para cualquier valor de x para el que $\lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0$ podemos asegurar que la aproximación de Taylor $f(x) \approx P_n(x)$ estará tan cerca como deseemos escogiendo n suficientemente grande.

Ejemplo 4 Utilice el polinomio de Taylor de segundo orden para $\sqrt{x}$ alrededor de $x = 25$ obtenido en el Ejemplo 1(a) para aproximar $\sqrt{26}$. Estime el tamaño del error y especifique un intervalo en el que pueda asegurar que se encuentra $\sqrt{26}$.

Solución En el Ejemplo 1(a) calculamos $f''(x) = -(1/4)x^{-3/2}$ y obtuvimos el polinomio de Taylor

$$P_2(x) = 5 + \frac{1}{10}(x - 25) - \frac{1}{1000}(x - 25)^2$$

La aproximación requerida es

$$\sqrt{26} = f(26) \approx P_2(26) = 5 + \frac{1}{10}(26 - 25) - \frac{1}{1000}(26 - 25)^2 = 5.099$$

Ahora $f'''(x) = (3/8)x^{-5/2}$. Para $25 < s < 26$ tenemos que

$$|f'''(s)| \leqslant \frac{3}{8}\frac{1}{25^{5/2}} = \frac{3}{8 \times 3125} = \frac{3}{25\,000}$$

Por tanto, el error de la aproximación cumple

$$|E_2(26)| \leqslant \frac{3}{25\,000 \times 6}(26 - 25)^3 = \frac{1}{50\,000} = 0.00002$$

Entonces, $\sqrt{26}$ está en el intervalo (5.09898, 5.09902).

Ejemplo 5 Utilice el Teorema de Taylor para confirmar que el polinomio de Maclaurin $P_7(x)$ para e^x es suficiente para calcular el número e con una precisión de tres cifras decimales, como se indica en el Ejemplo 2.

Solución El error en la aproximación $e^x \approx P_n(x)$ cumple

$$E_n(x) = \frac{e^s}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \text{para algún } s \text{ entre } 0 \text{ y } x$$

Si $x = 1$, entonces $0 < s < 1$, por lo que $e^s < e < 3$ y $0 < E_n(1) < 3/(n + 1)!$. Para obtener una aproximación de $e = e^1$ con una exactitud de tres cifras decimales, es necesario que $E_n(1) < 0.0005$. Como $3/(8!) = 3/40\,320 \approx 0.000\,074$, pero $3/(7!) = 3/5040 \approx 0.000\,59$ podemos estar seguros de que $n = 7$ cumplirá, pero no podemos asegurar que lo cumplirá $n = 6$:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \approx 2.7183 \approx 2.718$$

con una exactitud de tres cifras decimales.

Notación O

DEFINICIÓN 9

Se escribe $f(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$ si

$$|f(x)| \leqslant K|u(x)|$$

se cumple para alguna constante K en algún intervalo abierto que contiene a $x = a$.

De forma similar, $f(x) = g(x) + O(u(x))$ cuando $x \to a$ si $f(x) - g(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$, es decir, si

$$|f(x) - g(x)| \leqslant K|u(x)| \quad \text{cerca de } a$$

Por ejemplo, $\operatorname{sen} x = O(x)$ cuando $x \to 0$ porque $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$ cerca de 0.

A partir de la definición se pueden deducir las siguientes propiedades de la notación O:

(i) Si $f(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$, entonces $Cf(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$ para cualquier constante C.
(ii) Si $f(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$ y $g(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$, entonces $f(x) \pm g(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$.
(iii) Si $f(x) = O((x-a)^k u(x))$ cuando $x \to a$, entonces $f(x)/(x-a)^k = O(u(x))$ cuando $x \to a$ para cualquier constante k.

El Teorema de Taylor dice que si $f^{(n+1)}(t)$ existe en un intervalo que contiene a a y a x, y si P_n es el polinomio de Taylor de orden n para f alrededor de a, entonces, cuando $x \to a$,

$$f(x) = P_n(x) + O((x-a)^{n+1})$$

Esto es una afirmación sobre la rapidez con que la gráfica del polinomio de Taylor $P_n(x)$ se acerca a la de $f(x)$ cuando $x \to a$. La distancia vertical entre las gráficas disminuye tan rápidamente como $|x-a|^{n+1}$. El siguiente teorema demuestra que el polinomio de Taylor $P_n(x)$ es el *único* polinomio de grado máximo n cuya gráfica se aproxima a la gráfica de $f(x)$ con esa rapidez.

TEOREMA 11 Si $f(x) = Q_n(x) + O((x-a)^{n+1})$ cuando $x \to a$, siendo Q_n un polinomio de grado máximo n, entonces $Q_n(x) = P_n(x)$, es decir, Q_n es el polinomio de Taylor para $f(x)$ en $x = a$.

DEMOSTRACIÓN Sea P_n el polinomio de Taylor. Entonces las propiedades (i) y (ii) de la notación O implican que $R_n(x) = Q_n(x) - P_n(x) = O((x-a)^{n+1})$ cuando $x \to a$. Queremos demostrar que $R_n(x)$ es idénticamente cero de forma que $Q_n(x) = P_n(x)$ para todo x. Sustituyendo x por $a + (x-a)$ y desarrollando las potencias, podemos escribir $R_n(x)$ en la forma

$$R_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

Si $R_n(x)$ no es idénticamente nulo, entonces existe un mínimo coeficiente $c_k (k \leqslant n)$ tal que $c_k \neq 0$, pero $c_j = 0$ para $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Por tanto,

$$R_n(x) = (x-a)^k (c_k + c_{k+1}(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^{n-k})$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to a} R_n(x)/(x-a)^k = c_k \neq 0$. Sin embargo, por la propiedad (iii) anterior tenemos que $R_n(x)/(x-a)^k = O((x-a)^{n+1-k})$. Como $n+1-k > 0$, esto indica que $R_n(x)/(x-a)^k \to 0$ cuando $x \to a$. Esta contradicción demuestra que $R_n(x)$ debe ser idénticamente nulo. Por tanto, $Q_n(x) = P_n(x)$ para todo x.

La Tabla 4 contiene las fórmulas de Taylor alrededor del 0 (fórmulas de Maclaurin) para algunas funciones elementales, con términos de error expresados utilizando la notación O.

Tabla 4. Algunas fórmulas de Maclaurin con términos de error expresados mediante la notación O

	Cuando $x \to 0$:
(a)	$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$
(b)	$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$
(c)	$\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$
(d)	$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + O(x^{n+1})$
(e)	$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$
(f)	$\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$

Es conveniente recordar las expresiones anteriores. Las tres primeras se pueden obtener fácilmente utilizando la fórmula de Taylor con el resto de Lagrange. Las otras tres requieren un esfuerzo mayor para verificarlas para un valor de n general. En la Sección 9.6 volveremos a los polinomios de Taylor y Maclaurin en el contexto de las series de Taylor y Maclaurin. En ese momento dispondremos de mejores medios para establecer esos resultados. La necesidad de calcular derivadas de orden superior puede hacer difícil el uso de la fórmula de Taylor, excepto para las funciones más simples.

La importancia real del Teorema 11 es que nos permite obtener polinomios de Taylor para nuevas funciones combinando otros ya conocidos. Mientras el término de error sea de mayor grado que el orden del polinomio obtenido, éste debe ser un polinomio de Taylor. Ilustraremos esto con algunos ejemplos.

Ejemplo 6 Calcule el polinomio de Maclaurin de orden $2n$ para $\cosh x$.

Solución Escribimos la fórmula de Taylor para e^x en $x = 0$ (*véase* en la Tabla 4) sustituyendo n por $2n+1$, y luego la volvemos a escribir sustituyendo x por $-x$. Obtenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2})$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2})$$

cuando $x \to 0$. Promediando los dos resultados anteriores se obtiene

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

cuando $x \to 0$. Por el Teorema 11 el polinomio de Maclaurin $P_{2n}(x)$ para $\cosh x$ es

$$P_{2n}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

■

Ejemplo 7 Obtenga el polinomio de Taylor de orden tres para e^{2x} en $x = 1$ a partir del correspondiente polinomio de Maclaurin para e^x (de la Tabla 4).

Solución Escribiendo $x = 1 + (x - 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} e^{2x} &= e^{2+2(x-1)} = e^2 e^{2(x-1)} \\ &= e^2\left[1 + 2(x-1) + \frac{2^2(x-1)^2}{2!} + \frac{2^3(x-1)^3}{3!} + O((x-1)^4)\right] \end{aligned}$$

cuando $x \to 1$. Por el Teorema 11, el polinomio de Taylor $P_3(x)$ para e^{2x} en $x = 1$ debe ser

$$P_3(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4e^2}{3}(x-1)^3$$

Ejemplo 8 Utilice la fórmula de Taylor para $\ln(1 + x)$ (de la Tabla 4) para calcular el polinomio de Taylor $P_3(x)$ para $\ln x$ en $x = e$ (esto proporciona una alternativa a utilizar la definición de polinomios de Taylor tal como se hizo para resolver el mismo problema en el Ejemplo 1(b)).

Solución Tenemos que $x = e + (x - e) = e(1 + t)$ siendo $t = (x - e)/e$. Como $x \to e$ tenemos que $t \to 0$, por lo que

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln e + \ln(1+t) = \ln e + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4) \\ &= 1 + \frac{x-e}{e} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-e}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-e}{e}\right)^3 + O((x-e)^4) \end{aligned}$$

Por tanto, por el Teorema 11,

$$P_3(x) = 1 + \frac{x-e}{e} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-e}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-e}{e}\right)^3$$

Ejercicios 4.8

Calcule los polinomios de Taylor que se indican para las funciones de los Ejercicios 1-8 utilizando la definición de polinomio de Taylor.

1. Para e^{-x} alrededor de $x = 0$, orden 4.

2. Para $\cos x$ alrededor de $x = \pi/4$, orden 3.

3. Para $\ln x$ alrededor de $x = 2$, orden 4.

4. Para $\sec x$ alrededor de $x = 0$, orden 3.

5. Para $\sqrt{x}$ alrededor de $x = 4$, orden 3.

6. Para $1/(1 - x)$ alrededor de $x = 0$, orden n.

7. Para $1/(2 + x)$ alrededor de $x = 1$, orden n.

8. Para $\operatorname{sen}(2x)$ alrededor $x = \pi/2$, orden $2n - 1$.

En los Ejercicios 9-14, utilice el polinomio de orden 2, $P_2(x)$, para las funciones dadas alrededor del punto especificado, para aproximar los valores indicados. Estime el error, y escriba el mínimo intervalo que se pueda asegurar que contiene el valor.

9. $f(x) = x^{1/3}$ alrededor de 8; aproxime $9^{1/3}$.

10. $f(x) = \sqrt{x}$ alrededor de 64; aproxime $\sqrt{61}$.

11. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alrededor de 1; aproxime $\dfrac{1}{1.02}$.

12. $f(x) = \tan^{-1} x$ alrededor de 1; aproxime $\tan^{-1}(0.97)$.

13. $f(x) = e^x$ alrededor de 0; aproxime $e^{-0.5}$.

14. $f(x) = \operatorname{sen} x$ alrededor $\pi/4$; aproxime $\operatorname{sen}(47^{\circ})$.

En los Ejercicios 15-20, escriba las fórmulas de Taylor para los casos indicados para las funciones dadas. ¿Cuál es el resto de Lagrange en cada caso?

15. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$, $n = 7$

16. $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $n = 6$

17. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/4$, $n = 4$

18. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $a = 0$, $n = 6$

19. $f(x) = \ln x$, $a = 1$, $n = 6$

20. $f(x) = \tan x$, $a = 0$, $n = 3$

Calcule los polinomios de Taylor que se piden en los Ejercicios 21-26, utilizando polinomios de Taylor o Maclaurin conocidos y cambiando las variables, como se hizo en los Ejemplos 6-8.

21. $P_3(x)$ para e^{3x} alrededor de $x = -1$.

22. $P_8(x)$ para e^{-x^2} alrededor de $x = 0$.

23. $P_4(x)$ para $\operatorname{sen}^2 x$ alrededor de $x = 0$. *Sugerencia*: $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

24. $P_5(x)$ para $\operatorname{sen} x$ alrededor de $x = \pi$.

25. $P_6(x)$ para $1/(1 + 2x^2)$ alrededor de $x = 0$.

26. $P_8(x)$ para $\cos(3x - \pi)$ alrededor de $x = 0$.

27. Calcule todos los polinomios de Maclaurin $P_n(x)$ para $f(x) = x^3$.

28. Calcule todos los polinomios de Taylor $P_n(x)$ para $f(x) = x^3$ en $x = 1$.

29. Calcule el polinomio de Maclaurin $P_{2n+1}(x)$ para $\operatorname{senh} x$ combinando adecuadamente en los polinomios para e^x y e^{-x}.

30. Combinando adecuadamente los polinomios de Maclaurin para $\ln(1 + x)$ y $\ln(1 - x)$, obtenga el polinomio de Maclaurin de orden $2n + 1$ para $\tanh^{-1}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$.

31. Escriba la fórmula de Taylor para $f(x) = e^{-x}$ con $a = 0$ y utilícela para calcular $1/e$ con una precisión de cinco cifras decimales (se puede utilizar una calculadora, pero no su función e^x).

32. Escriba la forma general de la fórmula de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$ con resto de Lagrange. ¿Qué valor necesita tener n para asegurar que la correspondiente aproximación del polinomio de Taylor proporcionará el seno de 1 radián con una precisión de cinco cifras decimales?

33. ¿Cuál es la mejor aproximación de orden 2 a la función $f(x) = (x - 1)^2$ en $x = 0$? ¿Cuál es el error de esta aproximación? Responda ahora las mismas preguntas para $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. ¿Puede ser mejorada (es decir, hacerse más pequeña) la constante $1/6 = 1/3!$ en la fórmula del error para la aproximación de grado 2?

34. Factorizando $1 - x^{n+1}$ (o mediante división de polinomios), demuestre que

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x} \qquad (*)$$

A continuación demuestre que si $|x| \leqslant K < 1$, entonces

$$\left|\frac{x^{n+1}}{1 - x}\right| \leqslant \frac{1}{1 - K} |x^{n+1}|$$

Esto implica que $x^{n+1}/(1 - x) = O(x^{n+1})$ cuando $x \to 0$ y confirma la fórmula (d) de la Tabla 4. ¿Qué dice entonces el Teorema 11 sobre el polinomio de Maclaurin de orden n para $1/(1 - x)$?

***35.** Diferenciando la identidad (*) del Ejercicio 34 y sustituyendo después n por $n + 1$, demuestre que

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n + 1)x^n + \frac{n + 2 - (n + 1)x}{(1 - x)^2} x^{n+1}$$

Utilice después el Teorema 11 para determinar el n-ésimo polinomio de Maclaurin para $1/(1 - x)^2$.

4.9 Formas indeterminadas

En la Sección 2.5 demostramos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Esto no se puede ver inmediatamente sustituyendo $x = 0$ en la función $(\operatorname{sen} x)/x$, ya que tanto $\operatorname{sen} x$ como x valen cero en $x = 0$. $(\operatorname{sen} x)/x$ se denomina **forma indeterminada** del tipo [0/0] en $x = 0$. El límite de esa forma indeterminada puede ser cualquier número. Por ejemplo, cada uno de los cocientes kx/x, x/x^3 y x^3/x^2 es una forma indeterminada del tipo [0/0] en $x = 0$, pero

$$\lim_{x \to 0} \frac{kx}{x} = k, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

Existen otros tipos de formas indeterminadas. Se muestran, junto con un ejemplo de cada tipo, en la Tabla 5.

Tabla 5. Tipos de formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)}$
$[0\cdot\infty]$	$\lim_{x\to 0+} x \ln \frac{1}{x}$
$[\infty - \infty]$	$\lim_{x\to(\pi/2)-} \left(\tan x - \frac{1}{\pi - 2x}\right)$
$[0^0]$	$\lim_{x\to 0+} x^x$
$[\infty^0]$	$\lim_{x\to(\pi/2)-} (\tan x)^{\cos x}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Las formas indeterminadas de tipo [0/0] son las más comunes. A menudo se pueden evaluar de forma bastante sencilla utilizando las fórmulas de Taylor conocidas.

Ejemplo 1 Evalúe $\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2}$.

Solución Tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \to 0$. Sustituyamos las funciones exponenciales y trigonométricas con sus polinomios de Maclaurin de grado tres más los correspondientes términos de error utilizando la notación O:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right) - \left(2x - \frac{2^3x^3}{3!} + O(x^5)\right)}{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)\right) - 2 - 2x - x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^3}{3} + O(x^5)}{\frac{x^3}{3} + O(x^4)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + O(x^2)}{\frac{1}{3} + O(x)} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3
\end{aligned}$$

Observe cómo se han utilizado las propiedades de la notación O presentadas en la sección anterior. Necesitamos que los polinomios de Maclaurin sean al menos de grado tres porque todos los términos de menor grado se cancelan en el numerador y en el denominador.

■

Ejemplo 2 Evalúe $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$.

Solución Este límite es también de la forma [0/0]. Comenzaremos por sustituir $x = 1 + t$. Nótese que $x \to 1$ es equivalente a $t \to 0$. Ahora podemos utilizar el polinomio de Maclaurin conocido para $\ln(1 + t)$. Para este límite servirá incluso el polinomio de grado uno $P_1(t) = t$ con error $O(t^2)$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1 + t)}{(1 + t)^2 - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1 + t)}{2t + t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t + O(t^2)}{2t + t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + O(t)}{2 + t} = \frac{1}{2}$$

Reglas de l'Hôpital

Muchas formas indeterminadas del tipo [0/0] se pueden resolver mediante métodos algebraicos simples, en general simplificando factores comunes. Se pueden encontrar ejemplos en las Secciones 1.2 y 1.3. En otros casos se puede utilizar el método de los polinomios de Taylor, si se conocen o se pueden calcular fácilmente los polinomios apropiados. Desarrollaremos a continuación un tercer método denominado **Regla de l'Hôpital**[1], que se utiliza para calcular límites de formas indeterminadas de los tipos $[\infty/\infty]$. Los otros tipos de formas indeterminadas se pueden reducir generalmente a una de estas dos mediante métodos algebraicos y tomando logaritmos.

TEOREMA 12 **Primera Regla de l'Hôpital**

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en el intervalo (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Supongamos además que

(i) $\displaystyle\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ y

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (con L finito o ∞ o $-\infty$).

Entonces,

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Se obtienen resultados similares si cada aparición de $\lim_{x\to a+}$ se sustituye por $\lim_{x\to b-}$ o incluso $\lim_{x\to c}$, siendo $a < c < b$. Los casos $a = -\infty$ y $b = \infty$ están también permitidos.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos el caso en el que interviene $\lim_{x\to a+}$ para a finito. Se define

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad a < x < b \\ 0 & \text{si} \quad x = a \end{cases} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad a < x < b \\ 0 & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

Entonces F y G son continuas en el intervalo $[a, x]$ y diferenciables el intervalo (a, x) para todo x perteneciente al intervalo (a, b). Por el Teorema del Valor Medio Generalizado (Teorema 16 de la Sección 2.6) debe existir un número c en el intervalo (a, x) tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

[1] El Marqués de l'Hôpital (1661-1704), de quien toman el nombre estas reglas, publicó el primer libro de texto de cálculo. El acento circunflejo (ˆ) no se empezó a utilizar en el idioma francés hasta después de la Revolución Francesa. El Marqués hubiera escrito su nombre como «l'Hospital».

Como $a < c < x$, si $x \to a+$, entonces necesariamente $c \to a+$, por lo que tenemos

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

El caso en el que interviene $\lim_{x\to b-}$ para b finito se demuestra de forma similar, y los casos en que $a = -\infty$ o $b = \infty$ se siguen de los casos que ya se han considerado realizando el cambio de variable $x = 1/t$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Ejemplo 3 Vuelva a calcular $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$. (*Véase* el Ejemplo 2).

Solución Tenemos que $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Nótese que al aplicar la Regla de l'Hôpital se calcula el cociente de las derivadas, *no* la derivada del cociente.

Este ejemplo ilustra cómo se realizan los cálculos basados en la Regla de l'Hôpital. Cuando se ha identificado que el límite es de la forma indeterminada [0/0], se sustituye por el límite del cociente de las derivadas. La existencia de este último límite justifica la igualdad. Es posible que el límite del cociente de las derivadas sea todavía indeterminado, en cuyo caso se puede aplicar una segunda vez la Regla de l'Hôpital. Se puede ir aplicando así repetidas veces hasta que finalmente se pueda obtener un límite, lo que justifica todas las aplicaciones anteriores de la regla.

Observación La solución anterior parece más fácil que la del Ejemplo 2, y podríamos estar tentados de pensar que las Reglas de l'Hôpital son más fáciles de utilizar que los polinomios de Taylor. En este caso resultó más fácil porque sólo tuvimos que aplicar la Regla de l'Hôpital una sola vez. Si intentamos rehacer el Ejemplo 1 utilizando la Regla de l'Hôpital, tendremos que utilizar dicha regla tres veces (lo que corresponde al hecho de que en el Ejemplo 1 se necesitan polinomios de tercer grado).

Ejemplo 4 Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2}$.

Solución Tenemos que (utilizando la Regla de l'Hôpital tres veces)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos(2x)}{2e^x - 2 - 2x} \qquad \text{simplificar los 2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(2x)}{e^x - 1 - x} \qquad \text{todavía} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(2x)}{e^x - 1} \qquad \text{todavía} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 4\cos(2x)}{e^x} = \frac{-1+4}{1} = 3$$

■

Ejemplo 5 Calcule (a) $\lim_{x\to(\pi/2)-} \frac{2x-\pi}{\cos^2 x}$ y (b) $\lim_{x\to 1+} \frac{x}{\ln x}$.

Solución

(a) $\lim_{x\to(\pi/2)-} \frac{2x-\pi}{\cos^2 x} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)-} \frac{2}{-2\operatorname{sen} x \cos x} = -\infty$$

(b) No se puede utilizar la Regla de l'Hôpital para calcular $\lim_{x\to 1+} x/(\ln x)$ porque no es una forma indeterminada. El denominador tiende 0 cuando $x \to 1+$, pero el numerador no tiende a 0. Como $\ln x > 0$ para $x > 1$, tenemos, directamente,

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x}{\ln x} = \infty$$

Si hubiéramos intentado utilizar la Regla de l'Hôpital habríamos llegado a la respuesta errónea $\lim_{x\to 1+} (1/(1/x)) = 1$.

■

Ejemplo 6 Calcule $\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

Solución La forma indeterminada en este caso es del tipo $[\infty - \infty]$, a la que no se puede aplicar la Regla de l'Hôpital. Sin embargo, se puede transformar en una forma indeterminada del tipo $[0/0]$ tras combinar las fracciones en una sola.

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) \qquad [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{-0}{2} = 0$$

■

Se puede obtener una versión de la Regla de l'Hôpital que sirve para formas indeterminadas del tipo $[\infty/\infty]$.

TEOREMA 13 **Segunda Regla de l'Hôpital**

Suponga que f y g son diferenciables en el intervalo (a, b) y que en dicho intervalo $g'(x) \neq 0$. Suponga también que

(i) $\lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$.

(ii) $\lim_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (siendo L finito, o ∞ o $-\infty$).

Entonces,

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

De nuevo, se obtienen resultados similares para $\lim_{x\to b-}$ y para $\lim_{x\to c}$, y los casos $a = -\infty$ y $b = \infty$ están permitidos.

La demostración de la segunda Regla de l'Hôpital es técnicamente mucho más difícil que la de la primera Regla, y no la presentaremos aquí. El Ejercicio 35 al final de esta sección da una idea de la demostración.

Observación *No* se debe intentar utilizar las Reglas de l'Hôpital para calcular límites que no sean formas indeterminadas del tipo [0/0] o [∞/∞]. Esos intentos casi siempre conducen a conclusiones falsas, como se observó en el Ejemplo 5(b) anterior (en sentido estricto, la segunda Regla de l'Hôpital se puede aplicar a la forma [a/∞], pero no tiene sentido hacerlo si a no es infinito, ya que en ese caso el límite es obviamente 0).

Observación No se puede extraer ninguna conclusión sobre $\lim f(x)/g(x)$ utilizando la Regla de l'Hôpital si $\lim f'(x)/g'(x)$ no existe. Deben utilizarse otras técnicas. Por ejemplo, $\lim_{x\to\infty} (\operatorname{sen} x)/x = 0$ por el Teorema del Sándwich, incluso aunque no exista $\lim_{x\to\infty} (\cos x)/1$.

Ejemplo 7 Calcule (a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ y (b) $\lim_{x\to 0+} x^a \ln x$, siendo $a > 0$.

Solución Ambos límites se contemplan en el Teorema 5 de la Sección 3.4. Lo resolveremos aquí mediante la Regla de l'Hôpital.

(a)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \qquad \text{todavía } \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

De forma similar, se puede demostrar que $\lim_{x\to\infty} x^n/e^x = 0$ para todo entero positivo n, aplicando repetidamente la Regla de l'Hôpital.

(b)
$$\lim_{x\to 0+} x^a \ln x \qquad (a > 0) \qquad [0\cdot(-\infty)]$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-a}} \qquad \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-ax^{-a-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^a}{-a} = 0$$

El modo más fácil de resolver formas indeterminadas de los tipos $[0^0]$, $[\infty^0]$ y $[1^\infty]$ es tomar logaritmos de las expresiones que aparecen. Los dos ejemplos siguientes ilustran la técnica.

Ejemplo 8 Calcule $\lim_{x\to 0+} x^x$.

Solución Esta forma indeterminada es del tipo $[0^0]$. Sea $y = x^x$. Entonces,

$$\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} x \ln x = 0$$

por el Ejemplo 7(b). Entonces $\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0+} y = e^0 = 1$.

Ejemplo 9 Calcule $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x}\right)^x$.

Solución En este caso la forma indeterminada es del tipo 1^∞. Sea $y = \left(1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x}\right)^x$. Entonces, tomando logaritmos en los dos miembros,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ln y &= \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x}\right) \qquad [\infty \cdot 0] \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x}}\left(\cos\frac{3}{x}\right)\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\cos\frac{3}{x}}{1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x}} = 3
\end{aligned}$$

Entonces $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \operatorname{sen}\frac{3}{x}\right)^x = e^3$.

Ejercicios 4.9

Calcule los límites de los Ejercicios 1-32.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{3x}{\tan 4x}$

2. $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2-4}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\tan^{-1} x}$

6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{1/3}-1}{x^{2/3}-1}$

7. $\lim_{x\to 0} x \cot x$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$

9. $\lim_{t\to\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t-\pi}$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{10x - e^x}{x}$

11. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos 3x}{\pi - 2x}$

12. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(ex)-1}{\operatorname{sen}\pi x}$

13. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

15. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \tan x}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{2 - x^2 - 2\cos x}{x^4}$

17. $\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan x - x}$

18. $\lim_{r\to\pi/2} \frac{\ln \operatorname{sen} r}{\cos r}$

19. $\lim_{t\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$

20. $\lim_{x\to 1-} \frac{\arccos x}{x-1}$

21. $\lim_{x\to\infty} x(2\tan^{-1} x - \pi)$

22. $\lim_{t\to(\pi/2)-} (\sec t - \tan t)$

23. $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{te^{at}}\right)$

24. $\lim_{x\to 0+} x^{\sqrt{x}}$

∗**25.** $\lim_{x\to 0+} (\csc x)^{\operatorname{sen}^2 x}$

∗**26.** $\lim_{x\to 1+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

∗**27.** $\lim_{t\to 0}\dfrac{3\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} 3t}{3\tan t-\tan 3t}$

∗**28.** $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$

∗**29.** $\lim_{t\to 0} (\cos 2t)^{1/t^2}$

∗**30.** $\lim_{x\to 0+}\dfrac{\csc x}{\ln x}$

∗**31.** $\lim_{x\to 1-}\dfrac{\ln \operatorname{sen} \pi x}{\csc \pi x}$

∗**32.** $\lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{1/x}$

33. **(Un cociente de Newton para la segunda derivada)** Calcule $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ si f es una función dos veces diferenciable.

34. Si f tiene tercera derivada continua, calcule

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-3f(x+h)+3f(x-h)-f(x-3h)}{h^3}$$

∗**35.** **(Demostración de la segunda Regla de l'Hôpital)** Complete los detalles del siguiente esquema de demostración de la segunda Regla de l'Hôpital (Teorema 13) para el caso en el que a y L sean los dos finitos. Sea $a<x<t<b$ y demuestre que existe un valor c en (x, t) tal que

$$\frac{f(x)-f(t)}{g(x)-g(t)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Trabaje ahora algebraicamente con la ecuación anterior para llegar a la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)}-L=\frac{f'(c)}{g'(c)}-L+\frac{1}{g(x)}\left(f(t)-g(t)\,\frac{f'(c)}{g'(c)}\right)$$

Se deduce entonces que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right| \leqslant \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-L\right|+\frac{1}{|g(x)|}\left(|f(t)|+|g(t)|\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|\right)$$

Demuestre que el miembro derecho de la inecuación anterior se puede hacer tan pequeño como se desee (por ejemplo, menor que cualquier número positivo ϵ) escogiendo primero t y después x suficientemente cercanos a a.
No hay que olvidar que $\lim_{c\to a+}(f'(c)/g'(c))=L$ y $\lim_{x\to a+}|g(x)|=\infty$.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes palabras, frases y afirmaciones?**
  - ◇ Punto crítico de f.
  - ◇ Punto singular de f.
  - ◇ Punto de inflexión de f.
  - ◇ f tiene un valor máximo absoluto M.
  - ◇ f tiene un valor mínimo local en $x=c$.
  - ◇ Asíntota vertical.
  - ◇ Asíntota horizontal.
  - ◇ Asíntota oblicua.
  - ◇ Linealización de $f(x)$ en $x=a$.
  - ◇ El polinomio de Taylor de grado n para $f(x)$ alrededor de $x=a$.
  - ◇ La fórmula de Taylor con resto de Lagrange.
  - ◇ $f(x)=O((x-a)^n)$ cuando $x\to a$.
  - ◇ Una raíz de $f(x)=0$.
  - ◇ Un punto fijo de $f(x)$.
  - ◇ Una forma indeterminada.
  - ◇ Reglas de l'Hôpital.
- **Explique cómo estimar el error de una aproximación lineal (recta tangente) al valor de una función.**
- **Explique cómo calcular una raíz de una ecuación $f(x)=0$ utilizando el Método de Newton. ¿Cuándo funciona bien este método?**

Ejercicios de repaso

1. Si el radio r de una bola crece con una velocidad del 2% por minuto, ¿con qué velocidad crece el volumen de dicha bola?

2. **(Atracción gravitatoria)** La atracción gravitatoria que ejerce la tierra sobre una masa m que está a una distancia r del centro de la tierra es una función continua de r para $r\geqslant 0$, dada por

$$F=\begin{cases}\dfrac{mgR^2}{r^2} & \text{si} \quad r\geqslant R\\ mkr & \text{si} \quad 0\leqslant r<R\end{cases}$$

siendo R el radio de la tierra, y g la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la tierra.

(a) Calcule la constante k en función de g y de R.

(b) F disminuye a medida que m se aleja de la superficie de la tierra, bien hacia arriba o bien hacia abajo. Demuestre que F disminuye cuando r crece desde R al doble de velocidad con la que disminuye F cuando r decrece desde R.

3. (Resistencias en paralelo) Dos resistencias variables R_1 y R_2 se conectan en paralelo de forma que su resistencia combinada R se expresa como

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

En un instante en el que $R_1 = 250$ ohmios y $R_2 = 1000$ ohmios, R_1 crece con una velocidad de 100 ohmios/min. ¿Con qué velocidad debe cambiar R_2 en ese instante (a) para mantener R constante y (b) para que R aumente con una velocidad de 10 ohmios/min?

4. (Ley de los gases) El volumen V (en m^3), la presión P (en kilopascales, kPa) y la temperatura T (en grados Kelvin, K) de una muestra de un cierto gas cumplen la ecuación $pV = 5.0T$.

(a) ¿Con qué rapidez se incrementa la presión si la temperatura es de 400 ^oK y se incrementa a razón de 4 ^oK/min cuando el gas se mantiene encerrado en un volumen de 2 m^3?

(b) ¿Con qué velocidad disminuye la presión si el volumen es de 2 m^3 y se incrementa a razón de 0.05 m^3/min si la temperatura se mantiene constante a 400 ^oK?

5. (Tamaño de una tirada de imprenta) A una editorial le cuesta 10 000 € la imprenta para una tirada de un libro, y los costes de material por cada libro impreso son de 8 €. Además, los costes de mantenimiento de máquinas, costes laborales y costes de almacenamiento añaden unos costes de 6.25 € $\times\ 10^{-7}x^2$ si la tirada es de x copias. ¿Cuántas copias debe imprimir la editorial para minimizar el coste medio por libro?

6. (Maximización del beneficio) Un mayorista de bicicletas debe pagar al fabricante 75 € por cada bicicleta. Las investigaciones de mercado indican al mayorista que si cobra a sus clientes x € por bicicleta, puede esperar vender $N(x) = 4.5 \times 10^6/x^2$ bicicletas. ¿Qué precio debería poner para maximizar su beneficio, y cuántas bicicletas debería pedir al fabricante?

7. Calcule el máximo volumen posible de un cono circular recto que se puede inscribir en una esfera de radio R.

8. (Minimización de costes de producción) El coste $C(x)$ € de producción en una factoría varía con la cantidad x de producto que se fabrica. El coste aumenta rápidamente con x cuando x es pequeño, y más lentamente para valores mayores de x debido a las economías de escala. Sin embargo, si x se hace demasiado grande, los recursos de la factoría pueden resultar gravados en exceso, y el coste puede empezar a aumentar rápidamente de nuevo. La Figura 4.59 muestra una gráfica típica de la función de coste $C(x)$.

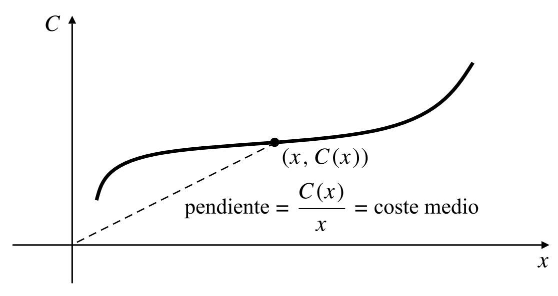


Figura 4.59

Si se fabrican x unidades, el coste medio por unidad es de $C(x)/x$ €, que es la pendiente de la recta del origen al punto $(x, C(x))$ en la gráfica.

(a) Si se desea escoger x para minimizar este coste medio por unidad (tal como sería el caso si todas las unidades producidas se pudieran vender por el mismo precio), demuestre que x debe ser tal que haga el coste medio igual al coste marginal:

$$\frac{C(x)}{x} = C'(x)$$

(b) Interprete geométricamente en la figura anterior la conclusión de (a).

(c) Si el coste medio es igual al coste marginal para algún valor de x, ¿minimiza necesariamente ese valor de x el coste medio?

9. (Diseño de una caja) Se cortan cuatro cuadrados de un rectángulo de cartón cuyas medidas son 50 cm × 80 cm, como se muestra en la Figura 4.60, y la pieza resultante se dobla en forma de una caja rectangular cerrada con dos solapas. ¿Cuál es el máximo volumen posible de dicha caja?

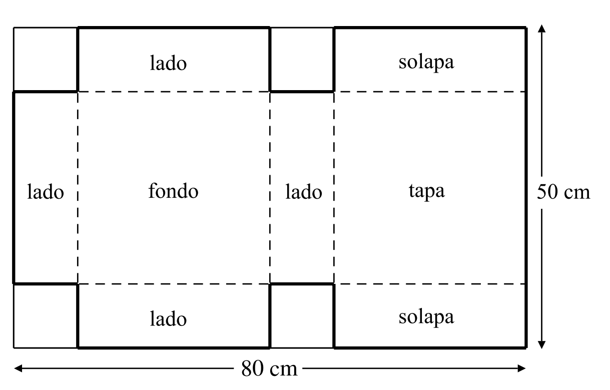
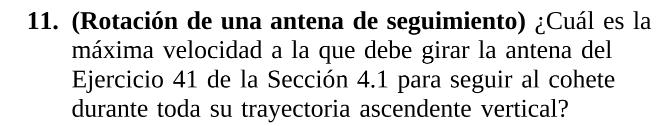


Figura 4.60

10. (Producción de un huerto) Cierto huerto tiene 60 árboles y produce un promedio de 800 manzanas por árbol y año. Si se aumenta la densidad de árboles, disminuye la cosecha por árbol. Por cada árbol adicional que se planta, la cosecha promedio por árbol se reduce en 10 manzanas al año. ¿Cuántos árboles más se deberían plantar para maximizar la cosecha total anual de manzanas del huerto?



11. (Rotación de una antena de seguimiento) ¿Cuál es la máxima velocidad a la que debe girar la antena del Ejercicio 41 de la Sección 4.1 para seguir al cohete durante toda su trayectoria ascendente vertical?

12. Una mesa ovalada tiene su borde exterior con la forma de la curva $x^2 + y^4 = 1/8$, donde x e y se miden en metros. ¿Cuál es la anchura del recibidor más estrecho en el que la mesa puede girar horizontalmente 180°?

13. Una bola hueca de hierro cuya pared mide 2 cm de espesor pesa la mitad de lo que pesaría si estuviera construida de hierro macizo. ¿Cuál es el radio de la bola?

14. (Alcance de un cañón disparado desde una colina) Una bala de cañón se lanza con una velocidad de 200 pies/s con un ángulo de 45° sobre la horizontal desde la cima de una colina, cuya altura a una distancia horizontal x de la cima es $y = 1000/(1 + (x/500)^2)$ pies sobre el nivel del mar. ¿Qué distancia horizontal puede cubrir la bala de cañón antes de llegar al suelo?

15. (Aproximación lineal de un péndulo) Como $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ para valores pequeños de $|\theta|$, la ecuación no lineal del movimiento de un péndulo simple

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta$$

que determina el ángulo de desplazamiento $\theta(t)$ respecto a la vertical en el instante t para un péndulo simple, se aproxima con frecuencia por la ecuación lineal más sencilla

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\,\theta$$

cuando el máximo desplazamiento del péndulo no es muy grande. ¿Cuánto vale el error porcentual del miembro derecho de la ecuación si $|\theta|$ no supera los 20°?

16. Calcule el polinomio de Taylor de grado 6 para $\operatorname{sen}^2 x$ en $x = 0$ y utilícelo como ayuda para evaluar

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen}^2 x - 3x^2 + x^4}{x^6}$$

17. Utilice un polinomio de Taylor de grado 2 para $\tan^{-1} x$ en $x = 1$, para calcular un valor aproximado de $\tan^{-1}(1.1)$. Estime el tamaño del error utilizando la fórmula de Taylor.

18. La recta $2y = 10x - 19$ es tangente a $y = f(x)$ en $x = 2$. Si se hace una aproximación inicial $x_0 = 2$ para una raíz de $f(x) = 0$ y se aplica una vez el Método de Newton, ¿cuál será la nueva aproximación que resulta?



19. Calcule todas las soluciones de la ecuación $\cos x = (x - 1)^2$ con una precisión de 10 cifras decimales.



20. Calcule la mínima distancia del punto (2, 0) a la curva $y = \ln x$.

21. Un coche viaja de noche por una carretera curva sin pendientes cuya ecuación es $y = e^x$. En un cierto instante sus faros iluminan una señal localizada en el punto (1, 1). ¿Dónde está el coche en ese instante?

Problemas avanzados

1. (Crecimiento de un cristal) Un único cristal cúbico de sal crece en un vaso de precipitados con una solución salina. El volumen del cristal V crece con una velocidad proporcional al área de superficie y al volumen que le resta para llegar a un volumen límite V_0:

$$\frac{dV}{dt} = kx^2(V_0 - V)$$

siendo x la longitud del lado del cristal en el instante t.

(a) Utilizando $V = x^3$, transforme la ecuación anterior en otra que exprese la velocidad de cambio dx/dt de la longitud del lado x en función de t.

(b) Demuestre que la velocidad de crecimiento de la longitud del lado del cristal disminuye con el tiempo, pero permanece positiva mientras $x < x_0 = V_0^{1/3}$.

(c) Calcule el volumen del cristal cuando la longitud de su lado crece a la mitad de la velocidad inicial.

∗**2. (Una revisión del cálculo)** Suponga que está en un tanque (la variedad militar) moviéndose por el eje y positivo hacia el origen. En el instante $t = 0$ está a 4 km del origen, y 10 minutos después está a 2 km del origen. Su velocidad está disminuyendo; es proporcional a su distancia al origen. Usted sabe que un tanque enemigo está esperando en algún lugar del eje x positivo, pero hay una pared alta que sigue la curva $xy = 1$ (todas las distancias se miden en kilómetros) que le impide ver realmente dónde está. ¿Con qué velocidad debe ser capaz de girar el cañón de su torreta para maximizar sus posibilidades de sobrevivir al enfrentamiento?

3. (Economía de los análisis de sangre) Suponga que se necesita realizar un análisis de sangre a un gran número N de personas para detectar la presencia de un

virus. Si cada análisis cuesta C €, entonces el coste total del programa de análisis será NC €. Si la proporción de gente en la población que tiene el virus no es grande, este coste se puede reducir mucho utilizando la siguiente estrategia. Se dividen las N muestras de sangre en N/x grupos de x muestras cada uno. Se junta toda la sangre de un grupo para realizar un solo análisis de ese grupo. Si el análisis es negativo, no es necesario realizar más análisis a los individuos de seguro. Si la muestra del grupo resulta positiva, se analizan todos los individuos del grupo.
Suponga que la fracción de individuos de la población infectada con el virus es p, de forma que la fracción de personas no infectadas es $q = 1 - p$. La probabilidad de que un individuo determinado no esté infectado es q, por lo que la probabilidad de que todos los x individuos de un grupo no estén infectados es q^x. Entonces, la probabilidad de que una muestra conjunta esté infectada es $1 - q^x$. Cada grupo requiere un análisis, y los grupos infectados requieren x análisis extras. En consecuencia, el número medio total de análisis a realizar es

$$T = \frac{N}{x} + \frac{N}{x}(1 - q^x)x = N\left(\frac{1}{x} + 1 - q^x\right)$$

Por ejemplo, si $p = 0.01$, de forma que $q = 0.99$ y $x = 20$, entonces el número medio de análisis requeridos es $T = 0.23N$, una reducción aproximada del 75%. Pero es posible que los resultados puedan ser mejores si tomamos un valor distinto de x.

(a) Para $q = 0.99$, calcule el número x de muestras en un grupo que minimiza T (es decir, resuelva $dT/dx = 0$). Demuestre que el valor de x que minimiza T cumple

$$x = \frac{(0.99)^{-x/2}}{\sqrt{-\ln(0.99)}}$$

(b) Utilice la técnica de iteración del punto fijo (*véase* la Sección 4.6) para calcular x en la ecuación de (a). Comience, por ejemplo, con $x = 20$.

4. (Medida de variaciones de g) El periodo P de un péndulo de longitud L se expresa como

$$P = 2\pi\sqrt{L/g}$$

siendo g la aceleración de la gravedad.

(a) Suponiendo que L permanece fijo, demuestre que un incremento de un 1% en g produce una disminución de aproximadamente un 0.5% en el periodo P (las variaciones del periodo de un péndulo se pueden utilizar para detectar pequeñas variaciones de g entre lugares diferentes de la superficie de la tierra).

(b) Para g fijo, ¿qué cambio porcentual en L producirá un 1% de incremento en P?

5. (Ley de Torricelli) La velocidad a la que se vacía un tanque es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad de líquido en el tanque por encima del nivel del desagüe. Si $V(t)$ es el volumen de líquido en el tanque en el instante t y $y(t)$ es la altura de la superficie del líquido por encima del desagüe, entonces $dV/dt = -k\sqrt{y}$, siendo k una constante que depende del tamaño del desagüe. Para un tanque cilíndrico con área de sección cruzada constante A y desagüe en el fondo:

(a) Verifique que la profundidad $y(t)$ de líquido en el tanque en el instante t cumple la ecuación $dy/dt = -(k/A)\sqrt{y}$.

(b) Verifique que si la profundidad de líquido en el tanque en $t = 0$ es y_0, entonces la profundidad instantes posteriores durante el proceso de vaciado es $y = \left(\sqrt{y_0} - \dfrac{kt}{2A}\right)^2$.

(c) Si el tanque se vacía completamente en un tiempo T, exprese la profundidad $y(t)$ en el instante t en función de y_0 y de T.

(d) En función de T, ¿cuánto tiempo tarda en vaciarse la mitad del líquido del tanque?

6. Si un tanque cónico de radio R en su parte superior y profundidad H se vacía de acuerdo con la Ley de Torricelli, y tarda en vaciarse un tiempo T, demuestre que la profundidad del líquido en el tanque en el instante t $(0 < t < T)$ es

$$y = y_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{2/5}$$

siendo y_0 la profundidad en $t = 0$.

7. Calcule la máxima área posible de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es P.

8. Calcule una tangente a la gráfica de $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ que no sea paralela a ninguna otra tangente.

9. (Ángulos de bifurcación de cables eléctricos y tuberías)

(a) La resistencia ofrecida por un cable al flujo de corriente eléctrica que circula a través suyo es proporcional a su longitud e inversamente proporcional al área de su sección cruzada. Por tanto, la resistencia R de un cable de longitud L y radio r es $R = kL/r^2$, siendo k una constante positiva.
Un cable largo recto de longitud L y radio r_1 se extiende desde A hasta B. Un segundo cable recto de radio menor r_2 se conecta entre un punto P en la recta AB y un punto C situado a una distancia h de B de forma que CB es perpendicular a AB (*véase* la Figura 4.61). Calcule el valor del ángulo

$\theta = \angle BPC$ que minimiza la resistencia total del camino APC, es decir, la resistencia de AP más la resistencia de PC.

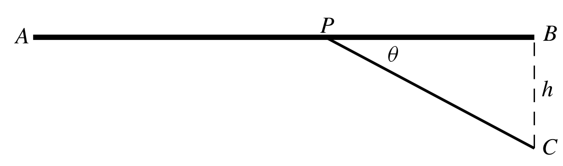


Figura 4.61

(b) La resistencia de una tubería (por ejemplo, un vaso sanguíneo) al flujo de un líquido a través de ella, por la Ley de Poiseuille, es proporcional a su longitud e inversamente proporcional a la *cuarta potencia* de su radio: $R = kL/r^4$. Si la situación del apartado (a) se representa con tuberías en vez de cables, obtenga el valor de θ que minimiza la resistencia total del camino APC. ¿Cómo se relaciona su respuesta con la respuesta del apartado (a)? ¿Se podría haber predicho esta relación?

10. **(Alcance de un chorro de líquido)** Un tanque de agua cilíndrico situado sobre una mesa horizontal tiene un pequeño agujero localizado en su pared vertical a una altura h del fondo del tanque. El agua se escapa del tanque horizontalmente por el agujero y después se curva hacia abajo debido a la influencia de la gravedad hasta llegar a la mesa a una distancia R de la base del tanque, como se muestra en la Figura 4.62 (se ignora la resistencia del aire). La Ley de Torricelli implica que la velocidad v a la que sale el agua del tanque por el agujero es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agujero respecto a la superficie del agua. Si la profundidad del agua en el tanque en el instante t es $y(t) > h$, entonces $v = k\sqrt{y - h}$, siendo k una constante que depende del tamaño del agujero.

(a) Calcule la distancia R en función de v y h.

(b) Para una profundidad dada y del agua en el tanque, ¿a qué altura habría que poner el agujero para maximizar R?

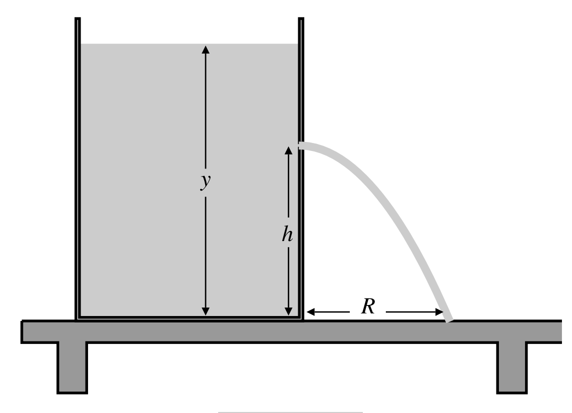


Figura 4.62

(c) Supóngase que la profundidad del agua en el tanque en el instante $t = 0$ es y_0, que el alcance R del chorro es R_0 en ese instante y que el nivel de agua desciende hasta la altura h del agujero en T minutos. Calcule, en función de t, el alcance R del agua que escapa por un agujero en el instante t.

$*$**11.** **(Diseño de un recogedor)** Se cortan cuadrados iguales de dos esquinas adyacentes de una plancha de metal cuadrada cuyo lado tiene una longitud de 25 cm. Las tres solapas resultantes se doblan, como se muestra en la Figura 4.63, para formar los lados de un recogedor. Calcule el máximo volumen de un recogedor construido de esta forma.

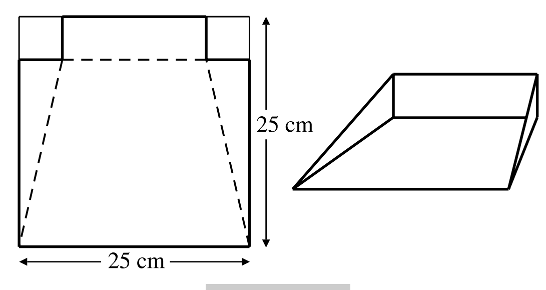


Figura 4.63

CAPÍTULO 5

Integración

> Hay en este mundo personas optimistas que piensan que cualquier símbolo que empiece con un signo de integral debe indicar necesariamente algo que tendrá todas las propiedades que debe tener una integral. Por supuesto esto resulta molesto para los matemáticos rigurosos. Pero lo que es incluso más molesto es que al hacerlo así a menudo se llega a la solución correcta.
>
> **E. J. McShane**
>
> de *Bulletin of the American Mathematical Society, v. 69, p. 611, 1963*

Introducción El segundo problema fundamental del que se ocupa el cálculo es el problema de las áreas, es decir, el problema de determinar el área de una región del plano limitada por varias curvas. Como el problema de las tangentes considerado en el Capítulo 2, muchos problemas prácticos en diversas disciplinas requieren el cálculo de áreas para obtener su solución, y la solución del problema de las áreas necesariamente requiere utilizar la noción de límite. A primera vista, el problema de las áreas parece no estar relacionado con el problema de las tangentes. Sin embargo, veremos que los dos problemas están muy estrechamente relacionados. Uno de ellos es el inverso del otro. Calcular un área equivale a obtener una primitiva o, si preferimos decirlo así, calcular una integral. La relación entre las áreas y las primitivas se denomina Teorema Fundamental del Cálculo. Cuando lo hayamos demostrado, podremos obtener las áreas que deseemos, suponiendo que podamos integrar (es decir, obtener primitivas) las diversas funciones que aparezcan.

Sería interesante tener a nuestra disposición un conjunto de reglas de integración similares a las reglas de diferenciación obtenidas en el Capítulo 2. Utilizando dichas reglas de diferenciación, es posible obtener la derivada de cualquier función diferenciable. Desafortunadamente, la integración es generalmente más difícil. De hecho, algunas funciones muy simples no son derivadas de funciones simples. Por ejemplo, e^{x^2} no es la derivada de ninguna combinación finita de funciones elementales. Sin embargo, emplearemos algún tiempo en la Sección 5.6 y en las Secciones 6.1-6.4 en desarrollar técnicas para integrar tantas funciones como sea posible. Posteriormente, en el Capítulo 6, examinaremos cómo aproximar áreas limitadas por gráficas de funciones que no se pueden integrar.

5.1 Sumas y notación sigma

Cuando empecemos a calcular áreas en la sección siguiente, aparecerán a menudo sumas de valores de funciones. Es necesario tener una notación conveniente para representar sumas de un número (posiblemente grande) arbitrario de términos, y también desarrollar técnicas para calcular el valor de dichas sumas.

Utilizaremos el símbolo $\sum$ para representar una suma. Se trata de la letra griega mayúscula *sigma*, equivalente a nuestra letra S, aumentada de tamaño.

DEFINICIÓN 1 Notación sigma

Si m y n son enteros con $m \leqslant n$, y si f es una función definida en los enteros m, $m+1$, $m+2$, ..., n, el símbolo $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ representa la suma de los valores de f en dichos enteros:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n)$$

La suma explícita que aparece en el miembro derecho de la ecuación es el **desarrollo** de la suma representada utilizando la notación sigma en el miembro izquierdo.

Ejemplo 1 $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$ ■

La i que aparece en el símbolo $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ se denomina **índice del sumatorio**. Para calcular $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ se va sustituyendo sucesivamente el índice i por los enteros m, $m+1$, ..., n, y se suman los resultados. Obsérvese que el valor de la suma no depende de la forma en que denominamos al índice. El índice no aparece en el miembro derecho de la definición. Si usáramos otra letra en lugar de i en la suma del Ejemplo 1, dicha suma tendría el mismo valor:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

El índice del sumatorio es una *variable auxiliar* que se utiliza para representar un punto arbitrario en el que se evalúa la función para obtener un término que se incluirá en la suma. Por otra parte, la suma $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ depende de los dos números m y n, denominados **límites del sumatorio**; m es el **límite inferior** y n es el **límite superior**.

Ejemplo 2 **(Ejemplos de sumas utilizando la notación sigma)**

$$\sum_{j=1}^{20} j = 1 + 2 + 3 + \cdots + 18 + 19 + 20$$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n$$

$$\sum_{m=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ términos}}$$

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

■

Algunas veces se utiliza una variable con subíndice a_i para indicar el i-ésimo término de una suma general, en vez de utilizar la notación funcional $f(i)$:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

En particular, una **serie infinita** es una suma con infinitos términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Cuando no se pone un término al final, detrás de ..., se sobreentiende que los términos continúan hasta el infinito. En el Capítulo 9 estudiaremos las series infinitas.

Cuando se suma un número finito de términos, el orden en el que se suman carece de importancia, ya que cualquier orden producirá el mismo resultado. Si todos los números tienen un factor común, entonces dicho factor se puede extraer de cada término y multiplicarlo después de calcular la suma: $ca + cb = c(a + b)$. Estas leyes de la aritmética se convierten en la siguiente regla de *linealidad* para sumas finitas. Si A y B son constantes, entonces

$$\sum_{i=m}^{n} (Af(i) + Bg(i)) = A \sum_{i=m}^{n} f(i) + B \sum_{i=m}^{n} g(i)$$

Las dos sumas $\sum_{j=m}^{m+n} f(j)$ y $\sum_{i=0}^{n} f(i+m)$ tienen el mismo desarrollo, es decir, $f(m) + f(m+1) + \cdots + f(m+n)$. Por tanto, las dos sumas valen lo mismo.

$$\sum_{j=m}^{m+n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} f(i+m)$$

Esta igualdad se puede obtener también sustituyendo j por $i + m$ allí donde j aparezca en el miembro izquierdo, teniendo en cuenta que $i + m = m$ se convierte en $i = 0$ y que $i + m = m + n$ se convierte en $i = n$. Muchas veces es conveniente realizar **cambios de índice** en un sumatorio.

Ejemplo 3 Exprese $\sum_{j=3}^{17} \sqrt{1 + j^2}$ de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(i)$.

Solución Sea $j = i + 2$. Entonces $j = 3$ corresponde a $i = 1$ y $j = 17$ corresponde a $i = 15$. Por tanto,

$$\sum_{j=3}^{17} \sqrt{1 + j^2} = \sum_{i=1}^{15} \sqrt{1 + (i+2)^2}$$

Cálculo de sumas

Existe una **forma cerrada** para expresar la suma S de los n primeros enteros positivos, concretamente,

$$S = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Para ver esto, escribamos la suma hacia adelante y hacia atrás y sumemos las dos, con lo que se obtiene

$$\begin{array}{lcccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \cdots + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) & + & (n+1) & = n(n+1) \end{array}$$

La fórmula de S se obtiene entonces sin más que dividir por 2.

En general, no es tan fácil obtener una forma cerrada para cualquier suma. Sólo se puede simplificar $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ para un pequeño conjunto de funciones f. El Teorema 1 recoge las fórmulas que necesitaremos en las secciones siguientes.

TEOREMA 1 **Fórmulas para sumas**

(a) $$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ términos}} = n$$

(b) $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(c) $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(d) $$\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{si } r \neq 1$$

DEMOSTRACIÓN La fórmula (a) es trivial: la suma de n unos vale n. La demostración de la fórmula (b) se ha presentado anteriormente. Otras tres formas se sugieren en los Ejercicios 34-36.

Para demostrar (c), escribiremos n copias de la igualdad

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

una para cada valor de k desde 1 hasta n, y las sumaremos:

$$\begin{array}{rcrcccccc}
2^3 & - & 1^3 & = & 3 \times 1^2 & + & 3 \times 1 & + & 1 \\
3^3 & - & 2^3 & = & 3 \times 2^2 & + & 3 \times 2 & + & 1 \\
4^3 & - & 3^3 & = & 3 \times 3^2 & + & 3 \times 3 & + & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
n^3 & - & (n-1)^3 & = & 3(n-1)^2 & + & 3(n-1) & + & 1 \\
(n+1)^3 & - & n^3 & = & 3n^2 & + & 3n & + & 1 \\
\hline
(n+1)^3 & - & 1^3 & = & 3\,(\Sigma_{i=1}^{n} i^2) & + & 3\,(\Sigma_{i=1}^{n} i) & + & n \\
 & & & = & 3\,(\Sigma_{i=1}^{n} i^2) & + & \dfrac{3n(n+1)}{2} & + & n
\end{array}$$

En la última línea se ha utilizado la fórmula (b). En la ecuación final se puede despejar la suma deseada para obtener la fórmula (c). Nótense las cancelaciones que se producen cuando se suman los miembros izquierdos de las n ecuaciones. El término 2^3 de la primera línea se cancela con el término -2^3 de la segunda línea, y así sucesivamente, dejándonos sólo con dos términos, el término $(n+1)^3$ de la n-ésima línea y el término -1^3 de la primera línea:

$$\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1^3$$

Esto es un ejemplo de lo que se denomina **suma telescópica**. En general, una suma de la forma $\sum_{i=m}^{n} (f(i+1) - f(i))$ se reduce en forma telescópica a la forma cerrada $f(n+1) - f(m)$, ya que se cancelan todos los términos excepto el primero y el último.

Para demostrar la fórmula (d), sea $s = \sum_{i=1}^{n} r^{i-1}$ y restemos s de rs:

$$(r-1)s = rs - s = (r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n) - (1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})$$
$$= r^n - 1$$

El resultado se deduce dividiendo por $r - 1$.

Ejemplo 4 Calcule $\sum_{k=m+1}^{n} (6k^2 - 4k + 3)$, siendo $1 \leqslant m < n$.

Solución Utilizando las reglas de las sumas y algunas de las fórmulas del Teorema 1, se calcula

$$\sum_{k=1}^{n} (6k^2 - 4k + 3) = 6 \sum_{k=1}^{n} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{n} k + 3 \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= 6\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\,\frac{n(n+1)}{2} + 3n$$
$$= 2n^3 + n^2 + 2n$$

Por tanto,

$$\sum_{k=m+1}^{n} (6k^2 - 4k + 3) = \sum_{k=1}^{n} (6k^2 - 4k + 3) - \sum_{k=1}^{m} (6k^2 - 4k + 3)$$
$$= 2n^3 + n^2 + 2n - 2m^3 - m^2 - 2m$$

Observación Maple puede calcular las expresiones en forma cerrada de algunas sumas. Por ejemplo,

```
> sum(i^4, i=1..n) ; factor (%) ;
```

$$\frac{1}{5}(n+1)^5 - \frac{1}{2}(n+1)^4 + \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{30}n - \frac{1}{30}$$
$$\frac{1}{30}n(2n+1)(n+1)(3n^2+3n-1)$$

Ejercicios 5.1

Desarrolle las sumas de los Ejercicios 1-6.

1. $\sum_{i=1}^{4} i^3$

2. $\sum_{j=1}^{100} \frac{j}{j+1}$

3. $\sum_{i=1}^{n} 3^i$

4. $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{1+1}$

5. $\sum_{j=3}^{n} \frac{(-2)^j}{(j-2)^2}$

6. $\sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n^3}$

Escriba las sumas de los Ejercicios 7-14 utilizando una notación sigma (nótese que las respuestas no son únicas).

7. $5 + 6 + 7 + 8 + 9$

8. $2 + 2 + 2 + \cdots + 2$ (200 términos)

9. $2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \cdots - 99^2$

10. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + 100x^{99}$

11. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

12. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2n}$

13. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

14. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{n}{2^n}$

Exprese las sumas de los Ejercicios 15 y 16 de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(i)$.

15. $\sum_{j=0}^{99} \operatorname{sen}(j)$

16. $\sum_{k=-5}^{m} \frac{1}{k^2+1}$

Calcule los valores en forma cerrada de las sumas de los Ejercicios 17-30.

17. $\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2i$ **18.** $\sum_{j=1}^{1000} (2j + 3)$

19. $\sum_{k=1}^{n} (\pi^k - 3)$ **20.** $\sum_{i=1}^{n} (2^i - i^2)$

21. $\sum_{m=1}^{n} \ln m$ **22.** $\sum_{i=0}^{n} e^{i/n}$

23. La suma del Ejercicio 8.

24. La suma del Ejercicio 11.

25. La suma del Ejercicio 12.

***26.** La suma del Ejercicio 10. *Sugerencia*: Diferencie la suma $\sum_{i=0}^{100} x^i$.

***27.** La suma del Ejercicio 9. *Sugerencia*: La suma es

$$\sum_{k=1}^{49} ((2k)^2 - (2k+1)^2) = \sum_{k=1}^{49} (-4k - 1)$$

***28.** La suma del Ejercicio 14. *Sugerencia*: Para esta suma, aplique el método de demostración del Teorema 1(d).

29. Verifique la fórmula del valor de una suma telescópica:

$$\sum_{i=m}^{n} (f(i+1) - f(i)) = f(n+1) - f(m)$$

¿Por qué se utiliza la palabra «telescópica» para describir esta suma?

En los Ejercicios 30-32, evalúe las sumas telescópicas dadas.

30. $\sum_{n=1}^{10} (n^4 - (n-1)^4)$ **31.** $\sum_{j=1}^{m} (2^j - 2^{j-1})$

32. $\sum_{i=m}^{2m} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

33. Demuestre que $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$, y a partir de ahí, evalúe $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}$.

34. La Figura 5.1 muestra un cuadrado de lado n subdividido en n^2 cuadrados más pequeños de lado 1. ¿Cuántos cuadrados pequeños están sombreados? Obtenga la expresión en forma cerrada de $\sum_{i=1}^{n} i$ considerando la suma de las áreas de los cuadrados sombreados.

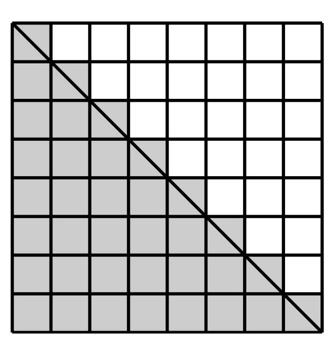


Figura 5.1

35. Escriba n copias de la igualdad $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$, una para cada entero k desde 1 hasta n, y súmelas después para obtener la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

de una forma similar a la demostración del Teorema 1(c).

36. Utilice inducción matemática para demostrar el Teorema 1(b).

37. Utilice inducción matemática para demostrar el Teorema 1(c).

38. Utilice inducción matemática para demostrar el Teorema 1(d).

39. La Figura 5.2 muestra un cuadrado de lado $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$, subdividido en un cuadrado pequeño de lado 1 y $n - 1$ regiones con forma de L, cuyos lados cortos son 2, 3, ..., n. Demuestre que el área de la región con forma de L cuyo lado corto vale i es i^3, y a partir de aquí verifique que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

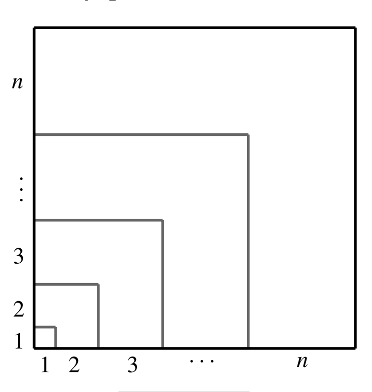


Figura 5.2

***40.** Escriba n copias de la igualdad

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

una para cada entero k desde 1 hasta n, y súmelas después para obtener la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

de una forma similar a la demostración del Teorema 1(c).

41. Utilice inducción matemática para verificar la fórmula de la suma de cubos dada en el Ejercicio 40.

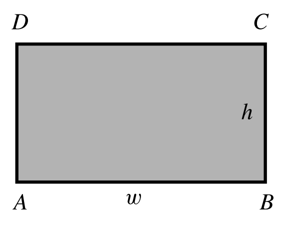
42. Extienda el método del Ejercicio 40 para obtener una expresión en forma cerrada de $\sum_{i=1}^{n} i^4$. Puede utilizar Maple u otro sistema de matemáticas por computador para facilitar los desarrollos algebraicos.

43. Utilice Maple u otro sistema de matemáticas por computador para calcular $\sum_{i=1}^{n} i^k$ para $k = 5, 6, 7, 8$. Observe el término con la mayor potencia de n en cada caso. Prediga el término de mayor potencia de y $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$ y verifique su predicción.

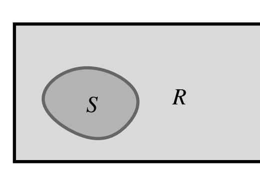
5.2 Áreas como límites de sumas

En el Capítulo 2 comenzamos el estudio de las derivadas definiendo lo que se entiende por tangente a una curva en un punto dado. Es interesante empezar el estudio de las integrales definiendo lo que se entiende por **área** de una región plana, pero esa definición de área es mucho más difícil de dar que la definición de tangente. Supongamos (como hicimos, por ejemplo, en la Sección 3.3) que conocemos intuitivamente lo que es el área e indiquemos algunas de sus propiedades (*véase* la Figura 5.3).

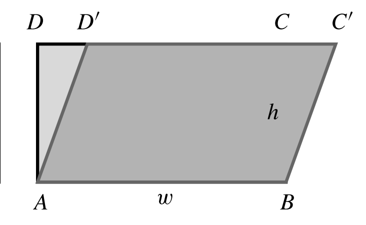
(i) El área de una región plana es un número real no negativo que se mide en unidades al cuadrado.
(ii) El área de un rectángulo con anchura w y altura h es $A = wh$.
(iii) Las áreas de regiones planas congruentes son iguales.
(iv) Si una región S está incluida en una región R, entonces el área de S será menor o igual que el área de R.
(v) Si una región R es la unión de (un número finito de) regiones que no se solapan, entonces el área de R es la suma de las áreas de esas regiones.



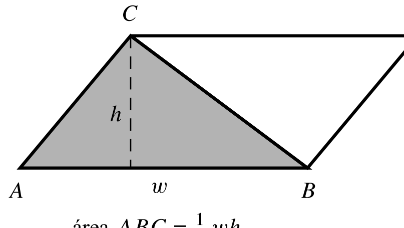

área $ABCD = wh$



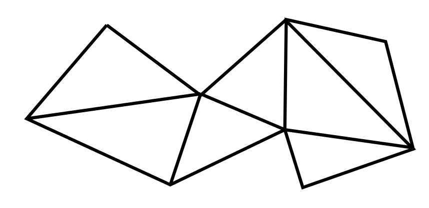
área $S <$ área R



área $ABC'D' = wh$



área $ABC = \frac{1}{2}\, wh$



área del polígono = suma de áreas de triángulos

Figura 5.3 Propiedades del área.

Utilizando estas cinco propiedades, se puede calcular el área de cualquier **polígono** (una región delimitada por segmentos rectos). Primero, téngase en cuenta que las propiedades (iii) y (v) permiten demostrar que el área de un paralelogramo es la misma que la de un rectángulo con su misma anchura de la base y altura. Todo triángulo se puede acoplar con una copia congruente de sí mismo para formar un paralelogramo, por lo que el área del triángulo será la mitad del producto de la anchura de la base por la altura. Finalmente, todo polígono se puede subdividir en un número finito de triángulos que no solapan, por lo que su área será la suma de las áreas de dichos triángulos.

No podemos ir más allá de los polígonos si no tomamos límites. Si una región está limitada por una curva, su área sólo se podrá aproximar utilizando rectángulos o triángulos; el cálculo de su área exacta requiere la evaluación de un límite. En la Sección 1.1 vimos cómo se puede hacer esto en el caso de un círculo.

El problema básico del área

En esta sección vamos a considerar la forma de calcular el área de una región R que está por debajo de la gráfica de $y = f(x)$, una función f continua con valores no negativos, por encima del eje x y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, con $a < b$ (*véase* la Figura 5.4). Para ello, procederemos como sigue. Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos utilizando los puntos de división:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

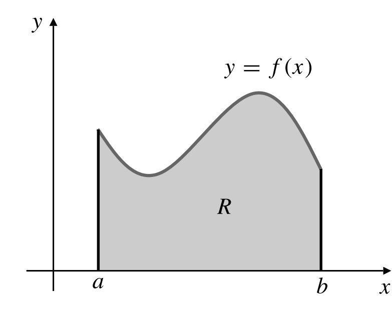


Figura 5.4 El problema básico del área: calcular el área de la región R.

Denominamos Δx_i a la longitud del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n)$$

Construiremos un rectángulo vertical sobre cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ cuya base será de longitud Δx_i y cuya altura será $f(x_i)$. El área de este rectángulo es $f(x_i)\Delta x_i$. Formamos la suma de estas áreas:

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

En la Figura 5.5 se muestran estos rectángulos sombreados para una función decreciente f. En el caso de una función creciente, las partes superiores de los rectángulos estarían por encima de la gráfica de f en vez de por debajo. Evidentemente, S_n es una aproximación al área de la región R, y dicha aproximación mejora cuando n crece, suponiendo que los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ se escogen de forma que la anchura Δx_i del rectángulo más ancho tiende a cero.

Por ejemplo, obsérvese en la Figura 5.6 que subdividir un intervalo en dos pequeños subintervalos disminuye el error de aproximación, al reducirse la parte del área bajo la curva que no está contenida en los rectángulos. Por lo tanto, es razonable calcular el área de R calculando el límite de S_n cuando $n \to \infty$, con la restricción de que la máxima anchura de los subintervalos Δx_i debe tender a cero:

$$\text{Área de } R = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \text{máx}\, \Delta x_i \to 0}} S_n$$

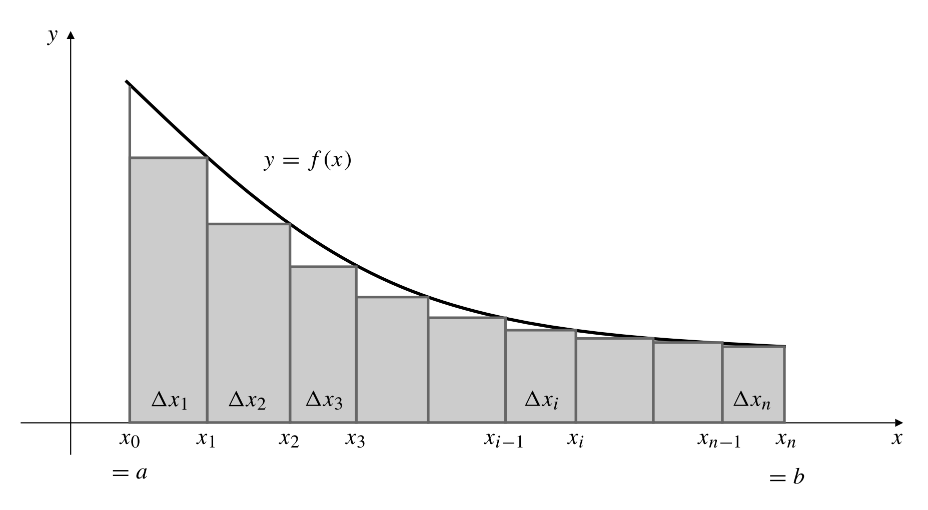


Figura 5.5 Aproximación del área bajo la gráfica de una función decreciente utilizando rectángulos.

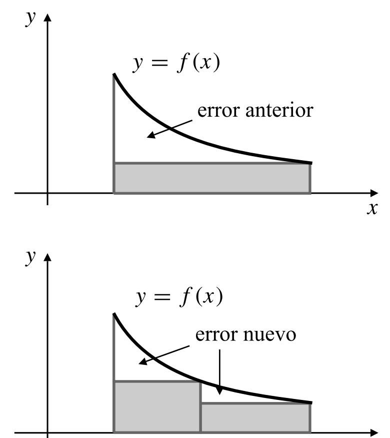


Figura 5.6 Al utilizar más rectángulos disminuye el error.

Algunas veces, pero no siempre, es útil escoger los puntos $x_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ en $[a, b]$ de forma que las longitudes de los subintervalos sean todas iguales. En ese caso tenemos

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i}{n}(b-a)$$

Cálculo de algunas áreas

Vamos a dedicar el resto de esta sección a presentar algunos ejemplos en los que aplicaremos la técnica que acabamos de explicar para calcular áreas por debajo de gráficas de funciones, aproximándolas con rectángulos. Empezaremos con una región de área conocida, por lo que podemos comprobar que el método proporciona el resultado correcto.

Ejemplo 1 Calcule el área A de la región que queda por debajo de la recta $y = x + 1$, por encima del eje x y entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución Se trata de la región sombreada en la Figura 5.7(a). Es un *trapezoide* (un polígono de cuatro lados con una pareja de lados paralelos) y su área es de 4 unidades al cuadrado (se puede dividir en un rectángulo y un triángulo, cada uno de ellos con área de 2 unidades al cuadrado). Calcularemos el área como un límite de sumas de áreas de rectángulos construidos como se ha descrito anteriormente. Dividamos el intervalo [0, 2] en n subintervalos *de la misma longitud* en los puntos

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{2}{n},\ x_2 = \frac{4}{n},\ x_3 = \frac{6}{n},\ \ldots,\ x_n = \frac{2n}{n} = 2$$

El valor de $y = x + 1$ cuando $x = x_i$ es $x_i + 1 = \frac{2i}{n} + 1$ y el i-ésimo subintervalo, $\left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right]$, es de longitud $\Delta x_i = \frac{2}{n}$. Obsérvese que $\Delta x_i \to 0$ cuando $n \to \infty$. La suma de las áreas de los rectángulos de aproximación que se muestran en la Figura 5.7(a) es

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n} + 1\right)\frac{2}{n} \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right] \qquad \text{(Uso de las partes (a) y (b) del Teorema 1)} \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)\left[\frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2} + n\right] \\ &= 2\,\frac{n+1}{n} + 2 \end{aligned}$$

Por tanto, el área pedida A se expresa como

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2\,\frac{n+1}{n} + 2\right) = 2 + 2 = 4 \text{ unidades al cuadrado.}$$

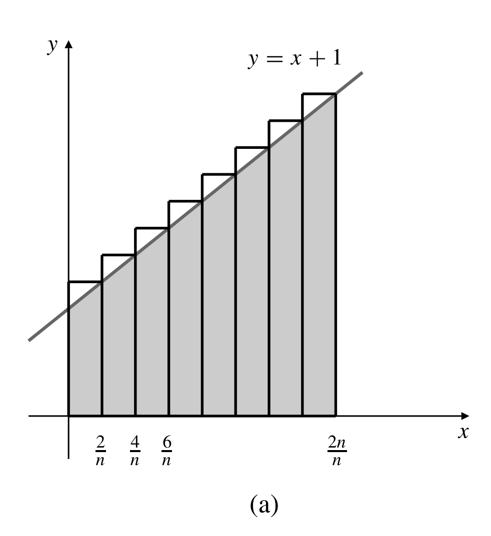
Ejemplo 2 Calcule el área A de la región limitada por la parábola $y = x^2$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$, siendo $b > 0$.

Solución El área A la región es el límite de la suma S_n de las áreas de los rectángulos que se muestran en la Figura 5.7(b). De nuevo se han utilizado subintervalos de la misma longitud, cada uno de ellos de longitud b/n. La altura del i-ésimo rectángulo es $(ib/n)^2$. Por tanto,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^2\frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{b^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

por la fórmula (c) del Teorema 1. Entonces, el área pedida es

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b^3\,\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{b^3}{3} \text{ unidades al cuadrado}$$



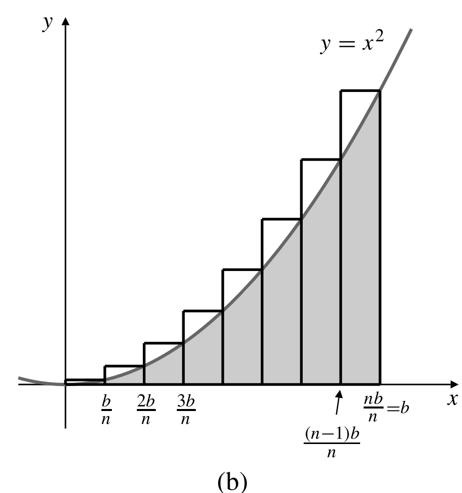


Figura 5.7
(a) La región del Ejemplo 1.
(b) La región del Ejemplo 2.

El cálculo del área bajo la gráfica de $y = x^k$ en un intervalo I se va haciendo más y más difícil a medida que k crece, si continuamos intentando subdividir I en intervalos de la misma longitud (*véase* el Ejercicio 14 al final de esta sección el caso de $k = 3$). Sin embargo, es posible calcular el área para un valor arbitrario de k si se subdivide el intervalo I en subintervalos cuyas longitudes crecen según una progresión geométrica. El Ejemplo 3 ilustra esta idea.

Ejemplo 3 Sea $b > a > 0$ y sea k un número real cualquiera excepto -1. Demuestre que el área A de la región comprendida por $y = x^k$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \text{ unidades al cuadrado}$$

Solución Sea $t = (b/a)^{1/n}$ y sean

$$x_0 = a,\ x_1 = at,\ x_2 = at^2,\ x_3 = at^3,\ \ldots,\ x_n = at^n = b$$

Estos puntos dividen el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos en los que el subintervalo i-ésimo, $[x_{i-1}, x_i]$, tiene una longitud de $\Delta x_i = at^{i-1}(t-1)$. Si $f(x) = x^k$, entonces $f(x_i) = a^k t^{ki}$. La suma de las áreas de los rectángulos que se muestran en la Figura 5.8 es:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a^k t^{ki} a t^{i-1}(t-1) \\ &= a^{k+1}(t-1)t^k \sum_{i=1}^{n} t^{(k+1)(i-1)} \\ &= a^{k+1}(t-1)t^k \sum_{i=1}^{n} r^{(i-1)} \qquad \text{siendo } r = t^{k+1} \\ &= a^{k+1}(t-1)t^k \frac{r^n - 1}{r-1} \qquad \text{(por el Teorema 1(d))} \\ &= a^{k+1}(t-1)t^k \frac{t^{(k+1)n} - 1}{t^{k+1} - 1} \end{aligned}$$

Sustituyamos ahora t por el valor $(b/a)^{1/n}$ y ordenemos factores para obtener

$$\begin{aligned} S_n &= a^{k+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{k/n} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{(k+1)/n} - 1} \\ &= (b^{k+1} - a^{k+1})c^{k/n} \frac{c^{1/n} - 1}{c^{(k+1)/n} - 1}, \qquad \text{donde } c = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

De los tres factores en la línea final anterior, el primero no depende de n, y el segundo, $c^{k/n}$, tiende a $c^0 = 1$ cuando $n \to \infty$. El tercer factor es una forma indeterminada del tipo $[0/0]$, que se puede calcular utilizando la Regla de L'Hôpital. Hagamos primero $u = 1/n$. Ahora

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{c^{1/n} - 1}{c^{(k+1)/n} - 1} &= \lim_{u\to 0+} \frac{c^u - 1}{c^{(k+1)u} - 1} \qquad \left[\frac{0}{0}\right] \\ &= \lim_{u\to 0+} \frac{c^u \ln c}{(k+1)c^{(k+1)u} \ln c} = \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

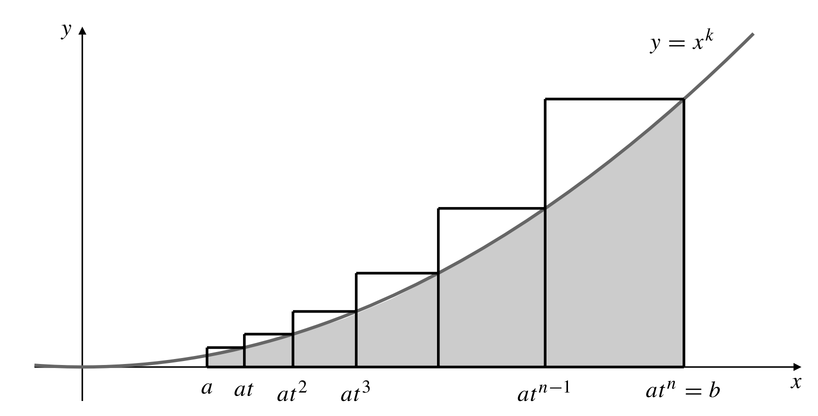


Figura 5.8 En esta partición las longitudes de los subintervalos crecen exponencialmente.

Por tanto, el área pedida es

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = (b^{k+1} - a^{k+1}) \times 1 \times \frac{1}{k+1} = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \text{ unidades al cuadrado}$$

■

¡¡ ATENCIÓN !! Este ejemplo es largo y más bien difícil. Omítalo o tómese su tiempo y calcule cuidadosamente cada paso.

Como se puede ver, puede ser difícil calcular áreas limitadas por curvas utilizando el método descrito anteriormente. Afortunadamente, hay una forma más fácil, como veremos en la Sección 5.5.

Observación Por razones técnicas ha sido necesario suponer que $a > 0$ en el Ejemplo 3. El resultado es también válido para $a = 0$, suponiendo que $k > -1$. En este caso, tenemos que $\lim_{a\to 0+} a^{k+1} = 0$, por lo que el área bajo $y = x^k$, por encima de $y = 0$, y entre $x = 0$ y $x = b > 0$ es $A = b^{k+1}/(k+1)$ unidades al cuadrado. Para $k = 2$, el resultado concuerda con el del Ejemplo 2.

Ejemplo 4 Identifique el límite $L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n^2}$ con un área, y calcúlela.

Solución El término i-ésimo de la suma se puede escribir de forma que dependa de i/n:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

Los términos se pueden interpretar ahora como áreas de rectángulos de base $1/n$ y alturas $1 - x_i$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, siendo

$$x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ x_3 = \frac{3}{n},\ ...,\ x_n = \frac{n}{n}$$

Por tanto, el límite L es el área bajo la curva $y = 1 - x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ (*véase* la Figura 5.9). Esta región es un triángulo cuya área es de 1/2 unidades al cuadrado, por lo que $L = 1/2$.

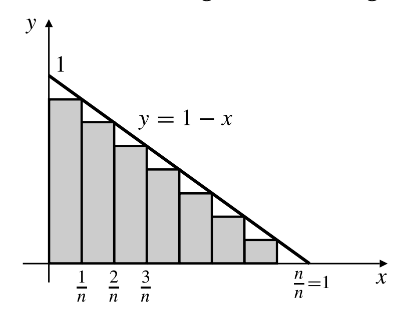


Figura 5.9 Interpretación en forma de una suma de áreas.

■

Ejercicios 5.2

Utilice las técnicas de los Ejemplos 1 y 2 (con subintervalos de la misma longitud) para calcular las áreas de las regiones especificadas en los Ejercicios 1-13.

1. Por debajo de $y = 3x$, por encima de $y = 0$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

2. Por debajo de $y = 2x + 1$, por encima de $y = 0$, desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

3. Por debajo de $y = 2x - 1$, por encima de $y = 0$, desde $x = 1$ hasta $x = 3$.

4. Por debajo de $y = 3x + 4$, por encima de $y = 0$, desde $x = -1$ hasta $x = 2$.

5. Por debajo de $y = x^2$, por encima de $y = 0$, desde $x = 1$ hasta $x = 3$.

6. Por debajo de $y = x^2 + 1$, por encima de $y = 0$, desde $x = 0$ hasta $x = a > 0$.

7. Por debajo de $y = x^2 + 2x + 3$, por encima de $y = 0$, desde $x = -1$ hasta $x = 2$.

8. Por encima de $y = x^2 - 1$, por debajo de $y = 0$.

9. Por encima de $y = 1 - x$, por debajo de $y = 0$, desde $x = 2$ hasta $x = 4$.

10. Por encima de $y = x^2 - 2x$, por debajo de $y = 0$.

11. Por debajo de $y = 4x - x^2 + 1$, por encima de $y = 1$.

***12.** Por debajo de $y = e^x$, por encima de $y = 0$, desde $x = 0$ hasta $x = b > 0$.

***13.** Por debajo de $y = 2^x$, por encima de $y = 0$, desde $x = -1$ hasta $x = 1$.

14. Utilice la fórmula $\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4$ de los Ejercicios 39-41 de la Sección 5.1, para calcular el área de la región comprendida bajo la curva $y = x^3$, por encima del eje x y entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = b > 0$.

15. Utilice la subdivisión de $[a, b]$ dada en el Ejemplo 3 para calcular el área comprendida bajo la curva $y = 1/x$, por encima de $y = 0$ desde $x = a > 0$ hasta $x = b > a$. ¿Por qué no es sorprendente su respuesta?

En los Ejercicios 16-19, interprete la suma S_n en forma de una suma de áreas de rectángulos que aproximen el área de una cierta región del plano y calcule $\lim_{n\to\infty} S_n$.

16. $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right)$

17. $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(1 - \frac{2i}{n}\right)$

18. $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n + 3i}{n^2}$

***19.** $S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - (j/n)^2}$

5.3 La integral definida

En esta sección realizaremos y haremos más preciso el procedimiento utilizado para calcular áreas que se ha desarrollado en la Sección 5.2, y lo utilizaremos para definir la *integral definida* de una función f en un intervalo I. Supongamos por ahora que $f(x)$ está definida y es continua en el intervalo cerrado infinito $[a, b]$. Ya no supondremos que los valores de f son no negativos.

Particiones y sumas de Riemann

Sea P un conjunto finito de puntos de la recta real ordenados entre a y b, es decir,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

siendo a $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Ese conjunto P se dice que es una **partición** de $[a, b]$. Divide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos y la longitud del i-ésimo subintervalo es $[x_{i-1}, x_i]$. Diremos que son los subintervalos de la partición P. El número n depende de cada partición particular, por lo que escribiremos $n = n(P)$. La longitud del i-ésimo subintervalo de P es

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad (\text{para } 1 \leqslant i \leqslant n)$$

y el máximo de esos números Δx_i se denomina **norma** de la partición P, y se indica como $\|P\|$:

$$\|P\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i$$

Como f es continua en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de P, toma sus valores máximo y mínimo en puntos de dicho subintervalo (por el Teorema 8 de la Sección 1.4). Por tanto, existen números l_i y u_i en $[x_{i-1}, x_i]$ tales que

$$f(l_i) \leqslant f(x) \leqslant f(u_i) \qquad \text{siempre que } x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$$

Si $f(x) \geqslant 0$ en $[a, b]$, entonces $f(l_i)\Delta x_i$ y $f(u_i)\Delta x_i$ representan las áreas de rectángulos en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ cuya base está en el eje x y cuyas alturas pasan por el punto más bajo y más alto, respectivamente, de la gráfica de f en ese intervalo (*véase* la Figura 5.10). Si A_i es la parte del área comprendida bajo $y = f(x)$ y por encima del eje x que está en la banda vertical cuyos límites son $x = x_{i-1}$ y $x = x_i$, entonces

$$f(l_i)\Delta x_i \leqslant A_i \leqslant f(u_i)\Delta x_i$$

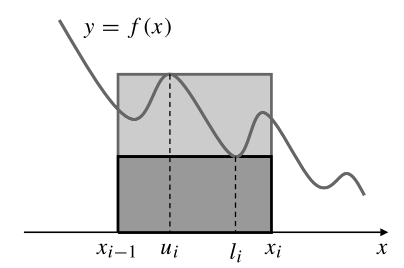


Figura 5.10

Si f puede tomar valores negativos, entonces uno de los valores $f(l_i)\Delta x_i$ y $f(u_i)\Delta x_i$, o ambos, pueden ser negativos, y representarán entonces el área negativa de un rectángulo que está por debajo del eje x. En cualquier caso, siempre tenemos que $f(l_i)\Delta x_i \leqslant f(u_i)\Delta x_i$.

DEFINICIÓN 2 **Sumas de Riemann superior e inferior**

La **suma inferior (de Riemann), $L(f, P)$**, y la **suma superior (de Riemann), $U(f, P)$**, de la función f y la partición P se definen como:

$$\begin{aligned} L(f, P) &= f(l_1)\Delta x_1 + f(l_2)\Delta x_2 + \cdots + f(l_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i \\ U(f, P) &= f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \cdots + f(u_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

La Figura 5.11 ilustra estas sumas de Riemann como sumas de áreas de rectángulos *con signo*; toda área que esté por debajo del eje x cuenta como negativa.

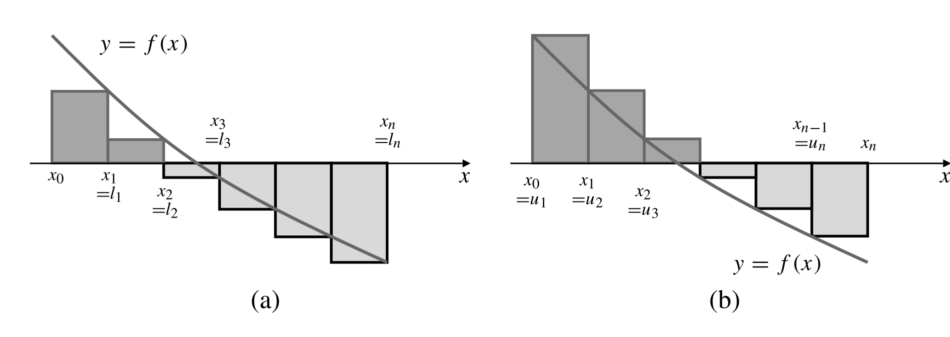


Figura 5.11 (a) Una suma inferior de Riemann y (b) una suma superior de Riemann de la función decreciente f. Las áreas de los rectángulos sombreados en oscuro cuentan como positivas; las áreas de los sombreados en claro cuentan como negativas.

Ejemplo 1 Calcule las sumas de Riemann inferior y superior de la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo [1, 2], correspondientes a la partición P de [1, 2] en cuatro subintervalos de la misma longitud.

Solución La partición P está formada por los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 5/4$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = 7/4$ y $x_4 = 2$. Como $1/x$ es decreciente en [1, 2], sus valores mínimo y máximo en el subintervalo i-ésimo $[x_{i-1}, x_i]$ son $1/x_i$ y $1/x_{i-1}$, respectivamente. Por tanto, las sumas de Riemann inferior y superior son

$$L(f, P) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right) = \frac{533}{840} \approx 0.6345$$

$$U(f, P) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) = \frac{319}{420} \approx 0.7595$$

Ejemplo 2 Calcule las sumas de Riemann inferior y superior de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, a]$ (siendo $a > 0$), correspondientes a la partición P_n de $[0, a]$ en n subintervalos de la misma longitud.

Solución Cada subintervalo de P_n tiene una longitud de $\Delta x = a/n$, y los puntos de división son $x_i = ia/n$ para $i = 0, 1, 2, ..., n$. Como x^2 es creciente en $[0, a]$, sus valores mínimo y máximo en el subintervalo i-ésimo $[x_{i-1}, x_i]$ se producen en $l_i = x_{i-1}$ y $u_i = x_i$, respectivamente. Por tanto, la suma de Riemann inferior de f para la partición P_n es

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1})^2 \Delta x = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \\ &= \frac{a^3}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)a^3}{6n^2} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Teorema 1(c) de la Sección 5.1 para calcular la suma de los cuadrados. De forma similar, la suma de Riemann superior es

$$\begin{aligned} U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \Delta x \\ &= \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)a^3}{6n^2} \end{aligned}$$

La integral definida

Si se calculan $L(f, P)$ y $U(f, P)$ para particiones P que tienen cada vez más puntos colocados más y más cerca, es razonable esperar que, en el límite, esas sumas de Riemann convergerán a un valor común que será el área limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ si $f(x) \geqslant 0$ en $[a, b]$. Éste es de hecho el caso, pero todavía no lo podemos demostrar completamente.

Si P_1 y P_2 son dos particiones de $[a, b]$, de forma que cada punto de P_1 pertenece también a P_2, se dice que P_2 es un **refinamiento** de P_1. No es difícil demostrar que en este caso

$$L(f, P_1) \leqslant L(f, P_2) \leqslant U(f, P_2) \leqslant U(f, P_1)$$

Añadir más puntos a una partición aumenta la suma inferior y disminuye la suma superior (*véase* el Ejercicio 18 al final de esta sección). Dadas dos particiones cualesquiera, P_1 y P_2, podemos formar su **refinamiento común** P, formado por todos los puntos de P_1 y P_2. Así,

$$L(f, P_1) \leqslant L(f, P) \leqslant U(f, P) \leqslant U(f, P_2)$$

Por tanto, cada suma inferior es menor o igual que cada suma superior. Como los números reales son completos, debe existir *al menos un* número real I tal que

$$L(f, P) \leqslant I \leqslant U(f, P), \qquad \text{para cualquier partición } P$$

Si *sólo hay un número* que cumple lo anterior, se denomina integral definida de f en el intervalo $[a, b]$.

DEFINICIÓN 3 La integral definida

Supongamos que hay un único número I tal que para toda partición P del intervalo $[a, b]$ se cumple que

$$L(f, P) \leqslant I \leqslant U(f, P)$$

Decimos entonces que la función f es **integrable** en el intervalo $[a, b]$ y el valor I se denomina **integral definida** de f en el intervalo $[a, b]$. La integral definida se expresa mediante el símbolo

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

La integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es un *número*; no es una función de x. Depende de los números a y b y de la función concreta f, pero no de la variable x (es una **variable auxiliar** como la variable i del sumatorio $\sum_{i=1}^{n} f(i)$). Si se sustituye x por cualquier otra variable el valor de la integral no cambia:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt$$

Todas las partes del símbolo $\int_a^b f(x)\, dx$ tienen su propio nombre:

(i) $\int$ se denomina **signo integral**; recuerda a la letra S ya que representa el límite de una suma.
(ii) a y b se denominan **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**.
(iii) La función f es el **integrando**; x es la **variable de integración**.
(iv) dx es el **diferencial** de x. Sustituye a Δx en las sumas de Riemann. Si un integrando depende de más de una variable, el diferencial nos indica cuál es la variable de integración.

Ejemplo 3 Demuestre que $f(x) = x^2$ es integrable en el intervalo $[0, a]$, con $a > 0$, y calcule $\int_0^a x^2\, dx$.

Solución Calcularemos los límites cuando $n \to \infty$ de las sumas inferior y superior de f en el intervalo $[0, a]$, obtenidas en el Ejemplo 2 anterior.

$$\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)a^3}{6n^2} = \frac{a^3}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)a^3}{6n^2} = \frac{a^3}{3}$$

Si $L(f, P_n) \leqslant I \leqslant U(f, P_n)$, debemos tener que $I = a^3/3$. Por tanto, $f(x) = x^2$ es integrable en el intervalo $[0, a]$, y

$$\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a x^2\, dx = \frac{a^3}{3}$$

Para todas las particiones P del intervalo $[a, b]$ tenemos que

$$L(f, P) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant U(f, P)$$

Si $f(x) \geqslant 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces el área de la región R limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ tiene un valor de A unidades al cuadrado, siendo $A = \int_a^b f(x)\,dx$. Si $f(x) \leqslant 0$ en el intervalo $[a, b]$, el área de R es $-\int_a^b f(x)\,dx$ unidades al cuadrado. Para una función f general, $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área de la parte de R que está por encima del eje x, menos el área de la parte de R que está por debajo del eje x (*véase* la Figura 5.12). $\int_a^b f(x)\,dx$ puede verse como una «suma» de «áreas» de infinitos rectángulos con alturas $f(x)$ y «anchuras infinitesimalmente pequeñas» dx; es un límite de las sumas de Riemann superior e inferior.

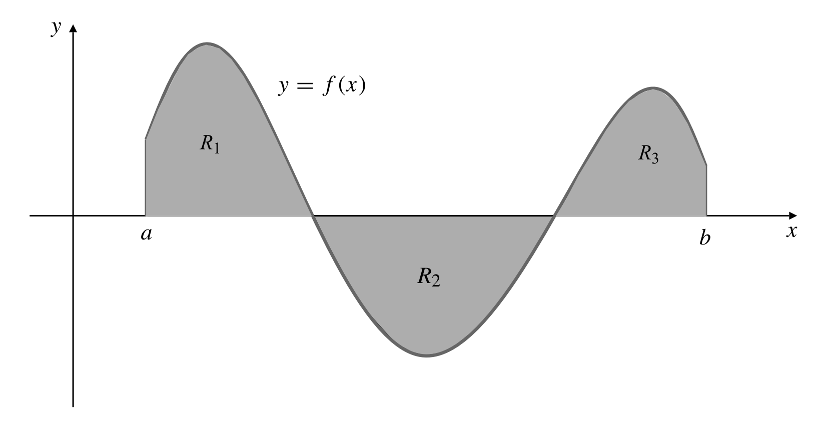


Figura 5.12 $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al área R_1 − área R_2 + área R_3.

Sumas de Riemann generales

Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, una partición del intervalo $[a, b]$ con norma $\|P\| = \text{máx}_{1\leqslant i\leqslant n}\, \Delta x_i$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de P seleccionamos un punto c_i (denominado *etiqueta*). Sea $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ el conjunto de esas etiquetas. La suma

$$R(f, P, c) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$
$$= f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n$$

se denomina **suma de Riemann** de f en el intervalo $[a, b]$, correspondiente a la partición P y a las etiquetas c.

Nótese en la Figura 5.13 que $R(f, P, c)$ es una suma de áreas *con signo* de rectángulos comprendidos entre el eje x y la curva $y = f(x)$. Para cualquier selección de las etiquetas c, la suma de Riemann $R(f, P, c)$ cumple

$$L(f, P) \leqslant R(f, P, c) \leqslant U(f, P)$$

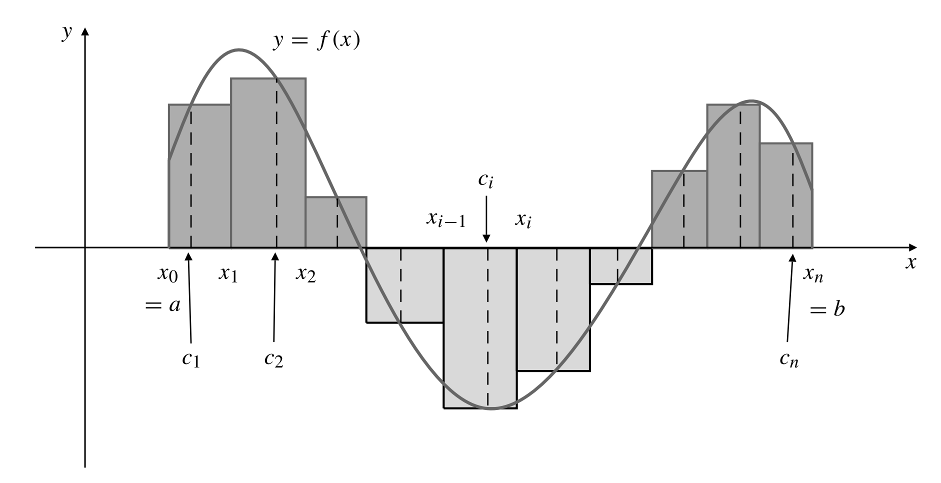


Figura 5.13 La suma de Riemann $R(f, P, c)$ es la suma de las áreas de los rectángulos sombreados en oscuro menos la suma de las áreas de los rectángulos sombreados en claro.

Por tanto, si f es integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces su integral es el límite de esas sumas de Riemann, donde el límite se toma cuando el número $n(P)$ de subintervalos de P tiende a infinito de forma que las longitudes de todos los subintervalos tienden a cero. Es decir,

$$\lim_{\substack{n(P)\to\infty \\ \|P\|\to 0}} R(f, P, c) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Como veremos en el Capítulo 7, muchas aplicaciones de integración se basan en reconocer que un límite de sumas de Riemann es una integral definida.

TEOREMA 2 Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en el intervalo $[a, b]$.

Como se ha indicado anteriormente, todavía no podemos demostrar este teorema de forma completamente general. La demostración se basa en el uso de la propiedad de completitud de los números reales y se presenta en el Apéndice IV. Sin embargo, podemos hacer la siguiente observación. Para demostrar que f es integrable en el intervalo $[a, b]$ es suficiente que, para cualquier número positivo ϵ, se pueda encontrar una partición P de $[a, b]$ para la que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Esta condición evita que haya más de un número I que sea mayor que cualquier suma inferior y menor que cualquier suma superior. No es difícil encontrar esa partición si la función f es no decreciente (o no creciente) en el intervalo $[a, b]$ (*véase* el Ejercicio 17 al final de esta sección). Por tanto, las funciones continuas no decrecientes y no crecientes son integrables. También lo es, por tanto, cualquier función continua que sea la suma de una función no decreciente y una función no creciente. Esta clase de funciones incluyen a casi cualquier función continua que nos podamos encontrar en aplicaciones concretas del cálculo, pero, desafortunadamente, no incluye a todas las funciones continuas.

En la Sección 5.4 ampliaremos la definición de integral definida a ciertas clases de funciones que no son continuas.

Ejemplo 4 Exprese el límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2i-1}{n}\right)^{1/3}$ como una integral definida.

Solución Deseamos interpretar la suma como una suma de Riemann para $f(x) = (1 + x)^{1/3}$. El factor $2/n$ sugiere que el intervalo de integración es de longitud 2 y está dividido en n subintervalos iguales, cada uno de ellos de longitud $2/n$. Sea $c_i = (2i - 1)/n$ para $i = 1, 2, 3, ..., n$. Cuando $n \to \infty$, $c_1 = 1/n \to 0$ y $c_n = (2n - 1)/n \to 2$. Por tanto, el intervalo es $[0, 2]$ y los puntos de la partición son $x_i = 2i/n$. Obsérvese que $x_{i-1} = (2i - 2)/n < c_i < 2i/n = x_i$ para todo i, de forma que la suma es en realidad una suma de Riemann para $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$. Como f es continua en ese intervalo, es integrable en él, y

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2i-1}{n}\right)^{1/3} = \int_0^2 (1+x)^{1/3}\,dx$$

Ejercicios 5.3

En los Ejercicios 1-6, sea P_n la partición del intervalo dado $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud $\Delta x_i = (b - a)/n$. Calcule $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ para las funciones f dadas y los valores dados de n.

1. $f(x) = x$ en $[0, 2]$, con $n = 8$.

2. $f(x) = x^2$ en $[0, 4]$, con $n = 4$.

3. $f(x) = e^x$ en $[-2, 2]$, con $n = 4$.

4. $f(x) = \ln x$ en $[1, 2]$, con $n = 5$.

5. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$, con $n = 6$.

6. $f(x) = \cos x$ en $[0, 2\pi]$, con $n = 4$.

En los Ejercicios 7-10, calcule $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ para las funciones f dadas en los intervalos $[a, b]$ dados, siendo P_n

la partición del intervalo en n subintervalos de la misma longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$$

y a partir aquí, que f es integrable en el intervalo $[a, b]$ (¿por qué?). ¿Qué es $\int_a^b f(x)\,dx$?

7. $f(x) = x$, $[a, b] = [0, 1]$.

8. $f(x) = 1 - x$, $[a, b] = [0, 2]$.

9. $f(x) = x^3$, $[a, b] = [0, 1]$.

10. $f(x) = e^x$, $[a, b] = [0, 3]$.

En los Ejercicios 11-16, exprese los límites dados en forma de integral definida.

11. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$

12. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$

13. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi i}{n}\right)$

14. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right)$

***15.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$

***16.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i^2}$

***17.** Si f es una función continua y no decreciente en un intervalo $[a, b]$, y P_n es la partición de $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud ($\Delta x_i = (b - a)/n$ para $1 \leqslant i \leqslant n$), demuestre que

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{(b - a)(f(b) - f(a))}{n}$$

Como podemos hacer el miembro izquierdo tan pequeño como queramos escogiendo n suficientemente grande, f debe ser integrable en el intervalo $[a, b]$.

***18.** Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y sea P' un refinamiento de P con un punto más, x', que cumple, por ejemplo, que $x_{i-1} < x' < x_i$ para algún valor de i entre 1 y n. Demuestre que

$$L(f, P) \leqslant L(f, P') \leqslant U(f, P') \leqslant U(f, P)$$

para alguna función continua f (*Sugerencia*: Considere los valores máximo y mínimo de la función f en los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_{i-1}, x']$ y $[x', x_i]$). A partir de aquí, deduzca que

$$L(f, P) \leqslant L(f, P'') \leqslant U(f, P'') \leqslant U(f, P) \text{ si } P''$$

es *cualquier* refinamiento de P.

5.4 Propiedades de la integral definida

Es conveniente ampliar la definición de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ para permitir que $a = b$ y $a > b$, así como $a < b$. En esta ampliación intervendrán particiones P con $x_0 = a$ y $x_n = b$, y con puntos intermedios ordenados entre los dos puntos de los extremos, de modo que si $a = b$, entonces debe cumplirse que $\Delta x_i = 0$ para todo i, y por tanto la integral es cero. Si $a > b$, tenemos que $\Delta x_i < 0$ para todo i, por lo que la integral será negativa para funciones f positivas y viceversa.

El siguiente teorema resume algunas de las propiedades más importantes de la integral definida.

TEOREMA 3 Sean f y g dos funciones integrables en un intervalo que contiene a los puntos a, b y c. Entonces:

(a) Cualquier integral sobre un intervalo de longitud cero es cero.

$$\int_b^a f(x)\,dx = 0$$

(b) Al invertir los límites de integración, la integral cambia de signo.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(c) Una integral depende linealmente del integrando. Si A y B son constantes, entonces

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$$

(d) Una integral depende aditivamente del intervalo de integración.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(e) Si $a \leqslant b$ y $f(x) \leqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

(f) **Desigualdad del triángulo** para integrales definidas. Si $a \leqslant b$, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

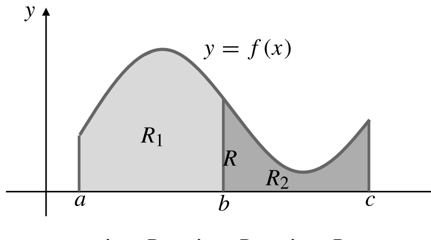
(g) La integral de una función impar en un intervalo simétrico alrededor de cero vale cero. Si f es una función impar $(f(-x) = -f(x))$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$$

(h) La integral de una función par en un intervalo simétrico alrededor de cero vale dos veces la integral en la mitad positiva del intervalo. Si f es una función par $(f(-x) = f(x))$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

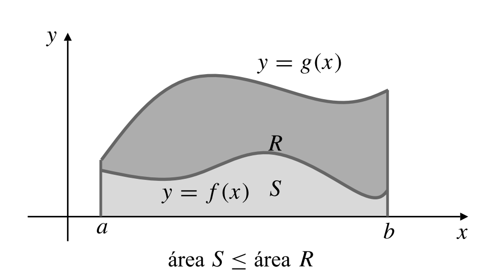
Todas estas propiedades se pueden deducir partiendo de la definición de integral definida. La mayoría de ellas son intuitivamente razonables si consideramos las integrales como áreas (con signo). Por ejemplo, las propiedades (d) y (e) son, respectivamente, las propiedades (v) y (vi) de las áreas mencionadas en el primer párrafo de la Sección 5.2 (*véase* la Figura 5.14).



área R_1 + área R_2 = área R

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(a)



área $S \leq$ área R

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(b)

Figura 5.14
(a) Propiedad (d) del Teorema 3.
(b) Propiedad (e) del Teorema 3.

La propiedad (f) es una generalización de la desigualdad del triángulo para números:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \quad \text{o, de forma más general,} \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Se deduce de la propiedad (e) (suponiendo que $|f|$ es integrable en el intervalo $[a, b]$), ya que $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. Las propiedades de simetría (g) y (h), que se ilustran en la Figura 5.15, son particularmente útiles y conviene tenerlas siempre presentes, ya que pueden ahorrar trabajo innecesario al calcular integrales definidas.

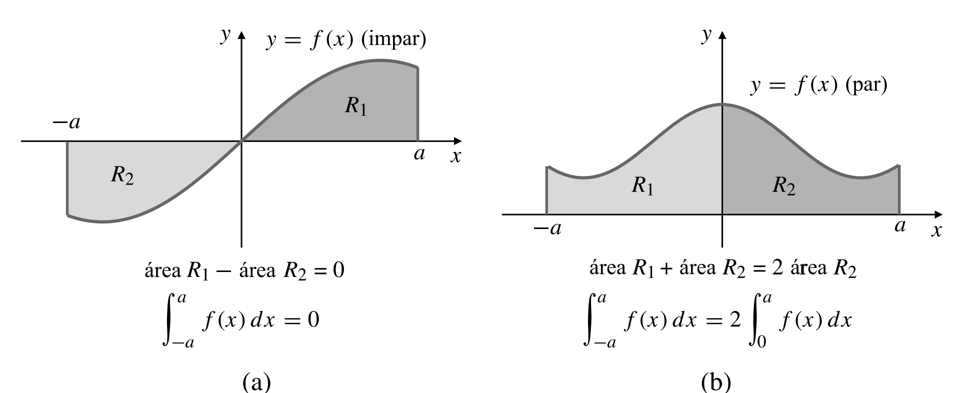


Figura 5.15
(a) Propiedad (g) del Teorema 3.
(b) Propiedad (h) del Teorema 3.

Todavía no disponemos de un método sencillo para calcular integrales definidas. Sin embargo, algunas integrales se pueden simplificar utilizando las propiedades presentadas en el Teorema 3, y otras se pueden interpretar como áreas conocidas.

Ejemplo 1 Calcule

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2+5x)\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{0}^{3} (2+x)\,dx$ y (c) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$.

Solución *Véanse* las Figuras 5.16-5.18.

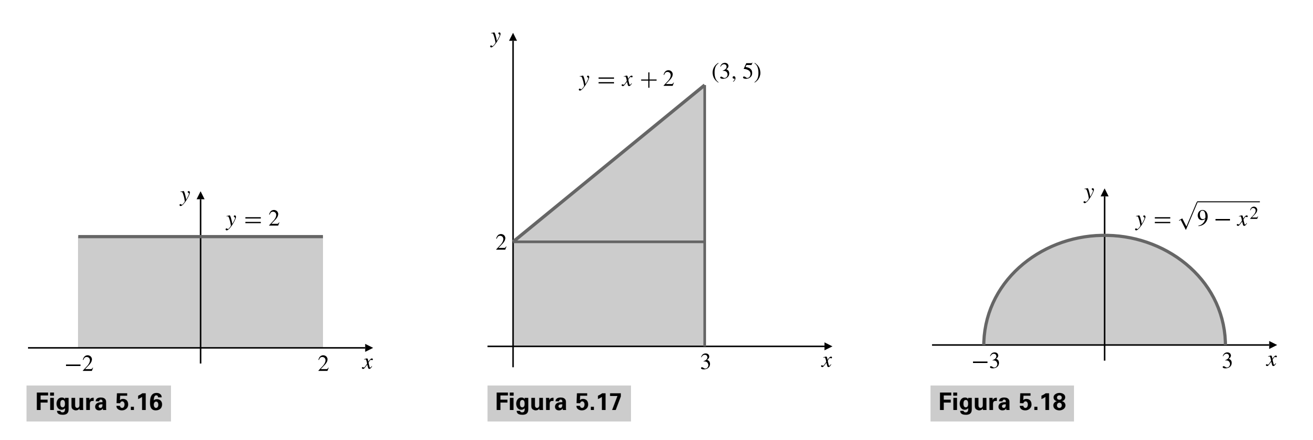


Figura 5.16 **Figura 5.17** **Figura 5.18**

(a) Por la propiedad de linealidad (c), $\int_{-2}^{2} (2+5x)\,dx = \int_{-2}^{2} 2\,dx + 5\int_{-2}^{2} x\,dx$. La primera integral de la derecha representa el área de un rectángulo de anchura 4 y altura 2 (Figura 5.16), por lo que su valor es 8. La segunda integral de la derecha es 0 porque el integrando es impar y el intervalo de integración es simétrico alrededor del 0. Por tanto,

$$\int_{-2}^{2} (2+5x)\,dx = 8 + 0 = 8$$

(b) $\int_0^3 (2 + x)\,dx$ representa el área del trapezoide de la Figura 5.17. Sumando las áreas del rectángulo y del triángulo que forman dicho trapezoide, se obtiene

$$\int_0^3 (2 + x)\,dx = (3 \times 2) + \frac{1}{2}(3 \times 3) = \frac{21}{2}$$

(c) $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$ representa el área de un semicírculo de radio 3 (Figura 5.18), por lo que

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(3^2) = \frac{9\pi}{2}$$

Aunque las áreas se miden en unidades de longitud al cuadrado, las integrales definidas son números y no tienen unidades. Incluso cuando se utiliza un área para calcular una integral, no se asignan unidades a la integral.

Un Teorema del Valor Medio para integrales

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces f alcanza un valor mínimo m y un valor máximo M en dicho intervalo, por ejemplo en los puntos $x = l$ y $x = u$, respectivamente:

$$m = f(l) \leqslant f(x) \leqslant f(u) = M \qquad \text{para todo } x \text{ en } [a, b]$$

Para el caso de la partición P de 2 puntos del intervalo $[a, b]$ con $x_0 = a$ y $x_1 = b$, tenemos que

$$m(b - a) = L(f, P) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant U(f, P) = M(b - a)$$

Por tanto,

$$f(l) = m \leqslant \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M = f(u)$$

Por el Teorema del Valor Medio, $f(x)$ debe tomar todos los valores entre $f(l)$ y $f(u)$ en algún punto entre l y u (Figura 5.19). Por tanto, existe un número c entre l y u tal que

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Es decir, $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al área $(b - a)f(c)$ de un rectángulo cuya anchura de la base es $b - a$ y su altura es $f(c)$ para algún valor c entre a y b. Éste es el Teorema del Valor Medio para integrales.

TEOREMA 4 **El Teorema del Valor Medio para integrales**

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe un punto c en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)f(c)$$

Obsérvese en la Figura 5.19 que el área por debajo de la curva $y = f(x)$ y por encima de la recta $y = f(c)$ es igual al área por encima de $y = f(x)$ y por debajo de $y = f(c)$. En este sentido, $f(c)$ es el valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Figura 5.19 La mitad del área entre $y = f(x)$ y la línea horizontal $y = f(c)$ está por debajo de dicha línea, y la otra mitad está por encima de dicha línea.

DEFINICIÓN 4 **Valor medio de una función**

Si f es integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces el **valor medio** de f en $[a, b]$, que se indica como $\overline{f}$, es

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 2 Calcule el valor medio de $f(x) = 2x$ en el intervalo $[1, 5]$.

Solución El valor medio (*véase* la Figura 5.20) es

$$\overline{f} = \frac{1}{5-1}\int_1^5 2x\,dx = \frac{1}{4}\left(4 \times 2 + \frac{1}{2}(4 \times 8)\right) = 6$$

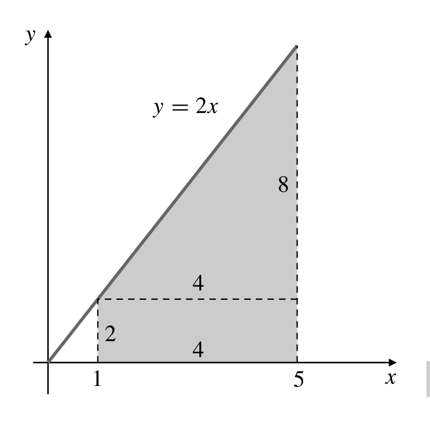


Figura 5.20 $\int_1^5 2x\,dx = 24.$

■

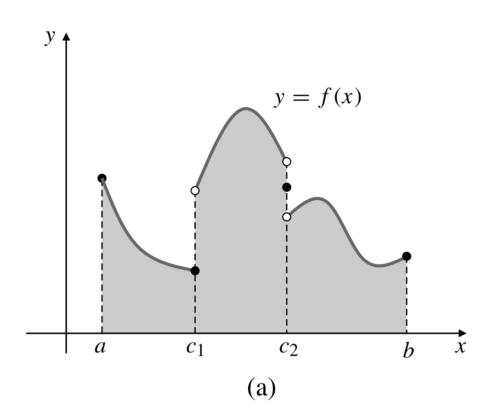
Definición de integrales de funciones continuas por tramos

La definición de integrabilidad y de integral definida, dadas anteriormente, se puede extender a una clase de funciones más amplia que las funciones continuas. Una extensión simple pero muy importante es a la clase de *funciones continuas por tramos*.

Considérese la gráfica $y = f(x)$ que se muestra en la Figura 5.21(a). Aunque f no es continua en todos los puntos del intervalo $[a, b]$ (es discontinua en c_1 y c_2), es claro que la región encerrada debajo de la gráfica y encima del eje x entre $x = a$ y $x = b$ tiene un área determinada. Esa área puede representarse como

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx$$

Esto es razonable ya que existen funciones continuas en $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$ y $[c_2, b]$ iguales a $f(x)$ en los correspondientes intervalos abiertos (a, c_1), (c_1, c_2) y (c_2, b).



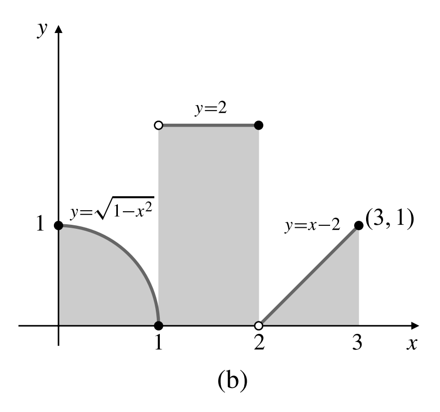


Figura 5.21 Dos funciones continuas por tramos.

DEFINICIÓN 5 Funciones continuas por tramos

Sea $c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ un conjunto finito de puntos en la recta real. Una función f definida en el intervalo $[c_0, c_n]$, excepto posiblemente en alguno de los puntos c_i, $(0 \leqslant i \leqslant n)$, se denomina **continua por tramos** en dicho intervalo si para todo i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ existe una función F_i continua en el intervalo cerrado $[c_{i-1}, c_i]$, tal que

$$f(x) = F_i(x) \qquad \text{en el intervalo } abierto\ (c_{i-1}, c_i)$$

En este caso, se define la integral definida de f desde c_0 hasta c_n como

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} F_i(x)\,dx$$

Ejemplo 3 Calcule $\int_0^3 f(x)\,dx$, siendo $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ x-2 & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$

Solución El valor de la integral es la suma de las áreas sombreadas en la Figura 5.21(b):

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_1^2 2\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{4} \times \pi \times 1^2\right) + (2 \times 1) + \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) = \frac{\pi + 10}{4}$$

■

Ejercicios 5.4

1. Simplifique $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx.$

2. Simplifique $\int_0^2 3f(x)\,dx + \int_1^3 3f(x)\,dx - \int_0^3 2f(x)\,dx$
$- \int_1^2 3f(x)\,dx.$

Calcule las integrales en los Ejercicios 3-16 utilizando las propiedades de la integral definida e interpretando las integrales como áreas.

3. $\int_{-2}^{2} (x+2)\,dx$

4. $\int_0^2 (3x+1)\,dx$

5. $\int_a^b x\,dx$

6. $\int_{-1}^{2} (1-2x)\,dx$

7. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2}\,dt$

8. $\int_{-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{2-x^2}\,dx$

9. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x^3)\,dx$

10. $\int_{-a}^{a} (a-|s|)\,ds$

11. $\int_{-1}^{1} (u^5 - 3u^3 + \pi)\,du$

12. $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx$

13. $\int_{-4}^{4} (e^x - e^{-x})\,dx$

14. $\int_{-3}^{3} (2+t)\sqrt{9-t^2}\,dt$

***15.** $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

***16.** $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Sabiendo que $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$, calcule las integrales de los Ejercicios 17-22.

17. $\int_0^2 6x^2\,dx$

18. $\int_2^3 (x^2-4)\,dx$

19. $\int_{-2}^{2} (4-t^2)\,dt$

20. $\int_0^2 (v^2 - v)\,dv$

21. $\int_0^1 (x^2 + \sqrt{1-x^2})\,dx$

22. $\int_{-6}^{6} x^2(2+\operatorname{sen} x)\,dx$

La definición de $\ln x$ como un área, realizada en la Sección 3.3, implica que

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x$$

para $x > 0$. Utilice ese resultado para calcular las integrales de los Ejercicios 23-26.

23. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

24. $\int_2^4 \frac{1}{t}\,dt$

25. $\int_{1/3}^{1} \frac{1}{t}\,dt$

26. $\int_{1/4}^{3} \frac{1}{s}\,ds$

Calcule los valores medios de las funciones de los Ejercicios 27-32 en los intervalos dados.

27. $f(x) = x + 2$ en $[0, 4]$

28. $g(x) = x + 2$ en $[a, b]$

29. $f(t) = 1 + \operatorname{sen} t$ en $[-\pi, \pi]$

30. $k(x) = x^2$ en $[0, 3]$

31. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ en $[0, 2]$

32. $g(s) = 1/s$ en $[1/2, 2]$

Funciones continuas por tramos

33. Calcule $\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x\,dx$. Recuerde que $\operatorname{sgn} x$ vale 1 si $x > 0$ y -1 si $x < 0$.

34. Calcule $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$, siendo $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x<0 \\ 2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

35. Calcule $\int_0^2 g(x)\,dx$, siendo $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

36. Calcule $\int_0^3 |2-x|\,dx.$

***37.** Calcule $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\operatorname{sgn}(x-1)\,dx.$

38. Calcule $\int_0^{3.5} \lfloor x \rfloor\,dx$, siendo $\lfloor x \rfloor$ el máximo entero menor o igual que x (*véase* el Ejemplo 10 de la Sección P.5).

Calcule las integrales de los Ejercicios 39-40 observando las gráficas de los integrandos.

39. $\int_{-3}^{4} (|x+1| - |x-1| + |x+2|)\,dx$

40. $\int_0^3 \frac{x^2-x}{|x-1|}\,dx$

41. Calcule el valor medio de la función $f(x) = |x+1|\operatorname{sgn} x$ en el intervalo $[-2, 2]$.

42. Si $a < b$ y f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, demuestre que $\int_a^b (f(x) - \bar{f})\,dx = 0.$

43. Suponga que $a < b$ y que f es continua en el intervalo $[a, b]$. Calcule la constante k que minimiza la integral $\int_a^b (f(x)-k)^2\,dx.$

5.5 El Teorema Fundamental del Cálculo

En esta sección demostraremos la relación que existe entre la integral definida presentada en la Sección 5.3 y la integral indefinida (o primitiva general) presentada en la Sección 2.10. Una consecuencia de esta relación es que aprenderemos a calcular integrales definidas de funciones cuyas primitivas seamos capaces de calcular.

En la Sección 3.3 planteamos el problema de calcular una función cuya derivada fuera $1/x$. Resolvimos este problema definiendo la función deseada ($\ln x$) en función del área encerrada bajo la gráfica de $y = 1/x$. Esta idea motiva el siguiente teorema, y es un caso especial del mismo.

TEOREMA 4 **Teorema Fundamental del Cálculo**

Supongamos que la función f es continua en un intervalo I que contiene al punto a.

PARTE I. Sea la función F definida en I:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Entonces F es diferenciable en I, y $F'(x) = f(x)$ en dicho intervalo. Por tanto, F es una primitiva de f en I:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

PARTE II. Si $G(x)$ es *cualquier* primitiva de $f(x)$ en I, de forma que $G'(x) = f(x)$ en I, entonces para todo b en I se cumple

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

DEMOSTRACIÓN Utilizando la definición de derivada, podemos calcular

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt && \text{por el Teorema 3(d)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,h\,f(c) && \text{para alguna } c = c(h) \text{ (que depende de } h) \\
& && \text{entre } x \text{ y } x+h \text{ (Teorema 4)} \\
&= \lim_{c\to x} f(c) && \text{ya que } c\to x \text{ cuando } h\to 0 \\
&= f(x) && \text{ya que } f \text{ es continua.}
\end{aligned}$$

Además, si $G'(x) = f(x)$, entonces $F(x) = G(x) + C$ en I para alguna constante C (por el Teorema 13 de la Sección 2.6). Entonces,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) = G(x) + C$$

Sea $x = a$ y obténgase $0 = G(a) + C$ mediante el Teorema 3(a), de forma que $C = -G(a)$. Hagamos ahora $x = b$ para obtener

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) + C = C(b) - G(a)$$

Por supuesto, se puede sustituir t por x (o cualquier otra variable) como variable de integración en el miembro izquierdo.

Observación Hay que recordar las dos conclusiones del Teorema Fundamental, ya que ambas son útiles. La parte I trata de la derivada de una integral; nos indica cómo diferenciar una integral definida con respecto a su límite superior. La parte II considera la integral de una derivada; nos indica cómo calcular una integral definida si se puede obtener una primitiva del integrando.

DEFINICIÓN 6

Para facilitar el cálculo de integrales definidas utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo se define el **símbolo de evaluación**:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_a^b$$

donde $\int f(x)\,dx$ indica la integral indefinida o primitiva general de f (*véase* la Sección 2.10). Cuando se calcula una integral definida de esta forma, omitiremos la constante de integración $(+C)$ de la integral indefinida ya que se cancela en la resta:

$$(F(x) + C)\Big|_a^b = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Cualquier primitiva de f se puede utilizar para calcular la integral definida.

Ejemplo 1 Calcule (a) $\int_0^a x^2\,dx$ y (b) $\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx$.

Solución

(a) $\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^a = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{a^3}{3}$ $\left(\text{ya que } \frac{d}{dx}\frac{x^3}{3} = x^2\right)$

(b) $$\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^2$$
$$= \frac{1}{3}(8) - \frac{3}{2}(4) + 4 - \left(\frac{1}{3}(-1) - \frac{3}{2}(1) + (-2)\right) = \frac{9}{2}$$

¡¡ ATENCIÓN !! Hay que prestar atención y tener en cuenta todos los signos menos al sustituir un límite inferior negativo.

Ejemplo 2 Calcule el área A de la región plana que está por encima del eje x y por debajo de la curva $y = 3x - x^2$.

Solución Necesitamos obtener los puntos donde la curva $y = 3x - x^2$ cruza al eje x. Esos puntos son las soluciones de la ecuación

$$0 = 3x - x^2 = x(3 - x)$$

Las únicas raíces son $x = 0$ y $x = 3$ (*véase* la Figura 5.22). Por tanto, el área de la región es

$$A = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - (0 - 0) = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \text{ unidades al cuadrado}$$

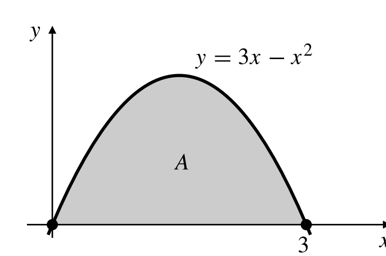


Figura 5.22

Ejemplo 3 Calcule el área bajo la curva $y = \operatorname{sen} x$, por encima de $y = 0$ y desde $x = 0$ hasta $x = \pi$.

Solución El área pedida, que se ilustra en la Figura 5.23, es

$$A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(-1 - (1)) = 2 \text{ unidades al cuadrado}$$

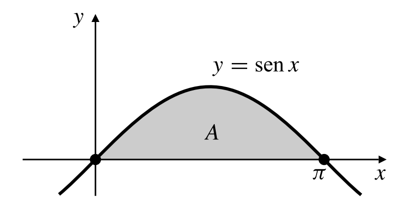


Figura 5.23

Nótese que, aunque la integral definida es un número puro, un área es una magnitud geométrica que implícitamente requiere unidades. Si las unidades del eje x y del eje y son, por ejemplo, metros, el área debe expresarse en metros cuadrados (m^2). Si no se especifican las unidades de longitud de los ejes x e y, el área se expresará en unidades al cuadrado.

Ejemplo 4 Calcule el área de la región R que está por encima de la recta $y = 1$ y por debajo de la curva $y = 5/(x^2 + 1)$.

Solución La región R se muestra sombreada en la Figura 5.24. Para calcular las intersecciones de $y = 1$ e $y = 5/(x^2 + 1)$, debemos resolver la ecuación:

$$1 = \frac{5}{x^2 + 1}$$

por lo que $x^2 + 1 = 5$, $x^2 = 4$ y $x = \pm 2$.

El área A de la región R es el área bajo la curva $y = 5/(x^2 + 1)$ y por encima del eje x entre $x = -2$ y $x = 2$, menos el área de un rectángulo de anchura 4 y altura 1. Como $\tan^{-1} x$ es una primitiva de $1/(x^2 + 1)$,

$$A = \int_{-2}^{2} \frac{5}{x^2 + 1}\, dx - 4 = 2 \int_{0}^{2} \frac{5}{x^2 + 1}\, dx - 4$$

$$= 10 \tan^{-1} x \Big|_0^2 - 4 = 10 \tan^{-1} 2 - 4 \text{ unidades al cuadrado}$$

Obsérvese el uso de la simetría par (Teorema 3(h) de la Sección 5.4) para sustituir el límite inferior de integración por 0. Es más fácil sustituir 0 en la primitiva que -2.

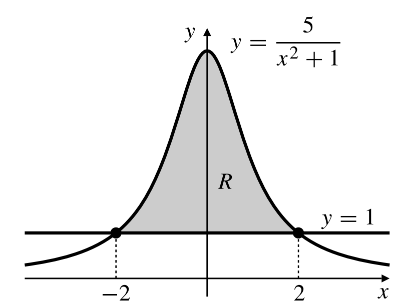


Figura 5.24

■

Ejemplo 5 Calcule el valor medio de $f(x) = e^{-x} + \cos x$ en el intervalo $[-\pi/2, 0]$.

Solución El valor medio es

$$\bar{f} = \frac{1}{0 - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)} \int_{-(\pi/2)}^{0} (e^{-x} + \cos x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} (-e^{-x} + \operatorname{sen} x)\Big|_{-(\pi/2)}^{0}$$

$$= \frac{2}{\pi} (-1 + 0 + e^{\pi/2} - (-1)) = \frac{2}{\pi} e^{\pi/2}$$

■

Hay que tener cuidado con las integrales de la forma $\int_a^b f(x)\, dx$, donde f no es continua en *todos* los puntos del intervalo $[a, b]$. El Teorema Fundamental no se aplica en esos casos.

Ejemplo 6 Sabemos que $\dfrac{d}{dx} \ln|x| = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$. Sin embargo, es *incorrecto* decir que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-1}^{1} = 0 - 0 = 0$$

aun cuando $1/x$ sea una función impar. De hecho, $1/x$ es indefinida y no tiene límite en $x = 0$, y no es integrable en $[-1, 0]$ ni en $[0, 1]$ (Figura 5.25). Obsérvese que

$$\lim_{c \to 0+} \int_c^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c \to 0+} -\ln c = \infty$$

por lo que las dos regiones sombreadas en la Figura 5.25 tienen área infinita. Las integrales de este tipo se denominan **integrales impropias**. Las consideraremos en la Sección 6.5.

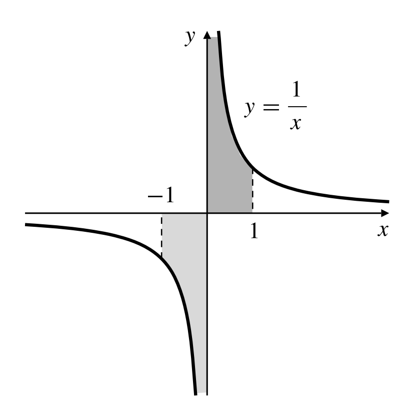


Figura 5.25

Presentaremos a continuación algunos ejemplos que ilustran la primera conclusión del Teorema Fundamental.

Ejemplo 7 Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $F(x) = \int_x^3 e^{-t^2}\,dt$, (b) $G(x) = x^2 \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt$, (c) $H(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\,dt$

Solución Para obtener las soluciones hay que aplicar la primera conclusión del Teorema Fundamental junto con otras reglas de diferenciación.

(a) Obsérvese que $F(x) = -\int_3^x e^{-t^2}\,dt$ (por el Teorema 3(b)). Por lo tanto, por el Teorema Fundamental, $F'(x) = -e^{-x^2}$.

(b) Por la Regla del Producto y la Regla de la Cadena,

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2x \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt + x^2 \frac{d}{dx}\int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt \\ &= 2x \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt + x^2 e^{-(5x)^2}\,(5) \\ &= 2x \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt + 5x^2 e^{-25x^2} \end{aligned}$$

(c) Se divide la integral en una diferencia de dos integrales en cada una de las cuales la variable x aparece sólo en el límite superior.

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt - \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt \\ H'(x) &= e^{-(x^3)^2}(3x^2) - e^{-(x^2)^2}(2x) \\ &= 3x^2 e^{-x^6} - 2x\,e^{-x^4} \end{aligned}$$

Los apartados (b) y (c) del Ejemplo 7 son ejemplos de las siguientes fórmulas que incorporan la Regla de la Cadena en la primera conclusión del Teorema Fundamental.

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

Ejemplo 8 Resuelva la **ecuación integral** $f(x) = 2 + 3 \int_4^x f(t)\,dt$.

Solución Diferenciando la ecuación integral se obtiene $f'(x) = 3f(x)$, la ecuación diferencial del crecimiento exponencial $f(x) = Ce^{3x}$. Sustituyendo ahora $x = 4$ en la ecuación integral se obtiene $f(4) = 2$. Así, $2 = Ce^{12}$, por lo que $C = 2e^{-12}$. Por tanto, la solución de la ecuación integral es $f(x) = 2e^{3x-12}$. ■

Concluiremos con un ejemplo que muestra cómo se puede utilizar el Teorema Fundamental para calcular límites de sumas de Riemann.

Ejemplo 9 Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right)$.

Solución En la suma aparecen valores de $\cos x$ en los extremos derechos de los n subintervalos de la partición

$$0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \ldots, \frac{n\pi}{2n}$$

del intervalo $[0, \pi/2]$. Como cada uno de los subintervalos de esta partición tiene longitud $\pi/(2n)$, y como $\cos x$ es continua en el intervalo $[0, \pi/2]$, tenemos, expresando el límite de una suma de Riemann como una integral (*véase* la Figura 5.26),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right) = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$$

La suma obtenida difiere de la suma de Riemann sólo en que no está el factor $\pi/2$. Por tanto,

$$\lim_{\pi\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}$$

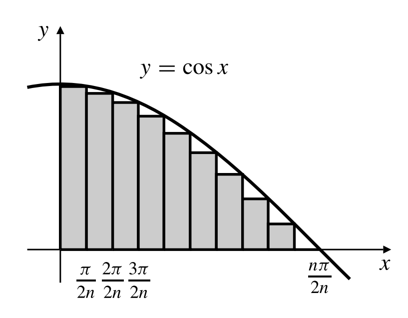


Figura 5.26

Ejercicios 5.5

Calcule las integrales definidas en los Ejercicios 1-20.

1. $\int_0^2 x^3\,dx$

2. $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

3. $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

4. $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

5. $\int_{-1}^2 (3x^2 - 4x + 2)\,dx$

6. $\int_1^2 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2}\right) dx$

7. $\int_{-2}^2 (x^2 + 3)^2\,dx$

8. $\int_4^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

9. $\int_{-\pi/4}^{-\pi/6} \cos x\,dx$

10. $\int_0^{\pi/3} \sec^2 \theta\,d\theta$

11. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{sen} \theta\,d\theta$

12. $\int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sen} u)\,du$

13. $\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,dx$

14. $\int_{-2}^2 (e^x - e^{-x})\,dx$

15. $\int_0^e a^x\,dx \quad (a > 0)$

16. $\int_{-1}^1 2^x\,dx$

17. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + x^2}$

18. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

*19. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ *20. $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$

Calcule el área de la región R especificada en los Ejercicios 21-32. Es útil realizar un dibujo de la región.

21. Limitada por $y = x^4$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

22. Limitada por $y = 1/x$, $y = 0$, $x = e$ y $x = e^2$.

23. Por encima de $y = x^2 - 4x$ y por debajo del eje x.

24. Limitada por $y = 5 - 2x - 3x^2$, $y = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.

25. Limitada por $y = x^2 - 3x + 3$ y $y = 1$.

26. Por debajo de $y = \sqrt{x}$ y por encima de $y = \dfrac{x}{2}$.

27. Por encima de $y = x^2$ y a la derecha de $x = y^2$.

28. Por encima de $y = |x|$ y por debajo de $y = 12 - x^2$.

29. Limitada por $y = x^{1/3} - x^{1/2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

30. Por debajo de $y = e^{-x}$ y por encima de $y = 0$, desde $x = -a$ hasta $x = 0$.

31. Por debajo de $y = 1 - \cos x$ y por encima de $y = 0$, entre dos intersecciones consecutivas de estas gráficas.

32. Por debajo de $y = x^{-1/3}$ y por encima de $y = 0$, desde $x = 1$ hasta $x = 27$.

Calcule las integrales de funciones continuas por tramos en los Ejercicios 33 y 34.

33. $\displaystyle\int_{0}^{3\pi/2} |\cos x|\, dx$ **34.** $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{x^2}\, dx$

En los Ejercicios 35-38, calcule los valores medios de las funciones dadas en los intervalos especificados.

35. $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ en $[0, 2]$

36. $f(x) = e^{3x}$ en $[-2, 2]$

37. $f(x) = 2^x$ en $[0, 1/\ln 2]$

38. $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < t \leqslant 3 \end{cases}$ en $[0, 3]$

Calcule las derivadas indicadas en los Ejercicios 39-46.

39. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{2}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ **40.** $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{t}^{3} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

41. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ **42.** $\displaystyle\frac{d}{dx}\, x^2 \int_{0}^{x^2} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du$

43. $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2}\, dy$ **44.** $\displaystyle\frac{d}{d\theta}\int_{\operatorname{sen}\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\, dx$

45. $\displaystyle\frac{d}{dx}\, F(\sqrt{x})$, si $F(t) = \displaystyle\int_{0}^{t} \cos(x^2)\, dx$.

46. $H'(2)$, si $H(x) = 3x \displaystyle\int_{4}^{x^2} e^{-\sqrt{t}}\, dt$

47. Resuelva la ecuación integral $f(x) = \pi\left(1 + \displaystyle\int_{1}^{x} f(t)\, dt\right)$.

48. Resuelva la ecuación integral $f(x) = 1 - \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\, dt$.

*49. Critique el siguiente cálculo erróneo:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

¿Dónde ocurre exactamente el error? ¿Por qué no es -2 un valor razonable de la integral?

*50. Utilice una integral definida para definir una función $F(x)$ cuya derivada sea $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}$ para todo x y que cumpla $F(17) = 0$.

*51. ¿Tiene la función $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{2x-x^2} \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$ un valor máximo o mínimo? Justifique su respuesta.

Calcule los límites en los Ejercicios 52-54.

*52. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 + \left(1+\frac{2}{n}\right)^5 + \cdots + \left(1+\frac{n}{n}\right)^5\right)$.

*53. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right)$.

*54. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \cdots + \frac{n}{2n^2}\right)$.

5.6 El método de sustitución

Como hemos visto, el cálculo de integrales definidas se realiza más fácilmente si se puede obtener una primitiva del integrando. En esta sección y en las Secciones 6.1-6.4 presentaremos algunas *técnicas de integración*, es decir, métodos para obtener primitivas de funciones. Aunque las técnicas que desarrollaremos se pueden utilizar para una amplia clase de funciones, no funcionarán con todas las funciones que podríamos desear integrar. Si la integral definida tiene un inte-

grando cuya primitiva es o bien imposible o bien muy difícil de obtener, se puede aproximar dicha integral definida por medios numéricos. En las Secciones 6.6-6.8 presentaremos técnicas para realizarlo.

Empezaremos por presentar una tabla con algunas integrales indefinidas conocidas. Estos resultados se obtuvieron durante nuestro desarrollo de fórmulas de diferenciación de funciones elementales. Es conveniente *memorizarlos*.

Algunas integrales elementales

1. $\int 1\,dx = x + C$

2. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

3. $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

4. $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$

5. $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$

7. $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \quad (r \neq -1)$

8. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

9. $\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

10. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax + C$

11. $\int \sec^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

12. $\int \csc^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$

13. $\int \sec ax \tan ax\,dx = \frac{1}{a}\sec ax + C$

14. $\int \csc ax \cot ax\,dx = -\frac{1}{a}\csc ax + C$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$

16. $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

17. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

18. $\int b^{ax}\,dx = \frac{1}{a\ln b}b^{ax} + C$

19. $\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{senh} ax + C$

20. $\int \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$

Nótese que las fórmulas 1-6 son casos especiales de la fórmula 7, que es válida en cualquier intervalo donde x^r tenga sentido. La fórmula de linealidad

$$\int (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int f(x)\,dx + B\int g(x)\,dx$$

hace posible integrar sumas y productos por constantes de funciones.

Ejemplo 1 **(Combinación de integrales elementales)**

(a) $\int (x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 6x - 7)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{8x^3}{3} - 3x^2 - 7x + C$

(b) $\int \left(5x^{3/5} - \frac{3}{2 + x^2}\right)dx = \frac{25}{8}x^{8/5} - \frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

(c) $\displaystyle\int (4\cos 5x - 5\,\text{sen}\, 3x)\, dx = \frac{4}{5}\,\text{sen}\, 5x + \frac{5}{3}\cos 3x + C$

(d) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\pi x} + a^{\pi x}\right) dx = \frac{1}{\pi}\ln|x| + \frac{1}{\pi \ln a}\, a^{\pi x} + C,\ (a > 0)$

Algunas veces es necesario modificar un integrando de forma que se pueda aplicar el método.

Ejemplo 2
$$\int \frac{(x+1)^3}{x}\, dx = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x}\, dx$$
$$= \int \left(x^2 + 3x + 3 + \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + \ln|x| + C$$

Cuando la integral no se puede calcular por simple inspección, como en el caso de los Ejemplos 1-2, hay que utilizar una o más técnicas especiales. La más importante de estas técnicas es el **método de sustitución**, que es la versión integral de la Regla de la Cadena. Si se expresa la Regla de la Cadena, $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$, en forma integral, se obtiene

$$\int f'(g(x))g'(x)\, dx = f(g(x)) + C$$

Obsérvese el siguiente formalismo que permitiría obtener la fórmula anterior aun cuando no supiéramos que es cierta:

Sea $u = g(x)$. Entonces $du/dx = g'(x)$ o, en forma diferencial, $du = g'(x)\, dx$. Entonces,

$$\int f'(g(x))g'(x)\, dx = \int f'(u)\, du = f(u) + C = f(g(x)) + C$$

Ejemplo 3 **(Ejemplos de sustitución)** Calcule las integrales indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,(3\ln x)}{x}\, dx$, y (c) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\, dx$

Solución

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$ Sea $u = x^2 + 1$
Entonces $du = 2x\, dx$ y
$x\, dx = \frac{1}{2}\, du$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = \ln\sqrt{x^2+1} + C$$

Ambas versiones de la respuesta final son igualmente aceptables.

(b) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,(3\ln x)}{x}\, dx$ Sea $u = 3\ln x$
Entonces $du = \dfrac{3}{x}\, dx$

$$= \frac{1}{3}\int \text{sen}\, u\, du = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos(3\ln x) + C$$

(c) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$ Sea $v = 1 + e^x$
Entonces $dv = e^x\,dx$

$$= \int v^{1/2}\,dv = \frac{2}{3}v^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C$$

■

En algunas ocasiones, las sustituciones apropiadas no son tan obvias como en el Ejemplo 3, y puede ser necesario modificar algebraicamente el integrando, transformándolo en una forma mejor para aplicar sustitución.

Ejemplo 4 Calcule (a) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$ y (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Solución

(a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$ Sea $t = x + 2$
Entonces $dt = dx$

$$= \int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \tan^{-1} t + C = \tan^{-1}(x+2) + C$$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

$$= \int \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}$$ Sea $u = e^{-x}$
Entonces $du = -e^{-x}\,dx$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\operatorname{sen}^{-1} u + C = -\operatorname{sen}^{-1}(e^{-x}) + C$$

■

No se puede *forzar* al método de sustitución para que funcione. Por ejemplo, no existe ninguna sustitución que mejore mucho la integral $\int x(2+x^7)^{1/5}\,dx$. Sin embargo, en la integral $\int x^6(2+x^7)^{1/5}\,dx$ se puede aplicar el cambio $u = 2 + x^7$. El cambio $u = g(x)$ es probable que funcione si $g'(x)$ es un factor del integrando.

El siguiente teorema simplifica el uso del método de sustitución en integrales definidas.

TEOREMA 6 **Sustitución en una integral definida**

Supongamos que g es una función diferenciable en el intervalo $[a, b]$, que cumple que $g(a) = A$ y $g(b) = B$. Supongamos también que f es una función continua en el rango de g. Entonces,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du$$

DEMOSTRACIÓN Sea F una primitiva de f: $F'(u) = f(u)$. Entonces,

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

por tanto,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F(B) - F(A) = F(u)\Big|_A^B = \int_A^B f(u)\,du$$

Ejemplo 5 Calcule la integral $I = \displaystyle\int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Solución **MÉTODO I.** Sea $u = \sqrt{x+1}$. Entonces $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}}$. Si $x = 0$, entonces $u = 1$; si $x = 8$, entonces $u = 3$. Por tanto,

$$I = 2\int_1^3 \cos u\,du = 2\,\mathrm{sen}\,u\Big|_1^3 = 2\,\mathrm{sen}\,3 - 2\,\mathrm{sen}\,1$$

MÉTODO II. Utilizaremos el mismo cambio que en el Método I, pero no transformaremos los límites de integración de valores en x en valores en u. Volveremos a la variable x antes de sustituir en los límites:

$$I = 2\int_{x=0}^{x=8} \cos u\,du = 2\,\mathrm{sen}\,u\Big|_{x=0}^{x=8} = 2\,\mathrm{sen}\sqrt{x+1}\Big|_0^8 = 2\,\mathrm{sen}\,3 - 2\,\mathrm{sen}\,1$$

Nótese que los límites *deben* escribirse como $x = 0$ y $x = 8$ en cualquier etapa donde la variable no sea x. Sería *incorrecto* escribir

$$I = 2\int_0^8 \cos u\,du$$

porque esto implicaría que u, y no x, varía entre 0 y 8. El Método I produce una solución más corta y, por tanto, es preferible. Sin embargo, en casos en que los límites transformados (los límites en u) sean muy complicados, es preferible utilizar el Método II.

Ejemplo 6 Calcule el área de la región limitada por $y = \left(2 + \mathrm{sen}\,\dfrac{x}{2}\right)^2 \cos\dfrac{x}{2}$, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución Como $y \geqslant 0$ cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi$, el área pedida es

$$A = \int_0^{\pi} \left(2 + \mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)^2 \cos\frac{x}{2}\,dx \qquad \text{Sea } v = 2 + \mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$$

$$\text{Entonces } dv = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$$

$$= 2\int_2^3 v^2\,dv = \frac{2}{3}v^3\Big|_2^3 = \frac{2}{3}(27 - 8) = \frac{38}{3} \text{ unidades al cuadrado}$$

Observación La condición de que f sea continua en el rango de la función $u = g(x)$ (para $a \leqslant x \leqslant b$) es esencial en el Teorema 6. Utilizando el cambio $u = x^2$ en la integral $\int_{-1}^{1} x\csc(x^2)\,dx$ se llega a una conclusión errónea:

$$\int_{-1}^{1} x\csc(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^1 \csc u\,du = 0$$

Aunque $x \csc(x^2)$ es una función impar, no es continua en 0, y la integral dada representa una diferencia de áreas *infinitas*. Si se supone que f es una función continua en un intervalo que contiene A y B, entonces es suficiente con saber que $u = g(x)$ es uno a uno y, por tanto, diferenciable. En este caso el rango de g estará entre A y B, por lo que se cumplirá la condición del Teorema 6.

Integrales trigonométricas

El método de sustitución resulta a menudo de utilidad en el cálculo de integrales trigonométricas. Comenzaremos por presentar las integrales de las cuatro funciones trigonométricas cuyas integrales no hemos presentado todavía. Aparecen en muchas aplicaciones y es conveniente memorizarlas.

Integrales de la tangente, cotangente, secante y cosecante

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C = -\ln|\csc x| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

Por supuesto, todas ellas se pueden comprobar diferenciando los miembros derechos de las ecuaciones. Las dos primeras se pueden calcular directamente expresando $\tan x$ y $\cot x$ en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, y utilizando el cambio adecuado. Por ejemplo,

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx \qquad \text{Sea } u = \cos x$$

$$\text{Entonces } du = -\operatorname{sen} x\,dx$$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x| + C$$

La integral de $\sec x$ se puede calcular expresándola de la forma

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\,dx$$

y utilizando el cambio $u = \sec x + \tan x$. La integral de $\csc x$ se puede calcular de forma similar (demuestre que las dos versiones dadas de la integral son equivalentes).

Consideraremos ahora integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$$

Si m o n son enteros positivos e impares, la integral se puede calcular fácilmente por sustitución. Por ejemplo, si $n = 2k + 1$, siendo k un entero, se puede utilizar la igualdad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para expresar la integral de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x(1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\, dx$$

que se puede integrar aplicando el cambio $u = \operatorname{sen} x$. De forma similar, se puede usar $u = \cos x$ si m es un entero impar.

Ejemplo 7 Calcule: (a) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^8 x\, dx$ y (b) $\int \cos^5 ax\, dx$.

Solución

(a) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^8 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^8 x \operatorname{sen} x\, dx$ Sea $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\, dx$

$$= -\int (1 - u^2)u^8\, du = \int (u^{10} - u^8)\, du$$

$$= \frac{u^{11}}{11} - \frac{u^9}{9} + C = \frac{1}{11}\cos^{11} x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C$$

(b) $\int \cos^5 ax\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 ax)^2 \cos ax\, dx$ Sea $u = \operatorname{sen} ax$, $du = a \cos ax\, dx$

$$= \frac{1}{a}\int (1 - u^2)^2\, du = \frac{1}{a}\int (1 - 2u^2 + u^4)\, du$$

$$= \frac{1}{a}\left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right) + C$$

$$= \frac{1}{a}\left(\operatorname{sen} ax - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 ax + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 ax\right) + C$$

Si las potencias de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son ambas pares, se pueden utilizar las *fórmulas del ángulo doble* (*véase* la Sección P.7):

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Ejemplo 8 **(Integración de potencias pares del seno y el coseno)** Verifique las fórmulas

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + C$$

Estas integrales aparecen frecuentemente y conviene recordarlas.

Solución Las dos integrales se pueden deducir de las correspondientes fórmulas del ángulo doble. Deduciremos la primera; la segunda es similar.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx \\ &= \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C \\ &= \frac{1}{2}(x+\operatorname{sen} x\cos x)+C \qquad (\text{ya que } \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x)\end{aligned}$$

Ejemplo 9 Calcule $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

Solución Debemos aplicar dos veces la fórmula del ángulo doble.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx \\ &= \frac{x}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx \\ &= \frac{x}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C \\ &= \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\end{aligned}$$

Nótese que no hace falta introducir la constante de integración C hasta que se calcula la última integral.

Utilizando las relaciones $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$ y $\csc^2 x = 1+\cot^2 x$, y uno de los cambios $u=\sec x$, $u=\tan x$, $u=\csc x$ o $u=\cot x$, se pueden calcular integrales de la forma

$$\int \sec^m x\tan^n x\,dx \qquad \text{o} \qquad \int \csc^m x\cot^n x\,dx$$

a menos que m sea impar y n sea par (si éste es el caso, las integrales se pueden calcular aplicando integración por partes, que presentaremos en la Sección 6.1).

Ejemplo 10 **(Integrales con secantes y tangentes)** Calcule las siguientes integrales:

(a) $\int \tan^2 x\,dx$, (b) $\int \sec^4 t\,dt$ y (c) $\int \sec^3 x\tan^3 x\,dx$

Solución

(a) $\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + C$

(b) $\int \sec^4 t\,dt = \int (1+\tan^2 t)\sec^2 t\,dt$ Sea $u=\tan t$, $du = \sec^2 t\,dt$

$$= \int (1+u^2)\,du = u+\frac{1}{3}u^3+C = \tan t+\frac{1}{3}\tan^3 t + C$$

(c) $\int \sec^3 x \tan^3 x\, dx$

$$= \int \sec^2 x(\sec^2 x - 1)\sec x \tan x\, dx \qquad \text{Sea } u = \sec x,\ du = \sec x \tan x\, dx$$

$$= \int (u^4 - u^2)\, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

Ejercicios 5.6

Calcule las integrales de los ejercicios 1-44. No olvide incluir la constante de integración en las integrales indefinidas. Sus respuestas puede ser diferentes de las que aparecen en la sección de Respuestas, pero, aun así, pueden ser correctas. Por ejemplo, al calcular $I = \int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ utilizando el cambio $u = \operatorname{sen} x$, se obtiene el resultado $I = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$; utilizando el cambio $u = \cos x$ se obtiene el resultado $I = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$. Escribiendo $I = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\, dx$ se llega a $I = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$. Todos los resultados son correctos, y se diferencian en los valores de la constante de integración C:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}$$

Siempre se puede comprobar el resultado de una integral indefinida diferenciándolo para obtener el integrando. Es a menudo una forma sencilla de comprobar nuestros resultados con los que se proporcionan en el texto, al final. Podemos encontrar integrales que no sepamos resolver, pero no deben cometerse errores en las que sí sepamos, puesto que los resultados se pueden comprobar fácilmente (es buena idea recordar esto en pruebas y exámenes).

1. $\int e^{5-2x}\, dx$

2. $\int \cos(ax + b)\, dx$

3. $\int \sqrt{3x + 4}\, dx$

4. $\int e^{2x}\operatorname{sen}(e^{2x})\, dx$

5. $\int \frac{x\, dx}{(4x^2 + 1)^5}$

6. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

7. $\int x e^{x^2}\, dx$

8. $\int x^2 2^{x^3+1}\, dx$

9. $\int \frac{\cos x}{4 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

10. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}}\, dx$

***11.** $\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\, dx$

12. $\int \frac{\ln t}{t}\, dt$

13. $\int \frac{ds}{\sqrt{4 - 5s}}$

14. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\, dx$

15. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{4 - t^4}}$

16. $\int \frac{x^2\, dx}{2 + x^6}$

***17.** $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

***18.** $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

19. $\int \tan x \ln \cos x\, dx$

20. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

21. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 2x - x^2}}$

23. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x\, dx$

24. $\int \operatorname{sen}^4 t \cos^5 t\, dt$

25. $\int \operatorname{sen} ax \cos^2 ax\, dx$

26. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

27. $\int \operatorname{sen}^6 x\, dx$

28. $\int \cos^4 x\, dx$

29. $\int \sec^5 x \tan x\, dx$

30. $\int \sec^6 x \tan^2 x\, dx$

31. $\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\, dx$

32. $\int \operatorname{sen}^{-2/3} x \cos^3 x\, dx$

33. $\int \cos x \operatorname{sen}^4(\operatorname{sen} x)\, dx$

34. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 \ln x \cos^3 \ln x}{x}\, dx$

35. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\, dx$

36. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\, dx$

37. $\int \csc^5 x \cot^5 x\, dx$

38. $\int \frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^8 x}\, dx$

39. $\int_0^4 x^3(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}\, dx$

40. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\operatorname{sen}(\pi \ln x)}{x}\, dx$

41. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\, dx$

42. $\int_{\pi/4}^{\pi} \operatorname{sen}^5 x\, dx$

43. $\int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t}$

44. $\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{2^{\operatorname{sen}\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

∗**45.** Utilice las relaciones
$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta$ y
$\text{sen}\,\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ como ayuda para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos x}\,dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \text{sen}\,x}\,dx$$

46. Calcule el área de la región limitada por $y = x/(x^2 + 16)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$.

47. Calcule el área de la región limitada por $y = x/(x^4 + 16)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$.

48. Exprese el área limitada por la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ como una integral definida. Haga un cambio que transforme la integral en otra que represente el área de un círculo, y calcúlela.

∗**49.** Utilice las fórmulas de suma de $\text{sen}\,(x \pm y)$ y $\cos\,(x \pm y)$ de la Sección P.6 para demostrar las siguientes igualdades:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos\,(x - y) + \cos\,(x + y)\right)$$

$$\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y = \frac{1}{2}\left(\cos\,(x - y) - \cos\,(x + y)\right)$$

$$\text{sen}\,x \cos y = \frac{1}{2}\left(\text{sen}\,(x + y) + \text{sen}\,(x - y)\right)$$

∗**50.** Utilice las igualdades demostradas en el Ejercicio 49 para calcular las siguientes integrales:

$$\int \cos ax \cos bx\,dx, \quad \int \text{sen}\,ax\,\text{sen}\,bx\,dx \quad \text{y} \quad \int \text{sen}\,ax \cos bx\,dx$$

∗**51.** Si m y n son enteros, demuestre que

(i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0$ si $m \neq n$

(ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,mx\,\text{sen}\,nx\,dx = 0$ si $m \neq n$

(iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,mx \cos nx\,dx = 0$

∗**52.** **(Coeficientes de Fourier)** Suponga que para algún entero positivo k,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos nx + b_n\,\text{sen}\,nx)$$

se cumple para todo x en $[-\pi, \pi]$. Utilice el resultado del Ejercicio 51 para demostrar que los coeficientes $a_m\,(0 \leqslant m \leqslant k)$ y $b_m\ (1 \leqslant m \leqslant k)$, que se denominan coeficientes de Fourier de f en $[-\pi, \pi]$, se expresan como

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,mx\,dx$$

5.7 Áreas de regiones planas

En esta sección revisaremos y ampliaremos el uso de integrales definidas para calcular áreas de regiones planas. Recuérdese que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mide el área comprendida entre la gráfica de f y el eje x, desde $x = a$ a $x = b$, pero trata como *negativa* cualquier parte del área que esté por debajo del eje x (se supone que $a < b$). Para calcular el área total limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$, hay que contar todas las áreas como positivas. Por tanto, hay que integrar el *valor absoluto* de f (*véase* la Figura 5.27):

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 \quad \text{y} \quad \int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2$$

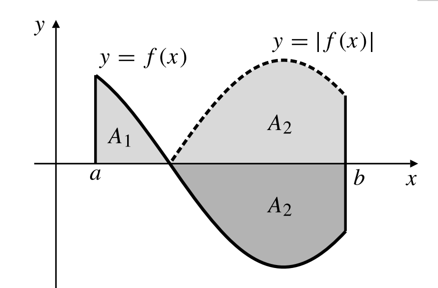


Figura 5.27

No existen «reglas» para integrar $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Hay que dividir la integral en intervalos donde $f(x) > 0$ (y entonces $|f(x)| = f(x)$) e intervalos donde $f(x) < 0$ (y entonces $|f(x)| = -f(x)$).

Ejemplo 1 El área limitada por $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3\pi/2$ (*véase* la Figura 5.28) es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{3\pi/2} |\cos x|\, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos x)\, dx \\ &= \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} - \operatorname{sen} x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \\ &= (1-0) - (-1-1) = 3 \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

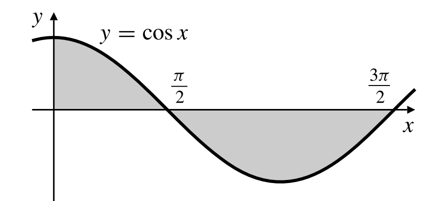
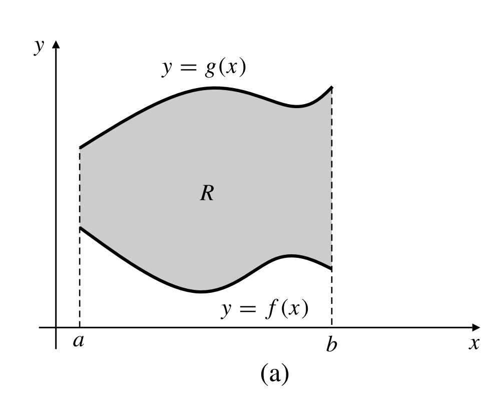


Figura 5.28

Área entre dos curvas

Suponga que una región plana R está limitada por las gráficas de dos funciones continuas, $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, tal como se muestra en la Figura 5.29(a). Suponga que $a < b$ y que $f(x) \leqslant g(x)$ en el intervalo $[a, b]$, de forma que la gráfica de f está por debajo de gráfica de g. Si $f(x) \geqslant 0$ en $[a, b]$, entonces el área A de R es el área por encima del eje x bajo la gráfica de g menos el área por encima del eje x bajo la gráfica de f:

$$A = \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$



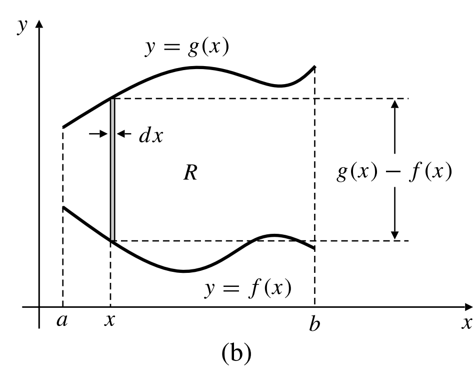


Figura 5.29
(a) Región R entre las dos gráficas.
(b) Un elemento de área de la región R.

Es útil ver esta fórmula como la expresión de A en forma de «suma» (es decir, integral) de *un número infinito* de **elementos de área**

$$dA = (g(x) - f(x))\, dx$$

correspondientes a los valores de x entre a y b. Cada elemento de área corresponde al área de un rectángulo vertical infinitamente estrecho, con anchura dx y altura $g(x) - f(x)$, situado en la po-

sición x (*véase* la Figura 5.29(b)). Incluso aunque f y g tomen valores negativos en el intervalo $[a, b]$, la interpretación y la fórmula del área resultante

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

siguen siendo válidas, siempre que $f(x) \leqslant g(x)$ en $[a, b]$, de forma que los elementos de área dA tengan área positiva. El uso de integrales para representar una determinada magnitud en forma de *suma* de *elementos diferenciales* (es decir, una suma de elementos infinitesimales) es una perspectiva de gran utilidad, que usaremos a menudo en el Capítulo 7. Por supuesto, lo que estamos haciendo realmente es interpretar la integral como el *límite* de la suma de Riemann adecuada.

De forma más general, si la restricción $f(x) \leqslant g(x)$ se elimina, entonces el rectángulo vertical de anchura dx en la posición x que se extiende entre las gráficas de f y g tiene una altura de $|f(x) - g(x)|$ y, por tanto, su área es

$$dA = |f(x) - g(x)|\,dx$$

(*Véase* la Figura 5.30). Entonces, el área total entre las dos gráficas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b > a$ se expresa como

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

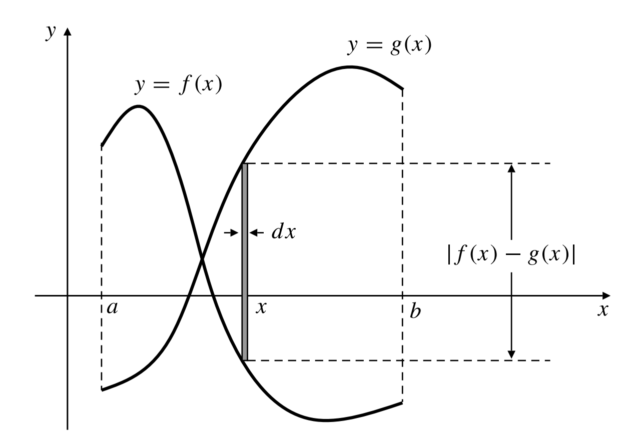


Figura 5.30 Un elemento de área de la región comprendida entre $y = f(x)$ y $y = g(x)$.

Para calcular esta integral, tenemos que determinar los intervalos en los que $f(x) > g(x)$ o $f(x) < g(x)$, y dividir la integral en una suma de integrales en cada uno de esos intervalos.

Ejemplo 2 Calcule el área de la región plana R limitada por las curvas $y = x^2 - 2x$ y $y = 4 - x^2$.

Solución Primero debemos encontrar la intersección de las curvas, de forma que debemos resolver la ecuación

$$x^2 - 2x = y = 4 - x^2$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$2(x - 2)(x + 1) = 0 \qquad \text{por lo que } x = 2 \text{ o } x = -1$$

Las curvas se muestran en la Figura 5.31, donde está sombreada la región (finita) comprendida entre ellas (en los problemas de este tipo siempre es conveniente realizar un dibujo parecido). Como $4 - x^2 \geqslant x^2 - 2x$ para $-1 \leqslant x \leqslant 2$, el área A de R se expresa como

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} ((4 - x^2) - (x^2 - 2x))\,dx \\
&= \int_{-1}^{2} (4 - 2x^2 + 2x)\,dx \\
&= \left(4x - \frac{2}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} \\
&= 4(2) - \frac{2}{3}(8) + 4 - \left(-4 + \frac{2}{3} + 1\right) = 9 \text{ unidades al cuadrado}
\end{aligned}
$$

Nótese que al representar el área como una integral *hay que restar la altura y de la curva inferior de la altura y de la curva superior* para obtener un elemento de área dA positivo. Si se resta de forma incorrecta se puede obtener un valor negativo del área.

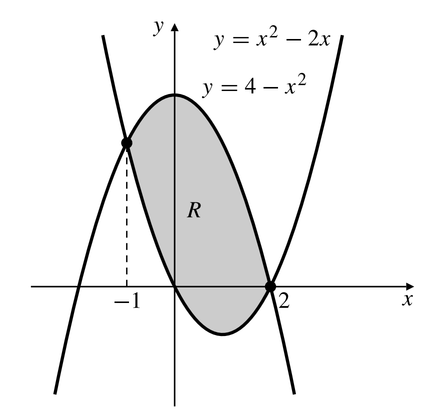


Figura 5.31

Ejemplo 3 Calcule el área total A entre las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$.

Solución La región se muestra sombreada en la Figura 5.32. Entre 0 y 2π, las gráficas del seno y del coseno se cortan en $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$. El área buscada es

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{0}^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx \\
&= (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_{0}^{\pi/4} - (\cos x + \operatorname{sen} x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} + (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_{5\pi/4}^{2\pi} \\
&= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \text{ unidades al cuadrado}
\end{aligned}
$$

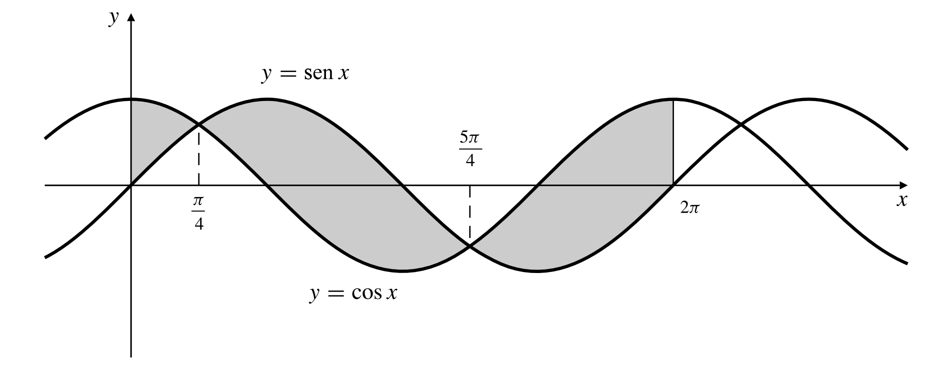
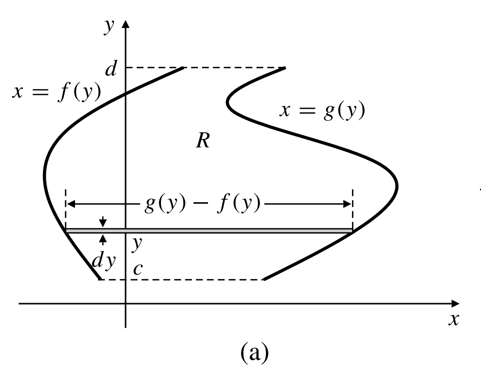


Figura 5.32

Algunas veces es más conveniente utilizar elementos de área horizontales en vez de elementos verticales, e integrar sobre un intervalo del eje y en vez de sobre un intervalo del eje x. Esto ocurre cuando la región cuya área deseamos calcular está limitada por curvas cuyas ecuaciones se expresan en forma de funciones de y. En la Figura 5.33(a), los elementos de área de la región R que está a la derecha de $x = f(y)$ y a la izquierda de $x = g(y)$, y entre las rectas horizontales $y = c$ e $y = d > c$, tiene como elemento de área $dA = (y(y) - f(y))\,dy$. Su área es

$$A = \int_c^d (g(y) - f(y))\,dy$$



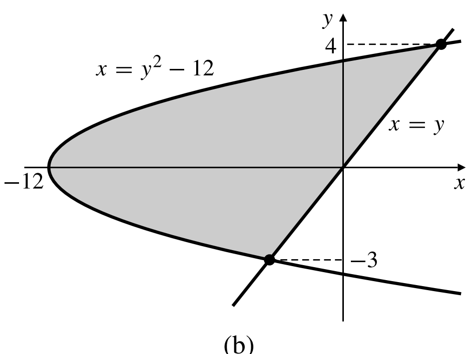


Figura 5.33
(a) Un elemento de área horizontal.
(b) La región finita limitada por $x = y^2 - 12$ y $x = y$.

Ejemplo 4 Calcule el área de la región plana que está a la derecha de la parábola $x = y^2 - 12$ y a la izquierda de la recta $y = x$, como se muestra en la Figura 5.33(b).

Solución Para calcular la intersección de las curvas:

$$y^2 - 12 = x = y$$
$$y^2 - y - 12 = 0$$
$$(y - 4)(y + 3) = 0 \qquad \text{por lo que } y = 4 \text{ o } y = -3$$

Obsérvese que $y^2 - 12 \leqslant y$ para $-3 \leqslant y \leqslant 4$. Por tanto, el área es

$$A = \int_{-3}^{4} (y - (y^2 - 12))\,dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 12y\right)\Bigg|_{-3}^{4} = \frac{343}{6} \text{ unidades al cuadrado}$$

Por supuesto, se podría haber obtenido el mismo resultado integrando en la dirección de x, pero la integral resultante habría sido más complicada:

$$A = \int_{-12}^{-3} (\sqrt{12 + x} - (-\sqrt{12 + x}))\,dx + \int_{-3}^{4} (\sqrt{12 + x} - x)\,dx$$

Se requieren integrales diferentes en los intervalos donde la región está limitada en su parte inferior por la parábola y por la recta. ■

Ejercicios 5.7

En los Ejercicios 1-16, dibuje y calcule el área de la región plana limitada por las curvas dadas.

1. $y = x$, $y = x^2$

2. $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

3. $y = x^2 - 5$, $y = 3 - x^2$

4. $y = x^2 - 2x$, $y = 6x - x^2$

5. $2y = 4x - x^2$, $2y + 3x = 6$

6. $x - y = 7$, $x = 2y^2 - y + 3$

7. $y = x^3$, $y = x$

8. $y = x^3$, $y = x^2$

9. $y = x^3$, $x = y^2$

10. $x = y^2$, $x = 2y^2 - y - 2$

11. $y = \dfrac{1}{x}$, $2x + 2y = 5$

12. $y = (x^2 - 1)^2$, $y = 1 - x^2$

13. $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{x^2+1}$ **14.** $y = \frac{4x}{3+x^2}$, $y = 1$

15. $y = \frac{4}{x^2}$, $y = 5 - x^2$ **16.** $x = y^2 - \pi^2$, $x = \operatorname{sen} y$

Calcule las áreas de las regiones descritas en los Ejercicios 17-28. Es útil dibujar la región antes de plantear la integral para calcular el área.

17. Limitada por $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$, y entre dos intersecciones consecutivas de esas curvas.

18. Limitada por $y = \operatorname{sen}^2 x$ y $y = 1$, y entre dos intersecciones consecutivas de esas curvas.

19. Limitada por $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen}^2 x$, entre $x = 0$ y $x = \pi/2$.

20. Limitada por $y = \operatorname{sen}^2 x$ y $y = \cos^2 x$, y entre dos intersecciones consecutivas de esas curvas.

21. Bajo $y = 4x/\pi$ y por encima de $y = \tan x$, entre $x = 0$ y la primera intersección de las curvas que esté a la derecha de $x = 0$.

22. Limitada por $y = x^{1/3}$ y la componente de $y = \tan(\pi x/4)$ que pasa por el origen.

23. Limitada por $y = 2$ y la componente de $y = \sec x$ que pasa por el punto (0, 1).

24. Limitada por $y = \sqrt{2}\cos(\pi x/4)$ y $y = |x|$.

25. Limitada por $y = \operatorname{sen}(\pi x/2)$ y $y = x$.

26. Limitada por $y = e^x$ y $y = x + 2$.

27. Calcule el área total encerrada por la curva $y^2 = x^2 - x^4$.

28. Calcule al área de la región cerrada de la curva $y^2 = x^4(2 + x)$ que está a la izquierda del origen.

29. Calcule el área de la región plana finita limitada por la curva $y = e^x$, la recta $x = 0$ y la tangente a $y = e^x$ en $x = 1$.

***30.** Calcule el área de la región plana finita limitada por la curva $y = x^3$ y la tangente a dicha curva en el punto (1, 1). *Sugerencia*: Calcule el otro punto en el que la tangente corta a la curva.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan los siguientes términos y frases?**
  - ◇ Notación sigma
  - ◇ Partición de un intervalo
  - ◇ Suma de Riemann
  - ◇ Integral definida
  - ◇ Integral indefinida
  - ◇ Función integrable
  - ◇ Elemento de área
  - ◇ Símbolo de evaluación
  - ◇ Desigualdad del triángulo para integrales
  - ◇ Función continua por tramos
  - ◇ Valor medio de una función f en el intervalo $[a, b]$
  - ◇ Método de sustitución
- **Enuncie el Teorema del Valor Medio para integrales.**
- **Enuncie el Teorema Fundamental del Cálculo.**
- **Enuncie tantas propiedades de la integral definida como sepa.**
- **¿Cuál es la relación entre la integral definida y la integral indefinida de una función f en el intervalo $[a, b]$?**
- **¿Cuál es la derivada de $\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt$ con respecto a x?**
- **¿Cómo se puede calcular el área comprendida entre las gráficas de dos funciones?**

Ejercicios de repaso

1. Demuestre que $\frac{2j+1}{j^2(j+1)^2} = \frac{1}{j^2} - \frac{1}{(j+1)^2}$, y a partir de aquí calcule

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{2j+1}{j^2(j+1)^2}$$

2. **(Pila de bolas)** Las pelotas de golf de un escaparate en una tienda de deportes se exponen formando una pirámide con una base rectangular de 40 bolas de largo y 30 bolas de ancho. La capa superior tiene unas medidas de 39 bolas por 29 bolas, y así sucesivamente. ¿Cuántas bolas hay en la pirámide?

3. Sea $P_n = \{x_0 = 1, x_1, x_2, ..., x_n = 3\}$ una partición de [1, 3] en n subintervalos de la misma longitud, y sea $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Evalúe $\int_1^3 f(x)\,dx$ calculando $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

4. Interprete $R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 + \frac{i}{n}}$ como una suma de Riemann para una cierta función f en el intervalo [0, 1]. A partir de aquí, calcule $\lim_{n\to\infty} R_n$.

Calcule las integrales de los Ejercicios 5-8 sin utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo.

5. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (2 - \operatorname{sen} x)\, dx$ **6.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{5 - x^2}\, dx$

7. $\displaystyle\int_1^3 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx$ **8.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\, dx$

Calcule los valores medios de las funciones de los Ejercicios 9 y 10 en los intervalos indicados.

9. $f(x) = 2 - \operatorname{sen} x^3$ en $[-\pi, \pi]$

10. $h(x) = |x - 2|$ en $[0, 3]$

Calcule el valor medio de las funciones de los Ejercicios 11-14.

11. $f(t) = \displaystyle\int_{13}^{t} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$ **12.** $f(x) = \displaystyle\int_{-13}^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1 + t^2}\, dt$

13. $g(s) = \displaystyle\int_{4s}^{1} e^{\operatorname{sen} u}\, du$ **14.** $g(\theta) = \displaystyle\int_{e^{\operatorname{sen}\theta}}^{e^{\cos\theta}} \ln x\, dx$

15. Resuelva la ecuación integral $2f(x) + 1 = 3\displaystyle\int_x^1 f(t)\, dt$.

16. Utilice el cambio $x = \pi - u$ para demostrar que

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx$$

para cualquier función f continua en el intervalo $[0, 1]$.

Calcule las áreas de las regiones planas finitas limitadas por las gráficas indicadas en los Ejercicios 17-22.

17. $y = 2 + x - x^2$ e $y = 0$

18. $y = (x - 1)^2$, $y = 0$ y $x = 0$

19. $x = y - y^4$ y $x = 0$ **20.** $y = 4x - x^2$ e $y = 3$

21. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos 2x$, $x = 0$ y $x = \pi/6$

22. $y = 5 - x^2$ y $y = 4/x^2$

Calcule las integrales de los Ejercicios 23-30.

23. $\displaystyle\int x^2 \cos(2x^3 + 1)\, dx$ **24.** $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$

25. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{9t^2 + t^4}\, dt$ **26.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(\pi x)\, dx$

27. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^u}{4 + e^{2u}}\, du$ **28.** $\displaystyle\int_1^{\sqrt[4]{e}} \frac{\tan^2 \pi \ln x}{x}\, dx$

29. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{2s + 1}}{\sqrt{2s + 1}}\, ds$ **30.** $\displaystyle\int \cos^2 \frac{t}{5} \operatorname{sen}^2 \frac{t}{5}\, dt$

31. Calcule el valor mínimo de $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2 - 2x} \frac{1}{1 + t^2}\, dt$.

¿Tiene F un valor máximo? ¿Por qué?

32. Calcule el valor máximo de $\int_a^b (4x - x^2)\, dx$ en los intervalos $[a, b]$ como $a < b$. ¿Cómo se sabe que ese valor máximo debe existir?

33. Un objeto se mueve por el eje x de forma que su posición en el instante t está dada por la función $x(t)$. En la Sección 2.11 definimos la velocidad media de un objeto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ como $v_{av} = (x(t_1) - x(t_0))/(t_1 - t_0)$. Demuestre que v_{av} es, de hecho, el valor medio de la función velocidad $v(t) = dx/dt$ en el intervalo $[t_0, t_1]$.

34. Si un objeto cae partiendo del reposo bajo aceleración gravitatoria constante, demuestre que su altura media durante un intervalo de tiempo T de su caída se expresa como $T/\sqrt{3}$.

35. Halle dos números x_1 y x_2 en el intervalo $[0, 1]$ con $x_1 < x_2$ tales que si $f(x)$ es un polinomio cúbico cualquiera (es decir, un polinomio de grado 3), entonces

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Problemas avanzados

1. Calcule las sumas de Riemman superior e inferior, $U(f, P_n)$ y $L(f, P_n)$ de $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 2]$ para la partición P_n con puntos de división $x_i = 2^{i/n}$ en $0 \leqslant i \leqslant n$. Verifique que $\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \ln 2 =$ $= \lim_{n\to\infty} L(f, P_n)$.

2. (a) Utilice las fórmulas de suma $\cos(a + b)$ y $\cos(a - b)$ para demostrar que

$$\cos\left(\left(j + \tfrac{1}{2}\right)t\right) - \cos\left(\left(j - \tfrac{1}{2}\right)t\right) = -2\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}t\right)\operatorname{sen}(jt)$$

y, a partir de ahí, deduzca que si $t/(2\pi)$ no es un entero, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen}(jt) = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$$

(b) Utilice el resultado del apartado (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$ como límite de una suma de Riemann.

3. (a) Utilice el método del Problema 2 para demostrar que si $t/(2\pi)$ no es un entero, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \cos(jt) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \operatorname{sen}\frac{t}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$$

(b) Utilice el resultado del apartado (a) para calcular $\int_0^{\pi/3} \cos x\, dx$ como límite de una suma de Riemann.

4. Sea $f(x) = 1/x^2$ y sea $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 2$, de forma que $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ es una partición de $[1, 2]$ en n subintervalos. Demuestre que $c_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$ está en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición, y calcule la suma de Riemann $\Sigma_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. ¿Qué implica esto sobre $\int_1^2 (1/x^2)\, dx$?

5. (a) Utilice inducción matemática para verificar que para todo entero positivo k, $\Sigma_{j=1}^{n} j^k =$
$$= \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + P_{k-1}(n),$$ siendo P_{k-1}, un polinomio de grado como máximo $k-1$. *Sugerencia*: Comience iterando la igualdad

$$(j+1)^{k+1} - j^{k+1} = (k+1)j^k + \frac{(k+1)k}{2}\, j^{k-1}$$
$$+ \text{ potencias inferiores de } j$$

para $j = 1, 2, 3, ..., k$ y más.

(b) Deduzca de (a) que $\displaystyle\int_0^a x^k\,dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$.

6. Sea C la curva cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y sea P un punto de C. La tangente a C en P se encuentra de nuevo con la curva C en el punto Q. La tangente a C en Q se encuentra de nuevo con la curva C en R. Demuestre que el área entre C y la tangente en Q es 16 veces el área entre C y la tangente en P.

7. Sea C la curva cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y sea P un punto de C. La tangente a C en P se encuentra de nuevo con la curva C en el punto Q. Sea R el punto de inflexión de C. Demuestre que R está entre P y Q en C, y que QR divide el área comprendida entre C y su tangente en P en dos áreas con una relación $16/11$.

8. **(Dobles tangentes)** La recta PQ es tangente a la gráfica C del polinomio de cuarto grado $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ en dos puntos distintos: $P = (p, f(p))$ y $Q = (q, f(q))$. Sean $U = (u, f(u))$ y $V = (v, f(v))$ los otros dos puntos donde la recta tangente a C en $T = ((p+q)/2, f((p+q)/2))$ se encuentra con la curva C. Si A y B son los dos puntos de inflexión de C, sean R y S los otros dos puntos donde AB se encuentra con la curva C (para más información, *véase* la Figura 5.34, y también el Problema Avanzado 17 del Capítulo 2).

(a) Calcule la relación entre el área limitada por UV y C y el área limitada por PQ y C.

(b) Demuestre que el área encerrada por RS y C es dividida en A y B en tres partes en relación $1:2:1$.

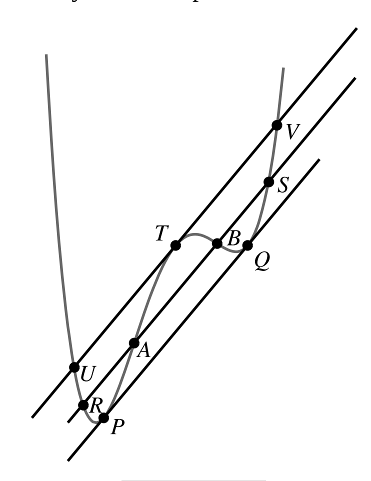


Figura 5.34



CAPÍTULO 6

Técnicas de integración

Soy muy bueno en cálculo diferencial e integral,
Conozco los nombres científicos de seres animaloides;
En pocas palabras, en todo lo vegetal, animal y mineral,
Soy el modelo de un moderno General.

William Schwenck Gilbert 1836-1911
de *The Pirates of Penzance*

Introducción Este capítulo está completamente dedicado al cálculo de integrales. Las cuatro primeras secciones son una continuación de nuestra búsqueda de métodos, que empezamos en la Sección 5.6, para obtener primitivas, y, por tanto, integrales definidas, por el Teorema Fundamental del Cálculo. La Sección 6.5 considera el problema del cálculo de integrales definidas de funciones en intervalos infinitos, o en intervalos donde las funciones no están acotadas. Las tres secciones restantes presentan técnicas de *integración numérica* que se pueden utilizar para obtener valores aproximados de integrales definidas cuando no se puede obtener una primitiva.

No es necesario conocer todo el material que se presenta en este capítulo para examinar las aplicaciones de la integración que se presentan en el Capítulo 7, aunque algunos ejemplos y ejercicios de dicho capítulo dependen de técnicas presentadas en éste.

6.1 Integración por partes

El siguiente método general que presentaremos para la obtención de primitivas se denomina **integración por partes**. De la misma forma que el método de sustitución se puede ver como el inverso de la diferenciación mediante la Regla de la Cadena, el método de integración por partes se puede ver como el inverso de la diferenciación mediante la Regla del Producto.

Supongamos que $U(x)$ y $V(x)$ son dos funciones diferenciables. De acuerdo con la Regla del Producto,

$$\frac{d}{dx}(U(x)V(x)) = U(x)\frac{dV}{dx} + V(x)\frac{dU}{dx}$$

Integrando los dos miembros de esta ecuación y ordenando términos, se obtiene

$$\int U(x)\frac{dV}{dx}\,dx = U(x)V(x) - \int V(x)\frac{dU}{dx}\,dx$$

o, de forma más simple,

$$\int U\,dV = UV - \int V\,dU$$

La fórmula anterior sirve como *modelo* para realizar la integración por partes, como veremos en los ejemplos que siguen. En cada aplicación del método, dividimos el integrando en un producto de dos partes, U y V', donde V' es fácil de integrar y $\int VU'\,dx$ es en general (pero no siempre) un integrando *más simple* que $\int UV'\,dx$. La técnica se denomina integración por partes porque sustituye una integral por la suma de un término integrado y otra integral que hay que calcular. Es decir, realiza sólo *parte* de la integración original.

Ejemplo 1 $\int xe^x\,dx$ — Sea $U = x$, $dV = e^x\,dx$; Entonces $dU = dx$, $V = e^x$

$= xe^x - \int e^x\,dx$ — (es decir, $UV - \int V\,dU$)

$= xe^x - e^x + C$

■

Obsérvese la forma en que se lleva a cabo la integración por partes. Indicaremos en el lateral qué valores toman U y dV y después calcularemos dU y V a partir de los anteriores. Sin embargo, realmente no sustituiremos U y V en la integral, sino que utilizaremos la fórmula $\int U\,dV = UV - \int V\,dU$ como un modelo o regla nemotécnica para sustituir la integral dada por la parte parcialmente integrada en la segunda línea.

Obsérvese también que si hubiéramos incluido una constante de integración con V, por ejemplo, $V = e^x + K$, esa constante se habría cancelado en el paso siguiente:

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= x(e^x + K) - \int (e^x + K)\,dx\\ &= xe^x + Kx - e^x - Kx + C = xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

En general, no se incluye una constante de integración con V o en el miembro derecho hasta que se calcula la última integral.

Es conveniente estudiar cuidadosamente todos los pasos del ejemplo siguiente, ya que muestran las diversas formas en las que se utiliza integración por partes e ilustran las diversas formas

de seleccionar U y dV en diversas situaciones. Una selección inadecuada puede producir una integral más difícil de resolver que la inicial. Es conveniente buscar un factor del integrando que se pueda integrar fácilmente, e incluir dx en dicho factor para formar dV. Seguidamente, se denomina U al factor restante del integrando. Algunas veces puede ser necesario hacer solamente $dV = dx$. Al dividir un integrando cuando se utiliza integración por partes, debe escogerse U y dV de forma que, si es posible, $V\,dU$ sea «más simple» (es decir, más fácil de integrar) que $U\,dV$.

Ejemplo 2 Utilice integración por partes para calcular:

(a) $\int \ln x\,dx$, (b) $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$, (c) $\int x \tan^{-1} x\,dx$, (d) $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$.

Solución

(a) $\int \ln x\,dx$ Sea $U = \ln x$, $dV = dx$
Entonces $dU = dx/x$, $V = x$

$$= x \ln x - \int x \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

(b) Esta vez debemos integrar por partes dos veces:

$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$ Sea $U = x^2$, $dV = \operatorname{sen} x\,dx$
Entonces $dU = 2x\,dx$, $V = -\cos x$

$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx$ Sea $U = x$, $dV = \cos x\,dx$
Entonces $dU = dx$, $V = \operatorname{sen} x$

$$= -x^2 \cos x + 2\left(x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx\right)$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C$$

(c) $\int x \tan^{-1} x\,dx$ Sea $U = \tan^{-1} x$, $dV = x\,dx$
Entonces $dU = dx/(1 + x^2)$, $V = \frac{1}{2}x^2$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C$$

(d) $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$ Sea $U = \operatorname{sen}^{-1} x$, $dV = dx$
Entonces $dU = dx/\sqrt{1 - x^2}$, $V = x$

$= x \operatorname{sen}^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$ Sea $u = 1 - x^2$
$du = -2x\,dx$

$$= x \operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= x \operatorname{sen}^{-1} x + u^{1/2} + C = x \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

■

Presentamos a continuación dos consejos útiles para escoger U y dV:

(i) Si el integrando contiene un polinomio multiplicado por una exponencial, un seno o un coseno, o alguna otra función fácil de integrar, haga U igual al polinomio y dV igual al resto del integrando.

(ii) Si el integrando contiene un logaritmo, una función trigonométrica inversa o alguna otra función que no sea fácilmente integrable pero cuya derivada se pueda calcular fácilmente, denomine U a esa función y haga dV igual al resto del integrando.

Por supuesto, estas «reglas» no tienen garantía. Pueden fallar y no ser útiles si «el resto» no tiene una forma adecuada. Existen muchas funciones de las que no se puede calcular primitiva utilizando ninguna técnica estándar, por ejemplo, e^{x^2}.

Los dos ejemplos que siguen ilustran un fenómeno muy útil que aparece frecuentemente. Puede ocurrir que tras aplicar una o dos veces integración por partes, y posiblemente alguna identidad conocida, la integral original aparezca en el miembro derecho. A menos que su coeficiente sea 1, tendremos así una ecuación de donde se puede despejar la integral buscada.

Ejemplo 3 Calcule $I = \int \sec^3 x\, dx$.

Solución Empezamos integrando por partes:

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^3 x\, dx \qquad \text{Sea } U = \sec x, \quad dV = \sec^2 x\, dx \\ &\qquad\qquad\qquad \text{Entonces } dU = \sec x \tan x\, dx, \quad V = \tan x \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x\,(\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx \\ &= \sec x \tan x - I + \ln|\sec x + \tan x| \end{aligned}$$

De la anterior ecuación se puede despejar la integral deseada I. Como $2I = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$, tenemos que

$$\int \sec^3 x\, dx = I = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

Este integral aparece frecuentemente en las aplicaciones, por lo que merece la pena memorizarla. ■

Ejemplo 4 Calcule $I = \int e^{ax} \cos bx\, dx$.

Solución Si $a = 0$ o $b = 0$, la integral es fácil de resolver, por lo que supondremos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax} \cos bx\, dx \qquad \text{Sea } U = e^{ax}, \quad dV = \cos bx\, dx \\ &\qquad\qquad\qquad \text{Entonces } dU = ae^{ax}\, dx, \quad V = (1/b)\,\mathrm{sen}\, bx \\ &= \frac{1}{b} e^{ax}\,\mathrm{sen}\, bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\, bx\, dx \\ &\qquad\qquad\qquad \text{Sea } U = e^{ax}, \quad dV = \mathrm{sen}\, bx\, dx \\ &\qquad\qquad\qquad \text{Entonces } dU = ae^{ax}\, dx, \quad V = -(\cos bx)/b \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos bx\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I$$

Por tanto,

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) I = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx + C_1$$

y

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = I = \frac{be^{ax} \operatorname{sen} bx + ae^{ax} \cos bx}{b^2 + a^2} + C$$

Obsérvese que, tras la primera integración por partes, obtuvimos una integral que era diferente, pero no más simple, que la integral original. En este punto podríamos haber optado por abandonar este método. Sin embargo, la perseverancia tiene su recompensa: una segunda integración por partes hace aparecer la integral original I en una ecuación de donde se puede despejar. Al escoger U como la exponencial en la primera integración por partes (podríamos haber escogido el coseno), debemos realizar la misma selección de U en la segunda integral por partes. Si hubiéramos cambiado de montura en mitad del proceso y hubiéramos decidido hacer U igual a la función trigonométrica en la segunda integración por partes, habríamos obtenido

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx + I$$

con lo que habríamos *deshecho* lo que conseguimos en el primer paso.

Si se desea calcular una integral definida por el método de integración por partes, no hay que olvidar incluir el símbolo de evaluación apropiado en el término integrado.

Ejemplo 5 **(Una integral definida)**

$$\int_1^e x^3 (\ln x)^2\, dx \qquad \begin{array}{lll} \text{Sea} & U = (\ln x)^2, & dV = x^3\, dx \\ \text{Entonces} & dU = 2\ln x(1/x)\, dx, & V = x^4/4 \end{array}$$

$$= \frac{x^4}{4}(\ln x)^2\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x\, dx \qquad \begin{array}{lll} \text{Sea} & U = \ln x, & dV = x^3\, dx \\ \text{Entonces} & dU = dx/x, & V = x^4/4 \end{array}$$

$$= \frac{e^4}{4}(1^2) - 0 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3\, dx\right)$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{8} + \frac{1}{8}\frac{x^4}{4}\Big|_1^e = \frac{e^4}{8} + \frac{e^4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{5}{32} e^4 - \frac{1}{32}$$

Fórmulas de reducción

Considere el problema de calcular $\int x^4 e^{-x}\, dx$. Como en el Ejemplo 1, podríamos utilizar integración por partes cuatro veces. Cada vez se reduciría la potencia de x en una unidad. Como esto es repetitivo y tedioso, es preferible el siguiente procedimiento. Para $n \geqslant 0$, sea

$$I_n = \int x^n e^{-x}\, dx$$

Deseamos calcular I_4. Si integramos por partes, se obtiene una fórmula de I_n en función de I_{n-1}:

$$I_n = \int x^n e^{-x}\,dx \qquad \text{Sea} \quad U = x^n, \quad dV = e^{-x}\,dx$$
$$\text{Entonces} \quad dU = nx^{n-1}\,dx, \quad V = -e^{-x}$$

$$= -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$$

La fórmula

$$I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$$

se denomina **fórmula de reducción** porque permite obtener el valor de la integral I_n en función de I_{n-1}, una integral con un valor reducido del exponente n. Empezando con

$$I_0 = \int x^0 e^{-x}\,dx = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$$

se puede aplicar cuatro veces la fórmula de reducción, con lo que se obtiene

$$I_1 = -xe^{-x} + I_0 = -e^{-x}(x+1) + C_1$$
$$I_2 = -x^2e^{-x} + 2I_1 = -e^{-x}(x^2+2x+2) + C_2$$
$$I_3 = -x^3e^{-x} + 3I_2 = -e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6) + C_3$$
$$I_4 = -x^4e^{-x} + 4I_3 = -e^{-x}(x^4+4x^3+12x^2+24x+24) + C_4$$

Ejemplo 6 Obtenga y utilice una fórmula de reducción para calcular

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

Solución Observe primero que

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

Hagamos ahora $n \geqslant 2$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cos x\,dx$$
$$U = \cos^{n-1} x, \quad dV = \cos x\,dx$$
$$dU = -(n-1)\cos^{n-2} x \operatorname{sen} x\,dx, \quad V = \operatorname{sen} x$$
$$= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x\,dx$$
$$= 0 - 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)\,dx$$
$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

Llevando al miembro izquierdo el término $-(n-1)I_n$, se obtiene $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, o

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}$$

que es la fórmula de reducción buscada. Es válida para $n \geqslant 2$, condición necesaria para asegurar que $\cos^{n-1}(\pi/2) = 0$. Si $n \geqslant 2$ es un *entero par*, tenemos que

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Si $n \geqslant 3$ es un entero *impar*, tenemos que

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Véase en el Ejercicio 38 donde se presenta una consecuencia interesante de estas fórmulas. ■

Ejercicios 6.1

Calcule las integrales de los Ejercicios 1-28.

1. $\int x \cos x \, dx$

2. $\int (x + 3)e^{2x} \, dx$

3. $\int x^2 \cos \pi x \, dx$

4. $\int (x^2 - 2x)e^{kx} \, dx$

5. $\int x^3 \ln x \, dx$

6. $\int x(\ln x)^3 \, dx$

7. $\int \tan^{-1} x \, dx$

8. $\int x^2 \tan^{-1} x \, dx$

9. $\int x \operatorname{sen}^{-1} x \, dx$

10. $\int x^5 e^{-x^2} \, dx$

11. $\int_0^{\pi/4} \sec^5 x \, dx$

12. $\int \tan^2 x \sec x \, dx$

13. $\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x \, dx$

14. $\int x e^{\sqrt{x}} \, dx$

***15.** $\int_{1/2}^{1} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x^2} \, dx$

16. $\int_0^1 \sqrt{x} \operatorname{sen}(\pi \sqrt{x}) \, dx$

17. $\int x \sec^2 x \, dx$

18. $\int x \operatorname{sen}^2 x \, dx$

19. $\int \cos(\ln x) \, dx$

20. $\int_1^e \operatorname{sen}(\ln x) \, dx$

21. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx$

22. $\int_0^4 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx$

23. $\int \arccos x \, dx$

24. $\int x \sec^{-1} x \, dx$

25. $\int_1^2 \sec^{-1} x \, dx$

***26.** $\int (\operatorname{sen}^{-1} x)^2 \, dx$

***27.** $\int x (\tan^{-1} x)^2 \, dx$

***28.** $\int x e^x \cos x \, dx$

29. Calcule el área por debajo de $y = e^{-x}$ y por encima de $y = 0$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi$.

30. Calcule el área de la región plana finita limitada por la curva $y = \ln x$, la recta $y = 1$ y la tangente a $y = \ln x$ en $x = 1$.

Fórmulas de reducción

31. Obtenga una fórmula de reducción para $I_n = \int (\ln x)^n \, dx$ y utilícela para calcular I_4.

32. Obtenga una fórmula de reducción para $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \operatorname{sen} x \, dx$ y utilícela para calcular I_6.

33. Obtenga una fórmula de reducción para $I_n = \int \operatorname{sen}^n x \, dx$ (siendo $n \geqslant 2$), y utilícela para calcular I_6 e I_7.

34. Obtenga una fórmula de reducción para $I_n = \int \sec^n x \, dx$ (siendo $n \geqslant 3$), y utilícela para calcular I_6 e I_7.

***35.** Haciendo

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int x \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} \, dx \end{aligned}$$

e integrando por partes la última integral, haciendo $U = x$, obtenga una fórmula de reducción para I_n. Utilice esta fórmula para calcular I_3.

$*$**36.** Si f es dos veces diferenciable en el intervalo $[a, b]$ y $f(a) = f(b) = 0$, demuestre que

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx = -2\int_a^b f(x)\,dx$$

Sugerencia: Aplique dos veces integración por partes al miembro izquierdo. Esta fórmula se utilizará en la Sección 6.6 para obtener una estimación del error con la fórmula de aproximación de la Regla del Trapecio.

$*$**37.** Si f y g son dos funciones con segunda derivada continua en el intervalo $[a, b]$ y si $f(a) = g(a) = f(b) = g(b) = 0$, demuestre que

$$\int_a^b f(x)g''(x)\,dx = \int_a^b f''(x)g(x)\,dx$$

¿Qué otros supuestos sobre los valores de f y g en a y b producirían el mismo resultado?

$*$**38. (El Producto de Wallis)** Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$.

(a) Utilice el hecho de que $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ para demostrar que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

(b) Utilice la fórmula de reducción $I_n = ((n-1)/n)I_{n-2}$ obtenida en el Ejemplo 6, junto con el resultado del apartado (a), para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$

(c) Combine el resultado del apartado (b) con las fórmulas explícitas de I_n (para n par e impar) obtenidas en el Ejemplo 6 para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Esta interesante fórmula en forma de producto para obtener el valor de π se debe al matemático inglés del siglo XIX John Wallis, y se conoce como Producto de Wallis.

6.2 Sustituciones inversas

Las sustituciones consideradas en la Sección 5.6 eran sustituciones directas en el sentido de que simplificaban un integrando sustituyendo una expresión de éste por una única variable. En esta sección consideraremos el procedimiento inverso: sustituiremos una variable de integración con una función de una nueva variable. Estas sustituciones, denominadas *sustituciones inversas*, podría parecer que en principio complican la integral. Es decir, sustituyendo $x = g(u)$ en la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se obtiene como resultado la integral más «complicada»

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(u))g'(u)\,du$$

Sin embargo, como veremos posteriormente, algunas veces estas sustituciones de hecho simplifican el integrando, transformando la integral inicial en otra que se puede calcular por simple inspección o a la que se pueden aplicar otras técnicas.

Las sustituciones trigonométricas inversas

Tres sustituciones inversas muy útiles son:

$$x = a\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad x = a\tan\theta \qquad \text{y} \qquad x = a\sec\theta$$

que corresponden a las sustituciones directas:

$$\theta = \mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{a}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a} \qquad \text{y} \qquad \theta = \sec^{-1}\frac{x}{a} = \cos^{-1}\frac{a}{x}$$

Sustitución inversa por el seno

Las integrales en las que aparece $\sqrt{a^2 - x^2}$ (siendo $a > 0$) se pueden reducir frecuentemente a una forma más simple mediante el cambio

$$x = a \operatorname{sen} \theta \qquad \text{o, en otros términos,} \qquad \theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}$$

Obsérvese que $\sqrt{a^2 - x^2}$ sólo tiene sentido si $-a \leqslant x \leqslant a$, lo que corresponde a $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Como $\cos \theta \geqslant 0$ para esos valores de θ, tenemos que

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta$$

Si $\cos \theta$ fuera no negativo, habríamos obtenido $a|\cos \theta|$. Si fuera necesario, las otras funciones trigonométricas de θ se pueden expresar en función de x examinando un triángulo rectángulo etiquetado de forma correspondiente a la sustitución (*véase* la Figura 6.1).

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \qquad \text{y} \qquad \tan \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

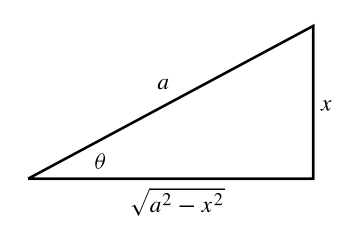


Figura 6.1

Ejemplo 1 Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{(5 - x^2)^{3/2}}\, dx$.

Solución Obsérvese la Figura 6.2.

$$\int \frac{1}{(5 - x^2)^{3/2}}\, dx \qquad \begin{array}{l} \text{Sea } x = \sqrt{5} \operatorname{sen} \theta \\ dx = \sqrt{5} \cos \theta \, d\theta \end{array}$$

$$= \int \frac{\sqrt{5} \cos \theta \, d\theta}{5^{3/2} \cos^3 \theta}$$

$$= \frac{1}{5} \int \sec^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{5} \tan \theta + C = \frac{1}{5} \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}} + C$$

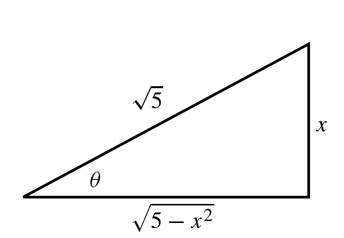


Figura 6.2

■

Ejemplo 2 Calcule el área del segmento circular sombreado en la Figura 6.3.

Solución El área es

$$A = 2 \int_b^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad \begin{array}{l} \text{Sea } x = a \operatorname{sen} \theta \\ dx = a \cos \theta \, d\theta \end{array}$$

$$= 2\int_{x=b}^{x=a} a^2 \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= a^2(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\Big|_{x=b}^{x=a} \qquad \text{(como en el Ejemplo 8 de la Sección 5.6)}$$

$$= a^2\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right)\Bigg|_b^a \qquad \text{(\textit{Véase} la Figura 6.1)}$$

$$= \frac{\pi}{2}a^2 - a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{b}{a} - b\sqrt{a^2-b^2} \text{ unidades al cuadrado}$$

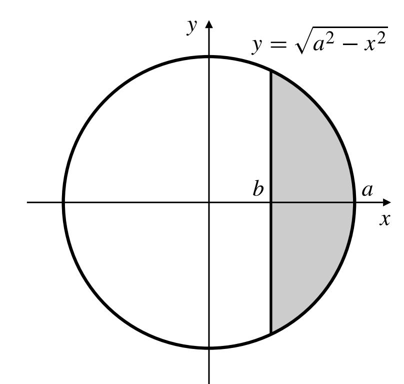


Figura 6.3

■

Sustitución inversa por la tangente

Las integrales en las que aparece $\sqrt{a^2 + x^2}$ o $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$ (siendo $a > 0$) a menudo se simplifican mediante el cambio

$$x = a\tan\theta \qquad \text{o, en otros términos,} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$$

Como x puede tomar cualquier valor real, tenemos que $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, por lo que $\sec\theta > 0$ y

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{1 + \tan^2\theta} = a\sec\theta$$

Otras funciones trigonométricas de θ se pueden expresar en función de x tomando como referencia un triángulo rectángulo con catetos a y x e hipotenusa $\sqrt{a^2 + x^2}$ (*véase* la Figura 6.4):

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad \text{y} \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

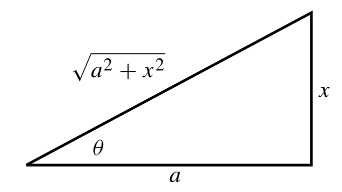


Figura 6.4

Ejemplo 3 Calcule (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}\,dx$ y (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1 + 9x^2)^2}\,dx$.

Solución Las Figuras 6.5 y 6.6 ilustran los apartados (a) y (b), respectivamente.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$ Sea $x = 2\tan\theta$, $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta}{2\sec\theta}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C$$

$$= \ln(\sqrt{4+x^2} + x) + C_1, \qquad \text{siendo } C_1 = C - \ln 2$$

Nótese que $\sqrt{4+x^2} + x > 0$ para todo x, por lo que no es necesario tomar valor absoluto.

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+9x^2)^2}\,dx$ Sea $3x = \tan\theta$, $3dx = \sec^2\theta\,d\theta$, $1 + 9x^2 = \sec^2\theta$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta}$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{6}(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + C$$

$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}(3x) + \frac{1}{6}\frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+9x^2}} + C$$

$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}(3x) + \frac{1}{2}\frac{x}{1+9x^2} + C$$

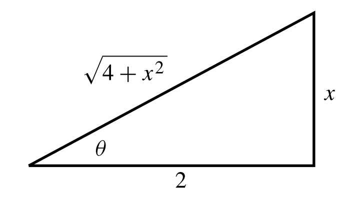


Figura 6.5

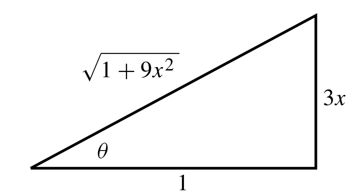


Figura 6.6

■

Sustitución inversa por la secante

Las integrales en las que aparece $\sqrt{x^2 - a^2}$ (siendo $a > 0$) a menudo se simplifican mediante el cambio

$$x = a\sec\theta \qquad \text{o, en otros términos,} \qquad \theta = \sec^{-1}\frac{x}{a}$$

Hay que tener cuidado con este cambio. Aunque

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\sec^2\theta - 1} = a\sqrt{\tan^2\theta} = a|\tan\theta|$$

no siempre se puede eliminar el valor absoluto de la tangente. Obsérvese que $\sqrt{x^2 - a^2}$ tiene sentido para $x \geqslant a$ y para $x \leqslant -a$:

$$\text{Si } x \geqslant a, \text{ entonces } 0 \leqslant \theta = \sec^{-1}\frac{x}{a} = \arccos\frac{a}{x} < \frac{\pi}{2}, \text{ y } \tan\theta \geqslant 0.$$

$$\text{Si } x \leqslant -a, \text{ entonces } \frac{\pi}{2} < \theta = \sec^{-1}\frac{x}{a} = \arccos\frac{a}{x} \leqslant \pi, \text{ y } \tan\theta \leqslant 0.$$

En el primer caso $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$; el segundo caso $\sqrt{x^2 - a^2} = -a\tan\theta$.

Ejemplo 4 Calcule $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, siendo $a > 0$.

Solución Supongamos por el momento que $x \geqslant a$. Si $x = a\sec\theta$, entonces $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ y $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$ (Figura 6.7). Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\ &= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1 \end{aligned}$$

siendo $C_1 = C - \ln a$. Si $x \leqslant -a$, sea $u = -x$ de forma que $u \geqslant a$ y $du = -dx$. Tenemos que

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = -\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C_1 \\ &= \ln\left|\frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - a^2}}\,\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right| + C_1 \\ &= \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{-a^2}\right| + C_1 = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_2 \end{aligned}$$

siendo $C_2 = C_1 - 2\ln a$. Entonces, en cualquier caso, tenemos que

$$I = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

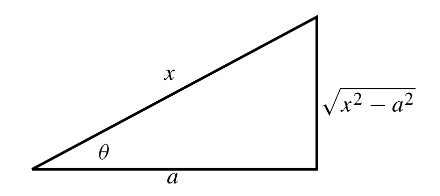


Figura 6.7

Completar el cuadrado

Las expresiones cuadráticas de la forma $Ax^2 + Bx + C$ aparecen a menudo en integrandos. Se pueden expresar en forma de suma o diferencia de cuadrados utilizando el procedimiento de completar el cuadrado, como hicimos para obtener la fórmula de las raíces de ecuaciones de segundo grado en la Sección P.6. En primer lugar se saca factor común A, de forma que la expre-

sión resultante empiece con $x^2 + 2bx$, siendo $2b = B/A$. Esos son los dos primeros términos de $(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$. Se suma y se resta entonces el tercer término $b^2 = B^2/4A^2$:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) \\ &= A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right) \\ &= A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A} \end{aligned}$$

Se debe realizar el cambio $u = x + \dfrac{B}{2A}$.

Ejemplo 5 Calcule (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx$ y (b) $\displaystyle\int \frac{x}{4x^2 + 12x + 13}\,dx$.

Solución

(a)
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (1 - 2x + x^2)}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} \qquad \text{Sea } u = x - 1,\ du = dx \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= \operatorname{sen}^{-1} u + C = \operatorname{sen}^{-1}(x - 1) + C \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \int \frac{x}{4x^2 + 12x + 13}\,dx &= \int \frac{x\,dx}{4\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{x\,dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 1} \qquad \text{Sea } u = x + (3/2),\ du = dx,\ x = u - (3/2) \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{u\,du}{u^2 + 1} - \frac{3}{8}\int \frac{du}{u^2 + 1} \qquad \text{En la primera integral sea } v = u^2 + 1,\ dv = 2u\,du \\ &= \frac{1}{8}\int \frac{dv}{v} - \frac{3}{8}\tan^{-1} u \\ &= \frac{1}{8}\ln|v| - \frac{3}{8}\tan^{-1} u + C \\ &= \frac{1}{8}\ln(4x^2 + 12x + 13) - \frac{3}{8}\tan^{-1}\left(x + \frac{3}{2}\right) + C_1 \end{aligned}$$

siendo $C_1 = C - (\ln 4)/8$. ■

Otras sustituciones inversas

Las integrales en las que aparece $\sqrt{ax+b}$ se pueden simplificar algunas veces mediante el cambio $ax + b = u^2$.

Ejemplo 6 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx$ Sea $2x = u^2$, $2\,dx = 2u\,du$

$$= \int \frac{u}{1+u}\,du$$

$$= \int \frac{1+u-1}{1+u}\,du$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+u}\right)du \qquad \text{Sea } v = 1+u,\ dv = du$$

$$= u - \int \frac{dv}{v} = u - \ln|v| + C$$

$$= \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C$$

Algunas veces, las integrales en las que aparece $\sqrt[n]{ax+b}$ se pueden simplificar mucho mediante la sustitución híbrida $ax+b = u^n$, $a\,dx = nu^{n-1}\,du$.

Ejemplo 7 $\displaystyle\int_{-1/3}^{2} \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx$ Sea $3x + 2 = u^3$, $3\,dx = 3u^2\,du$

$$= \int_1^2 \frac{u^3-2}{3u}\,u^2\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 (u^4 - 2u)\,du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5} - u^2\right)\bigg|_1^2 = \frac{16}{15}$$

Nótese el cambio de límites en esta integral definida. $u = 1$ cuando $x = -1/3$ y $u = 2$ cuando $x = 2$.

Si aparece más de una potencia fraccionaria, puede ser posible eliminarlas todas a la vez.

Ejemplo 8 Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x^{1/2}(1+x^{1/3})}\,dx.$

Solución Se pueden eliminar la raíz cuadrada y la raíz cúbica utilizando la sustitución inversa $x = u^6$. Se elige la potencia 6 porque 6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 3.

$$\int \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^{1/3})} \qquad \text{Sea } x = u^6,\ dx = 6u^5\,du$$

$$= 6\int \frac{u^5\,du}{u^3(1+u^2)} = 6\int \frac{u^2}{1+u^2}\,du = 6\int\left(1 + \frac{1}{1+u^2}\right)du$$

$$= 6(u - \tan^{-1} u) + C = 6(x^{1/6} - \tan^{-1} x^{1/6}) + C$$

El cambio tan $(\theta/2)$

Existe un tipo especial de cambio que puede transformar una integral cuyo integrando es una función racional de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ (es decir, un cociente de polinomios en $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$) en una función racional de x. El cambio es

$$x = \tan\frac{\theta}{2} \qquad \text{o, en otros términos,} \quad \theta = 2\tan^{-1} x$$

Obsérvese que

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sec^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

por tanto,

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{2x}{1+x^2}$$

Además, $dx = \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$, por lo que

$$d\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}\,dx = \frac{2\,dx}{1+x^2}$$

En resumen:

El cambio tan $(\theta/2)$

Si $x = \tan(\theta/2)$, entonces

$$\cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{y} \quad d\theta = \frac{2\,dx}{1+x^2}$$

Nótese que $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ y $d\theta$ sólo involucran funciones racionales de x. En la Sección 6.3 examinaremos técnicas generales para integrar funciones racionales de x.

Ejemplo 9 $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta$

Sea $x = \tan(\theta/2)$

$$\cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$d\theta = \frac{2\,dx}{1+x^2}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dx}{1+x^2}}{2+\frac{1-x^2}{1+x^2}} = 2\int \frac{1}{3+x^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\theta}{2}\right) + C$$

■

Ejercicios 6.2

Calcule las integrales de los Ejercicios 1-36.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4x^2}}$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$

7. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

9. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9+x^2}}$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+2x^2)^{5/2}}$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ $(x>2)$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$ $(x>a>0)$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x^2+4x+5)^2}$

20. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2-2x+3}$

21. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}}$

23. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(3-2x-x^2)^{3/2}}$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$

***27.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}\,dx$

28. $\displaystyle\int \sqrt{9+x^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^{1/3}}$

***31.** $\displaystyle\int \frac{1+x^{1/2}}{1+x^{1/3}}\,dx$

***32.** $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

33. $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

34. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

36. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

En los Ejercicios 37-39, calcule las integrales utilizando el cambio especial $x=\tan(\theta/2)$, como en el Ejemplo 9.

***37.** $\displaystyle\int \frac{d\theta}{2+\operatorname{sen}\theta}$

***38.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}$

***39.** $\displaystyle\int \frac{d\theta}{3+2\cos\theta}$

40. Calcule el área de la región limitada por $y=(2x-x^2)^{-1/2}$, $y=0$, $x=1/2$ y $x=1$.

41. Calcule el área de la región por debajo de $y=9/(x^4+4x^2+4)$ y por encima de $y=1$.

42. Calcule el valor medio de la función $f(x)=(x^2-4x+8)^{-3/2}$ en el intervalo $[0, 4]$.

43. Calcule el área del interior de la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ que está por encima de la recta $y=b$, $(-a\leqslant b\leqslant a)$.

44. Calcule el área común al interior de las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $(x-2)^2+y^2=4$.

45. Calcule el área del primer cuadrante que está por encima de la hipérbola $xy=12$ y en el interior de la circunferencia $x^2+y^2=25$.

46. Calcule el área a la izquierda de $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ y a la derecha de la recta $x=c$, con $-a\leqslant c\leqslant a$.

***47.** Calcule el área de la región limitada por el eje x, la hipérbola $x^2-y^2=1$, y la recta que va desde el origen al punto $(\sqrt{1+Y^2}, Y)$ en dicha hipérbola. (Suponga $Y>0$.) En particular, demuestre que si $Y=\operatorname{senh} t$ el área es $t/2$ unidades al cuadrado.

***48.** Calcule las integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

para $x>a>0$ utilizando el cambio $x=a\cosh u$. (*Sugerencia*: Revise las propiedades de las funciones hiperbólicas de la Sección 3.6). Ésta sustitución es una alternativa a $x=a\sec\theta$ cuando aparece $\sqrt{x^2-a^2}$.

6.3 Integrales de funciones racionales

En esta sección vamos a considerar integrales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

siendo P y Q polinomios. Recuérdese que un **polinomio** es una función P de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

siendo n un entero no negativo, a_0, a_1, a_2, ..., a_n constantes y $a_n \neq 0$. Denominamos a n **grado** del polinomio P. Un cociente $P(x)/Q(x)$ de dos polinomios se denomina **función racional** (*véase* la Sección P.6 donde se presentan los polinomios y las funciones racionales). En general sólo será necesario considerar funciones racionales $P(x)/Q(x)$ en las que el grado de P sea menor que el grado de Q. Si el grado de P es mayor o igual que el grado de Q, entonces se dividen los polinomios para expresar la fracción $P(x)/Q(x)$ en forma de un polinomio sumado con otra fracción $R(x)/Q(x)$ en la que R, el resto de la división, es siempre de grado menor que Q.

Ejemplo 1 Calcule $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1}\, dx$.

Solución El grado del numerador es 3 y el del denominador es 2, por lo que es necesario dividir los polinomios:

$$\begin{array}{r|l} & x + 3 \\ \hline x^2 + 1 & x^3 + 3x^2 \\ & x^3 \qquad\quad + x \\ \hline & \qquad 3x^2 - x \\ & \qquad 3x^2 \qquad + 3 \\ \hline & \qquad\qquad - x - 3 \end{array}$$

$$\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} = x + 3 - \frac{x + 3}{x^2 + 1}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} dx &= \int (x + 3)\, dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx - 3 \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} x^2 + 3x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - 3 \tan^{-1} x + C \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2 Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{2x - 1} dx$.

Solución El numerador y el denominador tienen el mismo grado, 1, por lo que es necesario de nuevo dividir. En este caso se puede realizar la división simplemente transformando el integrando:

$$\frac{x}{2x - 1} = \frac{1}{2} \frac{2x}{2x - 1} = \frac{1}{2} \frac{2x - 1 + 1}{2x - 1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2x - 1} \right)$$

Véase la Sección P.6. Tenemos entonces que

$$\int \frac{x}{2x - 1} dx = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{2x - 1} \right) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln|2x - 1| + C$$

■

En lo que sigue, supondremos siempre que se han realizado las divisiones previas necesarias y que el polinomio cociente ya se ha integrado. Por tanto, el problema básico que debemos considerar en esta sección es el siguiente:

El problema básico

Calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, siendo grado de $P <$ grado de Q.

La complejidad de este problema depende del grado de Q.

Denominadores lineales y cuadráticos

Supongamos que $Q(x)$ es de grado 1. Por tanto, $Q(x) = ax + b$, con $a \neq 0$. Entonces $P(x)$ debe tener grado 0 y ser, por tanto, una constante c. Tenemos que $P(x)/Q(x) = c/(ax + b)$. El cambio $u = ax + b$ produce

$$\int \frac{c}{ax + b}\,dx = \frac{c}{a}\int \frac{du}{u} = \frac{c}{a}\ln|u| + C$$

de modo que para $c = 1$:

Caso de denominador lineal

$$\int \frac{1}{ax + b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax + b| + C$$

Supongamos ahora que $Q(x)$ es una función cuadrática, es decir, de grado 2. A efectos de esta presentación, podemos suponer que $Q(x)$ es o bien de la forma $x^2 + a^2$ o bien de la forma $x^2 - a^2$, ya que completando el cuadrado y realizando el cambio de variable apropiado se puede reducir siempre el denominador a esta forma, como se demuestra en la Sección 6.2. Como $P(x)$ puede ser como máximo una función lineal, $P(x) = Ax + B$, esto nos lleva a considerar las cuatro integrales siguientes:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + a^2}, \qquad \int \frac{x\,dx}{x^2 - a^2}, \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \qquad \text{y} \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

Si $a = 0$, sólo hay dos integrales, que se pueden calcular fácilmente. En las dos primeras integrales se aplica el cambio $u = x^2 \pm a^2$. La tercera es una integral conocida, y la cuarta se puede resolver mediante el cambio $x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$ si $|x| < |a|$, o el cambio $x = a\sec\theta$ si $|x| > |a|$, pero se puede calcular también mediante otro método que veremos posteriormente. Los valores de las cuatro integrales se presentan a continuación:

Caso de denominador cuadrático

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2) + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2 - a^2| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$

Para obtener la última de las fórmulas anteriores, expresaremos el integrando como una suma de dos fracciones con denominadores lineales:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}=\frac{Ax+Aa+Bx-Ba}{x^2-a^2}$$

donde en el último paso se han sumado las dos fracciones. Si esta ecuación se cumple para todo x (excepto $x = \pm a$), entonces los numeradores de los dos miembros deben ser polinomios idénticos en x. La ecuación $(A+B)x+(Aa-Ba)=1=0x+1$ se cumplirá para todo x sólo si

$$\begin{aligned} A+B&=0 \qquad \text{(el coeficiente de } x\text{)}\\ Aa-Ba&=1 \qquad \text{(el término constante)}\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones lineales se obtiene el valor de las incógnitas A y B, $A = 1/(2a)$ y $B = -1/(2a)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^2-a^2}&=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}\\ &=\frac{1}{2a}\ln|x-a|-\frac{1}{2a}\ln|x+a|+C\\ &=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\end{aligned}$$

Descomposición en fracciones simples

La técnica que acabamos de utilizar, donde se expresa una fracción compleja como suma de fracciones más sencillas, se denomina **método de descomposición en fracciones simples**. Supongamos un polinomio $Q(x)$ de grado n, de forma que su término de mayor grado es x^n (con coeficiente 1). Supongamos además que Q se puede descomponer en un producto de n factores lineales *distintos* (de grado 1), por ejemplo,

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

con $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, $i \leqslant i$, $j \leqslant n$. Si $P(x)$ es un polinomio de grado inferior a n, entonces $P(x)/Q(x)$ admite una **descomposición en fracciones simples** de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

para ciertos valores de las constantes A_1, A_2, ..., A_n. No presentaremos aquí ninguna demostración formal de esta afirmación, ya que pertenece al ámbito de los cursos de álgebra (*véase* el Teorema 1 posterior donde se plantea un resultado más general).

Sabiendo que $P(x)/Q(x)$ admite una descomposición en fracciones simples, como se ha comentado anteriormente, existen dos métodos para determinar las constantes A_1, A_2, ..., A_n. El primero de ellos, que se generaliza más fácilmente a descomposiciones más complicadas que se presentarán posteriormente, consiste en sumar las fracciones de la descomposición y obtener una nueva fracción $S(x)/Q(x)$ con numerador $S(x)$, un polinomio de grado una unidad menor que $Q(x)$. Esta nueva fracción será idéntica a la fracción original $P(x)/Q(x)$ si S y P son polinomios idénticos. Las constantes A_1, A_2, ..., A_n se determinan resolviendo el sistema de n ecuaciones lineales que resulta de igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en los polinomios S y P.

El segundo método se basa en la siguiente observación: si se multiplica la descomposición en fracciones simples por $x - a_j$, se obtiene

$$(x - a_j)\,\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$= A_1\,\frac{x - a_j}{x - a_1} + \cdots + A_{j-1}\,\frac{x - a_j}{x - a_{j-1}} + A_j + A_{j+1}\,\frac{x - a_j}{x - a_{j+1}} + \cdots + A_n\,\frac{x - a_j}{x - a_n}$$

Todos los términos del miembro derecho se anulan en $x = a_j$, excepto el término j-ésimo, A_j. Por tanto,

$$A_j = \lim_{x \to a_j} (x - a_j)\,\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$= \frac{P(a_j)}{(a_j - a_1)\cdots(a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1})\cdots(a_j - a_n)}$$

para $1 \leqslant j \leqslant n$. En la práctica, el método se utiliza para obtener el coeficiente A_j simplificando el factor $x - a_j$ en el denominador de $P(x)/Q(x)$ y particularizando la expresión resultante en $x = a_j$.

Ejemplo 3 Calcule $\displaystyle\int \frac{(x+4)}{x^2 - 5x + 6}\,dx$.

Solución La descomposición en fracciones simples tiene la forma

$$\frac{x+4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

Calcularemos A y B por los dos métodos comentados anteriormente.

MÉTODO I. Se suman las fracciones simples

$$\frac{x+4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{Ax - 3A + Bx - 2B}{(x-2)(x-3)}$$

y se igualan los coeficientes de x y los términos constantes en los numeradores de ambos miembros, con lo que se obtiene

$$A + B = 1 \quad \text{y} \quad -3A - 2B = 4$$

Resolviendo esas ecuaciones se llega a $A = -6$ y $B = 7$.

MÉTODO II. Para calcular A, se elimina el término $x - 2$ del denominador de la expresión $P(x)/Q(x)$ y se particulariza el resultado en $x = 2$. La obtención de B es similar.

$$A = \left.\frac{x+4}{x-3}\right|_{x=2} = -6 \quad \text{y} \quad B = \left.\frac{x+4}{x-2}\right|_{x=3} = 7$$

En cualquier caso tenemos

$$\int \frac{(x+4)}{x^2 - 5x + 6}\,dx = -6\int \frac{1}{x-2}\,dx + 7\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C$$

■

Ejemplo 4 Calcule $I = \displaystyle\int \frac{x^3 + 2}{x^3 - x}\,dx.$

Solución Como el grado del numerador no es menor que el del denominador, hay que dividir:

$$I = \int \frac{x^3 - x + x + 2}{x^3 - x}\,dx = \int \left(1 + \frac{x + 2}{x^3 - x}\right) dx = x + \int \frac{x + 2}{x^3 - x}\,dx$$

Ahora se puede utilizar el método de descomposición en fracciones simples.

$$\frac{x + 2}{x^3 - x} = \frac{x + 2}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}$$
$$= \frac{A(x^2 - 1) + B(x^2 + x) + C(x^2 - x)}{x(x - 1)(x + 1)}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \qquad \text{(coeficiente de } x^2\text{)} \\ B - C &= 1 \qquad \text{(coeficiente de } x\text{)} \\ -A \qquad &= 2 \qquad \text{(término constante)} \end{aligned}$$

Se deduce entonces que $A = -2$, $B = 3/2$ y $C = 1/2$. Podemos obtener también los mismos valores utilizando el Método II del ejemplo anterior:

$$A = \left.\frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)}\right|_{x=0} = -2, \qquad B = \left.\frac{x + 2}{x(x + 1)}\right|_{x=1} = \frac{3}{2} \qquad \text{y}$$
$$C = \left.\frac{x + 2}{x(x - 1)}\right|_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

Finalmente, tenemos

$$I = x - 2\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x - 1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x + 1}\,dx$$
$$= x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x - 1| + \frac{1}{2}\ln|x + 1| + C$$

■

A continuación consideraremos una función racional cuyo denominador tiene un factor cuadrático equivalente a una suma de cuadrados y que, por tanto, no se puede descomponer en un producto de factores lineales reales.

Ejemplo 5 Calcule $\displaystyle\int \frac{2 + 3x + x^2}{x(x^2 + 1)}\,dx.$

Solución Nótese que el numerador es de grado 2 y el denominador es de grado 3, por lo que no es necesaria la división previa. Si se descompone el integrando en una suma de dos fracciones más simples, el denominador de una de ellas será x y el de la otra $x^2 + 1$. La forma apropiada de la descomposición resulta ser

$$\frac{2 + 3x + x^2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)}$$

Nótese que hemos utilizado un numerador lineal (de grado 1) en el término correspondiente al denominador cuadrático (de grado 2). Igualando los coeficientes de los dos numeradores, se obtiene

$$\begin{aligned} A + B \qquad &= 1 \qquad \text{(coeficiente de } x^2\text{)} \\ C &= 3 \qquad \text{(coeficiente de } x\text{)} \\ A \qquad &= 2 \qquad \text{(término constante)} \end{aligned}$$

Por tanto, $A = 2$, $B = -1$ y $C = 3$. Tenemos, entonces,

$$\int \frac{2 + 3x + x^2}{x(x^2 + 1)}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\tan^{-1}x + C$$

Hay que resaltar que la suma de fracciones es el único método razonable que utiliza valores reales para determinar las constantes A, B y C. Podríamos haber determinado A utilizando el Método II del Ejemplo 3, pero habríamos tenido que utilizar números complejos.

Ejemplo 6 Calcule $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$.

Solución En este caso $Q(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. El último factor no tiene raíces reales, por lo que no se puede factorizar en un producto de factores reales lineales. Tenemos que

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{A(x^2-x+1) + B(x^2+x) + C(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\begin{aligned} A + B \qquad &= 0 \qquad \text{(coeficiente de } x^2\text{)}\\ -A + B + C &= 0 \qquad \text{(coeficiente de } x\text{)}\\ A \qquad + C &= 1 \qquad \text{(término constante)} \end{aligned}$$

Por tanto, $A = 1/3$, $B = -1/3$ y $C = 2/3$, con lo que

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \qquad \begin{array}{l}\text{Sea } u = x - 1/2\\ du = dx\end{array}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{u}{u^2 + \frac{3}{4}}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(u^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Sólo es necesario un refinamiento final del método de descomposición en fracciones simples. Si alguno de los factores lineales o cuadráticos de $Q(x)$ se *repite* (por ejemplo, m veces), entonces la descomposición en fracciones simples de $P(x)/Q(x)$ requiere m fracciones distintas correspondientes a ese factor. Los exponentes de los denominadores de esas fracciones van aumentando desde 1 hasta m, y los numeradores son todos constantes cuando el factor que se repite es lineal o lineales cuando el factor que se repite es cuadrático (*véase* el Teorema 1 posterior).

Ejemplo 7 Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$.

Solución En este caso, la descomposición en fracciones simples adecuada es

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx}{x(x-1)^2}$$

Igualando los coeficientes de x^2, x y 1 en los denominadores de los dos miembros, se obtiene

$$\begin{aligned} A + B \qquad &= 0 \qquad (\text{coeficiente de } x^2)\\ -2A - B + C &= 0 \qquad (\text{coeficiente de } x)\\ A \qquad\quad &= 1 \qquad (\text{término constante}) \end{aligned}$$

Por tanto, $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ y

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx\\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\\ &= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

■

Ejemplo 8 Calcule $I = \displaystyle\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}\,dx$.

Solución El denominador se puede factorizar como $x(2x^2+1)^2$, por lo que la descomposición en fracciones simples apropiada es

$$\frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1} + \frac{Dx+E}{(2x^2+1)^2} = \frac{A(4x^4+4x^2+1) + B(2x^4+x^2) + C(2x^3+x) + Dx^2 + Ex}{x(2x^2+1)^2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 4A + 2B \qquad\qquad &= 0 \qquad (\text{coeficiente de } x^4)\\ 2C \qquad\quad &= 0 \qquad (\text{coeficiente de } x^3)\\ 4A + B \quad + D \quad &= 1 \qquad (\text{coeficiente de } x^2)\\ C \quad + E &= 0 \qquad (\text{coeficiente de } x)\\ A \qquad\qquad &= 2 \qquad (\text{término constante}) \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $A = 2$, $B = -4$, $C = 0$, $D = -3$ y $E = 0$.

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{x\,dx}{2x^2+1} - 3\int \frac{x\,dx}{(2x^2+1)^2} \qquad \begin{array}{l}\text{Sea } u = 2x^2+1\\ du = 4x\,dx\end{array}\\ &= 2\ln|x| - \int \frac{du}{u} - \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2}\\ &= 2\ln|x| - \ln|u| + \frac{3}{4u} + C\\ &= \ln\left(\frac{x^2}{2x^2+1}\right) + \frac{3}{4}\,\frac{1}{2x^2+1} + C \end{aligned}$$

■

El teorema que sigue resume los diversos aspectos del método de descomposición en fracciones simples.

TEOREMA 1 **Descomposición en fracciones simples de funciones racionales**

Sean P y Q polinomios con coeficientes reales, y supongamos que el grado de P es menor que el grado de Q. Entonces:

(a) $Q(x)$ se puede descomponer en el producto de una constante K, factores lineales reales de la forma $x - a_i$, y factores reales cuadráticos de la forma $x^2 + b_i x + c_i$ que no tienen raíces reales. Los factores lineales y cuadráticos se pueden repetir:

$$Q(x) = K(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_j)^{m_j}(x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1} \cdots (x^2 + b_k x + c_k)^{n_k}$$

El grado de Q es $m_1 + m_2 + \cdots + m_j + 2n_1 + 2n_2 + \cdots + 2n_k$.

(b) La función racional $P(x)/Q(x)$ se puede expresar como una suma de fracciones simples de la siguiente forma:

(i) Por cada factor $(x - a)^m$ de $Q(x)$, la descomposición contiene una suma de fracciones de la forma

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x - a)^m}$$

(ii) Por cada factor $(x^2 + bx + c)^n$ de $Q(x)$, la descomposición contiene una suma de fracciones de la forma

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + bx + x} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + bx + c)^n}$$

Las constantes $A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_n, C_1, C_2, ..., C_n$ se pueden determinar sumando las fracciones de la descomposición e igualando los coeficientes de potencias iguales de x en el numerador de la suma con los de $P(x)$.

No proporcionaremos aquí una demostración de este teorema.

Nótese que el apartado (a) no nos indica cómo obtener los factores de $Q(x)$, sino que sólo nos dice la forma que tienen. Es necesario conocer los factores de Q antes de utilizar la descomposición en fracciones simples para integrar la función racional $P(x)/Q(x)$. La descomposición en fracciones simples se utiliza también en otras situaciones matemáticas, en concreto para resolver ciertos problemas en los que intervienen ecuaciones diferenciales.

Ejercicios 6.3

Calcule las integrales de los Ejercicios 1-34.

1. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{2x - 3}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 4x}$

3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\pi x + 2}$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x - 4}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 9}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - x^2}$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{b^2 - a^2 x^2}$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2 + x - 2}$

10. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3x^2 + 8x - 3}$

11. $\displaystyle\int \frac{x - 2}{x^2 + x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + 9x}$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - 6x + 9x^2}$

14. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{2 + 6x + 9x^2}$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{6x - 9x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 1}{12 + 7x + x^2}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)}$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - a^4}$

***19.** $\int \frac{x^3\,dx}{x^3 - a^3}$

20. $\int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + 2x}$

21. $\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 3x}$

22. $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 8}\,dx$

23. $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$

24. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$

25. $\int \frac{dx}{x^4 - 3x^3}$

26. $\int \frac{x\,dx}{(x^2 - x + 1)^2}$

***27.** $\int \frac{t\,dt}{(t + 1)(t^2 + 1)^2}$

***28.** $\int \frac{dt}{(t - 1)(t^2 - 1)^2}$

***29.** $\int \frac{dx}{x(3 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}$

***30.** $\int \frac{dx}{e^{2x} - 4e^x + 4}$

***31.** $\int \frac{dx}{x(1 + x^2)^{3/2}}$

***32.** $\int \frac{dx}{x(1 - x^2)^{3/2}}$

***33.** $\int \frac{dx}{x^2(x^2 - 1)^{3/2}}$

***34.** $\int \frac{d\theta}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)}$

***35.** Suponga que P y Q son polinomios tales que el grado de P es menor que el grado de Q. Si

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

siendo $a_i \neq a_j$ si $i \neq j\ (1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$, de forma que $P(x)/Q(x)$ tiene la siguiente descomposición en fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

demuestre que

$$A_j = \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

Esto proporciona otro método para calcular las constantes de la descomposición en fracciones simples si los factores del denominador son lineales y distintos.

6.4 Integración mediante programas de computador o tablas

Aunque toda persona que utilice el cálculo debe estar familiarizada con las técnicas básicas de integración, de la misma forma que cualquiera que use la aritmética debe estar familiarizado con las técnicas de multiplicación y división, la tecnología evoluciona rápidamente y, en muchos casos, evita la necesidad de calcular integrales largas y complicadas mediante dichas técnicas. De hecho, hoy en día existen varios programas de computador que pueden manejar expresiones matemáticas simbólicas (en vez de numéricas), y que pueden realizar, con poca o ninguna intervención por nuestra parte, los diversos pasos y cálculos de límites que se requieren para obtener y simplificar tanto derivadas como integrales. Se puede ahorrar mucho esfuerzo y tiempo haciendo que el computador calcule una integral complicada como

$$\int \frac{1 + x + x^2}{(x^4 - 1)(x^4 - 16)^2}\,dx$$

en vez de hacerla a mano utilizando descomposición en fracciones simples. Incluso sin la ayuda del computador, se pueden utilizar tablas de integrales estándar como las que aparecen al final de este libro como ayuda en el cálculo de integrales complicadas. No obstante, el uso de computadores o de tablas puede requerir que realicemos algunas simplificaciones previas a mano, y por supuesto puede requerir que seamos capaces de interpretar las respuestas que se obtienen. Presentaremos a continuación algunos ejemplos.

Uso de Maple para integración

Los programas matemáticos de computador son capaces de calcular simbólicamente integrales tanto indefinidas como definidas, y también proporcionar aproximaciones numéricas de aquellas integrales definidas que tengan valores numéricos. Los ejemplos que siguen muestran cómo utilizar Maple para calcular integrales.

Empezaremos calculando $\int 2^x\sqrt{1 + 4^x}\,dx$ y $\int_0^{\pi} 2^x\sqrt{1 + 4^x}\,dx$.

Utilizaremos el comando de Maple «int», especificando la función y la variable de integración:

```
> int(2^x*sqrt (1+4^x), x) ;
```

$$\frac{e^{(x\ln(2))}\sqrt{1+(e^{(x\ln(2))})^2}}{2\ln(2)}+\frac{\operatorname{arcsenh}(e^{(x\ln(2))})}{2\ln(2)}$$

Si no nos gusta el seno hiperbólico inverso, se puede transformar en un logaritmo:

```
> convert(%, ln) ;
```

$$\frac{e^{(x\ln(2))}\sqrt{1+(e^{(x\ln(2))})^2}\,2\ln(2)+\ln(e^{(x\ln(2))}+\sqrt{1+(e^{(x\ln(2))})^2})}{2\ln(2)}$$

El símbolo «%» se refiere al resultado del cálculo previo. Nótese cómo Maple prefiere utilizar $e^{x\ln 2}$ en vez de 2^x.

Para la integral definida, se especifica el intervalo de valores de la variable de integración utilizando dos puntos entre los extremos, como sigue:

```
> int(2^x*sqrt(1+4^x), x=0..Pi) ;
```

$$\frac{-\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})+2^{\pi}\sqrt{1+4^{\pi}}+\ln(2^{\pi}+\sqrt{1+4^{\pi}})}{2\ln(2)}$$

Si se desea una aproximación decimal a esta respuesta exacta, se puede pedir a Maple que evalúe el último resultado como un número en punto flotante:

```
> evalf(%) ;
```

$$56.955\,421\,55$$

Observación Maple proporciona por defecto una precisión de 10 dígitos significativos para sus números en punto flotante a menos que se solicite una precisión diferente declarando otro valor de la variable «Digits»:

```
> Digits := 20; evalf(Pi) ;
```

$$3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,5$$

Supongamos que le pedimos a Maple que calcule una integral que no podemos resolver:

```
> int(exp(-x^2) ,x) ;
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(x)$$

Maple expresa la respuesta en términos de la **función de error** definida como

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Pero obsérvese que:

```
> Int(exp(-x^2), x=-infinity..infinity) = int(exp(-x^2), x=-inf
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x^2)}\,dx=\sqrt{\pi}$$

Nótese el uso del comando *inerte* de Maple «Int» en el miembro izquierdo para presentar en pantalla simplemente el integrando sin realizar ningún tipo de evaluación. El comando activo «int» realiza la evaluación.

Los programas de matemática por computador se pueden utilizar para integrar simbólicamente muchas funciones, pero se pueden recibir algunas sorpresas cuando se utilizan, y es posible que haya que realizar parte del trabajo para obtener una respuesta útil en el contexto del problema sobre el que se está trabajando. Estos programas, y algunas de las calculadoras científicas más sofisticadas, son capaces de evaluar numéricamente integrales definidas con cualquier grado de precisión deseada, aun cuando no se puedan obtener primitivas simbólicamente. En las Secciones 6.6-6.8 presentaremos técnicas de integración numérica, pero debe notarse aquí que se puede utilizar siempre el comando de Maple `evalf(Int())` para obtener valores numéricos:

```
> evalf(Int(sin(cos(x)) ,x=0..1)) ;
```

$$.738\,642\,998\,0$$

Uso de tablas de integrales

Las tablas de integrales, como las que aparecen al final de este libro, pueden servir de ayuda en el cálculo de algunas integrales. Además de dar los valores de las integrales elementales más comunes que es conveniente recordar al estudiar cálculo, proporcionan también integrales mucho más complicadas, especialmente aquellas que representan tipos estándar que surgen a menudo en las aplicaciones. Es conveniente familiarizarse con los tipos principales en los que se clasifican las integrales. Utilizar las tablas muchas veces requiere modificar la integral haciendo cambios simples hasta que se llega a la forma de una de las integrales de la tabla.

Ejemplo 1 Utilice la tabla para calcular $I = \displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{3 - 2t^4}}\, dt$.

Solución Esta integral no se parece a ninguna de las tablas, pero hay muchas integrales en dichas tablas en las que aparece $\sqrt{a^2 - x^2}$. Podemos empezar por expresar la integral de esta forma con el cambio $t^2 = u$, de forma que $2t\,dt = du$. Entonces,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{u^2}{\sqrt{3 - 2u^2}}\, du$$

Esto no es todavía lo que queremos; hay que quitar el 2 que multiplica u^2 bajo la raíz cuadrada. Una forma de hacer esto es mediante el cambio de variable $\sqrt{2u} = x$, de forma que $du = dx/\sqrt{2}$:

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{x^2}{\sqrt{3 - x^2}}\, dx$$

Ahora el denominador tiene la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$ con $a = \sqrt{3}$. Observando la parte de la tabla (al final del libro) donde aparecen integrales con $\sqrt{a^2 - x^2}$, encontramos la tercera, que dice que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\frac{x}{2}\sqrt{3 - x^2} + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C_1 \\ &= -\frac{t^2}{8}\sqrt{3 - 2t^4} + \frac{3}{8\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}t^2}{\sqrt{3}} + C_1 \end{aligned}$$

■

Muchas integrales de la tabla son fórmulas de reducción (la integral aparece en ambos miembros de la ecuación). Se pueden usar en forma iterativa para simplificar integrales, como se hizo en los ejemplos y ejercicios de la Sección 6.1.

Ejemplo 2 Calcule $I = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx.$

Solución La cuarta integral en la tabla de Miscelánea de Integrales Algebraicas dice que si $n \neq 1$, entonces

$$\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{x}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}}\right)$$

utilizando $a = 1$ y los signos $+$, tenemos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\Bigg|_0^1 + (2n-3)\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}\right)$$
$$= \frac{1}{2^n(n-1)} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

Por tanto,

$$I = \frac{1}{16} + \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{8}\tan^{-1}x\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$$

Ejercicios 6.4

1. Utilice Maple u otro programa de matemáticas por computador para comprobar algunas de las integrales realizadas en los ejercicios de las Secciones 5.6 y 6.1-6.3, así como algunas de las integrales que no haya podido resolver.

2. Utilice Maple u otro programa de matemáticas por computador para calcular la integral que aparece en el párrafo de apertura de esta sección.



3. Utilice Maple u otro programa de matemáticas por computador para volver a calcular la integral del Ejemplo 1.

4. Utilice Maple u otro programa de matemáticas por computador para volver a calcular la integral del Ejemplo 2.

Utilice las tablas de integrales como ayuda para calcular las integrales de los Ejercicios 5-14.

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\,dx$

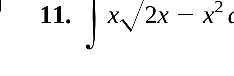
6. $\int \sqrt{(x^2+4)^3}\,dx$

7. $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{3t^2+5}}$

8. $\int \frac{dt}{t\sqrt{3t-5}}$

9. $\int x^4(\ln x)^4\,dx$

10. $\int x^7 e^{x^2}\,dx$



11. $\int x\sqrt{2x-x^2}\,dx$

12. $\int \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x^2}\,dx$

13. $\int \frac{dx}{(\sqrt{4x-x^2})^3}$

14. $\int \frac{dx}{(\sqrt{4x-x^2})^4}$

15. Utilice Maple u otro programa de matemáticas por computador para calcular las integrales de los Ejercicios 5-14.

6.5 Integrales impropias

Hasta este momento hemos considerado integrales definidas de la forma

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

donde el integrando f es *continuo* en el intervalo *cerrado* y *finito* $[a, b]$. Como esa función está necesariamente *acotada*, la integral I es necesariamente un número finito. Si f es positiva, la integral corresponde al área de una **región acotada** del plano, una región contenida dentro de algún disco de radio finito centrado en el origen. Este tipo de integrales se denominan **integrales propias**. Ahora vamos a generalizar el concepto de integral definida para permitir dos posibilidades excluidas en la situación descrita anteriormente:

(i) Podemos tener $a = -\infty$ o $b = \infty$ o ambas cosas.
(ii) f puede ser no acotada cuando x tiende a a, a b o a ambos.

Las integrales que cumplen (i) se denominan **integrales impropias de tipo I**. Las integrales que cumplen (ii) se denominan **integrales impropias de tipo II**. Ambos tipos de integrales impropias corresponden (para f positiva) al área de una región del plano que «se extiende hasta el infinito» en alguna dirección y, por tanto, es *no acotada*. Como veremos, estas integrales pueden tener valores finitos o no tenerlos. Las ideas necesarias se presentan mejor con algunos ejemplos.

Integrales impropias de tipo I

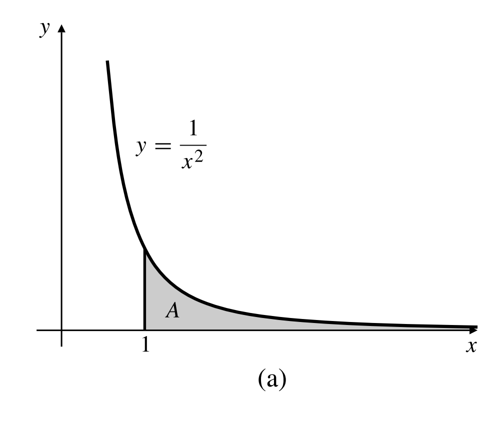
Ejemplo 1 Calcule el área de la región A que está por debajo de la curva $y = 1/x^2$, por encima del eje x y a la derecha de la recta $x = 1$ (*véase* la Figura 6.8(a)).

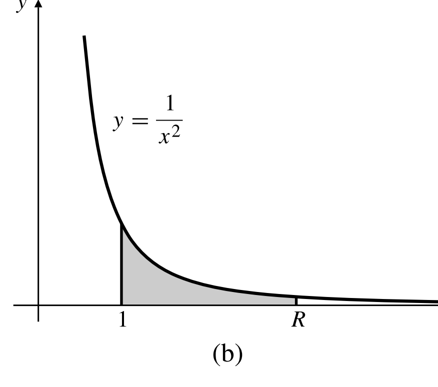
Solución Calcularemos el área mediante la integral

$$A = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

que es una integral impropia de tipo I, ya que su intervalo de integración es infinito. No es inmediatamente obvio que el área sea finita. La región tiene una cola infinitamente larga a lo largo del eje x, pero el valor de la función en la cola se hace infinitamente pequeño a medida que x tiende a ∞. Para calcular esta integral impropia, la interpretaremos como un límite de integrales propias en intervalos $[1, R]$ cuando $R \to \infty$ (*véase* la Figura 6.8(b)).

$$A = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^R$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{R} + 1\right) = 1$$





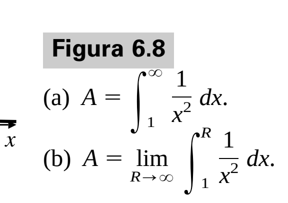


Figura 6.8
(a) $A = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.
(b) $A = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx$.

Como en el límite existe (es finito), se dice que la integral impropia *converge*. La región tiene un área finita de $A = 1$ unidades al cuadrado.

Ejemplo 2 Calcule el área de la región por debajo de $y = 1/x$, por encima de $y = 0$ y a la derecha de la recta $x = 1$ (*véase* la Figura 6.9).

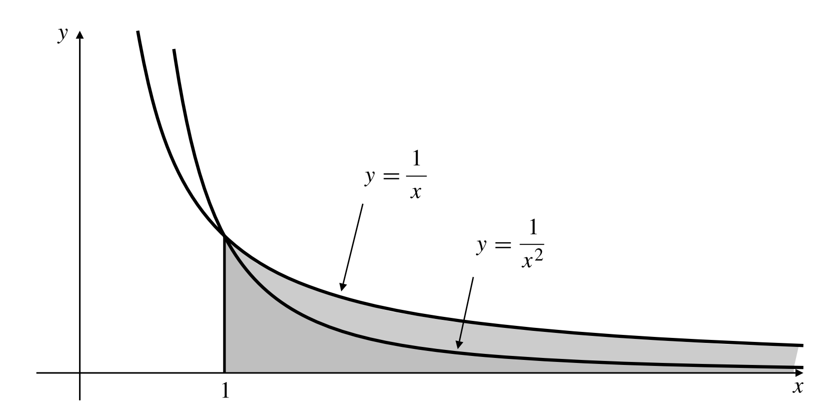


Figura 6.9 El área sombreada en claro es infinita.

Solución El área se expresa mediante la integral impropia

$$A = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \ln x \Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \ln R = \infty$$

Se dice que esta integral impropia *diverge a infinito*. Obsérvese que la región tiene una forma similar a la región bajo $y = 1/x^2$, considerada en el ejemplo anterior, pero está ligeramente por encima de ésta para todos los valores de $x > 1$. Evidentemente, esto marca una gran diferencia, ya que en este ejemplo la región tiene área *infinita*.

DEFINICIÓN 1 **Integrales impropias de tipo I**

Si f es una función continua en el intervalo $[a, \infty)$, se define la integral impropia de f en el intervalo $[a, \infty)$ como el límite de las integrales propias:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

De forma similar, si f es continua en el intervalo $(-\infty, b]$, definimos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx$$

En cualquier caso, si el límite existe (es un número finito), se dice que la integral impropia **converge**. Si el límite no existe se dice que la integral impropia **diverge**. Si el límite es ∞ (o $-\infty$) se dice que la integral impropia **diverge a infinito** (o que **diverge a menos infinito**).

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es, para f continua en la recta real, impropia de tipo I en ambos extremos. La dividimos en dos integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

La integral de la izquierda converge si y sólo si *ambas* integrales de la derecha convergen.

Ejemplo 3 Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Solución Por la simetría (par) del integrando (*véase* la Figura 6.10), tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\\ &= 2 \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2}\\ &= 2 \lim_{R\to\infty} \tan^{-1} R = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi\end{aligned}$$

el uso de la simetría en este caso requiere alguna justificación. En el momento en que la utilizamos ya sabíamos si cada una de las dos integrales resultantes era finita o infinita. Sin embargo, como ambas son positivas, incluso si son infinitas, su suma seguirá siendo el doble de una de ellas. Si una hubiera sido positiva y la otra negativa, no podríamos haber justificado que se cancelaran mutuamente sin demostrar previamente que su valor es finito ($\infty + \infty = \infty$, pero $\infty - \infty$ no está definido). En cualquier caso, la integral dada converge a π.

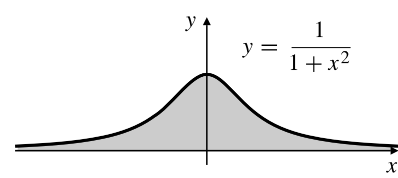


Figura 6.10

Ejemplo 4 $\int_0^{\infty} \cos x\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos x\,dx = \lim_{R\to\infty} \operatorname{sen} R.$

Este límite no existe (y no es ni ∞ ni $-\infty$), de forma que lo único que podemos decir es que la integral dada diverge (*véase* la Figura 6.11). Cuando R aumenta, la integral suma y resta alternativamente las áreas de las colinas y los valles, pero no tiende a ningún límite único.

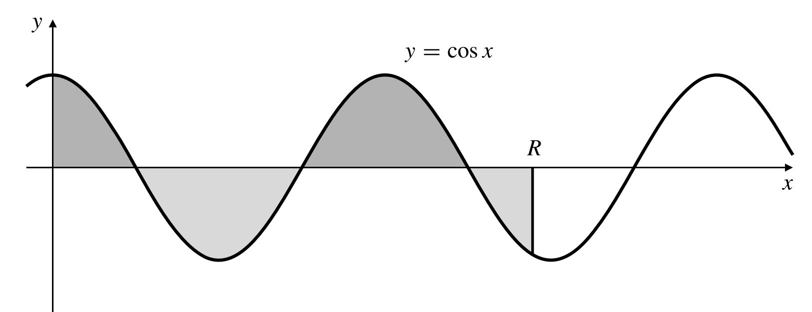


Figura 6.11 No todas las integrales impropias divergentes divergen hacia ∞ o $-\infty$.

Integrales impropias de tipo II

DEFINICIÓN 2 Integrales impropias de tipo II

Si f es continua en el intervalo $(a, b]$, y posiblemente no acotada cerca de a, se define la integral impropia

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx$$

De forma similar, si f es continua en el intervalo $[a, b)$, y posiblemente no acotada cerca de b, se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\,dx$$

Estas integrales impropias pueden converger, divergir, divergir a infinito o divergir a menos infinito.

Ejemplo 5 Calcule el área de la región S que está por debajo de $y = 1/\sqrt{x}$, por encima del eje x y entre $x = 0$ y $x = 1$.

Solución El área A se expresa como

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

que es una integral impropia de tipo II, ya que el integrando no está acotado a medida que nos acercamos a $x = 0$. La región S tiene una «cola» que tiende a infinito a lo largo del eje y, una asíntota vertical del integrando, como se muestra en la Figura 6.12. Como hicimos en el caso de integrales impropias de tipo I, expresaremos estas integrales como límites de integrales propias:

$$A = \lim_{c \to 0+} \int_c^1 x^{-1/2}\,dx = \lim_{c \to 0+} 2x^{1/2}\Big|_c^1 = \lim_{c \to 0+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

La integral converge, y S tiene un área finita de 2 unidades al cuadrado.

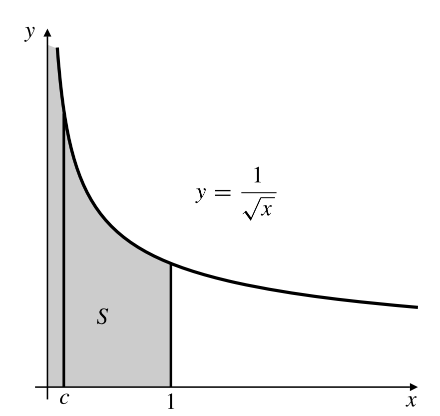


Figura 6.12 El área sombreada es finita.

Aunque las integrales impropias de tipo I se reconocen siempre fácilmente debido a los límites de integración infinitos, a veces no es tan sencillo reconocer las integrales impropias de tipo II. Hay que estar atentos por si existen singularidades de los integrandos y especialmente puntos donde haya asíntotas verticales. Puede ser necesario descomponer una integral impropia en varias integrales impropias si la integral original es impropia en los dos extremos del intervalo de integración, o en puntos del interior del intervalo de integración. Por ejemplo,

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln|x|\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int_{-1}^0 \frac{\ln|x|\,dx}{\sqrt{1-x}} + \int_0^{1/2} \frac{\ln|x|\,dx}{\sqrt{1-x}} + \int_{1/2}^1 \frac{\ln|x|\,dx}{\sqrt{1-x}}$$

Todas las integrales del miembro derecho son impropias con una singularidad en uno de los extremos del intervalo de integración.

Ejemplo 6 Calcule las siguientes integrales o demuestre que divergen:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx$, y (c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.

Solución

(a) $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+} (\ln 1 - \ln c) = \infty.$$

Esta integral diverge a infinito.

(b) $$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x}}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx \qquad \text{Sea } u = x - 1,\quad du = dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \qquad \text{(por simetría)}$$

$$= 2 \lim_{c\to 1-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= 2 \lim_{c\to 1-} \operatorname{sen}^{-1} u \Big|_0^c = 2 \lim_{c\to 1-} \operatorname{sen}^{-1} c = \pi$$

Esta integral converge a π. Obsérvese cómo se puede realizar un cambio de variable incluso antes de expresar una integral impropia como límite de integrales propias.

(c) $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \ln x\,dx$$ (*Véase* el Ejemplo 2(a) de la Sección 6.1 donde se calcula la integral indefinida).

$$= \lim_{c\to 0+} (x\ln x - x)\Big|_c^1$$

$$= \lim_{c\to 0+} (0 - 1 - c\ln c + c)$$

$$= -1 + 0 - \lim_{c\to 0+} \frac{\ln c}{1/c} \qquad \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$$

$$= -1 - \lim_{c\to 0+} \frac{1/c}{-(1/c^2)} \qquad \text{(por la Regla de L'Hôpital)}$$

$$= -1 - \lim_{c\to 0+} (-c) = -1 + 0 = -1$$

La integral converge al valor -1. ■

El siguiente teorema resume el comportamiento de las integrales impropias de los tipos I y II para el caso de potencias de x.

TEOREMA 2 **Integrales p**

Si $0 < a < \infty$, entonces

(a) $\displaystyle\int_a^\infty x^{-p}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge a } \infty & \text{si } p \leqslant 1 \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_0^a x^{-p}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{a^{1-p}}{1-p} & \text{si } p < 1 \\ \text{diverge a } \infty & \text{si } p \geqslant 1 \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN Sólo demostraremos el apartado (b). La demostración del apartado (a) es similar y se deja como ejercicio. Además, el caso de $p = 1$ del apartado (b) es similar al Ejemplo 6(a) visto anteriormente, por lo que sólo es necesario considerar los casos $p < 1$ y $p > 1$. Si $p < 1$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\int_0^a x^{-p}\,dx &= \lim_{c\to 0+}\int_c^a x^{-p}\,dx \\ &= \lim_{c\to 0+}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_c^a \\ &= \lim_{c\to 0+}\frac{a^{1-p}-c^{1-p}}{1-p} = \frac{a^{1-p}}{1-p}\end{aligned}$$

ya que $1 - p > 0$. Si $p > 1$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^a x^{-p}\,dx &= \lim_{c\to 0+}\int_c^a x^{-p}\,dx \\ &= \lim_{c\to 0+}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_c^a \\ &= \lim_{c\to 0+}\frac{c^{-(p-1)}-a^{-(p-1)}}{p-1} = \infty\end{aligned}$$

Las integrales del Teorema 2 se denominan **integrales p**. Es muy útil saber cuándo convergen o divergen, cuando hay que decidir si una determinada integral impropia converge o no, y no es posible calcular la correspondiente primitiva (*véase* la presentación posterior sobre convergencia). Nótese que $\int_0^\infty x^{-p}\,dx$ no converge para ningún valor de p.

Observación Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, de forma que $\int_a^b f(x)\,dx$ es una integral propia definida, entonces al tratar la integral como impropia se obtiene el mismo valor:

$$\lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,dx$$

Esto justifica la definición de integral definida de una función continua por tramos, que se presentó en la Sección 5.4. Para integrar una función definida en forma de funciones continuas distintas en intervalos distintos, simplemente se suman las integrales de las funciones constituyentes en sus intervalos respectivos. Cualquiera de esas integrales puede ser propia o impropia. Todas las que sean impropias deberán converger, o en caso contrario la integral completa divergirá.

Ejemplo 7 Calcule $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, siendo $f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

Solución La Figura 6.13 muestra la gráfica de f. Tenemos que

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^2 = 2 + \left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}$$

La primera integral del miembro derecho es impropia pero convergente (*véase* el Ejemplo 5 anterior), y la segunda integral es propia.

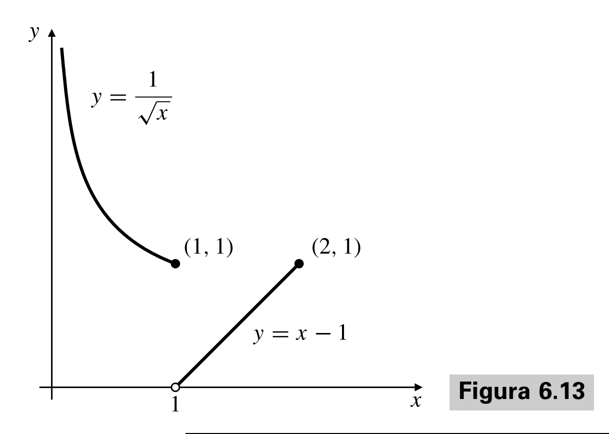


Figura 6.13

Estimación de la convergencia y la divergencia

Cuando una integral impropia no se puede calcular utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, debido a que no es posible obtener una primitiva, todavía es posible determinar si la integral converge comparándola con integrales más simples. El siguiente teorema es fundamental para ver cómo.

TEOREMA 3 **Un teorema para comparación de integrales**

Sea $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, y supongamos que las funciones f y g son continuas en el intervalo (a, b) y cumplen que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces también converge $\int_a^b f(x)\,dx$, y

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

De forma equivalente, si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge a ∞, también lo hace $\int_a^b g(x)\,dx$.

DEMOSTRACIÓN Como los dos integrandos son no negativos, sólo existen dos posibilidades para cada integral: puede converger a un número no negativo o divergir a ∞. Como $f(x) \leqslant g(x)$ en el intervalo (a, b), aplicando el Teorema 3(e) de la Sección 5.4, se deduce que si $a < r < s < b$, entonces

$$\int_r^s f(x)\,dx \leqslant \int_r^s g(x)\,dx$$

El teorema se demuestra ahora fácilmente tomando límites cuando $r \to a+$ y $s \to b-$.

Ejemplo 8 Demuestre que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge, y calcule una cota superior de su valor de convergencia.

Solución No sabemos integrar e^{-x^2}, pero sí sabemos integrar e^{-x}. Podríamos pensar en utilizar la inecuación $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$, pero sólo es válida para $x \geqslant 1$ (*véase* la Figura 6.14). Por tanto, dividiremos la integral en dos partes.

En el intervalo [0, 1], tenemos que $0 < e^{-x^2} \leqslant 1$, por lo que

$$0 < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 dx = 1$$

En el intervalo $[1, \infty)$ tenemos que $x^2 \geqslant x$, por lo que $-x^2 \leqslant -x$ y $0 < e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 < \int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_1^{\infty} e^{-x}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \left.\frac{e^{-x}}{-1}\right|_1^R \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^R}\right) = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Por tanto, $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge a un valor no mayor que $1 + (1/e)$.

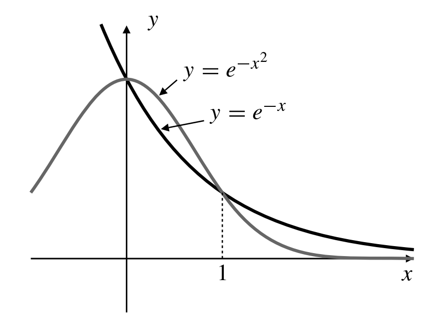


Figura 6.14 Comparación de e^{-x^2} y e^{-x}.

No hay que olvidar que la integral anterior es, de hecho, igual a $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, aunque no podemos demostrarlo por ahora (*véase* la Sección 14.4).

Para valores grandes y pequeños de x, muchos integrandos se comportan aproximadamente como potencias de x. En ese caso, se pueden comparar con integrales p.

Ejemplo 9 Determine si $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}}$ converge.

Solución La integral es impropia de los dos tipos, por lo que escribimos

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = I_1 + I_2$$

En el intervalo (0, 1], tenemos que $\sqrt{x + x^3} > \sqrt{x}$, por lo que

$$I_1 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \qquad \text{(por el Teorema 2)}$$

En el intervalo $[1, \infty)$, tenemos que $\sqrt{x + x^3} > \sqrt{x^3}$, por lo que

$$I_2 < \int_1^{\infty} x^{-3/2}\,dx = 2 \qquad \text{(por el Teorema 2)}$$

Por consiguiente, la integral dada converge, y su valor es menor que 4.

Ejercicios 6.5

En los Ejercicios 1-22, calcule las integrales dadas o demuestre que divergen.

1. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$ **2.** $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^{2/3}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx$ **4.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+1}$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+1)^{2/3}}$ **6.** $\displaystyle\int_0^{a} \frac{dx}{a^2-x^2}$

7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1-x)^{1/3}}\,dx$ **8.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{(1-\operatorname{sen} x)^{2/3}}$ **10.** $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ **12.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1+2x^2}\,dx$

13. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+2x^2)^{3/2}}$ **14.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$ **16.** $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

17. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ **18.** $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ **22.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$

23. Calcule el área por debajo de $y=0$, por encima de $y=\ln x$ y a la derecha de la recta $x=0$.

24. Calcule el área por debajo de $y=e^{-x}$, por encima de $y=e^{-2x}$ y a la derecha de la recta $x=0$.

25. Calcule el área de la región que está por encima de la recta $y=0$, a la derecha de la recta $x=1$ y bajo la curva $y=\dfrac{4}{2x+1}-\dfrac{2}{x+2}$.

26. Calcule el área de la región plana que está por debajo de la gráfica de $y=x^{-2}e^{-1/x}$, por encima del eje x y a la derecha del eje y.

27. Demuestre el Teorema 2(a) calculando directamente las integrales que aparecen.

28. Calcule $\int_{-1}^{1}(x\operatorname{sgn} x)/(x+2)\,dx$. Recuerde que $\operatorname{sgn} x = x/|x|$.

29. Calcule $\int_0^2 x^2\operatorname{sgn}(x-1)\,dx$.

En los Ejercicios 30-41, indique si las integrales dadas convergen o divergen, y justifique sus respuestas.

30. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^5+1}\,dx$ **31.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

32. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x\sqrt{x}\,dx}{x^2-1}$ **33.** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^3}\,dx$

34. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$ **35.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{x+1}\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ ***37.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}\,dx$

***38.** $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{1-\cos\sqrt{x}}$ ***39.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \csc x\,dx$

***40.** $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$ ***41.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{xe^x}$

***42.** Sabiendo que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$, calcule

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$ y (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^4e^{-x^2}\,dx$

***43.** Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, demuestre que

$$\lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Sugerencia: Una función continua en un intervalo cerrado y finito está *acotada*; existe una constante positiva K tal que $|f(x)|\leqslant K$ para todo x perteneciente al intervalo $[a, b]$. Utilice ese hecho, junto con los apartados (d) y (f) del Teorema 3 de la Sección 5.4, para demostrar que

$$\lim_{c\to a+}\left(\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx\right) = 0$$

De forma similar, demuestre que

$$\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

***44.** **(La función gamma)** La función gamma $\Gamma(x)$ se define mediante la integral impropia

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

(Γ es la letra griega gamma mayúscula).

(a) Demuestre que la integral converge para $x>0$.

(b) Utilice integración por partes para demostrar que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ para $x>0$.

(c) Demuestre que $\Gamma(n+1) = n!$ para $n = 0, 1, 2, ...$

(d) Sabiendo que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, demuestre que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ y $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

En vista del apartado (c), $\Gamma(x+1)$ se representa a menudo por $x!$, vista como una extensión a valores reales de la función factorial. Algunas calculadoras científicas (en particular, las calculadoras HP), para obtener $n!$, utilizan realmente la función gamma, en vez del factorial para enteros. Podemos probar si nuestra calculadora hace esto introduciendo 0.5!. Si se obtiene un mensaje de error, entonces es que nuestra calculadora no utiliza la función gamma.

6.6 La Regla del Trapecio y la Regla del Punto Medio

En la mayoría de las aplicaciones de integración, dentro y fuera del campo de las matemáticas, aparece la integral definida

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, se pueden calcular esas integrales definidas obteniendo primero una primitiva de f. Por eso hemos empleado un tiempo considerable en presentar diversas técnicas de integración. Sin embargo, hay dos obstáculos que pueden impedir el cálculo de una primitiva de f:

(i) El cálculo de una primitiva expresada por medio de funciones familiares puede ser imposible, o al menos muy difícil.

(ii) A veces no se dispone de una fórmula de $f(x)$ en función de x. Por ejemplo, $f(x)$ puede ser una función desconocida cuyos valores en diversos puntos del intervalo $[a, b]$ se han determinado mediante medidas experimentales.

En las dos secciones que siguen vamos a considerar el problema de aproximar el valor de una integral definida I conociendo sólo valores de $f(x)$ en un número finito de puntos de intervalo $[a, b]$. La obtención de esta aproximación se denomina **integración numérica**. Se pueden utilizar para ello sumas superiores e inferiores (o, de hecho, cualquier suma de Riemann), pero en general, esto requiere realizar muchos cálculos para obtener la misma precisión que los métodos que se van a presentar. Desarrollaremos tres métodos para la evaluación numérica de integrales: la Regla del Trapecio, la Regla del Punto Medio y la Regla de Simpson (*véase* la Sección 6.7). Los tres métodos se pueden realizar de forma muy simple utilizando un pequeño computador o calculadora científica. La amplia disponibilidad actual de esos dispositivos hace que la integración numérica sea una herramienta importante para el estudiante de matemáticas. Algunas calculadoras avanzadas incorporan rutinas de integración numérica.

Todas las técnicas que vamos a considerar requieren calcular los valores de $f(x)$ en un conjunto de puntos equiespaciados del intervalo $[a, b]$. El «coste» computacional requerido para determinar el valor aproximado de una integral I será aproximadamente proporcional al número de valores de la función que haya que calcular. Es decir, cuantas menos veces haya que evaluar la función para calcular la integral deseada con un cierto grado de precisión, mejor será la técnica. El tiempo es oro, incluso en el mundo de los computadores.

La Regla del Trapecio

Supongamos que $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y subdividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud $h = (b-a)/n$ utilizando $n+1$ puntos.

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad ..., \quad x_n = a + nh = b$$

Supongamos que el valor de $f(x)$ en cada uno de los puntos es conocido:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad ..., \quad y_n = f(x_n)$$

La Regla del Trapecio aproxima $\int_a^b f(x)\,dx$ utilizando segmentos de rectas entre los puntos (x_{j-1}, y_{j-1}) y (x_j, y_j), $(1 \leqslant j \leqslant n)$, para formar una aproximación a la gráfica de f, como se muestra en la Figura 6.15, y suma las áreas de los *n trapecios* resultantes. Un **trapecio** es un polígono de cuatro lados parecido a un rectángulo pero con uno de sus lados inclinado. En nuestra presentación, supondremos que f es positiva de forma que podamos hablar de «áreas» sin problemas, pero las fórmulas resultantes se pueden aplicar a cualquier función continua f.

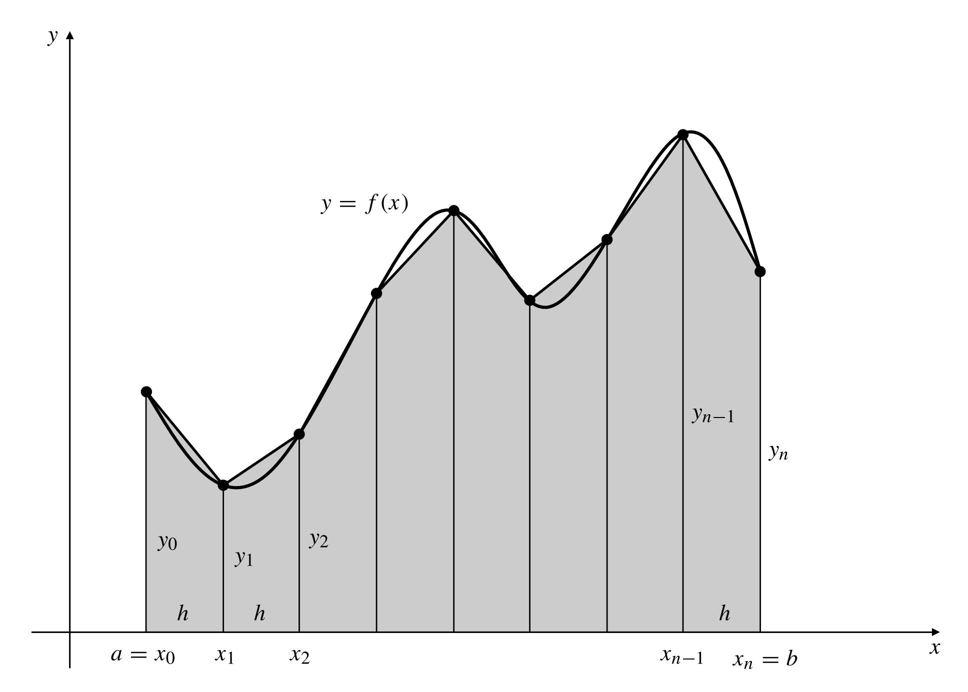


Figura 6.15 El área por debajo de $y = f(x)$ se aproxima mediante la suma de las áreas de n trapecios.

Los vértices del primer trapecio son $(x_0, 0)$, (x_0, y_0), (x_1, y_1) y $(x_1, 0)$. Los dos lados paralelos son verticales y sus longitudes son y_0 y y_1. La distancia perpendicular entre dichos lados es $h = x_1 - x_0$. El área de ese trapecio es h veces el promedio de las longitudes de los lados paralelos:

$$h\,\frac{y_0 + y_1}{2} \text{ unidades al cuadrado}$$

Esto se puede ver geométricamente considerando que el trapecio es una unión sin solapamiento de un rectángulo y un triángulo; *véase* la Figura 6.16. Utilizaremos el trapecio para aproximar la integral de f en el primer subintervalo $[x_0, x_1]$:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx h\,\frac{y_0 + y_1}{2}$$

Figura 6.16 El área del trapecio es $y_1 h + \frac{1}{2}(y_0 - y_1)\,h = \frac{1}{2}\,h(y_0 + y_1)$.

La integral de f en cualquier otro subintervalo se puede aproximar de la misma forma:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx \approx h\,\frac{y_{j-1} + y_j}{2}, \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

Se deduce entonces que la integral original I se puede aproximar mediante la suma de esas áreas de trapecios:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$
$$= h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)$$

DEFINICIÓN 3 La Regla del Trapecio

La aproximación $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la **Regla del Trapecio** con n subintervalos, que denominaremos T_n, es

$$T_n = h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)$$

Ilustraremos ahora la Regla del Trapecio utilizándola para aproximar una integral cuyo valor ya es conocido:

$$I=\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2 = 0.693\,147\,18...$$

Este valor, y los de todas las aproximaciones que se verán en esta sección, se han calculado utilizando una calculadora científica. Utilizaremos la misma integral para ilustrar otros métodos de aproximación de integrales definidas que veremos posteriormente.

Ejemplo 1 Calcule las aproximaciones mediante la Regla del Trapecio T_4, T_8 y T_{16} a la integral

$$I=\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

Solución Para $n=4$ tenemos que $h=(2-1)/4=1/4$; para $n=8$ tenemos que $h=1/8$ y para $n=16$ tenemos que $h=1/16$. Por tanto,

$$T_4=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(1)+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right]=0.697\,023\,81...$$
$$T_8=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}(1)+\frac{8}{9}+\frac{4}{5}+\frac{8}{11}+\frac{2}{3}+\frac{8}{13}+\frac{4}{7}+\frac{8}{15}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{8}\left[4T_4+\frac{8}{9}+\frac{8}{11}+\frac{8}{13}+\frac{8}{15}\right]=0.694\,121\,85...$$
$$T_{16}=\frac{1}{16}\left[8T_8+\frac{16}{17}+\frac{16}{19}+\frac{16}{21}+\frac{16}{23}+\frac{16}{25}+\frac{16}{27}+\frac{16}{29}+\frac{16}{31}\right]$$
$$=0.693\,391\,20\,...$$

Nótese cómo los valores de la función utilizados para calcular T_4 se reutilizan en el cálculo de T_8, y de forma similar los valores calculados en T_8 se reutilizan en T_{16}. Cuando se necesitan varias aproximaciones, es muy útil doblar el número de subintervalos en cada nuevo cálculo, de forma que se puedan reutilizar los valores de f calculados previamente.

■

Todas las aproximaciones mediante la Regla del Trapecio a $I=\int_1^2 (1/x)\,dx$ son mayores que el verdadero valor de I. Esto es porque la gráfica de $y=1/x$ es convexa en el intervalo [1, 2] y, por tanto, las partes superiores de los trapecios de la aproximación están por encima de la curva (*véase* la Figura 6.17).

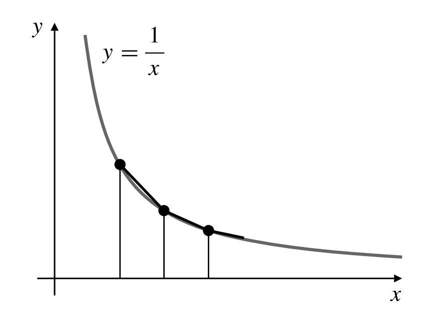


Figura 6.17 Si la curva es convexa, las áreas de los trapecios son mayores que las áreas por debajo de la curva.

Se pueden calcular los errores exactos en las tres aproximaciones ya que sabemos que $I = \ln 2 = 0.69314718...$ (definiremos siempre el error de aproximación como el valor verdadero menos el valor aproximado).

$$I - T_4 = 0.693\,147\,18... - 0.697\,023\,81... = -0.003\,876\,63...$$

$$I - T_8 = 0.693\,147\,18... - 0.694\,121\,85... = -0.000\,974\,67...$$

$$I - T_{16} = 0.693\,147\,18... - 0.694\,391\,20... = -0.000\,244\,02...$$

Obsérvese que el tamaño del error disminuye aproximadamente a la cuarta parte de su valor anterior cada vez que n se dobla. Posteriormente demostraremos que esto es lo que cabe esperar para funciones «bien comportadas» como $1/x$.

El Ejemplo 1 es algo artificial, en el sentido de que conocemos el valor real de la integral, por lo que realmente no necesitamos la aproximación. En las aplicaciones prácticas de la integración numérica no conoceremos el valor real. Una cosa que podemos hacer es calcular varias aproximaciones para valores de n crecientes hasta que las dos aproximaciones más recientes se diferencien menos que una tolerancia de error preestablecida. Por ejemplo, podríamos decir que $\ln 2 \approx 0.69...$ a partir de una comparación de T_4 y T_8, y una posterior comparación de T_{16} y T_8 sugiere que el tercer decimal es probablemente 3: $I \approx 0.693...$ Aunque en general esta forma de proceder no se puede justificar formalmente, se utiliza frecuentemente en la práctica.

La Regla del Punto Medio

Una aproximación algo más simple $\int_a^b f(x)\,dx$, basada en la partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, forma una suma de Riemann de las áreas de rectángulos cuyas alturas se toman en los puntos medios de los n subintervalos (*véase* la Figura 6.18).

DEFINICIÓN 4 La Regla del Punto Medio

Si $h = (b - a)/n$, sea $m_j = a + (j - \frac{1}{2})h$ para $1 \leqslant j \leqslant n$. La aproximación a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la **Regla del Punto Medio**, que se expresará como M_n, es

$$M_n = h(f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_n)) = h \sum_{j=1}^{n} f(m_j)$$

Ejemplo 2 Mediante la Regla del Punto Medio, calcule las aproximaciones M_4 y M_8 a la integral $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, y compare los errores reales con los obtenidos aplicando la Regla del Trapecio presentada anteriormente.

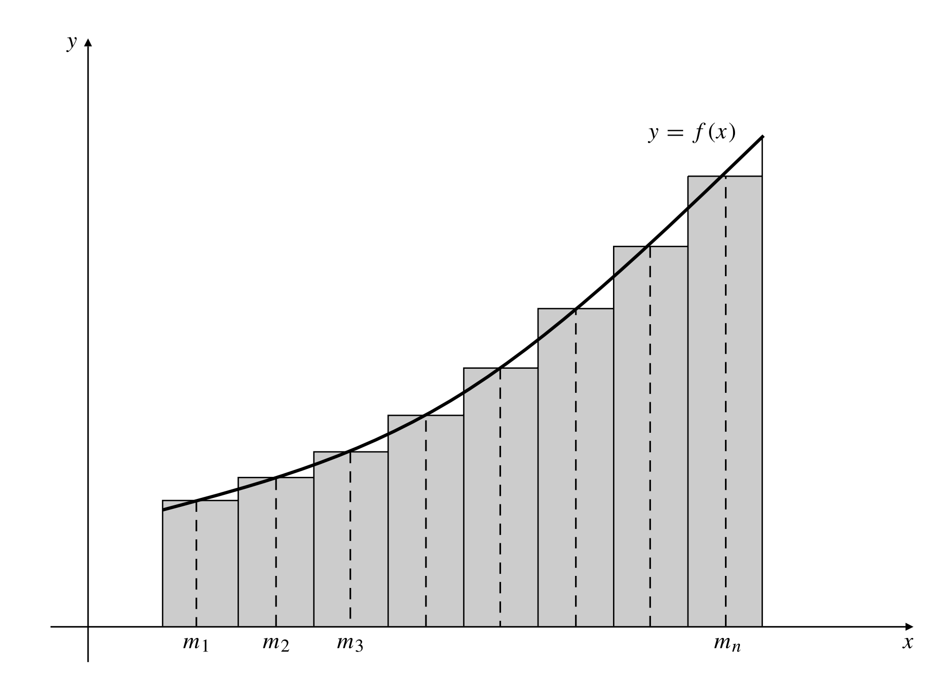


Figura 6.18 La aproximación M_n a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la Regla del Punto Medio es la suma de Riemann basada en las alturas de la gráfica de la función f en los puntos medios de los subintervalos de la partición.

Solución Para calcular M_4, el intervalo [1, 2] se divide en cuatro subintervalos iguales:

$$\left[1, \frac{5}{4}\right], \quad \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right] \quad \text{y} \quad \left[\frac{7}{4}, 2\right]$$

Los puntos medios de estos intervalos son 9/8, 11/8, 13/8 y 15/8, respectivamente. Los puntos medios de los intervalos para M_8 se obtienen de forma similar. Las aproximaciones mediante la Regla del Punto Medio son

$$M_4 = \frac{1}{4}\left[\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right] = 0.691\,219\,89...$$

$$M_8 = \frac{1}{8}\left[\frac{16}{17} + \frac{16}{19} + \frac{16}{21} + \frac{16}{23} + \frac{16}{25} + \frac{16}{27} + \frac{16}{29} + \frac{16}{31}\right] = 0.692\,660\,55...$$

Los errores de esas aproximaciones son

$$I - M_4 = 0.693\,147\,18... - 0.691\,219\,89... = 0.001\,927\,29...$$

$$I - M_8 = 0.693\,147\,18... - 0.692\,660\,55... = 0.000\,486\,63...$$

Estos errores son de signo contrario y aproximadamente de la mitad de tamaño que los errores correspondientes de la Regla del Trapecio $I - T_4$ e $I - T_8$. La Figura 6.19 sugiere la razón de esto. El área rectangular $hf(m_j)$ es igual al área del trapecio formado por la recta tangente a $y = f(x)$ en $(m_j,\ f(m_j))$. La región sombreada por encima de la curva es la parte del error de la Regla del Trapecio debida al j-ésimo subintervalo. El área sombreada por debajo de la curva es el error correspondiente a la Regla del Punto Medio.

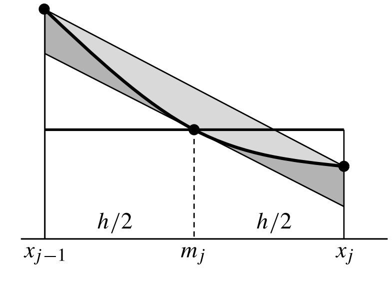


Figura 6.19 El error de la Regla del Punto Medio, correspondiente al área sombreada en oscuro, tiene signo opuesto y aproximadamente la mitad del tamaño del error de la Regla del Trapecio, correspondiente al área sombreada en claro.

■

Un problema de la Regla del Punto Medio es que no podemos reutilizar los valores de f calculados para M_n cuando calculamos M_{2n}. Sin embargo, para calcular T_{2n} se pueden utilizar los valores de datos calculados para T_n y M_n. Concretamente,

$$T_{2n} = \tfrac{1}{2}(T_n + M_n)$$

Una buena estrategia para estos métodos, en la obtención del valor de una integral I con un grado de precisión deseado, es calcular sucesivamente:

$$T_n, \quad M_n, \quad T_{2n} = \frac{T_n + M_n}{2}, \quad M_{2n}, \quad T_{4n} = \frac{T_{2n} + M_{2n}}{2}, \quad M_{4n}, \ldots$$

hasta que dos términos consecutivos se parezcan suficientemente. Si sólo se desea una única aproximación rápida, M_n es una opción mejor que T_n.

Estimaciones del error

El teorema que sigue proporciona una cota del error en las aproximaciones mediante las Reglas del Trapecio y del Punto Medio en función de la segunda derivada del integrando.

TEOREMA 4 **Estimaciones del error en las Reglas del Trapecio y del Punto Medio**

Si f es una función con segunda derivada continua en el intervalo $[a, b]$ y cumple que $|f''(x)| \leqslant K$ en dicho intervalo, entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_n \right| \leqslant \frac{K(b-a)}{12} h^2 = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - M_n \right| \leqslant \frac{K(b-a)}{24} h^2 = \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

siendo $h = (b-a)/n$. Nótese que estas cotas de error decrecen cuando n crece en función del cuadrado de la longitud de los subintervalos.

DEMOSTRACIÓN Sólo demostraremos la estimación del error de la Regla del Trapecio (la demostración para el caso de la Regla del Punto Medio es más sencilla, y el método se sugiere en el Ejercicio 14 posterior). La recta que aproxima a $y = f(x)$ en el primer subintervalo $[x_0, x_1] = [a, a+h]$ pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1). Su ecuación es $y = A + B(x - x_0)$, siendo

$$A = y_0 \quad \text{y} \quad B = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

Sea la función $g(x)$ la distancia vertical entre la gráfica de f y esta recta:

$$g(x) = f(x) - A - B(x - x_0)$$

Como la integral de $A + B(x - x_0)$ en el intervalo $[x_0, x_1]$ es el área del primer trapecio, que es $h(y_0 + y_1)/2$ (*véase* la Figura 6.20), la integral de $g(x)$ en el intervalo $[x_0, x_1]$ es el error en la aproximación de $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ mediante el área del trapecio:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - h\,\frac{y_0 + y_1}{2} = \int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx$$

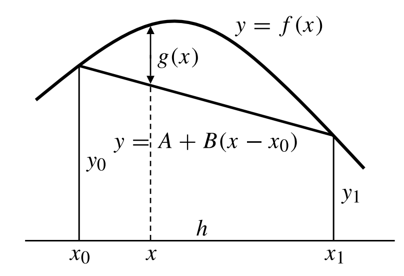


Figura 6.20

g es dos veces diferenciable, y $g''(x) = f''(x)$. Además, $g(x_0) = g(x_1) = 0$. Dos integraciones por partes (*véase* el Ejrcicio 36 de la Sección 6.1) permiten demostrar que

$$\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x_1 - x) f''(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x_1 - x) g''(x)\, dx$$
$$= -2 \int_{x_0}^{x_1} g(x)\, dx$$

Aplicando la desigualdad del triángulo para integrales definidas (Teorema 3(f) de la Sección 5.4),

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx - h\, \frac{y_0 + y_1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x_1 - x) |f''(x)|\, dx$$
$$\leqslant \frac{K}{2} \int_{x_0}^{x_1} (-x^2 + (x_0 + x_1)x - x_0 x_1)\, dx$$
$$= \frac{K}{12} (x_1 - x_0)^3 = \frac{K}{12} h^3$$

Se puede aplicar una estimación similar en cada subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Por tanto,

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - T_n \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\, dx - h\, \frac{y_{j-1} + y_j}{2} \right) \right|$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\, dx - h\, \frac{y_{j-1} + y_j}{2} \right|$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{K}{12} h^3 = \frac{K}{12} n h^3 = \frac{K(b - a)}{12} h^2$$

ya que $nh = b - a$.

Ilustraremos esta estimación del error para las aproximaciones de los Ejemplos 1 y 2 anteriores.

Ejemplo 3 Obtenga cotas de los errores de T_4, T_8, T_{16}, M_4 y M_8 para $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$.

Solución Si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$ y $f''(x) = 2/x^3$. En el intervalo [1, 2] tenemos que $|f''(x)| \leqslant 2$, por lo que podemos tomar $K = 2$ en la estimación. Entonces,

$$|I - T_4| \leqslant \frac{2(2 - 1)}{12} \left(\frac{1}{4} \right)^2 = 0.010\,4...$$
$$|I - M_4| \leqslant \frac{2(2 - 1)}{24} \left(\frac{1}{4} \right)^2 = 0.005\,2...$$

$$|I - T_8| \leqslant \frac{2(2-1)}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = 0.002\,6...$$

$$|I - M_8| \leqslant \frac{2(2-1)}{24}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = 0.001\,3...$$

$$|I - T_{16}| \leqslant \frac{2(2-1)}{12}\left(\frac{1}{16}\right)^2 = 0.000\,65...$$

Los errores reales calculados anteriormente son considerablemente menores que estas cotas, porque $|f''(x)|$ es más pequeño de $K = 2$ en la mayor parte del intervalo [1, 2].

Observación Las cotas de error generalmente no son tan sencillas de obtener como en el Ejemplo 3. En particular, si no se conoce una fórmula exacta de $f(x)$ (como suele suceder si los valores de f se obtienen de medidas experimentales), entonces no hay forma de calcular $f''(x)$, por lo que no se puede determinar K. El Teorema 4 es de importancia más teórica que práctica. Demuestra que, dada una función f «bien comportada», el error de la Regla del Punto Medio es aproximadamente la mitad que el error de la Regla del Trapecio y que tanto el error de la Regla del Trapecio como el de la Regla del Punto Medio decrecerán como $1/n^2$ cuando n crece. Utilizando la notación O,

$$I = T_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{e} \quad I = M_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Por supuesto, los errores reales no son iguales a las cotas del error, por lo que no disminuirán exactamente a la cuarta parte cuando se dobla n.

Ejercicios 6.6

En los Ejercicios 1-4, calcule las aproximaciones T_4, M_4, T_8, M_8 y T_{16} de las integrales dadas (utilice una calculadora científica o una hoja de cálculo). Calcule también el valor exacto de cada integral, y determine por tanto el error exacto de cada aproximación. Compare estos errores exactos con las cotas del tamaño del error que proporciona el Teorema 4.

1. $I = \displaystyle\int_0^2 (1 + x^2)\, dx$

2. $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\, dx$

3. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$

4. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$

5. La Figura 6.21 muestra la gráfica de una función f en el intervalo [1, 9]. Utilizando los valores de la gráfica, calcule las estimaciones T_4 y T_8 de la integral $\int_1^9 f(x)\, dx$ mediante la Regla del Trapecio.

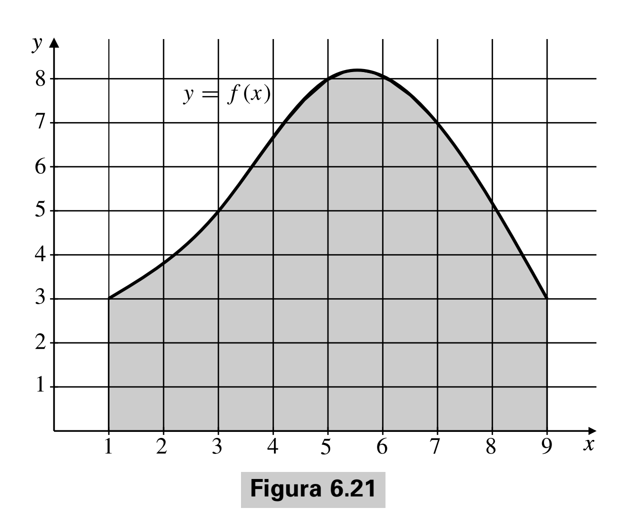


Figura 6.21

6. Obtenga la mejor aproximación que pueda mediante la Regla del Punto Medio a la integral $\int_1^9 f(x)\, dx$ a partir de los datos de la Figura 6.21.

7. El mapa de una región se dibuja en la rejilla que muestra la Figura 6.22, donde una unidad en dirección vertical u horizontal representa una distancia de 10 km.

Utilice la Regla del Trapecio para obtener dos estimaciones del área de la región.

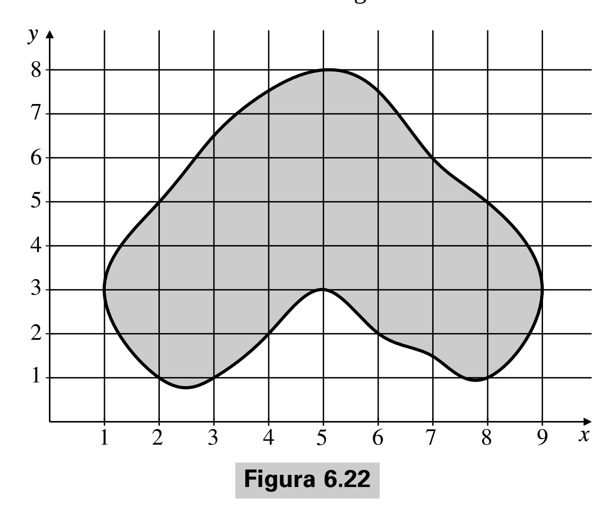


Figura 6.22

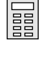
8. Calcule una estimación mediante la Regla del Punto Medio de la región del Ejercicio 7.

9. Calcule T_4, M_4, T_8, M_8 y T_{16} para $\int_0^{1.6} f(x)\,dx$, dada la función f cuyos valores se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	1.4142	0.1	1.4124
0.2	1.4071	0.3	1.3983
0.4	1.3860	0.5	1.3702
0.6	1.3510	0.7	1.3285
0.8	1.3026	0.9	1.2734
1.0	1.2411	1.1	1.2057
1.2	1.1772	1.3	1.1258
1.4	1.0817	1.5	1.0348
1.6	0.9853		

10. Calcule las aproximaciones M_8 y T_{16} para $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. Obtenga un valor de la integral con tantos decimales como crea que están justificados.



11. Repita el Ejercicio 10 para $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ (suponga que el integrando es 1 en $x = 0$).

12. Calcule el error real en la aproximación $\int_0^1 x^2\,dx \approx T_1$ y utilícelo para demostrar que la constante 12 en la estimación del Teorema 4 no se puede mejorar. Es decir, demuestre que el valor absoluto del error real es tan grande como el permitido por esa estimación.

13. Repita el Ejercicio 12 para M_1.

***14.** Demuestre la estimación del error de la Regla del Punto Medio en el Teorema 4 de la siguiente forma: si $x_1 - x_0 = h$ y m_1 es el punto medio de $[x_0, x_1]$, utilice la estimación del error mediante la aproximación por la tangente (Teorema 4 de la Sección 3.5) para demostrar que

$$|f(x) - f(m_1) - f'(m_1)(x - m_1)| \leqslant \frac{K}{2}(x - m_1)^2$$

Utilice esta inecuación para demostrar que

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - f(m_1)\,h \right|$$
$$= \left| \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - f(m_1) - f'(m_1)(x - m_1))\,dx \right|$$
$$\leqslant \frac{K}{24} h^3$$

Complete la demostración de la misma forma que la de la estimación de la Regla del Trapecio en el Teorema 4.

6.7 La Regla de Simpson

La aproximación mediante la Regla del Trapecio a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ surge de aproximar la gráfica de la función f mediante segmentos de rectas entre parejas de puntos adyacentes de la gráfica. Intuitivamente, podemos pensar que el resultado de la aproximación será mejor si aproximamos la gráfica mediante curvas más generales. Como las rectas son las gráficas de las funciones lineales, la siguiente generalización en la que podemos pensar es utilizar la clase de las funciones cuadráticas, es decir, aproximarnos a la gráfica mediante segmentos de parábolas. Esta es la idea básica de la Regla de Simpson.

Supongamos que tenemos tres puntos del plano, cada uno de ellos perteneciente a una de tres rectas equiespaciadas horizontalmente, por ejemplo, h unidades. Si escogemos la recta central como eje y, entonces las coordenadas de los tres puntos podrían ser, por ejemplo, $(-h, y_L)$, $(0, y_M)$ y (h, y_R), como se muestra en la Figura 6.23.

Las constantes A, B y C se escogen de forma que la parábola $y = A + Bx + Cx^2$ pase por esos puntos. Sustituyendo las coordenadas de los tres puntos en la ecuación de la parábola resulta

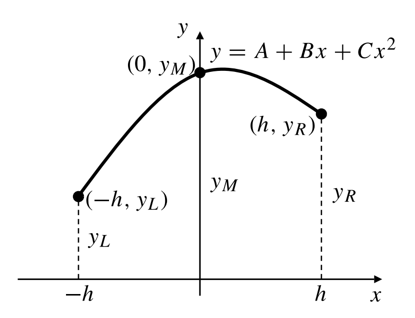


Figura 6.23 Ajuste de una gráfica cuadrática a tres puntos equiespaciados horizontalmente.

$$\left.\begin{aligned} y_L &= A - Bh + Ch^2 \\ y_M &= A \\ y_R &= A + Bh + Chj^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A = y_M \quad \text{y} \quad 2Ch^2 = y_L - 2y_M + y_R$$

Tenemos ahora que

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} (A + Bx + Cx^2)\,dx &= \left(Ax + \frac{B}{2}x^2 + \frac{C}{3}x^3\right)\Bigg|_{-h}^{h} = 2Ah + \frac{2}{3}Ch^3 \\ &= h\left(2y_M + \frac{1}{3}(y_L - 2y_M + y_R)\right) \\ &= \frac{h}{3}(y_L + 4y_M + y_R) \end{aligned}$$

Por tanto, el área de la región plana limitada por el arco de parábola, el intervalo de longitud $2h$ en el eje x, y las rectas verticales izquierda y derecha es igual a $(h/3)$ veces la suma de las alturas de la región en sus extremos izquierdo y derecho más cuatro veces su altura en el centro (esto es independiente de la posición del eje y).

Supongamos ahora que tenemos los mismos datos sobre f que los que son necesarios para aplicar la Regla del Trapecio, es decir, que conocemos los valores $y_j = f(x_j)\,(0 \leqslant j \leqslant n)$ en $n + 1$ puntos equiespaciados

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad ..., \quad x_n = a + nh = b$$

siendo $h = (b - a)/n$. Podemos aproximar la gráfica de f utilizando *parejas* de subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$, mediante segmentos parabólicos, y utilizar las integrales de los correspondientes segmentos cuadráticos para aproximar la integral de f en esos subintervalos. Como necesitamos utilizar dos intervalos a la vez, hay que suponer que n es *par*. Utilizando la integral del segmento parabólico calculada anteriormente, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \\ \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &\vdots \\ \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \end{aligned}$$

Sumando las $n/2$ aproximaciones, se obtiene la aproximación a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la Regla de Simpson.

DEFINICIÓN 5 La Regla de Simpson

La aproximación a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la **Regla de Simpson** basada en una subdivisión del intervalo $[a, b]$ en un número par n de subintervalos de la misma longitud $h = (b - a)/n$ se denomina S_n y es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n$$
$$= \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$
$$= \frac{h}{3}\left(\sum y_{\text{``extremos''}} + 4\sum y_{\text{``impares''}} + 2\sum y_{\text{``pares''}}\right)$$

Nótese que la aproximación S_n mediante la Regla de Simpson no requiere más datos que la aproximación mediante la Regla del Trapecio T_n, pero requiere el cálculo de los valores de $f(x)$ en $n + 1$ puntos equiespaciados. Sin embargo, la Regla de Simpson trata los datos de forma diferente, ponderando los valores sucesivos con 1/3, 2/3 o 4/3. Como veremos, esto puede producir aproximaciones mucho mejores al valor de la integral de f.

Ejemplo 1 Calcule las aproximaciones S_4, S_8 y S_{16} a la integral $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, y compárelas con el valor real $I = \ln 2 = 0.693\,147\,18...$, y con los valores de T_4, T_8 y T_{16}, obtenidos en el Ejemplo 1 de la Sección 6.6.

Solución Se calcula

$$S_4 = \frac{1}{12}\left[1 + 4\left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 4\left(\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{2}\right] = 0.693\,253\,97...$$

$$S_8 = \frac{1}{24}\left[1 + \frac{1}{2} + 4\left(\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right)\right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right)\right] = 0.693\,154\,53...$$

$$S_{16} = \frac{1}{48}\left[1 + \frac{1}{2}\right.$$
$$+ 4\left(\frac{16}{17} + \frac{16}{19} + \frac{16}{21} + \frac{16}{23} + \frac{16}{25} + \frac{16}{27} + \frac{16}{29} + \frac{16}{31}\right)$$
$$\left. + 2\left(\frac{8}{9} + \frac{4}{5} + \frac{8}{11} + \frac{2}{3} + \frac{8}{13} + \frac{4}{7} + \frac{8}{15}\right)\right] = 0.693\,147\,65...$$

Los errores son

$$I - S_4 = 0.693\,147\,18... - 0.693\,253\,97... = -0.000\,106\,79$$
$$I - S_8 = 0.693\,147\,18... - 0.693\,154\,53... = -0.000\,007\,35$$
$$I - S_{16} = 0.693\,147\,18... - 0.693\,147\,65... = -0.000\,000\,47$$

Estos errores evidentemente son menores que los correspondientes errores para las Reglas del Trapecio y del Punto Medio. ■

Observación La Regla de Simpson S_{2n} hace uso de los mismos $2n + 1$ valores de datos que usan conjuntamente T_n y M_n. No es difícil verificar que

$$S_{2n} = \frac{T_n + 2M_n}{3}, \qquad S_{2n} = \frac{2T_{2n} + M_n}{3} \qquad \text{y} \qquad S_{2n} = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$$

La Figura 6.19 y el Teorema 4 de la Sección 6.6 sugieren por qué la primera de esas fórmulas tendría que producir una aproximación particularmente buena a I.

La obtención de una estimación del error en la Regla de Simpson es más difícil que en la Regla del Trapecio. El teorema que sigue plantea dicha estimación del error, pero no lo demostraremos. Se puede buscar una demostración en los textos de análisis numérico.

TEOREMA 5 **Estimación del error en la Regla de Simpson**

Si f es una función cuya cuarta derivada es continua en el intervalo $[a, b]$, y que cumple $|f^{(4)}(x)| \leqslant K$ en dicho intervalo, entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S_n \right| \leqslant \frac{K(b-a)}{180} h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

siendo $h = (b - a)/n$.

Obsérvese que, cuando n crece, el error disminuye como la cuarta potencia de h y, por tanto, como $1/n^4$. Utilizando la notación O, tenemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_n + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Esto da cuenta del hecho de que S_n es una aproximación mucho mejor que T_n, siempre que h sea pequeño y $|f^{(4)}(x)|$ no sea excesivamente grande comparado con $|f''(x)|$. Nótese también que para cualquier n (par), S_n da el valor exacto de la integral de cualquier función *cúbica* $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$; $f^{(4)}(x) = 0$, idénticamente para f, por lo que podemos tomar $K = 0$ en la estimación del error.

Ejemplo 2 Obtenga cotas para los valores absolutos de los errores en las aproximaciones del Ejemplo 1.

Solución Si $f(x) = 1/x$, entonces

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

Claramente, $|f^{(4)}(x)| \leqslant 24$ en el intervalo $[1, 2]$, de forma que en la estimación del Teorema 5 podemos hacer $K = 24$. Tenemos que

$$|I - S_4| \leqslant \frac{24(2-1)}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4 \approx 0.000\,520\,83$$

$$|I - S_8| \leqslant \frac{24(2-1)}{180}\left(\frac{1}{8}\right)^4 \approx 0.000\,032\,55$$

$$|I - S_{16}| \leqslant \frac{24(2-1)}{180}\left(\frac{1}{16}\right)^4 \approx 0.000\,002\,03$$

Observe de nuevo que los errores reales están perfectamente dentro de esos límites.

Ejemplo 3 Una función f satisface $|f^{(4)}(x)| \leqslant 7$ en el intervalo [1, 3], y toma los valores $f(1.0) = 0.1860$, $f(1.5) = 0.9411$, $f(2.0) = 1.1550$, $f(2.5) = 1.4511$ y $f(3.0) = 1.2144$. Calcule la mejor aproximación posible basada en la Regla de Simpson a la integral $I = \int_1^3 f(x)\,dx$ basada en esos datos. Obtenga una cota del tamaño del error, y especifique el mínimo intervalo que pueda asegurar que contiene el valor de I.

Solución Tomamos $n = 4$, de forma que $h = (3 - 1)/4 = 0.5$, y obtenemos

$$I = \int_1^3 f(x)\,dx$$

$$\approx S_4 = \frac{0.5}{3}\,(0.1860 + 4(0.9411 + 1.4511) + 2(1.1550) + 1.2144)$$

$$= 2.2132$$

Como $|f^{(4)}(x)| \leqslant 7$ en el intervalo [1, 3], tenemos que

$$|I - S_4| \leqslant \frac{7(3-1)}{180}\,(0.5)^4 < 0.0049$$

Por tanto, I debe cumplir

$$2.2132 - 0.0049 < I < 2.2132 + 0.0049 \quad \text{o} \quad 2.2083 < I < 2.2181$$

Ejercicios 6.7

En los Ejercicios 1-4, mediante la Regla de Simpson, calcule las aproximaciones S_4 y S_8 a las integrales dadas. Compare sus resultados con las correspondientes aproximaciones basadas en la Regla del Trapecio obtenidas en los Ejercicios 1-4 de la Sección 6.6.

1. $I = \displaystyle\int_0^2 (1 + x^2)\,dx$

2. $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$

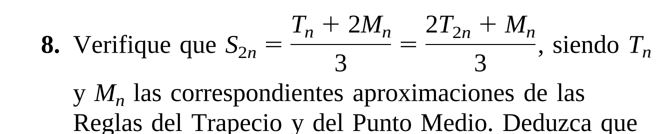
3. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

4. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$

5. Calcule, mediante la Regla de Simpson, la aproximación S_8 a la integral del Ejercicio 5 de la Sección 6.6.

6. Calcule la mejor aproximación que pueda mediante la Regla de Simpson al área de la región del Ejercicio 7 de la Sección 6.6.

7. Utilice el Teorema 5 para obtener cotas de los errores de las aproximaciones realizadas en los Ejercicios 2 y 3 anteriores.



8. Verifique que $S_{2n} = \dfrac{T_n + 2M_n}{3} = \dfrac{2T_{2n} + M_n}{3}$, siendo T_n y M_n las correspondientes aproximaciones de las Reglas del Trapecio y del Punto Medio. Deduzca que

$$S_{2n} = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$$

9. Calcule S_4, S_8 y S_{16} para la integral $\int_0^{1.6} f(x)\,dx$ de la función f cuyos valores están tabulados en el Ejercicio 9 de la Sección 6.6.

10. Calcule, mediante la Regla de Simpson, las aproximaciones S_8 y S_{16} a la integral $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. Obtenga el valor de la integral con el número de decimales que encuentre justificado tras comparar las dos aproximaciones.

*__11.__ Calcule el error real en la aproximación $\int_0^1 x^4\,dx \approx S_2$ y utilícelo para demostrar que la constante 180 de la estimación del Teorema 5 no se puede mejorar.

*__12.__ Como la Regla de Simpson se basa en una aproximación cuadrática, no resulta raro que proporcione un valor exacto en el caso de la integral de $A + Bx + Cx^2$. Resulta más raro que también sea exacta para una función cúbica. Verifique por cálculo directo que $\int_0^1 x^3\,dx = S_2$.

6.8 Otros aspectos de la integración aproximada

Los métodos numéricos descritos en las Secciones 6.6 y 6.7 son adecuados para calcular valores aproximados de integrales de la forma

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

siendo $[a, b]$ un intervalo finito y el integrando f una función «bien comportada» en el intervalo $[a, b]$. En particular, I debe ser una integral *propia*. Existen muchos otros métodos para tratar este tipo de integrales, algunos de los cuales mencionaremos más adelante en esta sección. Sin embargo, vamos a considerar en primer lugar qué se puede hacer si la función f no es «bien comportada» en el intervalo $[a, b]$. Con esto queremos decir que, o bien la integral es impropia, o bien f no tiene las suficientes derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$ para justificar los métodos numéricos que deseamos utilizar.

Las ideas de esta sección se presentan mejor utilizando ejemplos concretos.

Ejemplo 1 ¿Cómo se puede calcular numéricamente la integral $I = \int_0^1 \sqrt{x}\, e^x\,dx$?

Solución Aunque I es una integral propia, cuyo integrando $f(x) = \sqrt{x}\, e^x$ cumple que $f(x) \to 0$ cuando $x \to 0+$, los métodos numéricos no se comportan bien en este caso porque las derivadas de f no están acotadas cerca de 0. Este problema se puede remediar fácilmente; basta con hacer el cambio de variable $x = t^2$ y escribir I en la forma

$$I = 2\int_0^1 t^2 e^{t^2}\,dt$$

cuyo integrando $g(t) = t^2 e^{t^2}$ tiene derivadas acotadas cerca de 0. Esta última integral se puede aproximar eficientemente mediante los métodos de las Secciones 6.6 y 6.7. ■

Aproximación de integrales impropias

Ejemplo 2 Indique cómo calcular numéricamente $I = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Solución La integral es impropia pero convergente, porque en el intervalo [0, 1],

$$0 < \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

Sin embargo, como $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} = \infty$, no podemos aplicar directamente ninguna de las técnicas desarrolladas en las Secciones 6.6 y 6.7 (y_0 es infinito). El cambio $x = t^2$ elimina esta dificultad:

$$I = \int_0^1 \frac{\cos t^2}{t}\, 2t\,dt = 2\int_0^1 \cos t^2\,dt$$

La última integral no es impropia y es bien comportada. Se pueden aplicar las técnicas numéricas que conocemos para calcularla. ■

Ejemplo 3 Indique cómo calcular por métodos numéricos la integral $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2 + x^4}}$.

Solución En este caso la integral es impropia de tipo I. El intervalo de integración es infinito. Aunque no hay singularidad en $x = 0$, resulta de utilidad dividir la integral en dos partes:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2 + 4^4}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2 + x^4}} = I_1 + I_2$$

I_1 es propia. En I_2 se hace el cambio de variable $x = 1/t$:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 \sqrt{2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4}}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2t^4 + t^2 + 1}}$$

Este integral también es propia. Si se desea, se pueden volver a combinar I_1 y I_2 en una sola integral antes de aplicar los métodos numéricos:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^4}} + \frac{1}{\sqrt{2x^4 + x^2 + 1}} \right) dx$$

El Ejemplo 3 sugiere que cuando una integral se toma en un intervalo infinito, se puede hacer un cambio de variable para transformar la integral a un intervalo finito.

Uso de la fórmula de Taylor

La Fórmula de Taylor (*véase* la Sección 4.8) puede ser algunas veces de utilidad en el cálculo de integrales. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4 Utilice la Fórmula de Taylor de $f(x) = e^x$, obtenida en la Sección 4.8, para calcular la integral $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ con un error menor que 10^{-4}.

Solución En el Ejemplo 4 de la Sección 4.8 demostramos que

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

siendo

$$E_n(x) = \frac{e^X}{(n+1)!} x^{n+1}$$

para algún X entre 0 y x. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, entonces $0 \leqslant X \leqslant 1$, por lo que $e^X \leqslant e \leqslant 3$. Por tanto,

$$|E_n(x)| \leqslant \frac{3}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Sustituyamos ahora x por x^2 en la fórmula de e^x e integremos desde 0 hasta 1:

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx = \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} \right) dx + \int_0^1 E_n(x^2)\, dx$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \times 2!} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)n!} + \int_0^1 E_n(x^2)\, dx$$

Se desea que el error sea menor de 10^{-4}, por lo que estimaremos el término de resto:

$$\left| \int_0^1 E_n(x^2)\, dx \right| \leqslant \frac{3}{(n+1)!} \int_0^1 x^{2(n+1)}\, dx = \frac{3}{(n+1)!(2n+3)} < 10^{-4}$$

suponiendo que $(2n + 3)(n + 1)! > 30\,000$. Como $13 \times 6! = 9360$ y $15 \times 7! = 75\,600$, se necesita que $n = 6$. Por tanto,

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \times 2!} + \frac{1}{7 \times 3!} + \frac{1}{9 \times 4!} + \frac{1}{11 \times 5!} + \frac{1}{13 \times 6!}$$
$$\approx 1.462\,64$$

con error menor que 10^{-4}.

Integración de Romberg

Utilizando la Fórmula de Taylor, es posible verificar que para una función f con derivadas continuas hasta de orden $2m + 2$ en el intervalo $[a, b]$, el error $E_n = I - T_n$ en la aproximación de la Regla del Trapecio T_n a la integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$ cumple

$$E_n = I - T_n = \frac{C_1}{n^2} + \frac{C_2}{n^4} + \frac{C_3}{n^6} + \cdots + \frac{C_m}{n^{2m}} + O\left(\frac{1}{n^{2m+2}}\right)$$

donde la constante C_j depende de la derivada de orden $2j$ de f. Es posible utilizar esta fórmula para obtener aproximaciones de orden superior a la integral I, a partir de las aproximaciones de la Regla del Trapecio. Esta técnica se conoce por el nombre de **integración de Romberg** o **extrapolación de Richardson**.

Para empezar, supongamos que hemos calculado aproximaciones mediante la Regla del Trapecio para valores de n que son potencias de 2: $n = 1, 2, 4, 8, \ldots$ De acuerdo con esto, definamos

$$T_k^0 = T_{2^k}. \quad \text{Por tanto,} \quad T_0^0 = T_1, \quad T_1^0 = T_2, \quad T_2^0 = T_4, \ldots$$

Utilizando la fórmula para $T_{2^k} = I - E_{2^k}$ presentada anteriormente, podemos escribir

$$T_k^0 = I - \frac{C_1}{4^k} - \frac{C_2}{4^{2k}} - \cdots - \frac{C_m}{4^{mk}} + O\left(\frac{1}{4^{(m+1)k}}\right) \qquad (\text{cuando } k \to \infty)$$

De forma similar, sustituyendo k por $k + 1$, se obtiene

$$T_{k+1}^0 = I - \frac{C_1}{4^{k+1}} - \frac{C_2}{4^{2(k+1)}} - \cdots - \frac{C_m}{4^{m(k+1)}} + O\left(\frac{1}{4^{(m+1)(k+1)}}\right)$$

Si multiplicamos la fórmula de T_{k+1}^0 por 4 y restamos la fórmula de T_k^0, los términos donde aparece C_1 se anulan. El primer término de la derecha será $4I - I = 3I$, y por tanto podemos dividir por 3 y definir T_{k+1}^1 como el resultado. Entonces, cuando $k \to \infty$, tenemos

$$T_{k+1}^1 = \frac{4T_{k+1}^0 - T_k^0}{3} = I - \frac{C_2^1}{4^{2k}} - \frac{C_3^1}{4^{3k}} - \cdots - \frac{C_m^1}{4^{mk}} + O\left(\frac{1}{4^{(m+1)k}}\right)$$

Los C_i^1 son nuevas constantes. A menos que estas constantes sean mucho mayores que las anteriores, T_{k+1}^1 debe ser una mejor aproximación de I que T_{k+1}^0, ya que hemos eliminado el término de error de menor orden (y, por tanto, el mayor), $C_1/4^{k+1}$. De hecho, el Ejercicio 8 de la Sección 6.7 demuestra que $T_{k+1}^1 = S_{2^{k+1}}$, en la aproximación de la Regla de Simpson basada en 2^{k+1} subintervalos.

Podemos continuar el proceso de eliminar términos de error que hemos comenzado. Sustituyendo $k + 1$ por $k + 2$ en la expresión de T_{k+1}^1, se obtiene

$$T_{k+2}^1 = I - \frac{C_2^1}{4^{2(k+1)}} - \frac{C_3^1}{4^{3(k+1)}} - \cdots - \frac{C_m^1}{4^{m(k+1)}} + O\left(\frac{1}{4^{(m+1)(k+1)}}\right)$$

Para eliminar C_2^1 se puede multiplicar la segunda fórmula por 16, restar la primera fórmula y dividir por 15. Denominando el resultado T_{k+2}^2, tenemos, cuando $k \to \infty$,

$$T_{k+2}^2 = \frac{16T_{k+2}^1 - T_{k+1}^1}{15} = I - \frac{C_3^2}{4^{3k}} - \cdots - \frac{C_m^2}{4^{mk}} + O\left(\frac{1}{4^{(m+1)k}}\right)$$

Podemos seguir procediendo de esta forma, eliminando un término de error tras otro. En general, para $j < m$ y $k \geqslant 0$:

$$T_{k+j}^j = \frac{4^j T_{k+j}^{j-1} - T_{k+j-1}^{j-1}}{4^j - 1} = I - \frac{C_{j+1}^j}{4^{(j+1)k}} - \cdots - \frac{C_m^j}{4^{mk}} + O\left(\frac{1}{4^{(m+1)k}}\right)$$

La notación O se refiere a $k \to \infty$ para j fijo. Todo esto parece muy complicado, pero no es difícil de realizar en la práctica, especialmente con la ayuda de una hoja de cálculo. Sea $R_j = T_j^j$, denominada **aproximación de Romberg** a I. Se calculan los valores del esquema siguiente en orden de izquierda a derecha y de arriba abajo en cada columna:

Esquema para calcular aproximaciones de Romberg

$$\begin{array}{ccccccc}
T_0^0 = T_1 = R_0 & \longrightarrow & T_1^0 = T_2 & \longrightarrow & T_2^0 = T_4 & \longrightarrow & T_3^0 = T_8 & \longrightarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & T_1^1 = S_2 = R_1 & & T_2^1 = S_4 & & T_3^1 = S_8 & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & & T_2^2 = R_2 & & T_3^2 & \\
 & & & & & & \downarrow & \\
 & & & & & & T_3^3 = R_3 &
\end{array}$$

El proceso se detiene cuando T_j^{j-1} y R_j se diferencian menos que un error aceptable, y R_j se denomina la aproximación de Romberg a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

La fila superior del esquema está compuesta por las aproximaciones de la Regla del Trapecio T_1, T_2, T_4, T_8, ... Los elementos de las filas siguientes se calculan mediante las fórmulas:

Fórmulas para calcular las aproximaciones de Romberg

$$T_1^1 = \frac{4T_1^0 - T_0^0}{3} \qquad T_2^1 = \frac{4T_2^0 - T_1^0}{3} \qquad T_3^1 = \frac{4T_3^0 - T_2^0}{3} \cdots$$

$$T_2^2 = \frac{16T_2^1 - T_1^1}{15} \qquad T_3^2 = \frac{16T_3^1 - T_2^1}{15} \cdots$$

$$T_3^3 = \frac{64T_3^2 - T_2^2}{63} \cdots$$

En general, si $1 \leqslant j \leqslant k$, entonces $T_k^j = \dfrac{4^j T_k^{j-1} - T_{k-1}^{j-1}}{4^j - 1}$.

Cada nuevo elemento se puede calcular a partir de los elementos que están encima y a la izquierda de aquél.

Ejemplo 5 Calcule las aproximaciones de Romberg R_0, R_1, R_2, R_3 y R_4 a la integral $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Solución Realizaremos todos los cálculos con ocho cifras decimales. Como tenemos que calcular R_4, necesitamos obtener todos los elementos de las cinco primeras columnas del esquema. En primer lugar calcularemos las dos primeras aproximaciones mediante la Regla del Trapecio:

$$R_0 = T_0^0 = T_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.750\,000\,00$$

$$T_1^0 = T_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1) + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 0.708\,333\,33$$

Las restantes aproximaciones mediante la Regla de Trapecio requeridas se calcularon en el Ejemplo 1 de la Sección 6.6, por lo que sólo las recordaremos a continuación:

$$T_2^0 = T_4 = 0.697\,023\,81$$

$$T_3^0 = T_8 = 0.694\,121\,85$$

$$T_4^0 = T_{16} = 0.693\,391\,20$$

Calcularemos ahora las columnas hacia abajo y de izquierda a derecha. Para la segunda columna:

$$R_1 = S_2 = T_1^1 = \frac{4T_1^0 - T_0^0}{3} = 0.694\,444\,44$$

la tercera columna:

$$S_4 = T_2^1 = \frac{4T_2^0 - T_1^0}{3} = 0.693\,253\,97$$

$$R_2 = T_2^2 = \frac{16T_2^1 - T_1^1}{15} = 0.693\,174\,60$$

la cuarta columna:

$$S_8 = T_3^1 = \frac{4T_3^0 - T_2^0}{3} = 0.693\,154\,53$$

$$T_3^2 = \frac{16T_3^1 - T_2^1}{15} = 0.693\,147\,90$$

$$R_3 = T_3^3 = \frac{64T_3^2 - T_2^2}{63} = 0.693\,147\,48$$

y la quinta columna:

$$S_{16} = T_4^1 = \frac{4T_4^0 - T_3^0}{3} = 0.693\,147\,65$$

$$T_4^2 = \frac{16T_4^1 - T_3^1}{15} = 0.693\,147\,19$$

$$T_4^3 = \frac{64T_4^2 - T_3^2}{63} = 0.693\,147\,18$$

$$R_4 = T_4^4 = \frac{256T_4^3 - T_3^3}{255} = 0.693\,147\,18$$

Como T_4^3 y R_4 coinciden hasta el octavo decimal que estamos calculando, podemos decir que

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 \approx 0.693\,147\,18...$$

■

Las diversas aproximaciones calculadas anteriormente sugieren que para cualquier valor dado de $n = 2^k$, la aproximación de Romberg R_n debería producir el mejor valor posible para la integral basándose en los $n + 1$ valores de datos $y_0, y_1, ..., y_n$. Esto sólo es cierto si las derivadas $f^{(n)}(x)$ no crecen demasiado rápido cuando n aumenta.

Otros métodos

Como hemos descrito, los métodos del Trapecio, del Punto Medio, de Simpson y de Romberg se basan en utilizar subdivisiones iguales del intervalo $[a, b]$. Existen otros métodos que no requieren esta restricción. En particular, las **aproximaciones gaussianas** seleccionan los puntos de evaluación y sus ponderaciones de forma óptima, de manera que proporcionan los resultados más precisos para funciones «bien comportadas». *Véanse* los Ejercicios 11-13 posteriores. Para aprender más sobre este método se pueden consultar los textos de análisis numérico.

Finalmente, hay que indicar que incluso cuando se aplica uno de los métodos de las Secciones 6.6 y 6.7, puede ser de utilidad dividir la integral en dos o más integrales en intervalos más pequeños, y utilizar diferentes longitudes h de subintervalos en cada una de las diferentes integrales. Por ejemplo, se pueden evaluar más puntos del integrando en aquellos intervalos donde su gráfica cambie de dirección erráticamente y menos puntos en aquellos intervalos donde la gráfica tenga un comportamiento mejor.

Ejercicios 6.8

Exprese las integrales de los Ejercicios 1-6 de forma que se puedan aplicar adecuadamente métodos numéricos para aproximar su valor.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}(1+x)}$ **2.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **4.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}+1}$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ **6.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$

7. Calcule T_2, T_4, T_8 y T_{16} para la integral $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ y obtenga los errores reales en estas aproximaciones. ¿Disminuyen los errores como $1/n^2$ cuando n crece? ¿Por qué?

8. Transforme la integral $I = \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ utilizando el cambio $x = 1/t$ y calcule las aproximaciones mediante la Regla de Simpson S_2, S_4 y S_8 para la integral resultante (cuyo integrando tiene como límite 0 cuando $t \to 0+$). Obtenga el valor de I con la precisión que piense que está justificada. ¿Convergen las aproximaciones tan rápido como podría esperarse? ¿Podría pensar en una razón para que no lo hagan?

9. Calcule $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ por el método de la Fórmula de Taylor del Ejemplo 4, con una cota de error de 10^{-4}.

10. Recuerde que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Combine este hecho con el resultado del Ejercicio 9 para calcular $I = \displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ con una precisión de tres decimales.

11. **(Aproximación gaussiana)** Calcule las constantes A y u, con u entre 0 y 1, tales que

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = Af(-u) + Af(u)$$

se cumpla para todo polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Para una función general $f(x)$ definida en el intervalo $[-1, 1]$, la aproximación

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx Af(-u) + Af(u)$$

se denomina *aproximación gaussiana*.

12. Utilice el método del Ejercicio 11 para aproximar las integrales de (a) x^4, (b) $\cos x$ y (c) e^x, en el intervalo $[-1, 1]$ y calcule el error de cada aproximación.

13. **(Otra aproximación gaussiana)** Calcule las constantes A, B y u entre 0 y 1 tales que

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = Af(-u) + Bf(0) + Af(u)$$

se cumpla para todo polinomio de quinto grado

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

14. Utilice la aproximación gaussiana

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx Af(-u) + Bf(0) + Af(u)$$

donde A, B y u se determinan como en el Ejercicio 13, para obtener aproximaciones a las integrales de (a) x^6, (b) $\cos x$ y (c) e^x en el intervalo $[-1, 1]$ y calcule el error de cada aproximación.

15. Calcule las suficientes aproximaciones de Romberg R_1, R_2, R_3, ... de la integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

para confiar razonablemente en que se ha obtenido la integral correctamente con una precisión de seis cifras decimales.

16. Utilice los valores de $f(x)$ dados en la tabla que acompaña al Ejercicio 9 de la Sección 6.6 para calcular las aproximaciones de Romberg R_1, R_2 y R_3 a la integral

$$\int_0^{1.6} f(x)\,dx$$

de ese ejercicio.

***17.** La aproximación de Romberg R_2 a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ requiere cinco valores de f, $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(a+h)$, ..., $y_4 = f(x+4h) = f(b)$, siendo $h = (b-a)/4$. Escriba la fórmula de R_2 en función de esos cinco valores.

***18.** Explique por qué el cambio de variable $x = 1/t$ no es adecuado para transformar la integral $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$ en una forma en la que se puedan aplicar métodos numéricos. Intente desarrollar un método mediante el cual esta integral se pueda aproximar con cualquier grado deseado de exactitud.

***19.** Si $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$, demuestre que $f''(x)$ tiene el límite finito cuando $x \to 0$. Por tanto, f'' está acotada en intervalos finitos $[0, a]$ y las aproximaciones mediante la Regla del Trapecio T_n a la integral $\int_0^a \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ convergen con la adecuada rapidez cuando n crece. Las derivadas de orden superior también están acotadas (la Fórmula de Taylor es útil para demostrar esto), por lo que la Regla de Simpson y otras aproximaciones de orden superior también se pueden utilizar de forma efectiva.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan los siguientes términos y frases?**
  - ◇ Integración por partes
  - ◇ Fórmula de reducción
  - ◇ Sustitución inversa
  - ◇ Función racional
  - ◇ Método de descomposición en fracciones simples
  - ◇ Programa de matemáticas por computador
  - ◇ Integral impropia de tipo I
  - ◇ Integral impropia de tipo II
  - ◇ Integral p
  - ◇ Regla del Trapecio
  - ◇ Regla del Punto Medio
  - ◇ Regla de Simpson
- **Explique las sustituciones inversas del seno y la tangente.**
- **¿Cuál es el significado del teorema de comparación de integrales impropias?**
- **¿Cuándo es necesario aplicar integración numérica?**

Resumen de las técnicas de integración

Algunas veces los estudiantes tienen dificultades para decidir qué método hay que utilizar para calcular una integral dada. Muchas veces no existe un único método que sea suficiente para obtener la solución completa, pero al usar un determinado método se puede llegar a una integral diferente, y posiblemente más simple, que se puede tratar a su vez con otros métodos. Presentamos a continuación algunos consejos:

1. Primero, y siempre, hay que estar atentos a los cambios que pueden simplificar la integral. Aun cuando dichos cambios no resuelvan la integral completa, pueden llevarnos a otras integrales a las que se puede aplicar otro método.
2. Si en la integral aparece una expresión cuadrática $Ax^2 + Bx + C$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$, debe completarse el cuadrado. Un cambio simple reduce a continuación la expresión cuadrática a una suma o diferencia de cuadrados.

3. Las integrales de productos de funciones trigonométricas algunas veces se pueden calcular o simplificar mediante el uso de las identidades trigonométricas adecuadas, tales como:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$
$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$
$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$
$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

4. Las integrales en las que aparece $(a^2 - x^2)^{1/2}$ se pueden transformar utilizando $x = a \operatorname{sen}\theta$. Las integrales en las que aparecen $(a^2 + x^2)^{1/2}$ o $1/(a^2 + x^2)$ se pueden transformar utilizando $x = a\tan\theta$. Las integrales en las que aparece $(x^2 - a^2)^{1/2}$ se pueden transformar utilizando $x = a\sec\theta$ o $x = a\cosh\theta$.
5. Utilice integración por partes para funciones con la forma de productos de polinomios y funciones trascendentes, y para funciones trigonométricas inversas y logaritmos. Esté atento para descubrir formas de utilizar la integración por partes para obtener fórmulas que transformen integrales complicadas en función de integrales más simples.
6. Utilice descomposición en fracciones simples para integrar funciones racionales cuyos denominadores se puedan descomponer en productos de factores reales lineales y cuadráticos. Divida primero los polinomios, si es necesario, para reducir la fracción a una cuyo numerador sea de grado inferior al del denominador.
7. Hay una tabla de integrales al final de este libro. Si no puede resolver una integral directamente, intente utilizar los métodos anteriores para transformarla en una de las integrales de la tabla.
8. Si no se puede encontrar ninguna forma de calcular una integral definida de la que se requiere un valor numérico, considere utilizar un computador o una calculadora, y aplicar uno de los métodos numéricos presentados en las Secciones 6.6-6.8.

Ejercicios de repaso sobre técnicas de integración

He aquí una oportunidad de adquirir más práctica en el cálculo de integrales. A diferencia de los ejercicios de las Secciones 5.6 y 6.1-6.3, en los que se utiliza sólo la técnica presentada en la sección, estos ejercicios están ordenados aleatoriamente de forma que hay que averiguar que técnicas utilizar.

1. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{2x^2 + 5x + 2}$

2. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3}$

3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/3}}{\sqrt{x}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{4x^2 - 1}$

6. $\displaystyle\int (x^2 + x - 2)\operatorname{sen} 3x\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$

8. $\displaystyle\int x^3\cos(x^2)\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(5x^3-2)^{2/3}}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 15}$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}$

12. $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2\,dx$

13. $\displaystyle\int 2^x\sqrt{1+4^x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^7 x}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(3+5x^2)^{3/2}}$

17. $\displaystyle\int e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 4x - 3}{x^2 + 5x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \cos(3\ln x)\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^3 + x}$

21. $\displaystyle\int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$

22. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

24. $\displaystyle\int \tan^4 x\sec x\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(4x+1)^{10}}$

26. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5(4x)\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5 - 2x^3 + x}$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + e^x}$

30. $\displaystyle\int x^3 3^x\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\cos x}{2 - \operatorname{sen} x}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+2x+2}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

34. $\displaystyle\int x^3(\ln x)^2\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}\,dx}{x^2}$

37. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

38. $\displaystyle\int e^{(x^{1/3})}\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{x^3-3}{x^3-9x}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{10^{\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x+2}}\,dx$

41. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\cos^9 x\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

43. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2x - 1}$

44. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{\sqrt{4 - 3x + x^2}}\,dx$

45. $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1}(2x)\,dx$

46. $\int \frac{\sqrt{3x^2-1}}{x}\,dx$

47. $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^4 x\,dx$

48. $\int \sqrt{x - x^2}\,dx$

49. $\int \frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}}$

50. $\int x \tan^{-1}\frac{x}{3}\,dx$

51. $\int \frac{x^4-1}{x^3+2x^2}\,dx$

52. $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

53. $\int \frac{\operatorname{sen}(2\ln x)}{x}\,dx$

54. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x^2}\,dx$

55. $\int \frac{e^{2\tan^{-1}x}}{1+x^2}\,dx$

56. $\int \frac{x^3+x-2}{x^2-7}\,dx$

57. $\int \frac{\ln(3+x^2)}{3+x^2}\,x\,dx$

58. $\int \cos^7 x\,dx$

59. $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}(x/2)}{(4-x^2)^{1/2}}\,dx$

60. $\int \tan^4(\pi x)\,dx$

61. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$

62. $\int e^x(1-e^{2x})^{5/2}\,dx$

63. $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+2)^{7/2}}$

64. $\int \frac{x^2}{2x^2-3}\,dx$

65. $\int \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/3}}\,dx$

66. $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)^{1/2}}$

67. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

68. $\int \frac{x\,dx}{4x^4+4x^2+5}$

69. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-4)^2}$

70. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$

71. $\int x^2 \tan^{-1} x\,dx$

72. $\int e^x \sec(e^x)\,dx$

73. $\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x - 3\cos x}$

74. $\int \frac{dx}{x^{1/3}-1}$

75. $\int \frac{dx}{\tan x + \operatorname{sen} x}$

76. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-4x-4x^2}}$

77. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

78. $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

79. $\int \frac{x^4\,dx}{x^3-8}$

80. $\int xe^x \cos x\,dx$

Otros ejercicios de repaso

1. Calcule $I = \int x\,e^x \cos x\,dx$ y $J = \int xe^x \operatorname{sen} x\,dx$ diferenciando $e^x((ax+b)\cos x + (cx+d)\operatorname{sen} x)$ y examinando los coeficientes.

2. ¿Para qué números reales r es válida la siguiente fórmula de reducción (obtenida utilizando integración por partes)?

$$\int_0^\infty x^r e^{-x}\,dx = r\int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}\,dx$$

Calcule las integrales de los Ejercicios 3-6 o demuestre que divergen.

3. $\int_0^{\pi/2} \csc x\,dx$

4. $\int_1^\infty \frac{1}{x+x^3}\,dx$

5. $\int_0^1 \sqrt{x}\ln x\,dx$

6. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

7. Demuestre que la integral $I = \int_0^\infty (1/(\sqrt{x}\,e^x))\,dx$ converge y que su valor satisface $I < (2e+1)/e$.

8. Midiendo las áreas encerradas por los contornos de un mapa topográfico, un geólogo determina las áreas de sección cruzada A (m^2) de una colina de 60 m de altura en varias alturas h (m). Los resultados se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2.

h	0	10	20	30	40	50	60
A	10 200	9200	8000	7100	4500	2400	100

Si se utiliza la Regla del Trapecio para estimar el volumen de la colina (que es $V = \int_0^{60} A(h)\,dh$), ¿cuál será el valor de la estimación con una precisión de 1000 m^3?

9. ¿Cuál será la estimación del geólogo del volumen de la colina del Ejercicio 8 si se utiliza la Regla de Simpson en vez de la Regla del Trapecio?

10. Calcule las aproximaciones mediante la Regla del Trapecio y la Regla del Punto Medio, T_4 y M_4, a la integral $I = \int_0^1 \sqrt{2+\operatorname{sen}(\pi x)}\,dx$. Calcule sus resultados con una precisión de 5 cifras decimales. Calcule a continuación el valor de I con tantas cifras decimales como piense que estén justificadas por estas aproximaciones.

11. Utilice los resultados del Ejercicio 10 para calcular la aproximación mediante la Regla del Trapecio T_8 y la aproximación mediante la Regla de Simpson S_8 a la integral I de ese ejercicio. Obtenga el valor de I con tantas cifras decimales como piense que estén justificadas por estas aproximaciones.

12. Desarrolle un método para calcular numéricamente $I = \int_{1/2}^\infty x^2/(x^5+x^3+1)\,dx$, y utilícelo para calcular I con una precisión de 3 cifras decimales.

13. Se desea aproximar la integral $I = \int_0^4 f(x)\,dx$ de una función desconocida $f(x)$ y se miden los siguientes valores de f:

Tabla 3.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.730	1.001	1.332	1.729	2.198

(a) ¿Qué son las aproximaciones T_4 y S_4 a la integral I que se calculan utilizando estos datos?

(b) Se decide entonces tomar más medidas para calcular T_8 y S_8. Se obtiene $T_8 = 5.5095$. ¿Qué valor se obtendría para S_8?

(c) Suponga que existen razones teóricas para pensar que $f(x)$ es un polinomio de grado 3. ¿Son sus cálculos coherentes con esta teoría? ¿Por qué o por qué no?

Problemas avanzados

*__1.__ (a) Algunas personas creen que $\pi = 22/7$. Demuestre que esto no es así probando que

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}\,dx = \frac{22}{7} - \pi$$

(b) Si $I = \int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$, demuestre que

$$\frac{22}{7} - I < \pi < \frac{22}{7} - \frac{I}{2}$$

(c) Calcule I y determine un intervalo explícito de pequeño tamaño que contenga a π.

2. (a) Obtenga una fórmula de reducción para la integral $\int (1-x^2)^n\,dx$.

(b) Demuestre que si n es un entero positivo, entonces

$$\int_0^1 (1-x)^{2n}\,dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

(c) Utilice la fórmula de reducción para calcular $\int (1-x^2)^{-3/2}\,dx$

3. (a) Demuestre que $x^4 + x^2 + 1$ se puede descomponer en un producto de dos factores reales cuadráticos, y calcule $\int (x^2+1)/(x^4+x^2+1)\,dx$. *Sugerencia*: $x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2$.

(b) Utilice el mismo método para calcular $\int (x^2+1)/(x^4+1)\,dx$.

4. Sea $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx$.

(a) Demuestre que $I_{m,n} = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-(m+1)x}\,dx$.

(b) Demuestre que $I_{m,n} = \dfrac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$.

*__5.__ Sea $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

(a) Demuestre que $0 < I_n < \dfrac{1}{n+1}$ y a partir de aquí que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

(b) Demuestre que $I_n = nI_{n-1} - \dfrac{1}{e}$ para $n \geqslant 1$ e $I_0 = 1 - \dfrac{1}{e}$.

(c) Verifique por inducción que $I_n = n!\left(1 - \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\right)$.

(d) Deduzca a partir de los apartados (a) y (c) que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = e.$$

*__6.__ Si K es muy grande, ¿cuál de las aproximaciones T_{100} (Regla del Trapecio), M_{100} (Regla del Punto Medio) y S_{100} (Regla de Simpson) estará más cerca del verdadero valor de $\int_0^1 e^{-Kx}\,dx$? ¿Cuál estará más lejos? Justifique sus respuestas. (*Cuidado*: No es tan fácil como parece).

7. La Regla de Simpson produce el valor exacto de la integral definida en el caso de una función f cúbica. Suponga que desea obtener una regla de integración numérica que proporcione el valor exacto para un polinomio de grado 5. Podría aproximar la integral en el subintervalo $[m-h, m+h]$ con algo de la forma

$$2h\left(af(m-h) + bf\left(m - \frac{h}{2}\right) + f(m) + bf\left(m + \frac{h}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + af(m+h)\right)$$

para algunas constantes a, b y c.

(a) Determine los valores de a, b y c para que esto funcione. (*Sugerencia*: Tome $m = 0$ para simplificar los cálculos).

(b) Utilice este método para aproximar la integral $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ utilizando en primer lugar uno y después dos de sus intervalos (y, por tanto, evaluando el integrando en nueve puntos).

*__8.__ La convergencia de integrales impropias puede ser un asunto más delicado cuando el integrando cambia de signo. Presentamos aquí un método que se puede utilizar para demostrar la convergencia en algunos casos en los que el teorema de comparación falla.

(a) Suponga que $f(x)$ es diferenciable en $[1, \infty)$, $f'(x)$ es continua en dicho intervalo, $f'(x) < 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Demuestre que $\int_1^\infty f'(x)\cos(x)\,dx$ converge. *Sugerencia*: ¿Qué es $\int_1^\infty |f'(x)|\,dx$?

(b) Partiendo de las mismas hipótesis, demuestre que $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ converge. *Sugerencia*: Integre por partes y utilice (a).

(c) Demuestre que $\int_1^\infty \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx$ converge pero $\int_1^\infty \dfrac{|\mathrm{sen}\,x|}{x}\,dx$ diverge. *Sugerencia*: $|\mathrm{sen}\,x| \geqslant \mathrm{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Nótese que (b) funcionaría también sustituyendo $\mathrm{sen}\,x$ por $\cos(2x)$.

CAPÍTULO 7

Aplicaciones de la integración

«Es como esto —dijo—. Cuando vas a por miel con un globo, lo importante es no dejar que las abejas sepan que vas. Si vas con un globo verde, ellas pensarán que eres parte del árbol y no se fijarán en ti, y si llevas un globo azul pensarán que eres parte del cielo y no se fijarán en ti, y la cuestión —dijo Winnie the Pooh— es: ¿Qué es más probable?».

A. A. Milne (1882-1956)
de *Winnie the Pooh*

Introducción Existen numerosas magnitudes en matemáticas, física, economía, biología, y en prácticamente cualquier ciencia cuantitativa que se pueden representar convenientemente mediante integrales. Además de la medida de áreas planas, el problema que motivó la definición de integral definida, podemos utilizar las integrales para expresar volúmenes de sólidos, longitudes de curvas, áreas de superficies, fuerzas, trabajo, energía, presión, probabilidades, valor monetario de una serie de pagos, y una gran variedad de magnitudes que en un sentido u otro equivalen a áreas encerradas por gráficas.

Además, como vimos previamente, una gran parte de los principios básicos que gobiernan el comportamiento de nuestro mundo se pueden modelar adecuadamente mediante ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial. La integración indefinida es una herramienta clave en la solución de estos problemas.

En este capítulo examinaremos algunas de estas aplicaciones. La mayoría de ellas son independientes entre sí, y por esa razón alguna de las últimas secciones de este capítulo se puede considerar material opcional. El material de las Secciones 7.1-7.3 debe ser considerado fundamental porque estas ideas surgirán de nuevo en el estudio del cálculo multivariable.

7.1 Cálculo de volúmenes mediante rodajas: Sólidos de revolución

En esta sección demostramos cómo se pueden expresar los volúmenes de ciertas regiones tridimensionales (o *sólidos*) en función de integrales definidas y, por tanto, cómo se pueden calcular dichos volúmenes. No intentaremos dar una definición de *volumen* sino que nos basaremos en nuestra intuición y experiencia con objetos sólidos, lo que nos permitirá especificar los volúmenes de ciertos sólidos simples. Por ejemplo, si la base de una caja rectangular es un rectángulo de longitud l y anchura w (y, por tanto, de área $A = lw$), y si la caja tiene una altura h, entonces su volumen es $V = Ah = lwh$. Si l, w y h se miden en *unidades* (por ejemplo, centímetros), entonces el volumen se expresa en *unidades al cubo* (centímetros cúbicos).

Una caja rectangular es un caso especial de sólido denominado **prisma** o **cilindro** (*véase* la Figura 7.1). Estos sólidos tienen una base plana que ocupa una región R del plano, y el sólido está formado por todos los puntos pertenecientes a segmentos de rectas paralelas con un extremo en R y el otro en una región (necesariamente congruente) en un segundo plano paralelo al plano de la base. Cualquiera de esas regiones se denomina **base** del prisma o cilindro. Si la base está limitada por rectas, el sólido se denomina prisma. Si al menos una parte del límite de la base tiene forma de curva, el sólido se denomina cilindro. La altura del sólido es la distancia perpendicular entre los planos paralelos que contienen a las dos bases. Si esta altura es de h unidades y el área de la base es de A unidades al cuadrado, entonces el volumen del prisma o cilindro es $V = Ah$ unidades al cubo.

Aplicaremos el adjetivo **recto** a un prisma o cilindro si los segmentos de rectas paralelas que lo constituyen son perpendiculares a los planos de la base. Si no es así, el prisma o cilindro se denomina **oblicuo**. Por ejemplo, un cilindro recto cuyas bases sean discos circulares de radio r unidades y cuya altura sea h unidades se denomina **cilindro circular recto**. Su volumen es $V = \pi r^2 h$ unidades al cubo. El carácter de oblicuo no tiene efecto en la expresión del volumen $V = Ah$ de un prisma o cilindro, ya que h siempre se mide en una dirección perpendicular a la base.

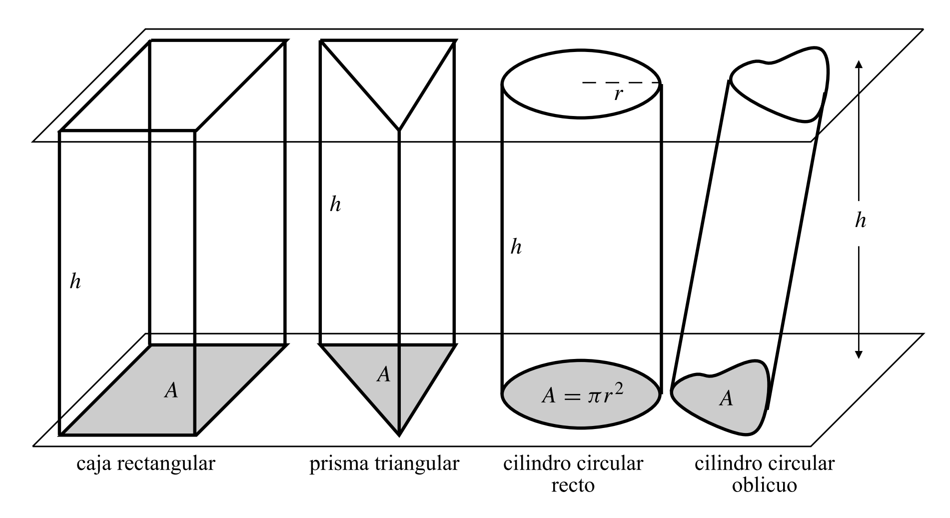


Figura 7.1 El volumen de cualquier prisma o cilindro es el área de la base multiplicada por la altura (medida perpendicularmente a la base): $V = Ah$.

Cálculo de volúmenes mediante rodajas

Conociendo el volumen de un cilindro se puede determinar el volumen de algunos sólidos más generales. Para ello se pueden dividir los sólidos en «rodajas» finas mediante planos paralelos (piénsese en las rebanadas de pan de molde). Cada rodaja es aproximadamente un cilindro de «altura» muy pequeña; dicha altura es el espesor de la rodaja. *Véase* la Figura 7.2, donde la altura se mide horizontalmente en la dirección del eje x. Si se conoce el área de la sección cruzada

de cada rodaja, se puede determinar su volumen y sumar estos volúmenes para calcular el volumen total del sólido.

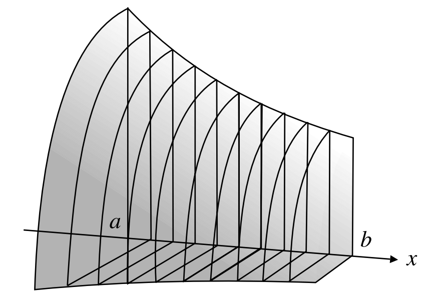


Figura 7.2 División de un sólido en rodajas perpendiculares a un eje.

Para concretar, supongamos que el sólido S está limitado por planos perpendiculares al eje x en las posiciones $x = a$ y $x = b$, y que el área de la sección cruzada de S en el plano perpendicular al eje x en el punto x es una función conocida $A(x)$, para $a \leqslant x \leqslant b$. Supondremos que $A(x)$ es continua en $[a, b]$. Si $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, entonces $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, y los planos perpendiculares al eje x en x_1, x_2, ..., x_{n-1} dividen al sólido en n rodajas; el espesor de la i-ésima rodaja es $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. El volumen ΔV_i de esa rodaja está entre los valores máximo y mínimo de $A(x)\Delta x_i$, para valores de x en $[x_{i-1}, x_i]$ (*véase* la Figura 7.3); por tanto,

$$\Delta V_i = A(c_i)\Delta x_i$$

para algún c_i en $[x_{i-1}, x_i]$, por el Teorema del Valor Medio. El volumen del sólido se expresa entonces mediante la suma de Riemann

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta x_i$$

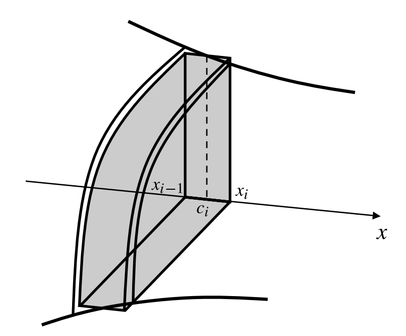


Figura 7.3 Volumen de una rodaja.

Haciendo tender n a infinito, de forma que el máximo Δx_i tienda a 0, se obtiene la integral definida de $A(x)$ en el intervalo $[a, b]$ como el límite de esta suma de Riemann. Por tanto:

El volumen V de un sólido comprendido entre $x = a$ y $x = b$ con área de sección cruzada $A(x)$ en la posición x es

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

Hay otra forma de obtener esta fórmula y otras de naturaleza similar. Consideremos una rodaja del sólido entre los planos perpendiculares al eje x en las posiciones x y $x + \Delta x$. Como $A(x)$ es continua, no cambia mucho en un intervalo corto, de forma que si Δx es pequeño, entonces el

volumen de la rodaja ΔV es aproximadamente igual al volumen de un cilindro con área de la base $A(x)$ y altura Δx:

$$\Delta V \approx A(x)\Delta x$$

El error de esta aproximación es pequeño comparado con el tamaño de ΔV. Esto sugiere, correctamente, que el **elemento de volumen**, es decir, el volumen de una rodaja infinitamente fina de espesor dx es $dV = A(x)\,dx$, y que el volumen del sólido es la «suma» (es decir, la integral) de estos elementos de volumen entre los dos extremos del sólido, $x = a$ y $x = b$ (*véase* la Figura 7.4):

$$V = \int_{x=a}^{x=b} dV, \qquad \text{donde} \qquad dV = A(x)\,dx$$

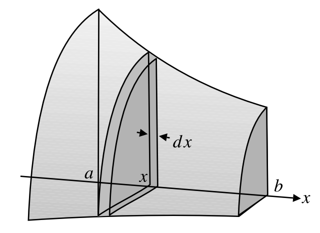
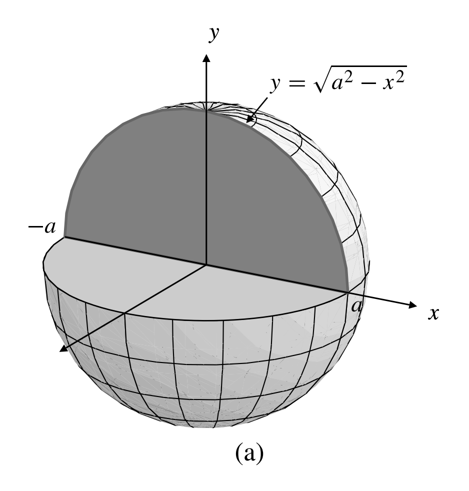


Figura 7.4 Elemento de volumen.

Utilizaremos este enfoque basado en *elementos diferenciales* para modelar otras aplicaciones en las que aparecen integrales, en lugar de utilizar cada vez sumas de Riemann explícitas. Aunque este argumento no constituye una demostración de la fórmula, se recomienda fuertemente pensar en la fórmula de esta manera; el volumen es la integral de los elementos de volumen.

Sólidos de revolución

Muchos sólidos comunes tienen secciones cruzadas circulares en planos perpendiculares a algún eje. Estos sólidos se denominan **sólidos de revolución** porque se pueden generar rotando una región plana alrededor de un eje de dicha región, de forma que barra todo el volumen del sólido. Por ejemplo, una bola sólida se genera rotando un semidisco alrededor de su diámetro (Figura 7.5(a)). De forma similar, un cono circular recto se genera rotando un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos (Figura 7.5(b)).



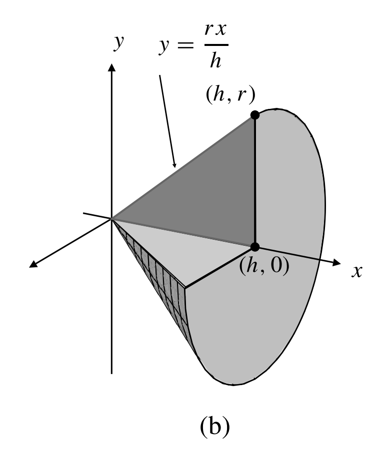


Figura 7.5
(a) La bola se genera rotando el semidisco $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2 - x^2}$ (que se muestra en gris oscuro) alrededor del eje x.
(b) El cono con radio de la base r y altura h se genera rotando el triángulo $0 \leqslant x \leqslant h$, $0 \leqslant y \leqslant rx/h$ (gris oscuro) alrededor del eje x.

Si la región R limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ se rota alrededor del eje x, entonces la sección cruzada del sólido generado en el plano perpendicular al eje x en el punto x es un

disco circular de radio $|f(x)|$. El área de esta sección cruzada es $A(x) = \pi(f(x))^2$, por lo que el volumen del sólido de revolución es

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

Ejemplo 1 **(Volumen de una bola)** Calcule el volumen de una bola sólida de radio a.

Solución La bola se puede generar rotando el semidisco $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leqslant x \leqslant a$ alrededor del eje x. *Véase* el corte en la Figura 7.5(a). Por tanto, su volumen es

$$V = \pi \int_{-a}^{a} (\sqrt{a^2 - x^2})^2\, dx = 2\pi \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\bigg|_0^a = 2\pi \left(a^3 - \frac{1}{3} a^3 \right) = \frac{4}{3} \pi a^3 \text{ unidades al cubo}$$

Ejemplo 2 **(Volumen de un cono circular recto)** Calcule el volumen del cono circular recto con radio en su base r y altura h que se genera rotando el triángulo de vértices (0, 0), (h, 0) y (h, r) alrededor del eje x.

Solución La ecuación de la recta que va de punto (0, 0) al punto (h, r) es $y = rx/h$. Por tanto, el volumen del cono (*véase* el corte en la Figura 7.5(b)) es

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h} \right)^2 dx = \pi \left(\frac{r}{h} \right)^2 \frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ unidades al cubo}$$

Las integrales impropias pueden representar volúmenes de sólidos no limitados. Si la integral impropia converge, el sólido no limitado tiene un volumen finito.

Ejemplo 3 Calcule el volumen del asta infinitamente larga que se genera rotando la región limitada por $y = 1/x$ e $y = 0$ que queda a la derecha de $x = 1$ alrededor del eje x. El asta se muestra en la Figura 7.6.

Solución El volumen del asta es

$$V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= -\pi \lim_{R \to \infty} \frac{1}{x}\bigg|_1^R = -\pi \lim_{R \to \infty} \left(\frac{1}{R} - 1 \right) = \pi \text{ unidades al cubo}$$

Es interesante advertir que este volumen finito resulta de rotar una región que tiene área infinita: $\int_1^\infty dx/x = \infty$. Se produce una paradoja: se requiere una cantidad infinita de pintura para pintar la región, pero sólo una cantidad finita para rellenar el asta que se obtiene rotando la región (¿Cómo se puede resolver esta paradoja?).

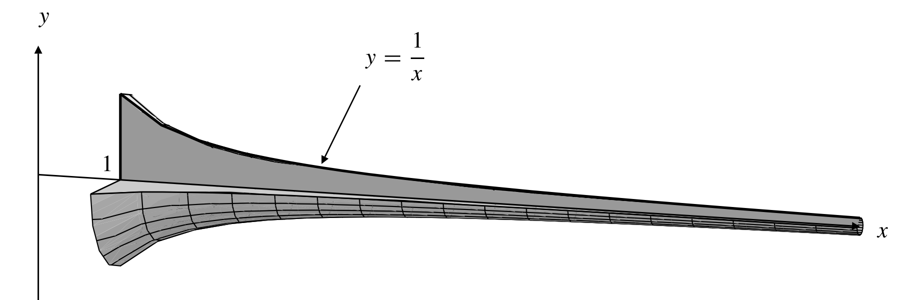


Figura 7.6 Corte de un asta infinitamente larga.

El siguiente ejemplo muestra cómo tratar un problema en que el eje de rotación no es el eje x. Simplemente se rota un elemento de área adecuado alrededor del eje para formar un elemento de volumen.

Ejemplo 4 Un sólido con forma de anillo se genera rotando la región plana finita R limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 1$ alrededor de la recta $y = 2$. Calcule su volumen.

Solución En primer lugar, se resuelve la pareja de ecuaciones $y = x^2$ y $y = 1$ para obtener los puntos de intersección en $x = -1$ y $x = 1$. El sólido está entre estos dos valores de x. El elemento de área de R en la posición x es una cinta vertical de anchura dx, que se extiende hacia arriba desde $y = x^2$ hasta $y = 1$. Cuando R se rota alrededor de la recta $y = 2$, este elemento de área barre un elemento de volumen con forma de arandela de espesor dx y radio $2 - x^2$, con un agujero de radio 1 en su parte central (*véase* la Figura 7.7). El área de la sección cruzada de este elemento es el área de un círculo de radio $2 - x^2$ menos el área del agujero, un círculo de radio 1. Entonces,

$$dV = (\pi(2 - x^2)^2 - \pi(1)^2)\,dx = \pi(3 - 4x^2 + x^4)\,dx$$

Como el sólido se extiende desde $x = -1$ hasta $x = 1$, su volumen es

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (3 - 4x^2 + x^4)\,dx = 2\pi \int_{0}^{1} (3 - 4x^2 + x^4)\,dx$$

$$= 2\pi \left(3x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi \left(3 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{56\pi}{15} \text{ unidades al cubo}$$

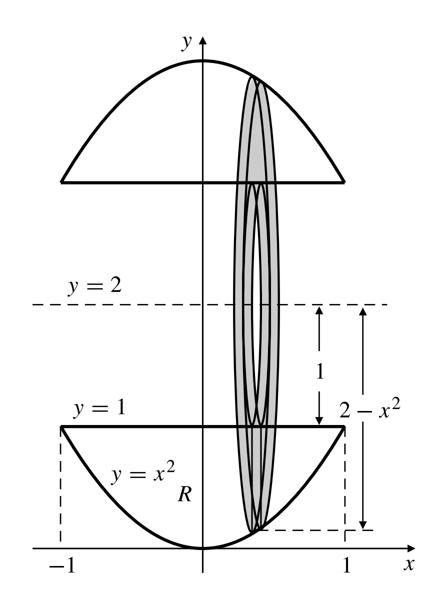


Figura 7.7

■

Algunas veces se desea rotar una región limitada por curvas con ecuaciones de la forma $x = g(y)$ alrededor del eje y. En este caso, se invierten los papeles de x e y, y se utilizan rodajas horizontales en vez de rodajas verticales.

Ejemplo 5 Calcule el volumen del sólido generado rotando alrededor del eje y la región a la derecha del eje y, y a la izquierda de la curva $x = 2y - y^2$.

Solución Para calcular las intersecciones de $x = 2y - y^2$ y $x = 0$ hacemos

$$2y - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{o} \quad y = 2$$

El sólido está entre los planos horizontales en $y = 0$ y $y = 2$. Un elemento de área horizontal en la altura y, con espesor dy, rota alrededor del eje y para generar un elemento de volumen con forma de disco delgado de radio $2y - y^2$ y espesor dy (*véase* la Figura 7.8). Su volumen es

$$dV = \pi(2y - y^2)^2\,dy = \pi(4y^2 - 4y^3 + y^4)\,dy$$

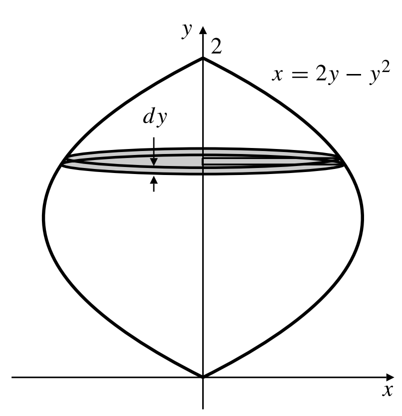


Figura 7.8

Por tanto, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (4y^2 - 4y^3 + y^4)\,dy \\ &= \pi \left(\frac{4y^3}{3} - y^4 + \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 \\ &= \pi \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) = \frac{16\pi}{15} \text{ unidades al cubo} \end{aligned}$$

■

Tubos cilíndricos

Suponga que la región R limitada por $y = f(x) \geqslant 0$, $y = 0$, $x = a \geqslant 0$ y $x = b > a$ se rota alrededor del eje y para generar un sólido de revolución. Para calcular el volumen del sólido utilizando rodajas (planas), necesitaríamos conocer el área de la sección cruzada $A(y)$ de cada plano a la altura y, y para ello tendríamos que resolver la ecuación $y = f(x)$ para obtener una o más soluciones de la forma $x = g(y)$. En la práctica esto puede ser inconveniente o imposible.

El elemento de área estándar de R en la posición x es una cinta vertical de anchura dx, altura $f(x)$ y área $dA = f(x)\,dx$. Cuando R se rota alrededor del eje y, esta cinta forma un elemento de volumen con la forma de un **tubo cilíndrico** circular de radio x, altura $f(x)$ y espesor dx (*véase* la Figura 7.9). Viendo este tubo como una tabla rectangular de dimensiones $2\pi x$, $f(x)$ y dx que gira, su volumen evidentemente es

$$dV = 2\pi x f(x)\,dx$$

El volumen del sólido de revolución es la suma (integral) de los volúmenes de esos tubos cuyos radios varían desde a hasta b:

> El volumen del sólido obtenido rotando la región plana $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $0 \leqslant a < x < b$ alrededor del eje y es
>
> $$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

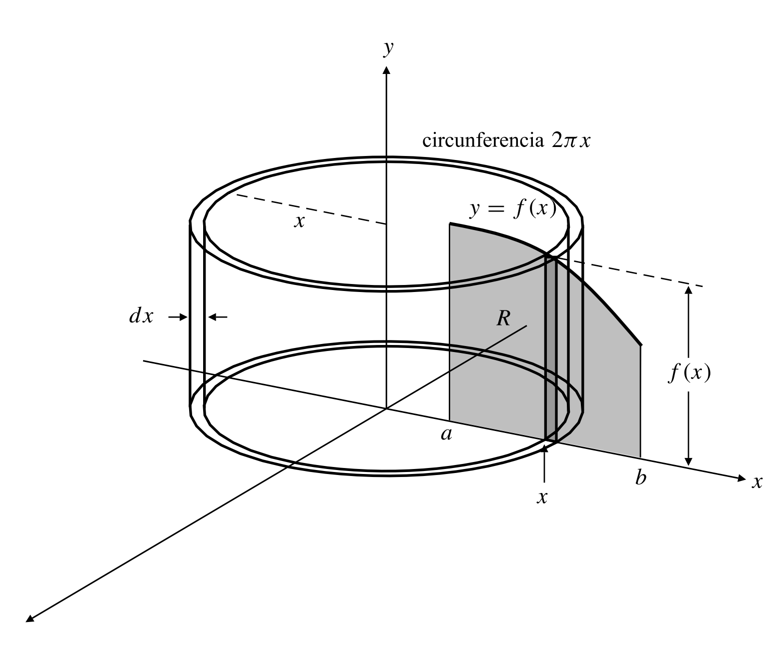


Figura 7.9 Cuando se rota alrededor del eje y, el elemento de área de anchura dx por debajo de $y = f(x)$ en x se genera un tubo cilíndrico de altura $f(x)$, circunferencia $2\pi x$ y volumen $dV = 2\pi x f(x)\,dx$.

Ejemplo 6 **(Volumen de un toro)** Un disco de radio a está centrado en el punto $(b, 0)$, siendo $b > a > 0$. El disco se rota alrededor del eje y para generar un **toro** (un sólido con forma de dónut), como se ilustra en la Figura 7.10. Calcule su volumen.

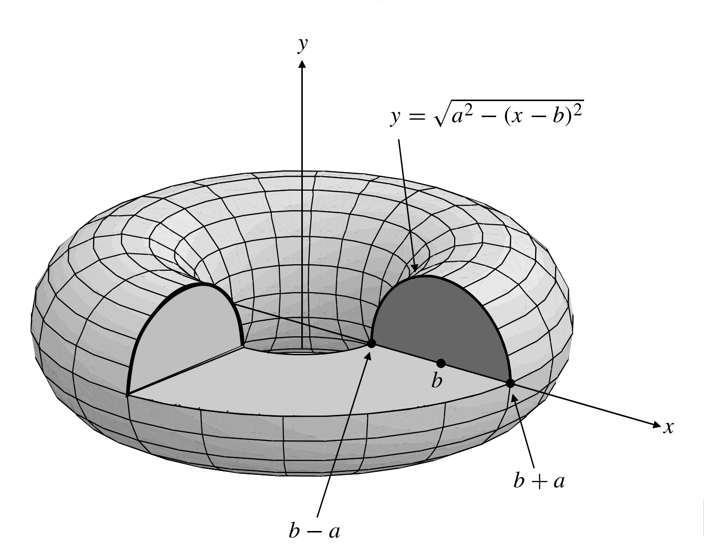


Figura 7.10 Corte de un toro.

Solución La ecuación de la circunferencia con centro en $(b, 0)$ y radio a es $(x - b)^2 + y^2 = a^2$, y la ecuación del semicírculo superior es

$$f(x) = \sqrt{a^2 - (x - b)^2}$$

Multiplicaremos por 2 el volumen de la mitad superior del toro, que se genera rotando el semidisco $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2 - (x - b)^2}$, $b - a \leqslant x \leqslant b + a$ alrededor del eje y. El volumen del toro completo es

$$V = 2 \times 2\pi \int_{b-a}^{b+a} x\sqrt{a^2 - (x - b)^2}\,dx \qquad \text{Sea } u = x - b, \quad du = dx$$

$$= 4\pi \int_{-a}^{a} (u + b)\sqrt{a^2 - u^2}\,du$$

$$= 4\pi \int_{-a}^{a} u\sqrt{a^2 - u^2}\, du + 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - u^2}\, du$$

$$= 0 + 4\pi b\, \frac{\pi a^2}{2} = 2\pi^2 a^2 b \text{ unidades al cubo}$$

La primera de las dos integrales del final es 0 porque el integrando es impar y el intervalo es simétrico alrededor del 0. La segunda integral es el área de un semicírculo de radio a. Nótese que el volumen del toro es $(\pi a^2)(2\pi b)$, es decir, el área del disco que se rota por la distancia que recorre el centro del disco que se rota alrededor del eje y. Este resultado se generalizará con el Teorema de Pappus en la Sección 7.5.

Ejemplo 7 Calcule el volumen del cuenco que se obtiene mediante la revolución del arco de parábola $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ alrededor del eje y.

Solución El interior del cuenco corresponde a la revolución de la región dada por $x^2 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ alrededor del eje y. La altura del elemento de área en la posición x es $1 - x^2$ y genera un tubo cilíndrico de volumen $dV = 2\pi x(1 - x^2)\, dx$ (*véase* la Figura 7.11). Por tanto, el volumen del cuenco es

$$V = 2\pi \int_0^1 x(1 - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ unidades al cubo}$$

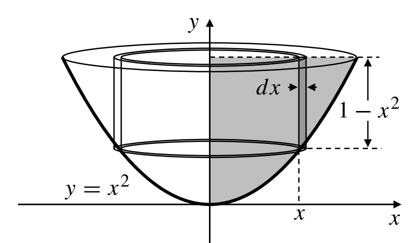
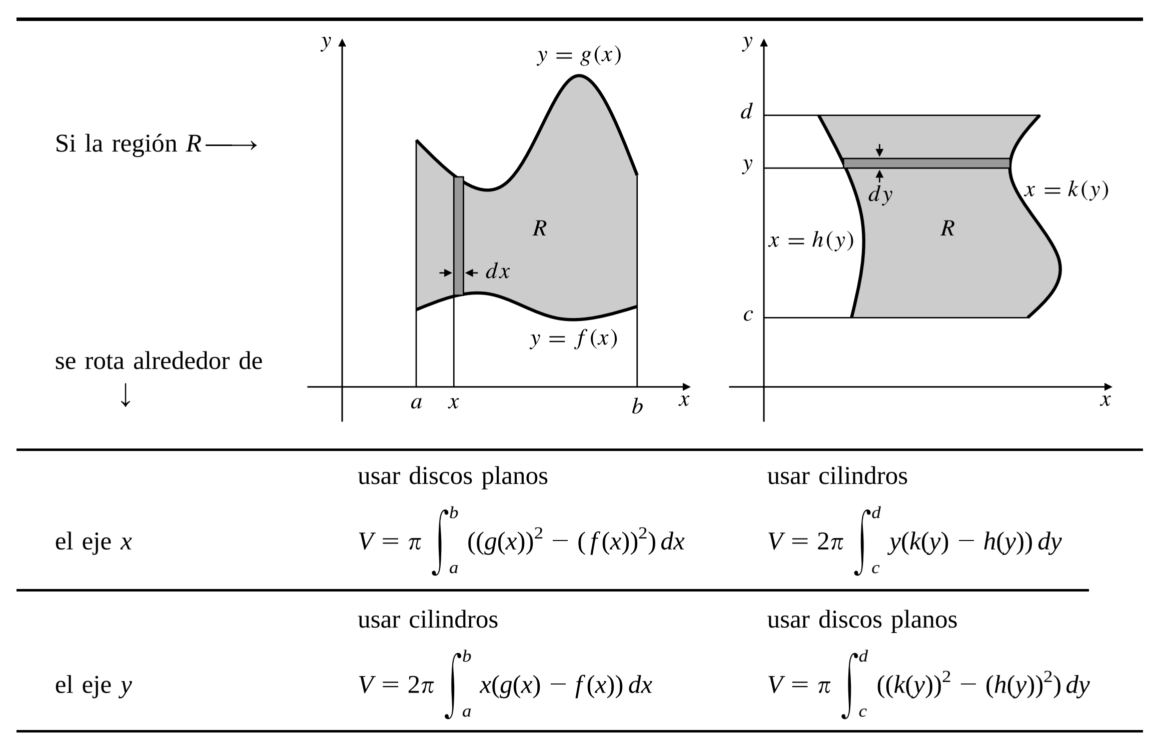


Figura 7.11 Un cuenco parabólico.

Hemos descrito dos métodos para determinar el volumen del sólido de revolución, mediante rodajas y mediante tubos cilíndricos. El método a escoger para un sólido concreto depende en general de la forma de las ecuaciones que definen la región que se rota y del eje de rotación. El elemento de volumen dV siempre se puede determinar rotando un elemento de área adecuado dA alrededor del eje de rotación. Si la región está limitada por rectas verticales y por una o más gráficas de la forma $y = f(x)$, el elemento de área apropiado es una cinta vertical de anchura dx. Si la rotación es alrededor del eje x o de cualquier otra recta horizontal, esta cinta genera un disco o arandela de espesor dx. Si la rotación es alrededor del eje y o de cualquier otra recta vertical, la cinta genera un tubo cilíndrico de espesor dx. Por otra parte, si la región que se rota está limitada por rectas horizontales y por una o más gráficas de la forma $x = g(y)$, es más fácil utilizar una cinta horizontal de anchura dy como elemento de área, y entonces se genera una rodaja si la rotación es alrededor de una recta vertical y un tubo cilíndrico si la rotación es alrededor de una recta horizontal. En el caso de regiones muy simples, cualquier método funcionará fácilmente.

Tabla 1. Volúmenes de sólidos de revolución



Si la región $R \longrightarrow$ se rota alrededor de ↓		
	usar discos planos	usar cilindros
el eje x	$V = \pi \int_a^b ((g(x))^2 - (f(x))^2)\, dx$	$V = 2\pi \int_c^d y(k(y) - h(y))\, dy$
	usar cilindros	usar discos planos
el eje y	$V = 2\pi \int_a^b x(g(x) - f(x))\, dx$	$V = \pi \int_c^d ((k(y))^2 - (h(y))^2)\, dy$

Nuestro ejemplo final presenta una rotación alrededor del eje vertical distinto del eje y.

Ejemplo 8 La región triangular delimitada por $y = x$, $y = 0$ y $x = a > 0$ se rota alrededor de la recta $x = b > a$ (*véase* la Figura 7.12). Calcule el volumen del sólido generado.

Solución En este ejemplo, el elemento vertical del área en x genera un tubo cilíndrico de radio $b - x$, altura x y espesor dx. Su volumen es $dV = 2\pi(b - x)x\, dx$, y el volumen del sólido es

$$V = 2\pi \int_0^a (b - x)x\, dx = 2\pi \left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^a = \pi \left(a^2 b - \frac{2a^3}{3} \right) \text{ unidades al cubo}$$

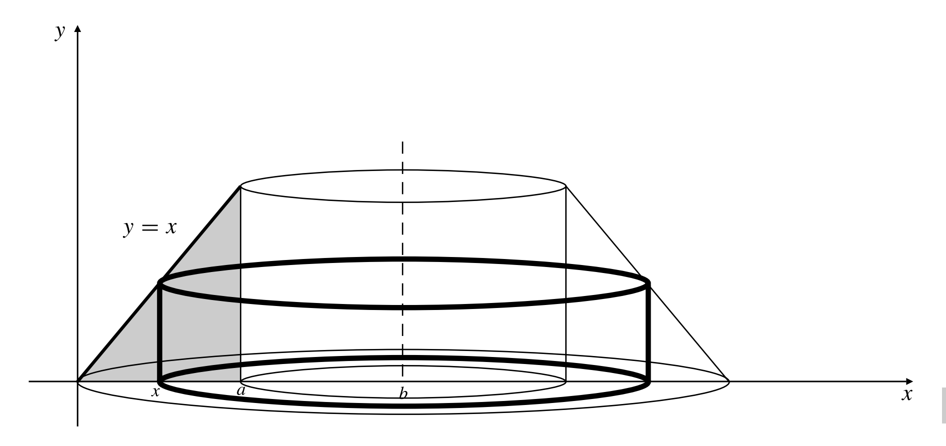


Figura 7.12

■

Ejercicios 7.1

En los Ejercicios 1-4, calcule el volumen de cada sólido S de dos formas, utilizando el método de las rodajas y el método de los tubos cilíndricos.

1. S se genera rotando alrededor del eje x la región limitada por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 1$.

2. S se genera rotando la región del Ejercicio 1 alrededor del eje y.

3. S se genera rotando alrededor del eje x la región limitada por $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, entre $x = 0$ y $x = 1$.

4. S se genera rotando la región del Ejercicio 3 alrededor del eje y.

Calcule los volúmenes de los sólidos que se obtienen si las regiones planas R que se describen en los Ejercicios 5-10 se rotan alrededor de (a) el eje x y (b) el eje y.

5. R está limitada por $y = x(2 - x)$ e $y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 2$.

6. R es la región finita limitada por $y = x$ e $y = x^2$.

7. R es la región finita limitada por $y = x$ y $x = 4y - y^2$.

8. R está limitada por $y = 1 + \operatorname{sen} x$ e $y = 1$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi$.

9. R está limitada por $y = 1/(1 + x^2)$, $y = 2$, $x = 0$ y $x = 1$.

10. R es la región finita delimitada por $y = 1/x$ y $3x + 3y = 10$.

11. La región triangular cuyos vértices son $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ se rota alrededor de la recta $x = 2$. Calcule el volumen del sólido que se genera.

12. Calcule el volumen del sólido que se genera rotando la región $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$ alrededor de la recta $y = 1$.

13. ¿Qué porcentaje del volumen de una bola de radio 2 se elimina si se forma un agujero de radio 1 en el centro de la bola?

14. Se perfora un agujero cilíndrico a través del centro de una bola de radio R. Si la longitud del agujero es L, demuestre que el volumen de la parte restante de la bola depende sólo de L y no de R.

15. Se perfora un agujero cilíndrico de radio a a través de un cono circular recto sólido de altura h y radio en la base $b > a$. Si el eje del agujero coincide con el del cono, calcule el volumen de la parte restante del cono.

16. Calcule el volumen del sólido que se obtiene rotando un disco circular alrededor de una de sus tangentes.

17. Un plano divide una bola de radio a en dos trozos. Si el plano pasa a b unidades de distancia del centro de la bola (siendo $b < a$), calcule el volumen del trozo más pequeño.

18. Un cuenco hemisférico de radio 30 cm está parcialmente lleno de agua, de forma que la máxima profundidad del agua es de 20 cm. ¿Qué volumen de agua hay en el cuenco?

19. Calcule el volumen del elipsoide de revolución que se obtiene rotando la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ alrededor del eje x.

20. Vuelva a calcular el volumen del toro del Ejemplo 6 utilizando rodajas perpendiculares al eje y en vez de tubos cilíndricos.

21. La región R limitada por $y = e^{-x}$ e $y = 0$, a la derecha de $x = 0$, se rota (a) alrededor del eje x y (b) alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido de revolución generado en cada caso.

22. La región R limitada por $y = x^{-k}$ e $y = 0$, y a la derecha de $x = 1$, se rota alrededor del eje x. Calcule todos los valores reales de k para los que el sólido generado tiene volumen finito.

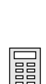
23. Repita el Ejercicio 22 con rotación alrededor del eje y.

24. Ediciones anteriores de este libro definían incorrectamente un prisma o cilindro como un sólido en el que las secciones cruzadas paralelas a la base eran congruentes con la base. ¿Se define así un conjunto de sólidos más grande o más pequeño que el correspondiente a la definición dada en esta sección? ¿Qué dice la definición anterior respecto al volumen de un cilindro o prisma con área de la base A y altura h?

25. Continuando con el Ejercicio 24, considere el sólido S cuya sección cruzada en el plano perpendicular al eje x en x es un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales tienen una longitud de a cm, con un extremo de la hipotenusa en el eje x y con la hipotenusa formando un ángulo x con una dirección fija. ¿Es S un prisma de acuerdo con la definición dada en ediciones anteriores? ¿Es un prisma de acuerdo con la definición de esta edición? Si la altura de S es de b cm, ¿cuál es el volumen de S?

26. La región sombreada en la Figura 7.13 se rota alrededor del eje x. Utilice la Regla de Simpson para calcular el volumen del sólido resultante.

27. La región sombreada en la Figura 7.13 se rota alrededor del eje y. Utilice la Regla de Simpson para calcular el volumen del sólido resultante.



28. La región sombreada en la Figura 7.13 se rota alrededor de la recta $x = -1$. Utilice la Regla de Simpson para calcular el volumen del sólido resultante.

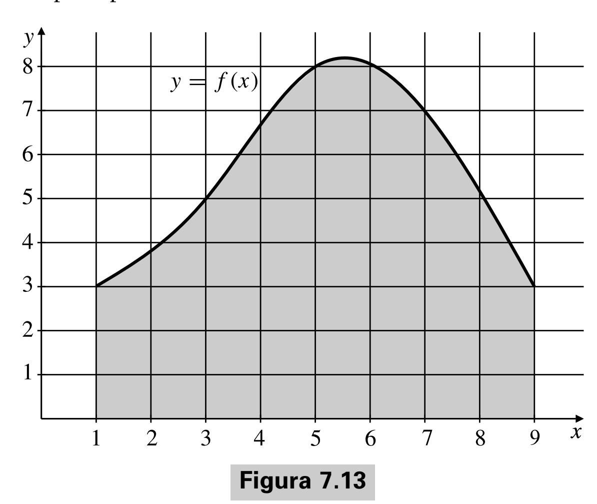


Figura 7.13

∗**29.** Calcule el volumen del sólido que se genera rotando alrededor de cada uno de los ejes de coordenadas la región finita del primer cuadrante limitada por los ejes de coordenadas y la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ (ambos volúmenes valen lo mismo; ¿por qué?).

∗**30.** Sabiendo que el área de la superficie de una esfera de radio r es kr^2, siendo k una constante independiente de r, exprese el volumen de una bola de radio R como una integral de elementos de volumen correspondientes a los volúmenes de cáscaras esféricas de espesor dr y radios r variables. Calcule k.

Los problemas que siguen son *muy difíciles*. Será necesaria una dosis de ingenio y un trabajo arduo para resolverlos utilizando las técnicas conocidas hasta el momento.

∗**31.** Una copa de vino con forma de cono circular recto de altura h y semiángulo en el vértice α (*véase* la Figura 7.14) se llena de vino. Se introduce lentamente una bola en la copa, que desplaza al vino y hace que desborde. Calcule el radio R de la bola que hace que desborde de la copa el máximo volumen de vino.

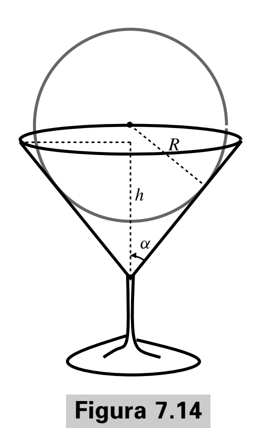


Figura 7.14

∗**32.** La región plana finita limitada por la curva $xy = 1$ y la recta $2x + 2y = 5$ se rota alrededor de dicha recta para generar un sólido de revolución. Calcule el volumen de dicho sólido.

7.2 Más volúmenes mediante rodajas

El método de las rodajas presentado en la Sección 7.1 se puede utilizar también para determinar volúmenes de sólidos que no sean de revolución. Todo lo que necesitamos saber es el área de la sección cruzada del sólido en cualquier plano perpendicular a algún eje fijo. Si ese eje es el eje x, y el sólido está comprendido entre los planos en $x = a$ y $x = b > a$, y si el área de la sección cruzada en el plano situado en x se puede expresar como una función continua (o incluso continua por tramos) $A(x)$, entonces el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

En esta sección consideraremos algunos ejemplos que no son sólidos de revolución.

Las **pirámides** y los **conos** son sólidos formados por todos los puntos de segmentos de rectas que unen un punto fijo, denominado **vértice**, con todos los puntos de una región que está en un plano que no contiene al vértice. Esa región se denomina **base** de la pirámide o cono. La Figura 7.15 muestra algunas pirámides y conos. Si la base está limitada por segmentos rectos, el sóli-

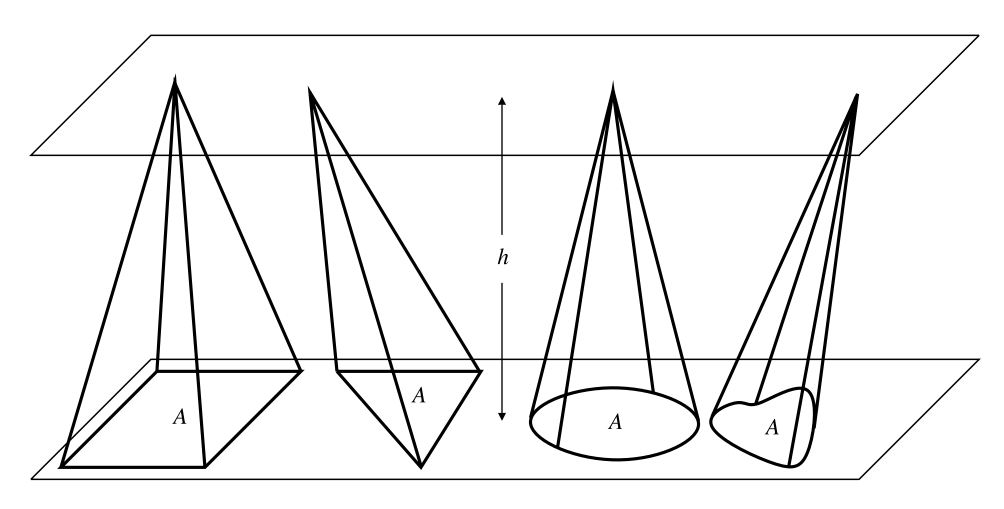


Figura 7.15
Algunas pirámides y conos. El volumen de todas ellas es $V = \frac{1}{3}Ah$, siendo A el área de la base y h la altura medida en dirección perpendicular al plano de la base.

do se denomina pirámide. Si la base tiene algún límite curvo, el sólido se denomina cono. El volumen de todas las pirámides y conos se puede expresar como

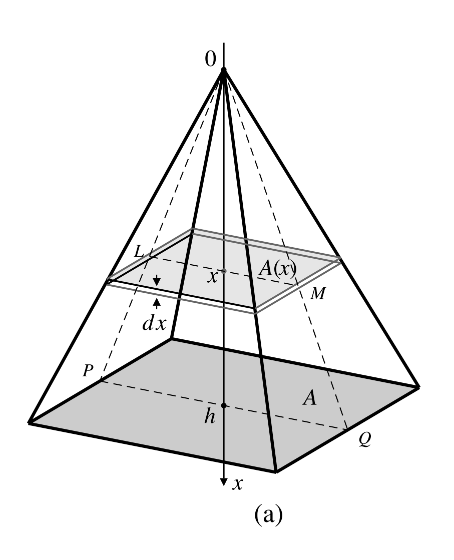
$$V = \frac{1}{3}Ah$$

siendo A el área de la región de la base y h la altura desde el vértice al plano de la base, medida en dirección perpendicular a dicho plano. En la Sección 16.4 presentaremos una demostración muy simple de esta fórmula. Por el momento, la verificaremos para el caso de base rectangular.

Ejemplo 1 Verifique la fórmula del volumen de una pirámide con base rectangular de área A y altura h.

Solución Las secciones cruzadas de la pirámide en planos paralelos a la base son rectángulos similares. Si el origen está en el vértice de la pirámide y el eje x es perpendicular a la base, entonces la sección cruzada en la posición x es un rectángulo cuyas dimensiones son x/h multiplicada por las correspondientes dimensiones de la base. Por ejemplo, en la Figura 7.16(a), la longitud LM es x/h multiplicada por la longitud PQ, como se puede ver observando los triángulos similares OLM y OPQ. Por tanto, el área de la sección cruzada rectangular en x es

$$A(x) = \left(\frac{x}{h}\right)^2 A$$



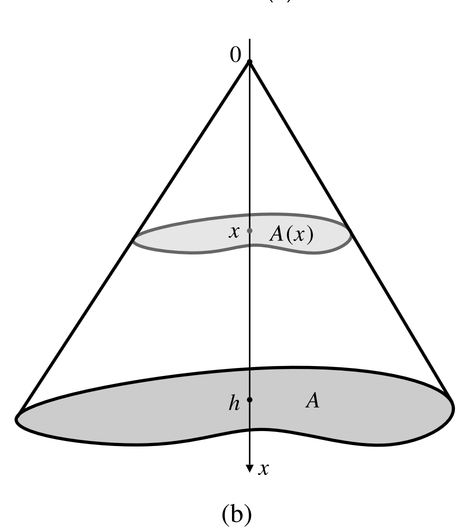


Figura 7.16
(a) Una pirámide rectangular.
(b) Un cono genérico.

Entonces, el volumen de la pirámide es

$$V = \int_0^h \left(\frac{x}{h}\right)^2 A\,dx = \frac{A}{h^2}\,\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{1}{3}\,Ah \text{ unidades al cubo}$$

■

Un argumento similar produce la misma fórmula para el volumen de un cono, es decir, una pirámide cuya base puede tener una forma más general (con curvas), como la que se muestra en la Figura 7.16(b). Aunque no es tan obvio como en el caso de la pirámide, la sección cruzada en x tiene todavía un área que es $(x/h)^2$ multiplicada por el área de la base.

Ejemplo 2 Una tienda de campaña tiene base circular de radio a metros y se sostiene mediante una estructura con una barra superior que se mantiene b metros por encima del diámetro de la base mediante dos soportes verticales en cada extremo del diámetro de la base. El material de la tienda se mantiene tenso de forma que cada sección cruzada perpendicular a la barra superior tiene forma de un triángulo isósceles (*véase* la Figura 7.17). Calcule el volumen de la tienda.

Solución Sea el eje x el diámetro de la base justo debajo de la barra superior. La longitud de la base de la sección cruzada en la posición x es $2\sqrt{a^2 - x^2}$, por lo que su área es

$$A(x) = \frac{1}{2}\,(2\sqrt{a^2 - x^2})b = b\sqrt{a^2 - x^2}$$

Por tanto, el volumen del sólido es

$$V = \int_{-a}^{a} b\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = b\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = b\,\frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi}{2}\,a^2 b \text{ m}^3$$

Nótese que hemos calculado la última integral por simple inspección. Es el área de un semidisco de radio a.

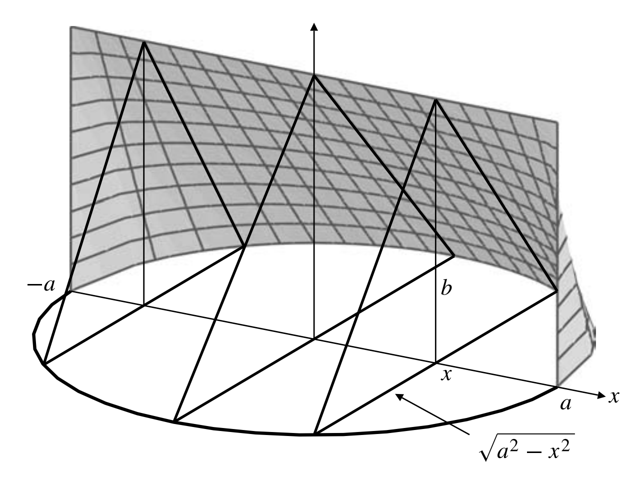


Figura 7.17 La tienda de campaña del Ejemplo 2 donde se ha eliminado la parte frontal para mostrar la forma más claramente.

■

Ejemplo 3 Dos cilindros circulares, cada uno de radio a, se cruzan de modo que sus ejes forman un ángulo recto. Calcule el volumen de la región en el interior de ambos cilindros.

Solución Representaremos los cilindros en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, donde el plano que contiene a los ejes x e y es horizontal y el eje z es vertical. La Figura 7.18 muestra la octava parte del sólido resultante, es decir, la parte correspondiente a los puntos que tienen sus tres coordenadas positivas. Los ejes de los dos cilindros coinciden con el eje x y el eje y, respectivamente. El cilindro cuyo eje coincide con el eje x corta al plano formado por los ejes y y z formando un círculo de radio a.

De forma similar, el otro cilindro corta al plano formado por los ejes x y z formando un círculo de radio a. Se deduce entonces que si la región que está en el interior de ambos cilindros (y que tiene $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ y

$z \geqslant 0$) se divide mediante rodajas horizontales, entonces la rodaja que está a una altura z por encima del plano xy es un cuadrado de lado $\sqrt{a^2 - z^2}$, cuya área es $A(z) = a^2 - z^2$. El volumen V de toda la región, que será ocho veces el de la parte que muestra la figura, es

$$V = 8 \int_0^a (a^2 - z^2)\, dz = 8 \left(a^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Bigg|_0^a = \frac{16}{3} a^3 \text{ unidades al cubo}$$

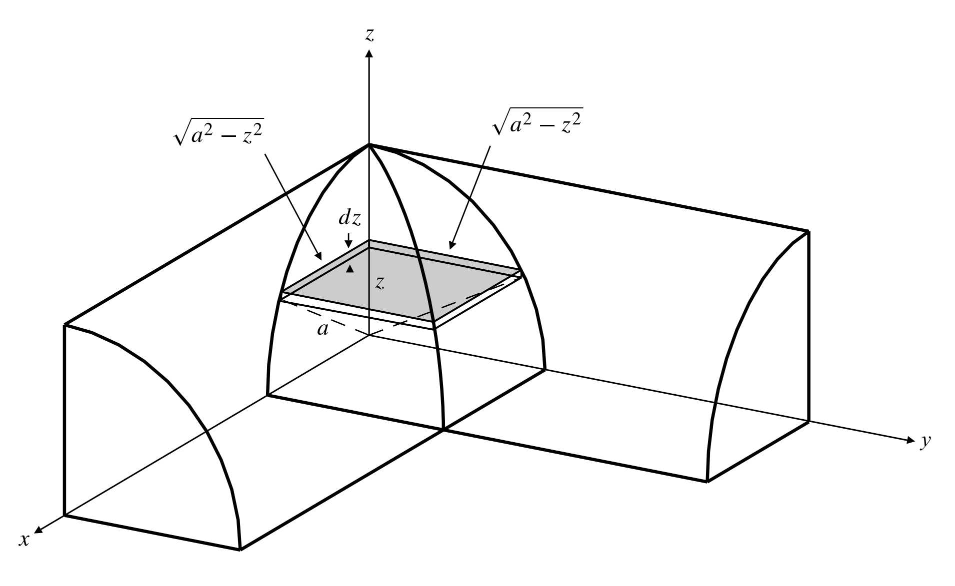


Figura 7.18 Un octavo del sólido está en el interior de dos cilindros perpendiculares que se cortan. La rodaja horizontal que se muestra es cuadrada.

■

Ejercicios 7.2

1. Un sólido tiene 2 m de altura. La sección cruzada de dicho sólido a la altura x por encima de su base tiene un área de $3x$ metros cuadrados. Calcule el volumen del sólido.

2. La sección cruzada a la altura z de un sólido de altura total h es un rectángulo de dimensiones z y $h - z$. Calcule el volumen del sólido.

3. Calcule el volumen del sólido de altura 1 cuya sección cruzada a la altura z es una elipse de semiejes z y $\sqrt{1 - z^2}$.

4. Un sólido se extiende desde $x = 1$ hasta $x = 3$. La sección cruzada de dicho sólido en el plano perpendicular al eje x en la posición x es un cuadrado de lado x. Calcule el volumen del sólido.

5. La altura de un sólido es de 6 pies. Su sección cruzada horizontal a la altura de z pies por encima de su base es un rectángulo de longitud $2+z$ pies y anchura $8-z$ pies. Calcule el volumen del sólido.

6. Un sólido se extiende por el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 4$. Su sección cruzada en la posición x es un triángulo equilátero de lado $\sqrt{x}$. Calcule el volumen del sólido.

7. Calcule el volumen de un sólido cuya altura es de h cm si su sección cruzada horizontal a cualquier altura y por encima de su base es un sector circular de radio a cm y ángulo $2\pi(1 - (y/h))$ radianes.

8. Los extremos opuestos de un sólido están en $x = 0$ y $x = 2$. El área de la sección cruzada de dicho sólido en un plano perpendicular al eje x en la posición x es kx^3 unidades al cuadrado. El volumen del sólido es de 4 unidades al cubo. Calcule k.

9. Calcule el área de la sección cruzada de un sólido en cualquier plano horizontal situado a altura z desde la base, si el volumen de la parte del sólido que está por debajo de dicho plano es de z^3 unidades al cubo.

10. Todas las secciones cruzadas de un sólido en planos horizontales son cuadrados. El volumen de la parte del sólido que está por debajo de cualquier plano a la altura z es de $4z$ unidades al cubo, con $0 < z < h$, la altura del sólido. Calcule la longitud del lado del cuadrado de la sección cruzada a la altura z para $0 < z < h$.

11. Un sólido tiene una base circular de radio r. Todas las secciones del sólido perpendiculares a un diámetro particular de la base son cuadrados. Calcule el volumen del sólido.

12. Repita el Ejercicio 11 pero con secciones que sean triángulos equiláteros en vez de cuadrados.

13. La base de un sólido es un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 12 cm. Todas las secciones cruzadas perpendiculares a uno de esos catetos tienen la forma de la mitad de un disco circular. Calcule el volumen del sólido.

14. **(Principio de Cavalieri)** Dos sólidos tienen secciones cruzadas iguales a las mismas alturas medidas desde sus bases. Si los dos sólidos tienen la misma altura, demuestre que ambos tienen el mismo volumen.

15. La parte superior de un cilindro circular de radio r es un plano inclinado un determinado ángulo respecto a la horizontal (*véase* la Figura 7.19). Si los puntos más bajo y más alto de dicha parte superior tienen alturas respectivas a y b, medidas desde la base, calcule el volumen del cilindro (nótese que existe una forma geométrica sencilla de obtener la respuesta, pero debe intentar hacerlo mediante rodajas. Puede utilizar rodajas rectangulares o con forma de trapecio).

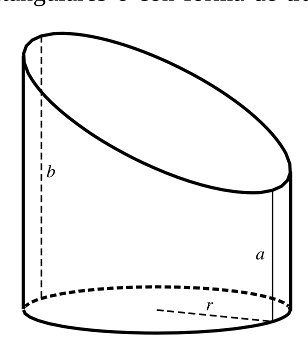


Figura 7.19

$*$**16.** **(Volumen de un elipsoide)** Calcule el volumen encerrado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Sugerencia: No es un sólido de revolución. Como en el Ejemplo 3, el eje z es perpendicular al plano de los ejes x e y. Todos los planos horizontales $z = k(-c \leqslant k \leqslant c)$ cortan al elipsoide formando una elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1 - (k/c)^2$. Por tanto, $dV = dz \times$ el área de esta elipse. El área de la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ es πab.

$*$**17.** **(Muesca en un tronco)** Se corta una muesca de 45º hasta el centro de un tronco cilíndrico de radio 20 cm, como se muestra en la Figura 7.20. La otra parte plana de la muesca es perpendicular al eje del tronco. ¿Qué volumen de madera se ha eliminado del tronco al cortar la muesca?

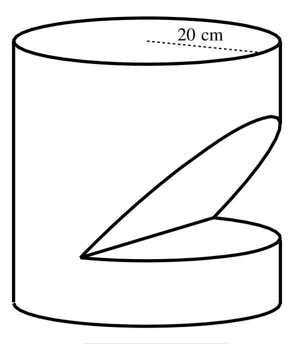


Figura 7.20

18. **(Una muesca más pequeña)** Repita el Ejercicio 17, pero suponga que la muesca penetra sólo hasta la cuarta parte (10 cm) del tronco.

19. ¿Qué volumen de madera se elimina de una tabla de tres pulgadas de espesor si se realiza un agujero circular de dos pulgadas de radio a través del tablero, y el eje del agujero forma un ángulo de 45º con el tablero?

$*$**20.** **(Más cilindros que se cortan)** Los ejes de dos cilindros circulares se cortan formando un ángulo recto. Si los radios de los cilindros son a y b $(a > b > 0)$, demuestre que el volumen de la región que está en el interior de ambos cilindros es

$$V = 8\int_0^b \sqrt{b^2 - z^2}\,\sqrt{a^2 - z^2}\,dz$$

Sugerencia: Revise el Ejemplo 3. Intente realizar un diagrama similar, mostrando sólo la octava parte de la región. La integral resultante no es sencilla.

21. Se perfora un agujero circular de 2 cm de radio en el centro de un tronco circular de radio 4 cm, con el eje del agujero perpendicular al eje del tronco. Calcule el volumen de madera eliminado de dicho tronco. *Sugerencia*: Este ejercicio es muy similar al Ejercicio 20. Será necesario utilizar métodos numéricos o una calculadora con funciones de integración numérica para obtener la respuesta.

7.3 Longitud de un arco y área de una superficie

En esta sección vamos a considerar la forma en que se pueden utilizar las integrales para calcular las longitudes de curvas y las áreas de superficies de sólidos de revolución.

Longitud de un arco

Sean A y B dos puntos del plano, y sea $|AB|$ la distancia entre A y B, es decir, la longitud del segmento recto AB.

Dada una curva $\mathcal{C}$ que une los dos puntos A y B, deseamos definir lo que se entiende por *longitud* de la curva $\mathcal{C}$ desde A hasta B. Supongamos que escogemos una serie de puntos $A = P_0$, P_1, P_2, ..., P_{n-1} y $P_n = B$ ordenados a lo largo de la curva, como se muestra en la Figura 7.21. La línea poligonal $P_0P_1P_2 \cdots P_{n-1}P_n$, construida uniendo parejas adyacentes de los puntos anteriores con segmentos rectos, forma una *aproximación poligonal* a la curva $\mathcal{C}$, de longitud

$$L_n = |P_0P_1| + |P_1P_2| + \cdots + |P_{n-1}P_n| = \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

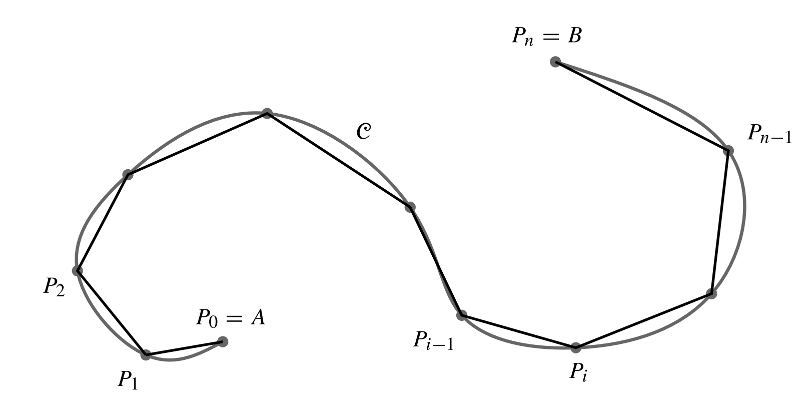


Figura 7.21 Aproximación poligonal a la curva $\mathcal{C}$.

La intuición nos dice que la curva de mínima longitud que une dos puntos es un segmento recto, por lo que la longitud L_n de cualquier aproximación poligonal a la curva $\mathcal{C}$ no puede ser superior a la longitud de $\mathcal{C}$. Si aumentamos n añadiendo más vértices a la línea poligonal entre los vértices adyacentes, L_n no puede reducirse, sino sólo incrementarse. Si existe un número finito K tal que $L_n \leqslant K$ para toda aproximación poligonal $\mathcal{C}$, entonces debe existir un mínimo de dichos números K (por la completitud de los números reales), y denominaremos a ese valor mínimo de K, longitud de arco de $\mathcal{C}$.

DEFINICIÓN 1

La **longitud de arco** de la curva $\mathcal{C}$ desde A hasta B es el mínimo número real s tal que las longitudes L_n de todas las aproximaciones poligonales a $\mathcal{C}$ cumplen que $L_n \leqslant s$.

Las curvas cuyas longitudes de arco son finitas se denominan **rectificables**. Su longitud de arco s es el límite de las longitudes L_n de las aproximaciones poligonales cuando $n \to \infty$ de forma que la longitud máxima del segmento $|P_{i-1}P_i| \to 0$.

Es posible construir curvas continuas que estén acotadas (es decir que no escapen hacia el infinito por ninguna parte), pero que no sean rectificables. Esas curvas tienen longitud infinita. Para evitar estos ejemplos patológicos, supondremos que nuestras curvas son **suaves**, es decir, que se pueden definir mediante funciones que tienen derivadas continuas.

Longitud de arco de la gráfica de una función

Sea f una función definida en un intervalo cerrado y finito $[a, b]$, con derivada f' continua en dicho intervalo. Si $\mathcal{C}$ es la gráfica de f, es decir, la gráfica de la ecuación $y = f(x)$, entonces cual-

quier partición del intervalo $[a, b]$ permite construir una aproximación poligonal a $\mathcal{C}$. Para la partición

$$\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

sea P_i el punto $(x_i, f(x_i))$, $(0 \leqslant i \leqslant n)$. La longitud de la línea poligonal $P_0P_1P_2 \cdots P_{n-1}P_n$ es

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}\ \Delta x_i$$

siendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Por el Teorema del Valor Medio, existe un número c_i en el intervalo $|x_{i-1}, x_i|$ tal que

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i)$$

y, por tanto, tenemos que $L_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\ \Delta x_i$.

Así, L_n es una suma de Riemann para la integral $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Siendo el límite de esas sumas de Riemann cuando $n \to \infty$ tal que $\text{máx}\,(\Delta x_i) \to 0$, esa integral corresponde a la longitud de la curva $\mathcal{C}$.

La longitud de arco s de la curva $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ se expresa como

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

La fórmula integral anterior puede verse como una forma de expresar longitud de arco s de la curva $\mathcal{C}$ como una «suma» de **elementos de longitud de arco**

$$s = \int_{x=a}^{x=b} ds, \quad \text{siendo} \quad ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

La Figura 7.22 nos muestra una forma adecuada para recordar esto y también sugiere cómo se pueden obtener fórmulas similares para elementos de longitud del arco de otros tipos de curvas. El *triángulo diferencial* de la figura sugiere que

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

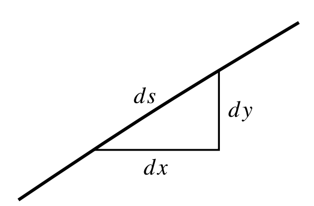


Figura 7.22 Un triángulo diferencial.

Dividiendo esta ecuación por $(dx)^2$ y tomando raíces cuadradas, se obtiene

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Un argumento similar permite demostrar que dada una curva especificada por una ecuación de la forma $x = g(y)$, $(c \leqslant y \leqslant d)$, el elemento de longitud de arco es

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$$

Ejemplo 1 Calcule la longitud de la curva $y = x^{2/3}$ desde $x = 1$ hasta $x = 8$.

Solución Como $dy/dx = \frac{2}{3}\, x^{-1/3}$ es continua entre $x = 1$ y $x = 8$ y además en ese intervalo $x^{1/3} > 0$, la longitud de la curva se expresa como

$$s = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9}\, x^{-2/3}}\, dx = \int_1^8 \sqrt{\frac{9x^{2/3} + 4}{9x^{2/3}}}\, dx$$

$$= \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{3x^{1/3}}\, dx \qquad \text{Sea } u = 9x^{2/3} + 4, \quad du = 6x^{-1/3}\, dx$$

$$= \frac{1}{18}\int_{13}^{40} u^{1/2}\, du = \frac{1}{27}\, u^{3/2}\Big|_{13}^{40} = \frac{40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}}{27} \text{ unidades}$$

■

Ejemplo 2 Calcule la longitud de la curva $y = x^4 + \dfrac{1}{32x^2}$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

Solución En este caso $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 - \dfrac{1}{16x^3}$ y

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(4x^3 - \frac{1}{16x^3}\right)^2$$

$$= 1 + (4x^3)^2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{16x^3}\right)^2$$

$$= (4x^3)^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{16x^3}\right)^2 = \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right)^2$$

La expresión de los últimos paréntesis es positiva para $1 \leqslant x \leqslant 2$, por lo que la longitud de la curva es

$$s = \int_1^2 \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right) dx = \left(x^4 - \frac{1}{32x^2}\right)\Big|_1^2$$

$$= 16 - \frac{1}{128} - \left(1 - \frac{1}{32}\right) = 15 + \frac{3}{128} \text{ unidades}$$

■

Los ejemplos anteriores son aparentemente simples; las curvas se han escogido de forma que las integrales de la longitud de arco se pudieran calcular fácilmente. Por ejemplo, el número 32 de la curva del Ejemplo 2 se escogió para que la expresión $1 + (dy/dx)^2$ se transformara en un cuadrado perfecto y su raíz cuadrada no causara problemas. Debido a la raíz cuadrada en la fórmula, los problemas de longitud de arco producen, para la mayoría de las curvas, integrales que son difíciles o imposibles de resolver sin utilizar técnicas numéricas.

Ejemplo 3 **(Fabricación de paneles ondulados)** Se van a transformar hojas planas rectangulares de metal de 2 m de anchura en paneles ondulados para tejados también de 2 m de anchura doblándolos para que tomen una forma sinusoidal, como se muestra en la Figura 7.23. El periodo del seno de la curva de la sección cruzada es de 20 cm. Su amplitud es de 5 cm, por lo que el espesor del panel es de 10 cm. ¿De qué longitud debe cortarse la hoja plana de metal si los paneles resultantes deben tener 5 m de longitud?

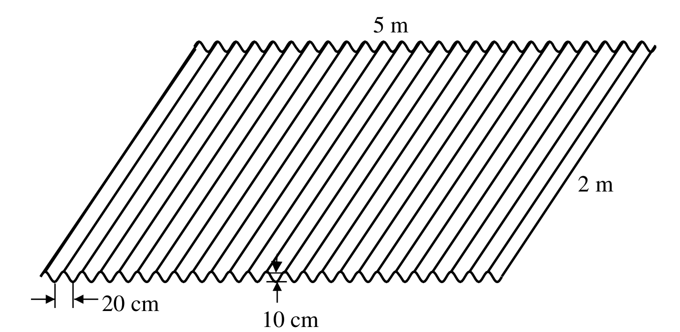


Figura 7.23 Panel ondulado para tejados.

Solución La Figura 7.24 muestra un periodo de la sección cruzada sinusoidal. Todas las distancias están en metros; la amplitud de 5 cm se muestra como 1/20 m, y el periodo de 20 cm se muestra como 2/10 m. La ecuación de la curva es

$$y = \frac{1}{20}\,\mathrm{sen}\,(10\pi x)$$

Nótese que se requieren 25 periodos para producir un panel de 5 m de longitud. La longitud de la hoja plana requerida será 25 veces la longitud de un periodo de la curva sinusoidal:

$$s = 25\int_0^{2/10}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\cos(10\pi x)\right)^2}\,dx \qquad \begin{array}{l}\text{Sea } t = 10\pi x\\ dt = 10\pi\,dx\end{array}$$

$$= \frac{5}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}\cos^2 t}\,dt = \frac{10}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}\cos^2 t}\,dt$$

La integral se puede calcular numéricamente empleando las técnicas del capítulo anterior o bien utilizando la función de integral definida de una calculadora científica avanzada. Su valor es de $s \approx 7.32$. Por tanto, la hoja de metal plana debe tener aproximadamente 7.32 m de longitud para producir un panel ondulado final de 5 m de longitud.

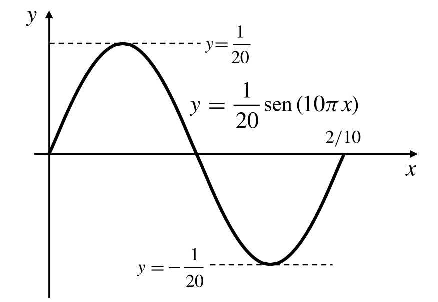


Figura 7.24

Si las integrales necesarias para resolver problemas estándar como los de longitudes de arco de curvas simples no se pueden calcular de forma exacta, se utilizan algunas veces para definir nuevas funciones cuyos valores se tabulan o se incorporan a programas de computador. Un ejemplo de esto es la función integral elíptica completa que aparece el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 **(Longitud de circunferencia de una elipse)** Calcule la longitud de circunferencia de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

siendo $a \geqslant b > 0$. *Véase* la Figura 7.25.

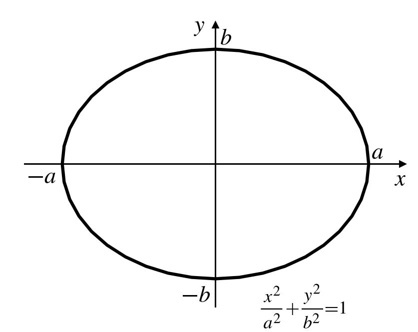


Figura 7.25

Solución La ecuación de la mitad superior de la elipse es $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

con lo que

$$\begin{aligned}1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2-x^2}\\ &= \frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}\end{aligned}$$

La longitud de la circunferencia de la elipse es cuatro veces la longitud del arco de la parte que está en el primer cuadrante; por tanto,

$$\begin{aligned}s &= 4\int_0^a \frac{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \qquad \text{Sea } x = a\,\mathrm{sen}\,t,\quad dx = a\cos t\,dt\\ &= 4\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)a^2\,\mathrm{sen}^2\,t}}{a(a\cos t)}\,a\cos t\,dt\\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}^2\,t}\,dt\\ &= 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\,\mathrm{sen}^2\,t}\,dt\\ &= 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\varepsilon^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\,dt \text{ unidades}\end{aligned}$$

siendo $\varepsilon = (\sqrt{a^2 - b^2})/a$ la *excentricidad* de la elipse (*véase* la Sección 8.1, donde se presentan las elipses en profundidad). Nótese que $0 \leqslant \varepsilon < 1$. La función $E(\varepsilon)$, definida como

$$E(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

se denomina **integral elíptica completa de segunda clase**. Esta integral no se puede calcular mediante técnicas elementales para un valor general de ε, aunque se pueden aplicar métodos numéricos para obtener valores aproximados para un valor de ε dado. En las recopilaciones de tablas matemáticas se pueden encontrar tablas con los valores de $E(\varepsilon)$ para diversos valores de ε. Como se demuestra anteriormente, la longitud de circunferencia de la elipse es $4aE(\varepsilon)$. Nótese que para $a = b$ tenemos $\varepsilon = 0$, y la fórmula da como resultado la longitud de la circunferencia en el caso circular: $s = 4a(\pi/2) = 2\pi a$ unidades. ■

Áreas de superficies de revolución

Cuando una curva plana rota (en tres dimensiones) alrededor de una recta en el plano de la curva, forma lo que se denomina una **superficie de revolución**. Por ejemplo, una esfera de radio a se puede generar rotando una semicircunferencia de radio a alrededor de su diámetro. El área de una superficie de revolución se puede obtener integrando un elemento de área dS construido rotando el elemento de arco ds de la curva alrededor de la recta dada. Si el radio de rotación del elemento ds es r, entonces genera, al rotar, una banda circular de anchura ds y longitud (circunferencia) $2\pi r$. El área de esta banda es, por tanto,

$$dS = 2\pi r\, ds$$

como se muestra en la Figura 7.26. Las áreas de superficies de revolución alrededor de líneas se obtienen integrando dS eligiendo apropiadamente r. He aquí algunos casos especiales importantes.

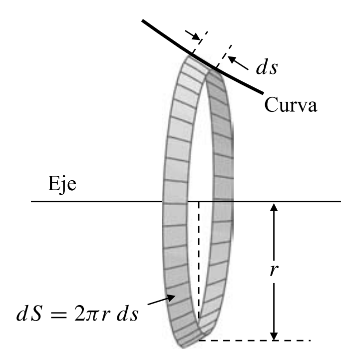


Figura 7.26 Banda circular generada rotando el elemento de longitud de arco ds alrededor del eje.

Área de una superficie de revolución

Si $f'(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y la curva $y = f(x)$ se rota alrededor del eje x, el área de la superficie de revolución que se genera es

$$S = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} |y|\, ds = 2\pi \int_b^a |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Si la rotación es alrededor del eje y, el área de la superficie es

$$S = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} |x|\, ds = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Si $g'(y)$ es continua en el intervalo $[c, d]$ y la curva $x = g(y)$ se rota alrededor del eje x, el área de la superficie de revolución que se genera es

$$S = 2\pi \int_{y=c}^{y=d} |y|\, ds = 2\pi \int_c^d |y| \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$$

Si la rotación es alrededor del eje y, el área de la superficie es

$$S = 2\pi \int_{y=c}^{y=d} |x|\, ds = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$$

Observación Algunas veces los estudiantes se preguntan por qué son realmente necesarias fórmulas tan complicadas. ¿Por qué no utilizar simplemente $dS = 2\pi|y|\,dx$ para expresar el elemento de área cuando $y = f(x)$ se rota alrededor del eje x en vez del elemento de área más complicado $dS = 2\pi|y|\,ds$? Después de todo, tanto dx como ds son infinitamente pequeños y, de hecho, hemos utilizado dx para expresar la anchura del elemento de volumen con forma de disco bajo la curva $y = f(x)$ alrededor del eje x para generar un sólido de revolución. La razón es algo sutil. Para espesores pequeños Δx, el volumen de una rodaja del sólido de revolución sólo es $\pi y^2 \Delta x$ de una forma aproximada, pero el error es *pequeño comparado con el volumen de esta rodaja*. Por otra parte, si se utilizara $2\pi|y|\Delta x$ como una aproximación al área de una banda delgada de la superficie de resolución correspondiente a un intervalo situado en x de anchura Δx, el error *no sería pequeño comparado con el área de esa banda*. Si, por ejemplo, la curva $y = f(x)$ tiene pendiente 1 en x, entonces la anchura de la banda es realmente $\Delta s = \sqrt{2}\,\Delta x$, por lo que el área de la banda es $\Delta S = 2\pi\sqrt{2}\,|y|\Delta x$, no sólo $2\pi|y|\Delta x$. Cuando se rota una curva para obtener el área de una superficie de revolución, siempre hay que utilizar el elemento de longitud de arco apropiado a lo largo de dicha curva.

Ejemplo 5 **(Área de la superficie de una esfera)** Calcule el área de la superficie de una esfera de radio a.

Solución La esfera se puede generar rotando la semicircunferencia de ecuación $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $(-a \leqslant x \leqslant a)$, alrededor del eje x (*véase* la Figura 7.27). Como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

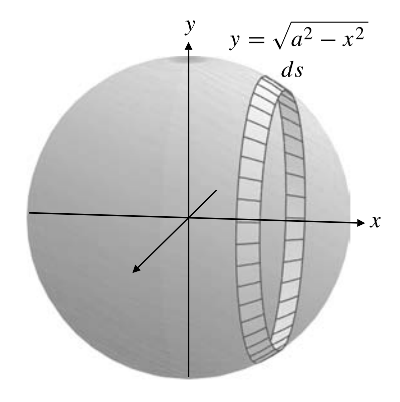


Figura 7.27 Un elemento de área en una esfera.

el área de la esfera se expresa como

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-a}^{a} y \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\, dx \\ &= 4\pi \int_0^a \sqrt{y^2 + x^2}\, dx \\ &= 4\pi \int_0^a \sqrt{a^2}\, dx = 4\pi a x \Big|_0^a = 4\pi a^2 \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

Ejemplo 6 **(Área de superficie de una antena parabólica)** Calcule el área de superficie de un reflector parabólico cuya forma se obtiene rotando el arco de parábola $y = x^2$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, alrededor del eje y, como se muestra en la Figura 7.28.

Solución El elemento de longitud de arco de la parábola $y = x^2$ es $ds = \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$, por lo que el área de la superficie pedida es

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx \qquad \begin{array}{l} \text{Sea } u = 1 + 4x^2 \\ du = 8x\, dx \end{array} \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^5 u^{1/2}\, du \\ &= \frac{\pi}{6} u^{3/2} \Big|_1^5 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1) \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

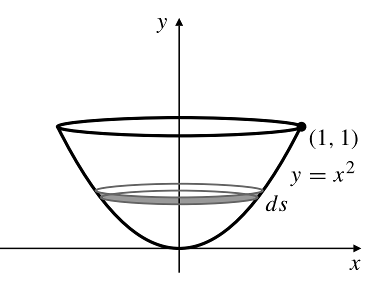


Figura 7.28 Aquí el elemento de área es una banda horizontal.

Ejercicios 7.3

En los Ejercicios 1-14, calcule las longitudes de las curvas dadas.

1. $y = 2x - 1$ desde $x = 1$ hasta $x = 3$
2. $y = ax + b$ desde $x = A$ hasta $x = B$
3. $y = \frac{2}{3} x^{3/2}$ desde $x = 0$ hasta $x = 8$
4. $y^2 = (x - 1)^3$ desde $(1, 0)$ hasta $(2, 1)$
5. $y^3 = x^3$ desde $(-1, 1)$ hasta $(1, 1)$
6. $2(x+1)^3 = 3(y-1)^2$ desde $(-1, 1)$ hasta $(0, 1 + \sqrt{2/3})$
7. $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ desde $x = 1$ hasta $x = 4$
8. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$
9. $4y = 2\ln x - x^2$ desde $x = 1$ hasta $x = e$
10. $y = x^2 - \frac{\ln x}{8}$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$
11. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(= \cosh x)$ desde $x = 0$ hasta $x = a$
12. $y = \ln \cos x$ desde $x = \pi/6$ hasta $x = \pi/4$

*13. $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$

*14. $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ desde $x = 2$ hasta $x = 4$

15. Calcule la longitud de la circunferencia de la curva cerrada $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. *Sugerencia*: La curva es simétrica respecto a ambos ejes de coordenadas (¿por qué?), de forma que una cuarta parte de ella está en el primer cuadrante.

Utilice métodos numéricos (o una calculadora con función de integración) para calcular las longitudes de las curvas de los Ejercicios 16-19 con una precisión de cuatro cifras decimales.

16. $y = x^4$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$

17. $y = x^{1/3}$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$

18. La circunferencia de la elipse $3x^2 + y^2 = 3$

19. El arco más corto de la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ entre $(0, 1)$ y $(1, 1/\sqrt{2})$.

En los Ejercicios 20-27, calcule las áreas de las superficies que se obtienen rotando las curvas dadas alrededor de las rectas que se indican.

20. $y = x^2$, $(0 \leqslant x \leqslant 2)$ alrededor del eje y.

21. $y = x^3$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ alrededor del eje x.

22. $y = x^{3/2}$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ alrededor del eje x.

23. $y = x^{3/2}$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ alrededor del eje y.

24. $y = e^x$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ alrededor del eje x.

25. $y = \operatorname{sen} x$, $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ alrededor del eje x.

26. $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}$, $(1 \leqslant x \leqslant 4)$ alrededor del eje x.

27. $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}$, $(1 \leqslant x \leqslant 4)$ alrededor del eje y.

28. **(Área de la superficie de un cono)** Calcule el área de la superficie curva de un cono circular recto con radio en la base r y altura h que se obtiene rotando el segmento recto que va desde $(0, 0)$ hasta (r, h) alrededor del eje y.

29. **(¿Cuánto glaseado hay en un dónut?)** Calcule el área de la superficie del toro (dónut) que se obtiene rotando la circunferencia $(x - b)^2 + y^2 = a^2$ alrededor del eje y.

30. **(Área de un esferoide prolado)** Calcule el área de la superficie que se obtiene rotando la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ alrededor del eje x.

31. **(Área de un esferoide oblado)** Calcule el área de la superficie que se obtiene rotando la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ alrededor del eje y.

∗**32.** La elipse del Ejemplo 4 se rota alrededor de la recta $y = c > b$ para generar un dónut con sección cruzada elíptica. Exprese el área de la superficie de este dónut en función de la integral elíptica completa $E(\varepsilon)$ presentada en ese ejemplo.

∗**33.** Exprese la fórmula integral obtenida para la longitud de la hoja de metal del Ejemplo 3 en función de la integral elíptica completa $E(\varepsilon)$ presentada en el Ejemplo 4.

34. **(Una propiedad interesante de las esferas)** Si dos planos paralelos cortan a una esfera, demuestre que el área de la superficie de la parte de la esfera que está entre los dos planos depende sólo del radio de la esfera y de la distancia entre los planos, y no de su posición.

35. ¿Para qué valores reales de k la superficie generada rotando la curva $y = x^k$, $(0 < x \leqslant 1)$, alrededor del eje y tiene una superficie de área finita?

∗**36.** La curva $y = \ln x$, $(0 < x \leqslant 1)$, se rota alrededor del eje y. Calcule el área de la superficie en forma de asta que se genera.

37. Un recipiente hueco con forma de asta infinitamente larga se genera rotando la curva $y = 1/x$, $(1 \leqslant x < \infty)$, alrededor del eje x.

(a) Calcule el volumen del recipiente.

(b) Demuestre que el área de la superficie del recipiente es infinita.

(c) ¿Cómo se explica la «paradoja» de que el contenedor se puede llenar con un volumen finito de pintura pero requiere una cantidad infinita de pintura para cubrir su superficie?

7.4 Masas, momentos y centros de masas

Muchas magnitudes de interés en física, mecánica, ecología, finanzas y otras disciplinas se pueden expresar en función de densidades sobre regiones del espacio, del plano o incluso de la recta real. Para determinar el valor total de la magnitud hay que sumar (integrar) las contribuciones de los diversos lugares donde dicha magnitud está distribuida.

Masa y densidad

Si un objeto sólido está hecho de un material homogéneo, diferentes partes del mismo que tengan idéntico volumen tendrán también la misma masa. Expresaremos esta homogeneidad di-

ciendo que el objeto tiene densidad constante, siendo esa densidad su masa dividida por su volumen, bien para todo el objeto o bien para cualquier parte del mismo. Así, por ejemplo, un ladrillo rectangular de dimensiones 20 cm, 10 cm y 8 cm tendría un volumen $V = 20 \times 10 \times 8 = 1600$ cm^3 y si estuviera hecho de un material con densidad constante $\delta = 3$ g/cm^3, su masa sería $m = \delta V = 3 \times 1600 = 4800$ g (utilizaremos la letra griega delta minúscula (δ) para representar la densidad).

Si la densidad del material que forma un objeto sólido no es constante sino que varía de un punto a otro del objeto, no existe una relación tan simple entre masa y volumen. Si la densidad $\delta = \delta(P)$ es una *función continua* de la posición P, se puede subdividir el sólido en muchos pequeños elementos de volumen y, considerando que δ es aproximadamente constante en cada uno de sus elementos, determinar las masas de todos esos elementos y sumarlas para calcular la masa del sólido. La masa Δm de un elemento de volumen ΔV que contiene al punto P debe cumplir

$$\Delta m \approx \delta(P)\Delta V$$

de forma que la masa m del sólido se puede aproximar así:

$$m = \Sigma\ \Delta m \approx \sum \delta(P)\Delta V$$

Por «densidad en un punto P» de un objeto sólido queremos indicar el límite $\delta(P)$ del cociente masa/volumen para una parte del sólido que está en una pequeña región que contiene a P, por ejemplo, bolas centradas en P, cuando las dimensiones de las regiones tienden a cero. Así definida, la densidad δ es continua en P si se puede asegurar que $|\delta(Q) - \delta(P)|$ se hace tan pequeña como queramos cuando Q se acerca suficientemente a P.

Estas aproximaciones se hacen exactas al pasar al límite de las masas diferenciales y los elementos de volumen, $dm = \delta(P)\,dV$, de forma que podemos pensar en calcular las masas utilizando integrales, es decir, como límite de esas sumas:

$$m = \int dm = \int \delta(P)\,dV$$

Ejemplo 1 La densidad de un cilindro vertical sólido de altura H cm y área en la base A cm^2 es $\delta = \delta_0(1 + h)$ g/cm^3, siendo h la altura en centímetros desde la base y δ_0 una constante. Calcule la masa del cilindro.

Solución *Véase* la Figura 7.29(a). Una rodaja del sólido a una altura h por encima de su base y con espesor dh tiene la forma de un disco circular de volumen $dV = A\,dh$. Como la densidad es constante en todo ese disco, la masa del elemento de volumen es

$$dm = \delta\,dV = \delta_0(1 + h)A\,dh$$

Por tanto, la masa del cilindro completo es

$$m = \int_0^H \delta_0 A(1 + h)\,dh = \delta_0 A\left(H + \frac{H^2}{2}\right) \text{ g}$$

■

Ejemplo 2 **(Uso de capas esféricas)** La densidad de cierto planeta esférico de radio R m varía con la distancia r a su centro de acuerdo con la fórmula

$$\delta = \frac{\delta_0}{1 + r^2} \text{ kg/m}^3$$

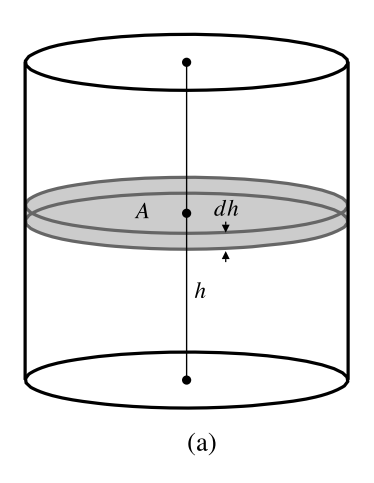
Calcule la masa del planeta.

Solución Recuérdese que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$. El planeta puede considerarse compuesto por capas esféricas concéntricas cuyo radio varía entre 0 y R. El volumen de una capa de radio r y espesor dr (*véase* la Figura 7.29(b)) es igual al área de superficie multiplicada por su espesor, y su masa es su volumen multiplicado por su densidad:

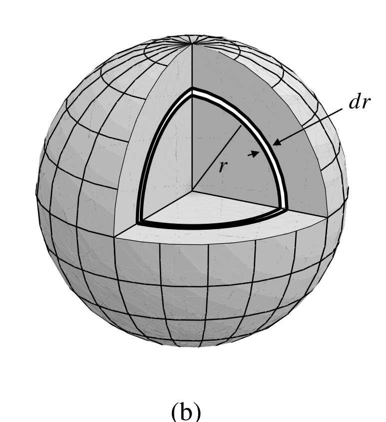
$$dV = 4\pi^2\, dr; \qquad dm = \delta\, dV = 4\pi\delta_0 \frac{r^2}{1 + r^2}\, dr$$

Sumando las masas de las capas se obtiene la masa de todo el planeta:

$$\begin{aligned} m &= 4\pi\delta_0 \int_0^R \frac{r^2}{1 + r^2}\, dr = 4\pi\delta_0 \int_0^R \left(1 - \frac{1}{1 + r^2}\right) dr \\ &= 4\pi\delta_0 (r - \tan^{-1} r)\Big|_0^R = 4\pi\delta_0 (R - \tan^{-1} R) \text{ kg} \end{aligned}$$



(a)



(b)

Figura 7.29
(a) Un cilindro sólido cuya densidad varía con la altura.
(b) Corte de un planeta cuya densidad depende de la distancia a su centro.

Se pueden aplicar técnicas similares para obtener las masas de objetos unidimensionales y bidimensionales, tales como cables y discos finos, que tengan densidades variables de la forma masa/unidad de longitud (**densidad lineal**) y masa/unidad de área (**densidad de área**).

Ejemplo 3 Un cable de composición variable se estira siguiendo el eje x desde $x = 0$ hasta $x = L$ cm. Calcule la masa del cable si la densidad lineal en la posición x es $\delta(x) = kx$ g/cm, siendo k una constante positiva.

Solución La masa de un elemento de longitud dx del cable situado en la posición x se expresa como $dm = \delta(x)\, dx = kx\, dx$. Por tanto, la masa del cable es

$$m = \int_0^L kx\, dx = \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg|_0^L = \frac{kL^2}{2} \text{ g}$$

Ejemplo 4 Calcule la masa de un disco de radio a cm cuyo centro está en el origen del plano xy si la densidad de área en la posición (x, y) es $\delta = k(2a + x)$ g/cm^2, siendo k una constante.

Solución La densidad depende sólo de la coordenada horizontal x, por lo que es constante a lo largo de líneas verticales en el disco. Esto sugiere que se deben utilizar bandas verticales finas como elementos de área. Una banda vertical de espesor dx situada en x tiene un área de $dA = 2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ (*véase* la Figura 7.30). Por tanto, su masa es

$$dm = \delta\, dA = 2k(2a + x)\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Y la masa del disco es

$$\begin{aligned} m &= \int_{x=-a}^{x=a} dm = 2k \int_{-a}^{a} (2a + x)\sqrt{a^2 - x^2}\, dx \\ &= 4ak \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + 2k \int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx \\ &= 4ak\, \frac{\pi a^2}{2} + 0 = 2\pi k a^3 \text{ g} \end{aligned}$$

Hemos utilizado el área de un semicírculo para calcular la primera integral. La segunda integral es cero porque el integrando es impar y la integral es simétrica respecto a $x = 0$.

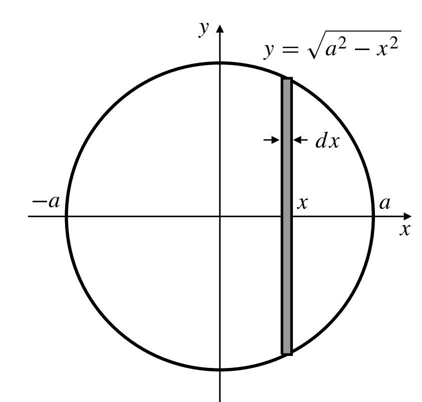


Figura 7.30

Las distribuciones de masa a lo largo de estructuras unidimensionales (líneas o curvas) conducen necesariamente a integrales de funciones de una variable, pero las distribuciones de masa sobre una superficie o en el espacio pueden conducir a integrales de funciones de más de una variable. Esas integrales se estudian en cálculo multivariable (*véase*, por ejemplo, la Sección 14.7). En los ejemplos anteriores, las densidades dadas son funciones de sólo una variable, por lo que estos problemas, aunque de naturaleza multidimensional, conducen a integrales de funciones de sólo una variable, que se pueden resolver con los métodos conocidos hasta ahora.

Momentos y centros de masas

El **momento** con respecto al punto $x = x_0$ de una masa m situada en la posición x sobre el eje x es el producto $m(x - x_0)$ de la masa y su distancia (con signo) a x_0. Si el eje x es un brazo horizontal con una bisagra en x_0, el momento con respecto a x_0 mide la tendencia del peso de la masa m a hacer que el brazo rote. Si varias masas m_1, m_2, m_3, ..., m_n están situadas en los puntos x_1, x_2, x_3, ..., x_n, respectivamente, entonces el momento total del sistema de masas respecto al punto $x = x_0$ es la suma de los momentos individuales (*véase* la Figura 7.31):

$$M_{x=x^0} = (x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_0)m_2 + \cdots + (x_n - x_0)m_n = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_0)m_j$$

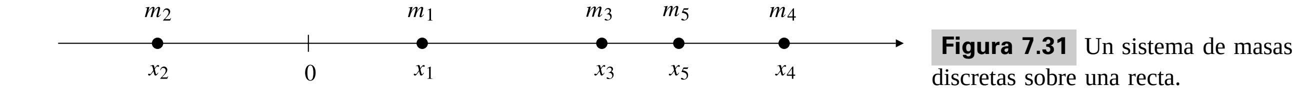


Figura 7.31 Un sistema de masas discretas sobre una recta.

El **centro de masas** del sistema de masas es el punto $\bar{x}$ con respecto al que el momento total del sistema es cero. Entonces,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})m_j = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j - \bar{x} \sum_{j=1}^{n} m_j$$

Así, el centro de masas del sistema se expresa como

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j m_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{M_{x=0}}{m}$$

siendo m la masa total del sistema y $M_{x=0}$ el momento total respecto a $x = 0$. Si pensamos en el eje x como un cable sin peso que da soporte a las masas, entonces $\bar{x}$ es el punto de donde se podría colgar el cable quedando en perfecto equilibrio, sin inclinarse a ningún lado. Incluso si el eje representa un soporte sin peso $x = \bar{x}$, como un balancín, quedará en equilibrio después de añadir las masas, suponiendo que estaba previamente el equilibrio. A muchos efectos, un sistema de masas se comporta como si su masa total estuviera concentrada en su centro de masas.

Supongamos ahora que una distribución unidimensional de masa con densidad lineal variable de forma continua $\delta(x)$ se sitúa en el intervalo $[a, b]$ del eje x. Un elemento de longitud dx situado en la posición x contiene una masa $dm = \delta(x)\,dx$, por lo que su momento es $dM_{x=0} = x\,dm = x\delta(x)\,dx$ con respecto a $x = 0$. El momento total con respecto a $x = 0$ es la *suma* (integral) de esos elementos de momento:

$$M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x)\,dx$$

Como la masa total es

$$m = \int_a^b \delta(x)\,dx$$

se obtiene la siguiente fórmula para el centro de masas.

El centro de masas de una distribución de masas con densidad lineal $\delta(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b \delta(x)\,dx}$$

Ejemplo 5 ¿De qué punto se puede suspender el cable del Ejemplo 3 para que esté en equilibrio?

Solución En el Ejemplo 3 calculamos que la masa del cable era $kL^2/2$ g. Su momento respecto a $x = 0$ es

$$\begin{aligned} M_{x=0} &= \int_0^L x\delta(x)\,dx \\ &= \int_0^L kx^2\,dx = \left(\frac{kx^3}{3}\right)\Bigg|_0^L = \frac{kL^3}{3}\ \text{g}\cdot\text{cm} \end{aligned}$$

Nótese que las unidades apropiadas del momento son unidades de masa por unidades de distancia, en este caso de gramos-centímetros. El centro de masas del cable es

$$\bar{x} = \frac{kL^3/3}{kL^2/2} = \frac{2L}{3}$$

el cable quedará en equilibrio si se cuelga de la posición $x = 2L/3$ cm. ■

Ejemplos en dos y tres dimensiones

El sistema de masas considerado en el Ejemplo 5 es unidimensional y dispuesto en línea recta. Si la masa se distribuye en un plano o en el espacio, se aplican consideraciones similares. Dado un sistema de masas m_1 en (x_1, y_1), m_2 en (x_2, y_2), ..., m_n en (x_n, y_n), su **momento respecto** a $x = 0$ es

$$M_{x=0} = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j$$

y su **momento respecto** a $y = 0$ es

$$M_{y=0} = y_1 m_1 + y_2 m_2 + \cdots + y_n m_n = \sum_{j=1}^{n} y_j m_j$$

El **centro de masas** es el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, siendo

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j m_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j m_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j}$$

En el caso de distribuciones continuas de masa, las sumas se convierten en las integrales apropiadas.

Ejemplo 6 Calcule el centro de masas de una placa rectangular que ocupa la región $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, si la densidad de área del material de la placa en la posición (x, y) es ky.

Solución Como la densidad es independiente de x y el rectángulo es simétrico respecto a la recta $x = a/2$, la coordenada x del centro de masas debe ser $\bar{x} = a/2$. La masa de una banda horizontal fina de anchura dy situada a la altura y (*véase* la Figura 7.32) es $dm = aky\,dy$. El momento de esta banda respecto a $y = 0$ es $dM_{y=0} = y\,dm = kay^2\,dy$. Por tanto, la masa y el momento respecto a $y = 0$ de la placa valen

$$m = ka \int_0^b y\,dy = \frac{kab^2}{2}$$

$$M_{y=0} = ka \int_0^b y^2\,dy = \frac{kab^3}{3}$$

Figura 7.32

Por tanto, $\bar{y} = M_{y=0}/m = 2b/3$ y el centro de masas de la placa es $(a/2, 2b/3)$. La placa quedará en equilibrio si se cuelga de este punto. ■

Para el caso de distribuciones de masa en el espacio tridimensional se definen, análogamente, los momentos $M_{x=0}$, $M_{y=0}$ y $M_{z=0}$ del sistema de masas respecto a los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, respectivamente. El centro de masas es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, siendo

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m}, \qquad \text{y} \qquad \bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m}$$

m es la masa total $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$. En el caso de distribuciones continuas de masa, las sumas se convierten de nuevo en integrales.

Ejemplo 7 Calcule el centro de masas de una semiesfera sólida de radio R pies si su densidad a la altura de z pies por encima del plano de su base es de $\delta_0 z$ lb/pie^3.

Solución El sólido es simétrico respecto al eje vertical (que denominaremos eje z), y la densidad es constante en planos perpendiculares a dicho eje. Por tanto, el centro de masas debe estar en algún lugar de ese eje. Una rodaja del sólido situada a una altura z por encima de su base y de espesor dz tiene la forma de un disco de radio $\sqrt{R^2 - z^2}$ (*véase* la Figura 7.33). Su volumen es $dV = \pi(R^2 - z^2)\,dz$ y su masa es $dm = \delta_0 z\,dV = \delta_0 \pi(R^2 z - z^3)\,dz$. Su momento respecto al plano de la base $z = 0$ es $dM_{z=0} = z\,dm = \delta_0 \pi(R^2 z^2 - z^4)\,dz$. La masa del sólido es

$$m = \delta_0 \pi \int_0^R (R^2 z - z^3)\,dz = \delta_0 \pi \left(\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^R = \frac{\pi}{4}\,\delta_0 R^4 \text{ lb}$$

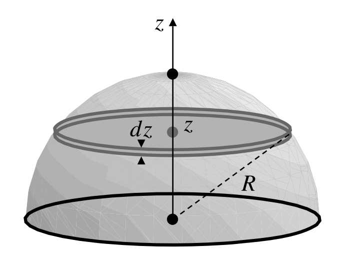


Figura 7.33 Elemento de masa de una semiesfera sólida cuya densidad depende de la altura.

El momento de las semiesfera con respecto al plano $z = 0$ es

$$M_{z=0} = \delta_0 \pi \int_0^R (R^2 z^2 - z^4)\,dz = \delta_0 \pi \left(\frac{R^2 z^3}{3} - \frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_0^R = \frac{2\pi}{15}\,\delta_0 R^5 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Por tanto, el centro de masas está en el eje de simetría de la semiesfera a la altura $\bar{z} = M_{z=0}/m = 8R/15$ ft por encima de su base.

Ejemplo 8 Calcule el centro de masas de una placa que ocupa la región $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ si su densidad en el punto (x, y) es $\delta(x)$.

Solución La Figura 7.34 muestra el elemento de área adecuado. Su área es $f(x)\,dx$ y su masa

$$dm = \delta(x) f(x)\,dx$$

Su momento respecto a $x = 0$ es

$$dM_{x=0} = x\delta(x) f(x)\,dx$$

Como la densidad depende sólo de x, el elemento de masa dm tiene densidad constante, por lo que la coordenada y de *su* centro de masas está en su punto medio: $\bar{y}_{dm} = \frac{1}{2} f(x)$. Por tanto, el momento del elemento de masa dm respecto a $y = 0$ es

$$dM_{y=0} = \bar{y}_{dm}\,dm = \frac{1}{2}\,\delta(x)(f(x))^2\,dx$$

Las coordenadas del centro de masas de la placa son $\bar{x} = \dfrac{M_{x=0}}{m}$ e $\bar{y} = \dfrac{M_{y=0}}{m}$, siendo

$$m = \int_a^b \delta(x) f(x)\, dx$$
$$M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x) f(x)\, dx$$
$$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \delta(x)(f(x))^2\, dx$$

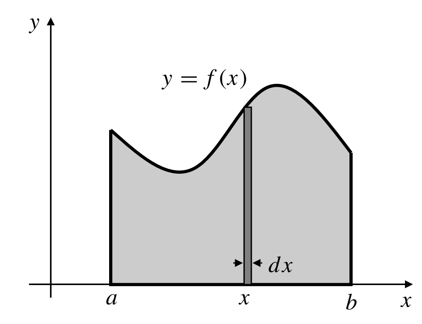


Figura 7.34 Elemento de masa de una placa.

Observación Se pueden obtener fórmulas similares si la densidad depende de y en vez de depender de x, suponiendo que la región admite un elemento de área horizontal adecuado (por ejemplo, si la región se especifica como $c \leqslant y \leqslant d$, $0 \leqslant x \leqslant g(y)$). El cálculo del centro de masas de placas que ocupan regiones especificadas por funciones de x, pero en las que la densidad depende de y, requieren en general el uso de «integrales dobles». Por tanto, esos problemas se estudiarán en cálculo multivariable (*véase* la Sección 14.7).

Ejercicios 7.4

Calcule las masas y los centros de masas de los sistemas que se presentan en los Ejercicios 1-16. Tenga en cuenta las simetrías.

1. Un cable recto de longitud L cm, en el que la densidad a la distancia de s cm desde uno de sus extremos es $\delta(s) = \operatorname{sen} \pi s/L$ g/cm.

2. Un cable recto sobre el eje x desde $x = 0$ hasta $x = L$, si su densidad es constante δ_0, pero el radio de su sección cruzada varía de forma que su valor en x es $a + bx$.

3. Una placa con forma de un cuarto de círculo de radio a, densidad de área constante δ_0 y que ocupa la región $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

4. Una placa con forma de un cuarto de círculo de radio a que ocupa la región $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ y con densidad de área $\delta(x) = \delta_0 x$.

5. Una placa que ocupa la región $0 \leqslant y \leqslant 4 - x^2$, si su densidad de área en (x, y) es ky.

6. Una placa con forma de triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 m y 3 m, si la densidad de área en cualquier punto P de la placa es $5h$ kg/m^2, siendo h la distancia del punto P al cateto más corto.

7. Una placa cuadrada cuyo lado mide a cm, si su densidad de área en el punto P es de kx g/cm^2, siendo x la distancia desde el punto P a un lado del cuadrado.

8. La placa del Ejercicio 7, pero ahora con densidad de área kr g/cm^2, siendo r la distancia (en centímetros) desde el punto P a una de las diagonales del cuadrado.

9. Una placa de densidad $\delta(x)$ que ocupa la región $a \leqslant x \leqslant b$, $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$.

10. Un ladrillo rectangular de dimensiones 20 cm, 10 cm y 5 cm, si la densidad en el punto P es de kx g/cm^3, siendo x la distancia desde P a una de sus caras de dimensión 10×5.

11. Una bola sólida de radio R m, si la densidad en el punto P es de z g/m^3, siendo z la distancia desde el

punto P a un plano que está a distancia $2R$ m del centro de la bola.

12. Un cono circular recto con radio en la base de a cm y altura de b cm, si la densidad en el punto P es de kz g/cm^3, siendo z la distancia desde el punto P a la base del cono.

***13.** El sólido formado por la cuarta parte de una bola de radio a centrada en el origen que tiene como base la región $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$ en el plano xy, si la densidad a una altura z desde la base es de $\delta_0 z$.

***14.** El cono del Ejercicio 12, pero ahora con densidad en el punto P igual a kx g/cm^3, siendo x la distancia desde el punto P al eje de simetría del cono. *Sugerencia*: Utilice una capa cilíndrica centrada en el eje de simetría como elemento de volumen. Este elemento tiene densidad constante, por lo que su centro de masas es conocido y su momento se puede determinar a partir de su masa.

***15.** Una placa semicircular que ocupa la región $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $y \geqslant 0$, si la densidad a una distancia s del origen es ks g/cm^2.

***16.** El cable del Ejercicio 1 si se dobla en forma de semicircunferencia.

17. Se estima que la densidad de materia en las proximidades de una estrella gigante se puede expresar como $\delta(r) = Ce^{-kr^2}$, siendo C y k constantes positivas y r la distancia al centro de la estrella. El radio de la estrella está indeterminado, pero se puede suponer que es infinito ya que $\delta(r)$ decrece muy rápidamente para valores de r grandes. Calcule la masa aproximada de la estrella en función de C y k.

18. Calcule la distancia media $\bar{r}$ de la materia de la estrella del Ejercicio 17 a su centro. $\bar{r}$ se expresa como $\int_0^\infty r\,dm / \int_0^\infty dm$, siendo dm el elemento de masa situado una distancia r del centro de la estrella.

7.5 Centroides

Si la materia de un sistema está distribuida uniformemente, de forma que la densidad δ es constante, entonces esa densidad se cancela del numerador y el denominador en las expresiones en forma de suma o integral de las coordenadas del centro de masas. En esos casos, el centro de masas depende sólo de la *forma* del objeto, es decir, de propiedades geométricas de la región ocupada por el objeto, y se denomina **centroide** de la región.

Los centroides se calculan utilizando las mismas fórmulas que se emplean en los centros de masas, con la salvedad de que la densidad (que es constante) toma el valor 1, por lo que la masa es simplemente la longitud, área o volumen de la región y los momentos se denominan **momentos de la región**, en vez de referirlos a la masa que ocupa la región. Si en las fórmulas que se obtuvieron en el Ejemplo 8 de la Sección 7.4 hacemos $\delta(x) = 1$, se llega al siguiente resultado:

Centroide de una región plana estándar

El centroide de una región plana $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, es $(\bar{x}, \bar{y})$, siendo $\bar{x} = \dfrac{M_{x=0}}{A}$, $\bar{y} = \dfrac{M_{y=0}}{A}$, y

$$A = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad M_{x=0} = \int_a^b x\,f(x)\,dx, \qquad M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Así, por ejemplo, $\bar{x}$ es el *valor medio* de la función x en la región.

Los centroides de algunas regiones se pueden calcular fácilmente por simetría. El centroide de un disco circular o de un disco elíptico está en su centro. El centroide de un rectángulo también está su centro; el centro es el punto de intersección de las diagonales. El centroide de cualquier región estará en los ejes de simetría de dicha región.

Ejemplo 1 ¿Cuál es el valor medio de y en el semidisco $-a \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2 - x^2}$? Calcule el centroide del semidisco.

Solución Por simetría, el centroide estará en el eje y, por lo que su coordenada x será $\bar{x} = 0$ (*véase* la Figura 7.35). Como el área del semidisco es $A = \frac{1}{2}\pi a^2$, el valor medio de y en el semidisco será

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{A} = \frac{2}{\pi a^2}\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{\pi a^2}\frac{2a^3}{3} = \frac{4a}{3\pi}$$

El centroide del semidisco es $\left(0, \dfrac{4a}{3\pi}\right)$.

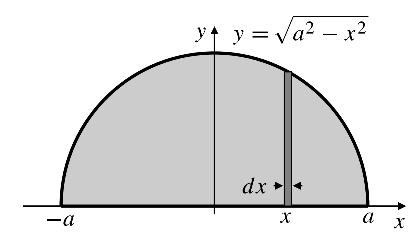


Figura 7.35

Ejemplo 2 Calcule el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Solución Aquí, la «región» es una curva unidimensional que tiene longitud en vez de área. De nuevo $\bar{x} = 0$ por simetría. El momento de un pequeño arco de longitud ds situado a una altura y en el semicírculo, respecto a $y = 0$, es $dM_{y=0} = y\,ds$ (*véase* la Figura 7.36). Como

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\,dx = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

y como $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ en la semicircunferencia, tenemos que

$$M_{y=0} = \int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a\int_{-a}^{a}dx = 2a^2$$

Como la longitud del semicírculo es πa, tenemos que $\bar{y} = \dfrac{M_{y=0}}{\pi a} = \dfrac{2a}{\pi}$ y el centroide de la semicircunferencia es $\left(0, \dfrac{2a}{\pi}\right)$. Nótese que el centroide de una semicircunferencia de radio a no es el mismo que el de un semidisco de radio a. Nótese también que el centroide de la semicircunferencia no está sobre la propia semicircunferencia.

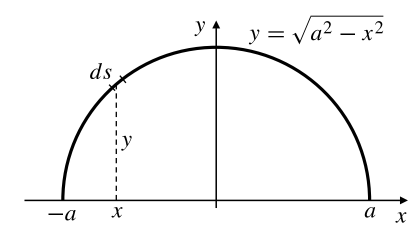


Figura 7.36

TEOREMA 1 **Centroide de un triángulo**

El centroide de un triángulo es el punto en el que se cruzan sus tres medianas.

DEMOSTRACIÓN Recuérdese que la mediana del triángulo es la recta que une uno de sus vértices con el punto medio del lado opuesto. Dada una mediana de un triángulo, de-

mostraremos que el centroide está en dicha mediana. Por tanto, el centroide deberá estar en las tres medianas.

Adoptemos un sistema de coordenadas donde la mediana en cuestión esté en el eje y, y en el que el vértice del triángulo correspondiente a dicha mediana sea el origen (*véase* la Figura 7.37). Sea $(0, m)$ el punto medio del lado opuesto. Entonces, los otros dos vértices del triángulo tendrán coordenadas de la forma $(-a, m-c)$ y $(a, m+c)$, ya que $(0, m)$ debe ser el punto medio entre ellos. Los dos elementos de área verticales que se muestran en la figura están a la misma distancia, en lados opuestos del eje y, por lo que tienen las mismas alturas, $h(-x) = h(x)$ (por triángulos similares), y la misma área. La suma de los momentos respecto a $x = 0$ de esos elementos de área es

$$dM_{x=0} = -xh(-x)\,dx + xh(x)\,dx = 0$$

por lo que el momento del triángulo completo respecto a $x = 0$ es

$$M_{x=0} = \int_{x=-a}^{x=a} dM_{x=0} = 0$$

por tanto, el centroide del triángulo está en el eje y.

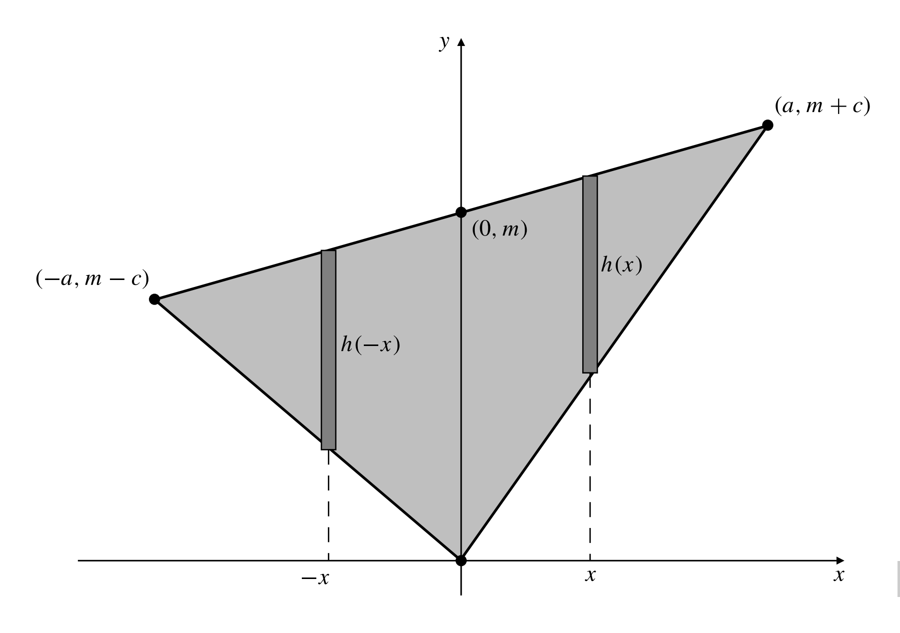


Figura 7.37

Observación Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de dos medianas cualesquiera de un triángulo, se puede verificar la siguiente fórmula:

Coordenadas del centroide de un triángulo

Las coordenadas del centroide un triángulo son el promedio de las correspondientes coordenadas de los tres vértices del triángulo. El centroide de un triángulo de vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Si una región está formada por la unión sin solapamiento de subregiones, entonces el momento de la región será la suma de los correspondientes momentos de las subregiones. Esto hace posible calcular el centroide de una región si se conocen los centroides y las áreas de todas las subregiones.

Ejemplo 3 Calcule el centroide del trapecio de vértices (0, 0), (1, 0) (1, 2) y (0, 1).

Solución El trapecio es la unión (sin solapamiento) de un cuadrado y un triángulo, como se muestra en la Figura 7.38. Por simetría, el centroide del cuadrado es $(\bar{x}_S, \bar{y}_S) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y su área es $A_S = 1$. El área del triángulo es $A_T = \frac{1}{2}$ y su centroide es $(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$, siendo

$$\bar{x}_T = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \bar{y}_T = \frac{1+1+2}{3} = \frac{4}{3}$$

Continuando con el uso de los subíndices S y T para indicar el cuadrado y el triángulo, respectivamente, se calcula

$$M_{x=0} = M_{S;\,x=0} + M_{T;\,x=0} = A_S\bar{x}_S + A_T\bar{x}_T = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

$$M_{y=0} = M_{S;\,y=0} + M_{T;\,y=0} = A_S\bar{y}_S + A_T\bar{y}_T = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{7}{6}$$

Como el área del trapecio es $A = A_S + A_T = \frac{3}{2}$, su centroide es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{5}{6}\bigg/\frac{3}{2}, \frac{7}{6}\bigg/\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

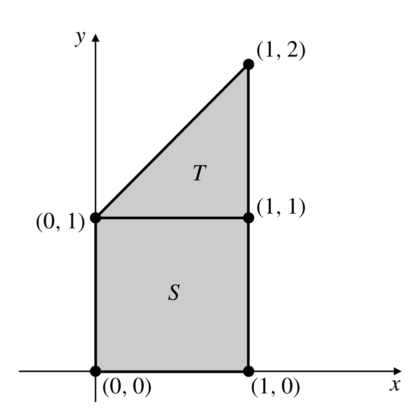


Figura 7.38

■

Ejemplo 4 Calcule el centroide de la región sólida que se obtiene rotando alrededor del eje y la región del primer cuadrante que está entre el eje x y la parábola $y = 4 - x^2$.

Solución Por simetría, el centroide del sólido parabólico estará en su eje de simetría, el eje y. El volumen de una rodaja fina del sólido con forma de disco, de espesor dy y situada a una altura y es (*véase* la Figura 7.39)

$$dV = \pi x^2\,dy = \pi(4-y)\,dy$$

y su momento con respecto al plano de la base

$$dM_{y=0} = y\,dV = \pi(4y - y^2)\,dy$$

Por tanto, el volumen del sólido es

$$V = \pi\int_0^4 (4-y)\,dy = \pi\left(4y - \frac{y^2}{2}\right)\bigg|_0^4 = \pi\,(16-8) = 8\pi$$

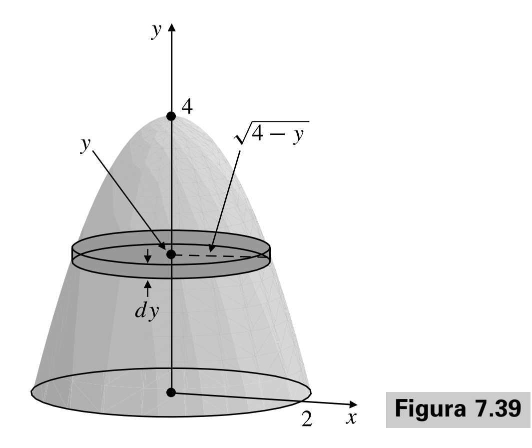


Figura 7.39

y su momento con respecto a $y = 0$ es

$$M_{y=0} = \pi \int_0^4 (4y - y^2)\, dy = \pi \left(2y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \pi \left(32 - \frac{64}{3}\right) = \frac{32}{3}\,\pi$$

Por consiguiente, el centroide está situado en $\bar{y} = \dfrac{32\pi}{3} \times \dfrac{1}{8\pi} = \dfrac{4}{3}$.

Teorema de Pappus

El siguiente teorema relaciona volúmenes o áreas de superficies de revolución con el centroide de la región o curva que se rota.

TEOREMA 2 **Teorema de Pappus**

(a) Si una región plana R está a un lado de una recta L perteneciente a dicha región plana, y la región se rota alrededor de L para generar un sólido de revolución, entonces el volumen V del sólido es el producto del área de R por la distancia recorrida por el centroide de R debido a la rotación, es decir,

$$V = 2\pi \bar{r} A$$

siendo A el área de R y $\bar{r}$ la distancia medida perpendicularmente desde el centroide de R hasta L.

(b) Si una curva plana $\mathcal{C}$ está situada a un lado de una recta L perteneciente al mismo plano que la curva, y dicha curva se rota alrededor de la recta para generar una superficie de revolución, entonces el área S de dicha superficie es la longitud de la curva $\mathcal{C}$ multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de $\mathcal{C}$:

$$S = 2\pi \bar{r} s$$

siendo s la longitud de la curva $\mathcal{C}$ y $\bar{r}$ la distancia medida perpendicularmente desde el centroide $\mathcal{C}$ a la recta L.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos el apartado (a). La demostración del apartado (b) es similar y se deja como ejercicio.

Tomemos la recta L como eje y, y supongamos que la región R está comprendida entre $x = a$ y $x = b$, siendo $0 \leqslant a < b$. Entonces $\bar{r} = \bar{x}$, la coordenada x del centroide de R. Sea dA el área de una banda fina de R situada en la posición x con anchura dx (*véase* la Figu-

ra 7.40). Esta banda genera, al rotar alrededor de L, un tubo cilíndrico de volumen $dV = 2\pi x\, dA$, por lo que el volumen del sólido de revolución es

$$V = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} x\, dA = 2\pi M_{x=0} = 2\pi\bar{x}A = 2\pi\bar{r}A$$

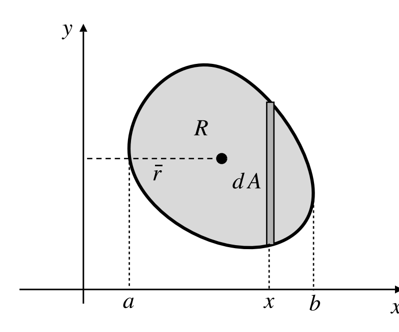


Figura 7.40

Como ilustran los ejemplos siguientes, el Teorema de Pappus se puede usar de dos formas: se puede determinar el centroide cuando se conoce el volumen o el área de la superficie, o se puede determinar el volumen o el área de la superficie si se conoce el centroide de la región que rota.

Ejemplo 5 Utilice el Teorema de Pappus para calcular el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Solución El centroide de la semicircunferencia está en su eje de simetría, el eje y, por lo que estará situado en un punto de coordenadas $(0, \bar{y})$. Como la longitud de la semicircunferencia es de πa unidades y genera, al rotar alrededor del eje x, una esfera de área $4\pi a^2$ unidades al cuadrado, se obtiene, utilizando el apartado (b) del Teorema de Pappus,

$$4\pi a^2 = 2\pi(\pi a)\bar{y}$$

Por tanto, $\bar{y} = 2a/\pi$, como demostramos previamente en el Ejemplo 2.

Ejemplo 6 Utilice el Teorema de Pappus para calcular el volumen y el área de la superficie del toro (dónut) que se obtiene rotando el disco $(x - b)^2 + y^2 \leqslant a^2$ alrededor del eje y. En este ejemplo, $0 < a < b$ (*véase* la Figura 7.10 en la Sección 7.1).

Solución El centroide del disco está en $(b, 0)$, a una distancia de $\bar{r} = b$ unidades del eje de rotación. Como el área del disco es πa^2 unidades al cuadrado, el volumen del toro es

$$V = 2\pi b(\pi a^2) = 2\pi^2 a^2 b \text{ unidades al cubo}$$

Para obtener el área S de la superficie del toro (en caso de que se quisiera glasear el dónut), se rota alrededor del eje y la circunferencia exterior del disco, cuya longitud es $2\pi a$, con lo que se obtiene

$$S = 2\pi b(2\pi a) = 4\pi^2 ab \text{ unidades al cuadrado}$$

Ejercicios 7.5

Calcule los centroides de las estructuras geométricas que se presentan en los Ejercicios 1-21. Tenga en cuenta las simetrías y las oportunidades de utilizar el Teorema de Pappus.

1. El cuarto de disco $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

2. La región $0 \leqslant y \leqslant 9 - x^2$.

3. La región $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

4. El sector de disco circular $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $0 \leqslant y \leqslant x$.

5. El segmento de disco circular $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2} - 1$.

6. El disco semielíptico $0 \leqslant y \leqslant b\sqrt{1 - (x/a)^2}$.

7. El cuadrilátero cuyos vértices son (en el sentido de las agujas del reloj) (0, 0), (3, 1), (4, 0) y (2, -2).

8. La región limitada por el semicírculo $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$, el eje y y la recta $y = x - 2$.

9. Una superficie semisférica de radio r.

10. Media bola sólida de radio r.

11. Un cono sólido de radio en su base r y altura h.

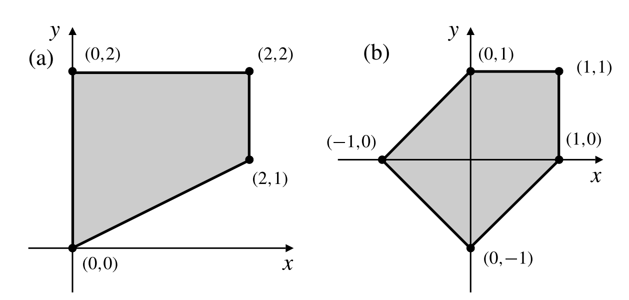
12. Una superficie cónica de radio en su base r y altura h.

13. La región plana $0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

14. La región plana $0 \leqslant y \leqslant \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

15. El arco correspondiente a un cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

16. El sólido que se obtiene rotando la región de la Figura 7.41(a) alrededor del eje y.



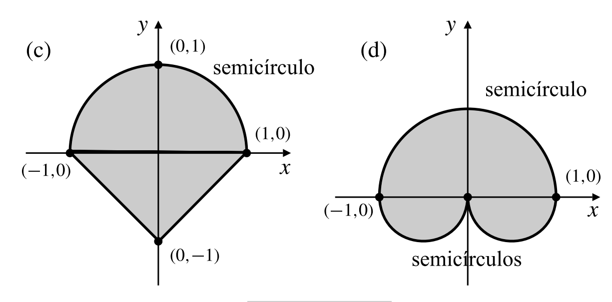


Figura 7.41

17. La región de la Figura 7.41(a).

18. La región de la Figura 7.41(b).

19. La región de la Figura 7.41(c).

20. La región de la Figura 7.41(d).

21. El sólido que se obtiene rotando la región plana $0 \leqslant y \leqslant 2x - x^2$ alrededor de la recta $y = -2$.

22. El segmento de recta que va desde (1, 0) hasta (0, 1) se rota alrededor de la recta $x = 2$ para generar parte de una superficie cónica. Calcule el área de dicha superficie.

23. El triángulo cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (0, 1) se rota alrededor de la recta $x = 2$ para generar un cierto sólido. Calcule el volumen de dicho sólido.

24. Un triángulo equilátero cuyo lado vale x cm se rota alrededor de uno de sus lados para generar un sólido. Calcule el volumen y el área de la superficie de ese sólido.



25. Calcule con 5 cifras decimales de precisión las coordenadas del centroide de la región $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\cos x$.



26. Calcule con 5 cifras decimales de precisión las coordenadas del centroide de la región $0 < x \leqslant \pi/2$, $\ln(\operatorname{sen} x) \leqslant y \leqslant 0$.

27. Calcule el centroide de la región infinitamente larga que está entre el eje x y la curva $y = (x+1)^{-3}$, a la derecha del eje y.

28. Demuestre que la curva $y = e^{-x^2}(-\infty < x < \infty)$ genera una superficie de área finita cuando se rota alrededor del eje x. ¿Qué implica esto respecto a la posición del centroide de esta curva infinitamente larga?

29. Obtenga fórmulas para las coordenadas del centroide de la región plana $c \leqslant y \leqslant d$, $0 < f(y) \leqslant x \leqslant g(y)$.

30. Demuestre el apartado (b) del Teorema de Pappus (Teorema 2).

31. (Estabilidad de un objeto flotante) La determinación de la orientación que tomará un objeto flotante es un problema de importancia crítica en el diseño de barcos. Los barcos se deben diseñar de forma que floten establemente en posición vertical. Si el barco se desplaza de su posición vertical, las fuerzas que actúan sobre él deben devolverlo de nuevo a dicha posición. Las dos fuerzas que actúan sobre un objeto flotante que necesitamos tener en cuenta son su peso **W** y el empuje ascendente $\mathbf{B} = -\mathbf{W}$. El peso **W** debe tratarse a efectos mecánicos como si se aplicara en el centro de masas (CM) del objeto. La fuerza de empuje ascendente, sin embargo, actúa en el *centro de empuje* (CB), que es el centro de masas del agua desplazada por el objeto, y por tanto es el centroide del «agujero en el agua» hecho por el objeto.

Por ejemplo, considere una boya de marca de canal, formada por un casco semiesférico sobre el que se monta una torre cónica que da soporte a una luz de navegación. La boya tiene un eje de simetría vertical. Si se sitúa en posición vertical, tanto CM como CB pasarán por este eje, como se muestra en la Figura 7.42 (izquierda).

¿Es estable la flotación vertical de la boya? Lo será si CM está por debajo del centro O del casco semiesférico, como se muestra en la figura. Para ver

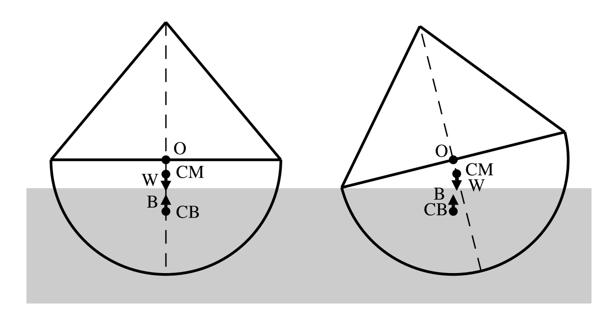


Figura 7.42

por qué, imagine que la boya se desplaza ligeramente de su posición vertical, como se muestra la figura de la derecha. Obsérvese que CM todavía está en el eje de simetría de la boya, pero CB está en la línea vertical que pasa por O. Las fuerzas **W** y **B** ya no actúan en la misma recta, pero su par de torsión es tal que tiende a rotar la boya de nuevo a su posición vertical. Si CM hubiera estado por encima de O en la figura de la izquierda, el par de torsión habría tendido a volcar la boya una vez que ésta se desplazara incluso muy poco desde la posición vertical.

Una viga de madera tiene sección cruzada con forma de cuadrado y gravedad específica 0.5, por lo que flotará con la mitad de su volumen sumergido (*véase* la Figura 7.43). Suponiendo que flota horizontalmente en el agua, ¿cuál es la orientación estable de la sección cruzada cuadrada con respecto a la superficie del agua? En particular, ¿flotará la viga con la parte plana hacia arriba o con la arista hacia arriba? Demuestre sus afirmaciones. Puede resultar de utilidad Maple o algún otro programa de matemáticas por computador.

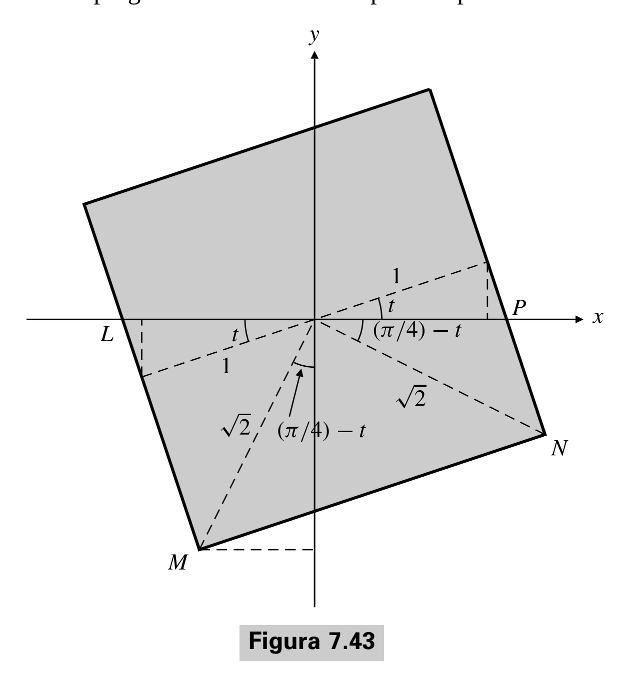


Figura 7.43

7.6 Otras aplicaciones en física

En esta sección presentaremos algunos ejemplos del uso de la integración para calcular magnitudes que aparecen en física y mecánica.

Presión hidrostática

La **presión** p a una profundidad h bajo la superficie de un líquido es la fuerza por unidad de área que se realiza sobre una superficie plana horizontal situada a esa profundidad, debido al peso del líquido que hay por encima de ella. Por tanto, p se expresa como

$$p = \delta g h$$

siendo δ la densidad del líquido y g la aceleración de la gravedad donde está situado el fluido (*véase* la Figura 7.44). Para el caso del agua en la superficie de la tierra tenemos, aproximadamente, $\delta = 1000$ kg/m^3 y $g = 9.8$ m/s^2, por lo que la presión a la profundidad de h m es

$$p = 9800h \text{ N/m}^2$$

La unidad de fuerza que se utiliza es el newton (N); 1 N = 1 kg·m/s^2, y corresponde a la fuerza que, aplicada sobre una masa de 1 kg, produce sobre la misma una aceleración de 1 m/s^2.

Las moléculas de un líquido interactúan de tal manera que la presión a cualquier profundidad actúa de igual forma en todas las direcciones. La presión contra una superficie vertical es la misma que la presión contra una superficie horizontal. Éste es el **principio de Pascal**.

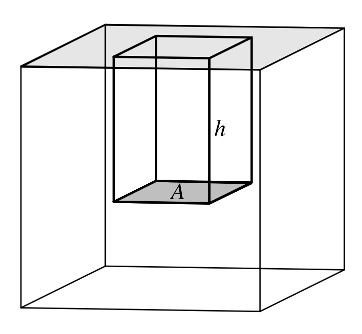


Figura 7.44 El volumen de líquido que hay por encima del área A es $V = Ah$. El peso de este líquido es $\delta Vg = \delta ghA$, por lo que la presión (fuerza por unidad de área) a la profundidad h es $p = \delta gh$.

La fuerza total que realiza un líquido sobre una superficie horizontal (por ejemplo, sobre el fondo del tanque que contiene un líquido) se calcula multiplicando el área de esa superficie por la presión existente a la profundidad a la que se encuentra la superficie. Sin embargo, para el caso de superficies que no sean horizontales, la presión no es constante en toda la superficie y la fuerza total no se puede determinar de forma tan sencilla. En este caso se divide la superficie en elementos de área dA, cada uno de los cuales estará a una profundidad concreta h, y después se suman (es decir, se integran) los correspondientes elementos de fuerza $dF = \delta gh\, dA$ para obtener la fuerza total.

Ejemplo 1 Una pared vertical de un abrevadero tiene la forma de una placa semicircular de radio R m con su parte curva hacia abajo. Si el abrevadero está lleno, de forma que el agua llega hasta la parte superior de la placa, calcule la fuerza total que realiza el agua sobre la placa.

Solución La longitud de una banda horizontal en la superficie de la placa situada a profundidad h m y de anchura dh m (*véase* la Figura 7.45) es de $2\sqrt{R^2 - h^2}$ m. Por tanto, su área es $dA = 2\sqrt{R^2 - h^2}\, dh$ m^2. La fuerza que realiza el agua sobre esta banda es

$$dF = \delta gh\, dA = 2\delta gh\sqrt{R^2 - h^2}\, dh$$

Por tanto, la fuerza total que se realiza sobre la placa es

$$F = \int_{h=0}^{h=R} dF = 2\delta g \int_0^R h\sqrt{R^2 - h^2}\, dh \qquad \text{Sea } u = R^2 - h^2, \quad du = -2h\, dh$$

$$= \delta g \int_0^{R^2} u^{1/2}\, du = \delta g\, \frac{2}{3}\, u^{3/2}\Big|_0^{R^2}$$

$$\approx \frac{2}{3} \times 9800R^3 \approx 6533R^3 \text{ N}$$

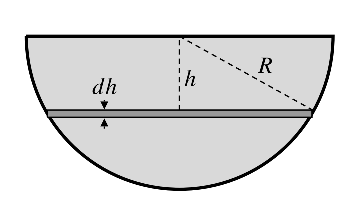


Figura 7.45

Ejemplo 2 **(Fuerza sobre una presa)** Calcule la fuerza total sobre una sección de 100 m de largo de una presa que tiene una altura vertical de 10 m, si la superficie que contiene al agua esté inclinada un ángulo de 30$^{\text{o}}$ con respecto a la vertical y el agua llega hasta la parte superior de la presa.

Solución El agua de una capa horizontal de espesor dh m a la profundidad de h m hace contacto con la presa formando una banda sesgada de anchura $dh \sec 30^{\text{o}} = (2/\sqrt{3})\, dh$ m (*véase* la Figura 7.46). El área de esta banda es $dA = (200/\sqrt{3})\, dh$ m^2, y la fuerza que realiza el agua sobre dicha banda es

$$dF = \delta gh\, dA = \frac{200}{\sqrt{3}} \times 1000 \times 9.8h\, dh \approx 1\,131\,600h\, dh \text{ N}$$

La fuerza total sobre la sección de la presa es, por tanto,

$$F \approx 1\,131\,600 \int_0^{10} h\,dh = 1\,131\,600 \times \frac{10^2}{2} \approx 5.658 \times 10^7 \text{ N}$$

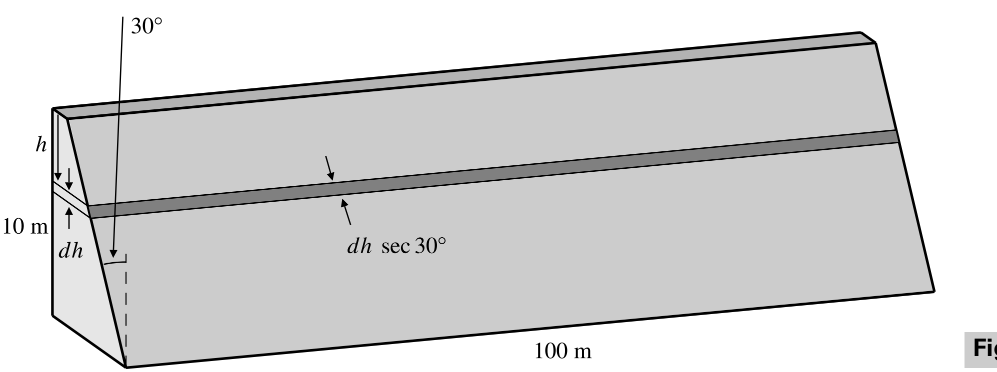


Figura 7.46

Trabajo

Cuando una fuerza actúa sobre un objeto para mover dicho objeto, se dice que se ha realizado un **trabajo** sobre el objeto. La cantidad de trabajo que realiza una fuerza constante se mide mediante el producto de la fuerza por la distancia que recorre el objeto. Se supone que la fuerza actúa en la dirección del movimiento.

$$\text{Trabajo} = \text{Fuerza} \times \text{Distancia}$$

El trabajo está siempre relacionado con una fuerza particular. Si otras fuerzas actúan sobre un objeto y hacen que se mueva en una dirección opuesta a la fuerza F, se dice que el trabajo se realiza *contra* la fuerza F.

Supongamos que una fuerza en la dirección del eje x mueve un objeto desde $x = a$ hasta $x = b$ en la dirección de ese eje, y que la fuerza varía de forma continua con la posición x del objeto. Es decir, $F = F(x)$ es una función continua. El elemento de trabajo realizado por la fuerza al mover el objeto una distancia muy pequeña desde x hasta $x + dx$ es $dW = F(x)\,dx$, por lo que el trabajo total realizado por la fuerza es

$$W = \int_{x=a}^{x=b} dW = \int_a^b F(x)\,dx$$

Ejemplo 3 **(Compresión o descompresión de un muelle)** Por la **Ley de Hooke**, la fuerza $F(x)$ que se requiere para extender (o comprimir) un muelle elástico hasta que alcance un valor de x más largo (o más corto) que su longitud natural es proporcional a x:

$$F(x) = kx$$

siendo k la **constante de elasticidad** del muelle. Si se requiere una fuerza de 2000 N para extender un muelle 4 cm desde su longitud natural, ¿cuánto trabajo debe realizarse en esa extensión?

Solución Como $F(x) = kx = 2000$ N cuando $x = 4$ cm, debemos tener que $k = 2000/4 = 500$ N/cm. El trabajo realizado al extender el muelle 4 cm es

$$W = \int_0^4 kx\,dx = k\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^4 = 500\,\frac{\text{N}}{\text{cm}} \times \frac{4^2\ \text{cm}^2}{2} = 4000\ \text{N}\cdot\text{cm} = 40\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Es decir, se realiza un trabajo de 40 newtons-metro (julios) al alargar el muelle 4 cm.

Ejemplo 4 **(Trabajo realizado para vaciar un tanque)** Un tanque en forma de cono circular recto invertido, con un radio de 3 m en su parte superior y una profundidad de 4 m, está lleno de agua. ¿Cuánto trabajo se debe realizar (contra la gravedad) para extraer con una bomba todo el agua del tanque por encima de su borde superior?

Solución Una rodaja fina de agua situada a una altura h del vértice inferior del tanque tiene radio r (*véase* la Figura 7.47), siendo $r = \frac{3}{4}h$ por triángulos similares. El volumen de esta rodaja es

$$dV = \pi r^2\,dh = \frac{9}{16}\,\pi h^2\,dh$$

y su *peso* (la fuerza de la gravedad sobre la masa de agua de la rodaja) es

$$dF = \delta g\,dV = \frac{9}{16}\,\delta g\pi h^2\,dh$$

La bomba debe subir el agua de este disco (en contra de la gravedad) una distancia de $(4 - h)$ m. El trabajo requerido para ello es

$$dW = \frac{9}{16}\,\delta g\pi(4 - h)h^2\,dh$$

El trabajo total que hay que realizar para vaciar el tanque es la suma (integral) de todos esos elementos de trabajo realizados para los discos que están entre las profundidades de 0 y 4 m:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^4 \frac{9}{16}\,\delta g\pi(4h^2 - h^3)\,dh \\ &= \frac{9}{16}\,\delta g\pi\left(\frac{4h^3}{3} - \frac{h^4}{4}\right)\Bigg|_0^4 \\ &= \frac{9\pi}{16} \times 1000 \times 9.8 \times \frac{64}{3} \approx 3.69 \times 10^5\ \mathrm{N\cdot m} \end{aligned}$$

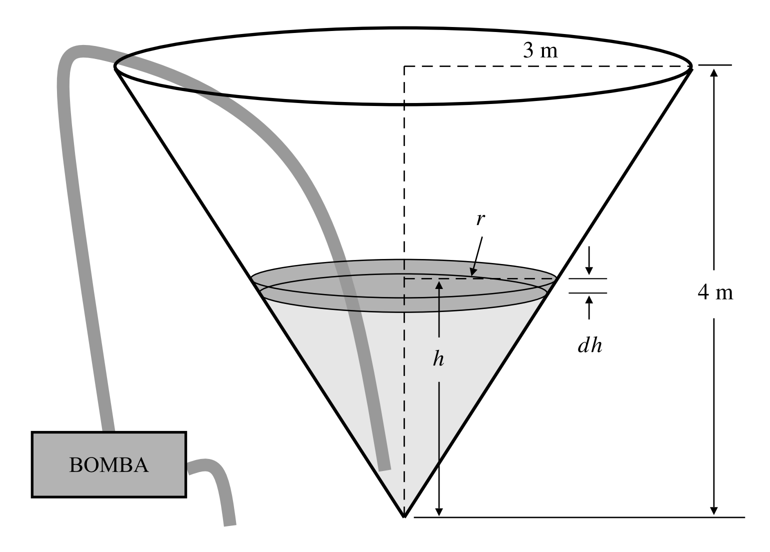


Figura 7.47

■

Ejemplo 5 **(Trabajo necesario para poner material en órbita)** La fuerza gravitatoria que realiza la tierra sobre una masa m situada a una altura de h m desde su superficie es

$$F(h) = \frac{Km}{(R + h)^2}$$

siendo R el radio de la tierra y K una constante independiente de m y h. Determine, en función de K y R, el trabajo que se debe realizar contra la gravedad para elevar un objeto desde la superficie de la tierra hasta:

(a) una altura H sobre la superficie de la tierra
(b) una altura infinita por encima de la superficie de la tierra.

Solución El trabajo necesario para elevar una masa m desde una altura h hasta una altura $h + dh$ es

$$dW = \frac{Km}{(R+h)^2}\,dh$$

(a) El trabajo total necesario para elevarla desde la altura $h = 0$ hasta la altura $h = H$ es

$$W = \int_0^H \frac{Km}{(R+h)^2}\,dh = \left.\frac{-Km}{R+h}\right|_0^H = Km\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right)$$

Si R y H se miden en metros y F se mide en newtons, entonces W se mide en newtons-metro, o julios.

(b) El trabajo total necesario para elevar la masa m a una altura infinita es

$$W = \int_0^\infty \frac{Km}{(R+h)^2}\,dh = \lim_{H\to\infty} Km\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right) = \frac{Km}{R}$$

■

Energía potencial y energía cinética

Las unidades de energía son las mismas que las unidades de trabajo (fuerza × distancia). El trabajo realizado contra una fuerza se puede ver como una forma de almacenar energía para un uso futuro o para su conversión en otras formas de energía. Esta energía almacenada se denomina **energía potencial** (E.P.). Por ejemplo, al extender o comprimir un muelle elástico, estamos realizando un trabajo contra la tensión del muelle y, por tanto, estamos almacenando energía en el muelle. Cuando se realiza trabajo contra una fuerza (variable) $F(x)$ para mover un objeto desde $x = a$ hasta $x = b$, la energía almacenada es

$$\text{E.P.} = -\int_a^b F(x)\,dx$$

Como el trabajo se realiza contra la fuerza F, los signos de $F(x)$ y $b - a$ son contrarios, de forma que la integral es negativa. Se incluye explícitamente el signo negativo de forma que la energía potencial calculada sea positiva.

Una de las formas de energía en las que se puede transformar la energía potencial es la **energía cinética** (E.C.), la energía del movimiento. Si un objeto de masa m se mueve con velocidad v, su energía cinética es

$$\text{E.C.} = \frac{1}{2}mv^2$$

Por ejemplo, si un objeto se eleva y después se deja caer, acelerará hacia abajo por efecto de la gravedad a medida que más y más cantidad de la energía potencial que tenía almacenada cuando se elevó se convierte en energía cinética.

Consideremos el cambio en la energía potencial almacenada en una masa m a medida que se mueve por el eje x desde a hasta b bajo la influencia de la fuerza $F(x)$, que depende sólo de x:

$$\text{E.P.}(b) - \text{E.P.}(a) = -\int_a^b F(x)\,dx$$

El cambio en la energía potencial es negativo si m se mueve en la dirección de F. De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, la fuerza $F(x)$ hace que la masa m se acelere con una aceleración dv/dt que es

$$F(x) = m\,\frac{dv}{dt} \qquad \text{(fuerza = masa} \times \text{aceleración)}$$

Por la Regla de la Cadena se puede escribir dv/dt en la forma

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx}$$

por lo que $F(x) = mv\,\dfrac{dv}{dx}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{E.P.}(b) - \text{E.P.}(a) &= -\int_a^b mv\,\frac{dv}{dx}\,dx \\ &= -m\int_{x=a}^{x=b} v\,dv \\ &= -\frac{1}{2}\,mv^2\Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= \text{E.C.}(a) - \text{E.C.}(b) \end{aligned}$$

Se deduce entonces que

$$\text{E.P.}(b) + \text{E.C.}(b) = \text{E.P.}(a) + \text{E.C.}(a)$$

Esto demuestra que la energía total (potencial + cinética) permanece constante cuando la masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza F, *dependiendo sólo de la posición*. Una fuerza de ese tipo se denomina **conservativa** y el resultado anterior se denomina **ley de conservación de la energía**. En la Sección 15.2 consideraremos de nuevo las fuerzas conservativas.

Ejemplo 6 **(Velocidad de escape)** Utilizamos el resultado del Ejemplo 5, junto con los siguientes valores conocidos:

(a) El radio R de la tierra vale aproximadamente 6400 km, o 6.4×10^6 m.
(b) La aceleración de la gravedad g en la superficie de la tierra vale aproximadamente 9.8 m/s^2.

Determine la constante K en la fórmula de la fuerza gravitatoria del Ejemplo 5, y utilice esta información para determinar la velocidad de escape de un proyectil disparado verticalmente desde la superficie de la tierra. La **velocidad de escape** es la velocidad (mínima) que debe tener un proyectil en el momento de su disparo para asegurar que se alejará siempre de la superficie de la tierra y nunca volverá a caer.

Solución De acuerdo con la fórmula del Ejemplo 5, la fuerza de la gravedad sobre una masa de m kg en la superficie de la tierra ($h = 0$) es

$$F = \frac{Km}{(R+0)^2} = \frac{Km}{R^2}$$

De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, esta fuerza está relacionada con la aceleración de la gravedad (g) en la superficie de la tierra mediante la ecuación $F = mg$. Así,

$$\frac{Km}{R^2} = mg \quad \text{y} \quad K = gR^2$$

Aplicando la ley de conservación de la energía, el proyectil debe tener en el momento de su disparo suficiente energía cinética para realizar el trabajo necesario para elevar la masa m a una altura infinita. Utili-

zando el resultado del Ejemplo 5, la energía necesaria es Km/R. Si la velocidad inicial del proyectil es v, debe cumplirse entonces que

$$\frac{1}{2}mv^2 \geqslant \frac{Km}{R}$$

Por tanto, v debe satisfacer

$$v \geqslant \sqrt{\frac{2K}{R}} = \sqrt{2gR} \approx \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} \approx 1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$$

Es decir, la velocidad de escape es aproximadamente 11.2 km/s, y es independiente de la masa m. En este cálculo hemos despreciado la resistencia del aire cerca de la superficie de la tierra. Esa resistencia depende de la velocidad más bien que de la posición, por lo que no es una fuerza conservativa. El efecto de esta resistencia es utilizar (convertir en calor) una parte de la energía cinética inicial y, por tanto, aumentar la velocidad de escape. ■

Ejercicios 7.6

1. Un tanque tiene una base cuadrada de 2 m de lado y lados verticales de 6 m de altura. Si el tanque se llena de agua, calcule la fuerza total realizada por el agua (a) en el fondo del tanque y (b) sobre una de sus cuatro paredes verticales.

2. Una piscina de 20 m de largo y 8 m de ancho tiene un fondo en pendiente, de forma que la profundidad de la piscina es de 1 m en un extremo y de 3 m en el otro. Calcule la fuerza total realizada sobre el fondo si la piscina está llena de agua.

3. Una presa de 200 m de longitud y 24 m de altura presenta una superficie inclinada de 26 m de altura al agua que contiene (*véase* la Figura 7.48). Si la superficie del agua está al mismo nivel que la parte superior de la presa, ¿cuál es la fuerza total del agua sobre la presa?

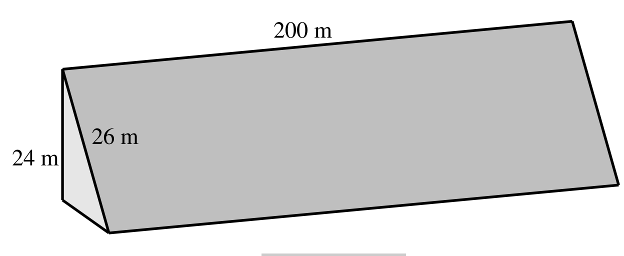


Figura 7.48

4. Una pirámide con base cuadrada de 4 m de lado y cuyas caras forman cuatro triángulos equiláteros se sitúa en el fondo de un lago en un lugar donde éste tiene 10 m de profundidad. Calcule la fuerza total del agua sobre cada una de las caras triangulares.

5. El cierre de un canal tiene una compuerta en forma de rectángulo vertical de 5 m de anchura y 20 m de altura. Si el agua en uno de los lados de la compuerta llega hasta la parte superior de dicha compuerta y en el otro lado sólo hasta 6 m de altura, calcule la fuerza total que debe realizarse para mantener la compuerta en su lugar.

6. Si se deben realizar 100 N·cm de trabajo para comprimir un muelle elástico 3 cm desde su longitud natural, ¿cuánto trabajo se debe realizar para comprimirlo 1 cm más?

7. Calcule el trabajo total que se debe realizar para extraer toda el agua del tanque del Ejercicio 1 por la parte superior de aquél.

8. Calcule el trabajo total que se debe realizar para extraer toda el agua de la piscina del Ejercicio 2 por el borde de aquélla.

9. Calcule el trabajo que se debe realizar para extraer toda el agua de un cuenco hemisférico lleno, de radio a m. La extracción se realiza a una altura de h m por encima de la parte superior del cuenco.

∗**10.** Utilizando un cabrestante, se eleva verticalmente un cubo desde el nivel del suelo con una velocidad constante de 2 m/min. Si el cubo pesa 1 kg y contiene 15 kg de agua cuando comienza a elevarse, pero pierde agua por una fuga con una velocidad de 1 kg/min a partir ese momento, ¿cuánto trabajo debe realizar el cabrestante para elevar el cubo a una altura de 10 m?

7.7 Aplicaciones en negocios, finanzas y ecología

Si la velocidad de cambio $f'(x)$ de una función $f(x)$ es conocida, el cambio en el valor de dicha función en un intervalo que va desde $x = a$ hasta $x = b$, se expresa como la integral de f' en $[a, b]$:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$

Por ejemplo, si la velocidad de movimiento de un coche en el instante t es de $v(t)$ km/h, entonces la distancia recorrida por dicho coche durante el intervalo temporal $[0, T]$ (horas) es $\int_0^T v(t)\,dt$ km.

De forma natural, surgen situaciones similares en el campo de los negocios y la economía, donde las velocidades de cambio se denominan frecuentemente marginales.

Ejemplo 1 **(Cálculo del beneficio total a partir del beneficio marginal)** Un fabricante de calculadoras obtiene un beneficio marginal de $15 - 5e^{-x/50}$ € por calculadora cuando vende x calculadoras. ¿Cuál será su beneficio total por la venta de 100 calculadoras?

Solución El beneficio marginal es la velocidad de cambio del beneficio con respecto al número de calculadoras vendidas. Por tanto, el beneficio por la venta de dx calculadoras tras haber vendido ya x es

$$dR = (15 - 5e^{-x/50})\,dx$$

euros. El beneficio total por la venta de las 100 primeras calculadoras es R €, siendo

$$\begin{aligned} R = \int_{x=0}^{x=100} dR &= \int_0^{100} (15 - 5e^{-x/50})\,dx \\ &= (15x + 250e^{-x/50})\Big|_0^{100} \\ &= 1500 + 250e^{-2} - 250 \approx 1\,283.83 \end{aligned}$$

es decir, aproximadamente 1284 €.

Valor actual de una serie de pagos futuros

Suponga que tiene un negocio que genera constantemente ingresos con una velocidad variable de $P(t)$ € al año en el instante t, y se espera que estos ingresos continúen durante los próximos T años. ¿Cuánto vale el negocio hoy?

La respuesta depende seguramente de los tipos de interés. Un euro que se va a recibir t años después vale menos que un euro que se recibe hoy, que se podría invertir con interés para obtener más de un euro dentro de t años. Cuanto mayor sea el tipo de interés, menor será el valor actual de un pago que no se realiza hasta un instante determinado en el futuro.

Para analizar esta situación, supongamos que el tipo de interés nominal es $r\%$ anual, pero se computa de forma continua. Sea $\delta = r/100$. Como se demuestra en la Sección 3.4, una inversión de 1 € en este momento crecerá hasta valer

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^{nt} = e^{\delta t}$$

euros después de t años. Por tanto, un pago de 1 € después de t años sólo valdrá hoy $e^{-\delta t}$ €. Esto se denomina *valor actual* de un pago futuro. Cuando se ve de esta forma, la tasa de interés δ se denomina frecuentemente *tasa de descuento*; representa la cantidad en la que se descuentan los pagos futuros.

Volviendo al problema de los ingresos del negocio, en el pequeño intervalo de tiempo que va desde t hasta $t + dt$, el negocio produce unos ingresos de $P(t)\,dt$ €, y su valor actual es

$e^{-\delta t}P(t)\,dt$ €. Por tanto, el valor actual V € de la serie de ingresos durante el intervalo de tiempo $[0, T]$ es la «suma» de estas contribuciones:

$$V = \int_0^T e^{-\delta t}P(t)\,dt$$

Ejemplo 2 ¿Cuál es el valor actual de una serie de pagos continua y constante con una velocidad de 10 000 € al año, y que continúa para siempre empezando en este momento? Suponga que el tipo de interés es del 6% anual, y se computa de forma continua.

Solución El valor actual pedido es

$$V = \int_0^\infty e^{-0.06t}10\,000\,dt = 10\,000 \lim_{R\to\infty} \left.\frac{e^{-0.06t}}{-0.06}\right|_0^R \approx 166\,667 \text{ €}$$

Economía de recursos de explotación renovables

Como se indicó en la Sección 3.4, la velocidad de incremento de una población biológica se puede expresar algunas veces mediante el modelo logístico[1]

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

En este caso, $x = x(t)$ es el tamaño (o biomasa) de la población en el instante t, k es la velocidad natural a la que la población crecería si su suministro de recursos fuera ilimitado y L es el tamaño límite natural de la población, es decir, la capacidad que tiene el entorno para albergar a la población. Se ha pensado en aplicar estos modelos, por ejemplo, a las ballenas azules del Antártico y a varias especies de peces y de árboles. Si el recurso se cosecha o se recoge (es decir, por ejemplo, los peces se pescan) con una velocidad de $h(t)$ unidades al año en el instante t, entonces la población crece con una velocidad menor:

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(1 - \frac{x}{L}\right) - h(t) \qquad (*)$$

En particular, si la población se recoge o se cosecha con su velocidad actual de crecimiento,

$$h(t) = kx\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

entonces $dx/dt = 0$, y la población mantendrá un tamaño constante. Supongamos que cada unidad que se recoge produce un ingreso de p € a la empresa pesquera. Los ingresos totales anuales provenientes de la recogida del recurso con su velocidad actual de crecimiento serán

$$T = ph(t) = pkx\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Considerado como una función de x, este ingreso total anual es una función cuadrática, y alcanza un valor máximo cuando $x = L/2$, el valor que asegura $dT/dx = 0$. La industria puede mantener un máximo anual de ingresos estable asegurando que el nivel de población se estabiliza en la mitad del tamaño máximo de la población que habría si no se recogiera.

Sin embargo, el análisis anterior no tiene en cuenta el valor de descuento de la recogidas futuras. Si la tasa de descuento es δ y se computa de forma continua, entonces el valor actual del

[1] Este ejemplo ha sido sugerido por el profesor C. W. Clark, de la Universidad de British Columbia.

ingreso $ph(t)\,dt$ € entre t y $t + dt$ años a partir de ahora es de $e^{-\delta t}ph(t)\,dt$. El valor actual total de todos los ingresos de la industria pesquera en años futuros es

$$T = \int_0^\infty e^{-\delta t} ph(t)\,dt$$

¿Qué estrategia de pesca maximizará T? Si se sustituye $h(t)$ en la ecuación (*) que gobierna la velocidad de crecimiento de la población, se obtiene

$$\begin{aligned} T &= \int_0^\infty pe^{-\delta t}\left[kx\left(1 - \frac{x}{L}\right) - \frac{dx}{dt}\right]dt \\ &= \int_0^\infty kpe^{-\delta t}x\left(1 - \frac{x}{L}\right)dt - \int_0^\infty pe^{-\delta t}\frac{dx}{dt}\,dt \end{aligned}$$

Si se integra por partes la integral anterior, tomando $U = pe^{-\delta t}$ y $dV = \dfrac{dx}{dt}dt$,

$$\begin{aligned} T &= \int_0^\infty kpe^{-\delta t}x\left(1 - \frac{x}{L}\right)dt - \left[pe^{-\delta t}x\Big|_0^\infty + \int_0^\infty p\delta e^{-\delta t}x\,dt\right] \\ &= px(0) + \int_0^\infty pe^{-\delta t}\left[kx\left(1 - \frac{x}{L}\right) - \delta x\right]dt \end{aligned}$$

Para hacer esta expresión tan grande como sea posible, hay que escoger el tamaño de la población x que maximice la expresión cuadrática

$$Q(x) = kx\left(1 - \frac{x}{L}\right) - \delta x$$

en un t tan temprano como sea posible, y mantener el tamaño de la población constante en ese nivel de ahí en adelante. El máximo se produce cuando $Q'(x) = k - (2kx/L) - \delta = 0$, es decir, cuando

$$x = \frac{L}{2} - \frac{\delta L}{2k} = (k - \delta)\,\frac{L}{2k}$$

El máximo valor presente de la industria pesquera se alcanza si el nivel de la población x se mantiene en ese valor. Nótese que este nivel de la población es menor que el nivel óptimo, $L/2$, que se obtuvo ignorando la tasa de descuento. Cuanto mayor sea la tasa de descuento δ, menor será el nivel de la población que maximiza los ingresos. Más desafortunadamente, si $\delta \geqslant k$, el modelo predice unos ingresos máximos al pescar las especies hasta su *extinción* inmediata (*véase* la Figura 7.49).

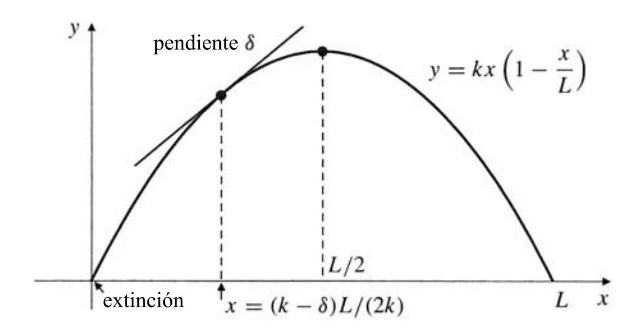


Figura 7.49 Cuanto mayor sea la tasa de descuento δ, menor será el tamaño de la población x que maximiza el valor actual de los ingresos futuros de la pesca. Si $\delta \geqslant k$, el modelo predice la pesca de las especies hasta su extinción.

Por supuesto, este modelo no tiene en cuenta otros factores que pueden afectar a la estrategia de pesca, como el incremento en el coste de faenar cuando el nivel de la población es pequeño y el efecto de la competencia entre las diversas empresas pesqueras. Sin embargo, sí explica el hecho lamentable de que, en algunas circunstancias, una industria basada en un recurso renovable puede encontrar que su mejor interés es destruir el recurso. Esto es especialmente probable que suceda cuando la velocidad de crecimiento natural k del recurso es baja, como en el caso de las ballenas y la mayor parte de los árboles. Hay buenas razones para no permitir que sea sólo la economía la que dicte la gestión del recurso.

Ejercicios 7.7

1. **(Coste de producción)** El coste marginal de producción en una mina de carbón es de $6 - 2 \times 10^{-3}x + 6 \times 10^{-6}x^2$ € por tonelada, tras haber producido x toneladas cada día. Además, hay un coste fijo de 4000 € al día por abrir la mina. Calcule el coste total de producción por día cuando se producen 1000 toneladas.

2. **(Ventas totales)** Las ventas de un nuevo chip de computador se modelan mediante la ecuación $s(t) = te^{-t/10}$, siendo $s(t)$ el número (en miles) de chips vendidos a la semana, t semanas después de que el chip se introdujera en el mercado. ¿Cuántos chips se vendieron en el primer año?

3. **(Velocidades de conexión a Internet)** Un proveedor de servicios de Internet cobra a sus clientes con una tasa marginal continuamente decreciente de $4/(1+\sqrt{t})$ € por hora, cuando el cliente ya ha empleado t horas en un mes. ¿Cuánto se facturará a un cliente que emplea x horas al mes? (No es necesario que x sea entero).

4. **(Ingresos totales de ventas en disminución)** El precio por kilo de jarabe de arce en una tienda sube con una velocidad constante desde 10 € a principios de año hasta 15 € a finales de año. Mientras el precio sube, la cantidad que se vende disminuye; la velocidad de ventas es $400/(1 + 0.1t)$ kg/año cuando han transcurrido t años, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. ¿Qué ingresos totales obtiene la tienda de las ventas del jarabe durante el año?

(Problemas de series de pagos) Calcule el valor actual de una serie de pagos continua de 1000 € al año para los periodos y tasas de descuento dados en los Ejercicios 5-10. En todos los casos la tasa de descuento se computa de forma continua.

5. Diez años con una tasa de descuento del 2%.

6. Diez años con una tasa de descuento del 5%.

7. Diez años empezando dos años después del actual con una tasa de descuento del 8%.

8. Veinticinco años empezando 10 años después del actual con una tasa de descuento del 5%.

9. Para todos los instantes futuros con una tasa de descuento del 2%.

10. Empezando dentro de 10 años y continuando para siempre con una tasa de descuento del 5%.

11. Calcule el valor actual de una serie de pagos continua sobre un periodo de 10 años, con una velocidad de 1000 € al año en este momento, y que crece de forma continua a razón de 100 € al año. La tasa de descuento es del 5%.

12. Calcule el valor actual de una serie de pagos continua sobre un periodo de 10 años, comenzando con una velocidad de 1000 € al año en este instante, y aumentando de forma constante a razón del 10% anual. La tasa de descuento es del 5%.

13. El dinero fluye constantemente a una cuenta con una velocidad de 5000 € al año. Si la cuenta tiene un tipo de interés del 5%, computado de forma continua, ¿cuánto habrá en la cuenta al cabo de 10 años?

14. El dinero fluye de forma continua en una cuenta, comenzando con una velocidad de 5.000 € al año e incrementándose a razón de un 10% anual. El interés hace que la cuenta crezca con una tasa real del 6% (de forma que 1 € crecerá hasta valer 1.06^t € en t años). ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el balance de la cuenta alcance 1 000 000 €?

15. Si la tasa de descuento δ varía con el tiempo, es decir, $\delta = \delta(t)$, demuestre que el valor actual de un pago de P € pagadero a t años desde ahora es $Pe^{-\lambda(t)}$ €, siendo
$$\lambda(t) = \int_0^t \delta(\tau)\, d\tau$$
¿Cuál es el valor de una serie de pagos recibidos a una velocidad de $P(t)$ € en el instante t, desde $t = 0$ hasta $t = T$?

16. **(Tasas de descuento y modelos de población)** Suponga que la velocidad de crecimiento de una

población es función de su tamaño: $dx/dt = F(x)$ (para el modelo logístico, $F(x) = kx(1 - (x/L))$). Si la población se recoge con una velocidad de $h(t)$ en el instante t, entonces $x(t)$ satisface

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - h(t)$$

Demuestre que el valor de x que maximiza el valor actual de todas las recogidas futuras cumple $F'(x) = \delta$, siendo δ la tasa de descuento (computada de forma continua). *Sugerencia*: Imite el argumento utilizado anteriormente para el caso logístico.

17. **(Gestión de una piscifactoría)** La capacidad de mantener peces de un cierto lago es de $L = 80\,000$ para ciertas especies de peces. La velocidad de crecimiento natural de estas especies es del 12% anual ($k = 0.12$). Cada pez vale 6 €. La tasa de descuento es del 5%. ¿Qué población de peces debe mantenerse en el lago para maximizar el valor actual de todos los ingresos futuros de la pesca en el lago? ¿Cuáles son los ingresos anuales resultantes de mantener este nivel de población?

18. **(Ballenas azules)** Se ha calculado que la velocidad de crecimiento natural de la ballena azul del Antártico es aproximadamente del 2% anual ($k = 0.02$) y que la capacidad de su hábitat para mantener ballenas es de aproximadamente $L = 150\,000$. El valor de una ballena azul es, en promedio, de 10 000 €. Suponiendo que la población de ballenas azules sigue un modelo logístico, y utilizando los datos anteriores, calcule lo siguiente:

(a) La máxima pesca anual sostenible de ballenas azules.

(b) Los ingresos anuales resultantes de seguir la máxima pesca anual sostenible.

(c) El interés anual generado si la población de ballenas (que se supone está en el nivel $L/2$ de su máximo nivel sostenible) se exterminara y se continuara invirtiendo al 2%.

(d) Al 5%.

(e) El valor actual total de todos los ingresos futuros si la población se mantiene en el nivel $L/2$ y la tasa de descuento es del 5%.

$*$**19.** El modelo desarrollado anteriormente no tiene en cuenta los costes de recogida. Intente encontrar una forma de modificar el modelo para tener esto en cuenta. En general, el coste de pescar un pez crece a medida que el número de peces disminuye.

7.8 Probabilidad

La teoría de la probabilidad es un campo de aplicación muy importante del cálculo. Naturalmente, no se puede desarrollar aquí de forma extensa (una presentación adecuada requeriría uno o más cursos completos), pero sí se puede dar una breve introducción, para sugerir algunas de las formas en las que las sumas y las integrales se utilizan en teoría de la probabilidad.

En el contexto de teoría de la probabilidad el término **experimento** se utiliza para indicar un proceso que puede producir diferentes **resultados**. El conjunto de todos los resultados posibles se denomina **espacio muestral** del experimento. Por ejemplo, el proceso podría ser arrojar una moneda, y tendríamos tres posibles resultados: H (la moneda cae de cara), T (la moneda cae de cruz) y E (la moneda cae de canto). Desde luego, el resultado E es muy poco probable a menos que la moneda sea bastante espesa, pero puede suceder. Por tanto, nuestro espacio muestral es $S = \{H, T, E\}$. Supongamos que arrojamos la moneda un gran número de veces y observamos que los resultados H y T aparecen cada uno el 49% de las veces y el resultado E ocurre sólo el 2% de las veces. Podemos decir que al arrojar una moneda los resultados H y T tienen una probabilidad de 0.49 y el resultado E tiene una probabilidad de 0.02.

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. La **probabilidad** de que ocurra un suceso es un número real entre 0 y 1 y mide la proporción de veces que se puede esperar que el resultado del experimento pertenezca a ese suceso si el experimento se repite muchas veces. Si el suceso es el espacio muestral completo, ocurre de forma cierta y su probabilidad es 1; si el suceso es el conjunto vacío, $\varnothing = \{\,\}$, no puede ocurrir nunca y su probabilidad es 0. En el experimento de arrojar la moneda hay ocho posibles sucesos. Sus probabilidades son como sigue:

$$\Pr(\varnothing) = 0 \qquad \Pr(\{T\}) = 0.49 \qquad \Pr(\{H, T\}) = 0.98 \qquad \Pr(\{T, E\}) = 0.51$$

$$\Pr(\{H\}) = 0.49 \qquad \Pr(\{E\}) = 0.02 \qquad \Pr(\{H, E\}) = 0.51 \qquad \Pr(S) = 1$$

Dados dos sucesos A y B cualesquiera (subconjuntos del espacio muestral S), su **intersección** $A \cap B$ está formada por todos los resultados que pertenecen tanto a A como a B. La intersección se denomina a veces suceso «A y B». Dos sucesos son disjuntos si $A \cap B = \varnothing$; ningún resultado puede pertenecer simultáneamente a dos sucesos disjuntos. Por ejemplo, un suceso A y su suceso **complementario** A^c, formado por todos los resultados de S que no pertenecen a A, son disjuntos. La **unión** de dos sucesos A y B (denominada a veces suceso «A o B») está formada por todos los resultados que pertenecen al menos a uno de los dos sucesos A o B. Nótese que $A \cup A^c = S$.

Resumiremos estas reglas básicas que gobiernan las probabilidades como sigue: si S es un espacio muestral, $\varnothing$ es el subconjunto vacío de S, y A y B son dos sucesos entonces,

(a) $0 \leqslant \mathrm{Pr}(A) \leqslant 1$

(b) $\mathrm{Pr}(\varnothing) = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Pr}(S) = 1$

(c) $\mathrm{Pr}(A^c) = 1 - \mathrm{Pr}(A)$

(d) $\mathrm{Pr}(A \cup B) = \mathrm{Pr}(A) + \mathrm{Pr}(B) - \mathrm{Pr}(A \cap B)$.

Nótese que al sumar simplemente $\mathrm{Pr}(A) + \mathrm{Pr}(B)$ se contarían dos veces los resultados de $A \cap B$. Como ejemplo, en nuestro experimento de tirar una moneda si $A = \{H, T\}$ y $B = \{H, E\}$, entonces $A^c = \{E\}$, $A \cup B = \{H, T, E\} = S$ y $A \cap B = \{H\}$. Tenemos que

$$\mathrm{Pr}(A^c) = \mathrm{Pr}(\{E\}) = 0.02 = 1 - 0.98 = 1 - \mathrm{Pr}(\{H, T\}) = 1 - \mathrm{Pr}(A)$$

$$\mathrm{Pr}(A \cup B) = \mathrm{Pr}(S) = 1 = 0.51 + 0.51 - 0.02 = \mathrm{Pr}(A) + \mathrm{Pr}(B) - \mathrm{Pr}(A \cap B)$$

Variables aleatorias discretas

Una **variable aleatoria** es una función definida sobre el espacio muestral. Denotaremos las variables aleatorias utilizando letras mayúsculas como X e Y. Si el espacio muestral contiene sólo resultados discretos (como el espacio muestral del experimento de tirar una moneda), una variable aleatoria definida sobre él tomará sólo valores discretos y se denominará **variable aleatoria discreta**. Si, por otra parte, el espacio muestral contiene todas las posibles medidas de, por ejemplo, alturas de árboles, entonces una variable aleatoria que sea igual a la propia medida tomará valores en un continuo de valores reales y se denominará **variable aleatoria continua**. En esta sección estudiaremos ambos tipos de variables aleatorias.

La mayor parte de las variables aleatorias discretas presentan un número finito de valores, pero algunas pueden tomar infinitos valores si, por ejemplo, el espacio muestral está formado por todos los enteros positivos $\{1, 2, 3, ...\}$. Una variable aleatoria discreta X tiene una función de probabilidad f definida sobre el rango de X como $f(x) = \mathrm{Pr}(X = x)$ para cada posible valor x de X. Generalmente, f se representa mediante un diagrama de barras; la suma de las alturas de todas las barras debe ser 1,

$$\sum_x f(x) = \sum_x \mathrm{Pr}(X = x) = 1$$

ya que el experimento debe producir siempre un resultado, y por tanto un valor de X.

Ejemplo 1 Se tira un dado no trucado, de forma que cuando se detenga en su parte superior mostrará uno de los números 1 a 6. Si X indica el número que muestra en su parte superior tras ser arrojado, entonces X es una variable aleatoria discreta con 6 posibles valores. Como el dado no está trucado, ningún valor de X es más probable que otro, por lo que la probabilidad de que el número que salga sea n debe ser $1/6$ para todos los posibles valores de n. Si f es la función de probabilidad de X, entonces

$$f(n) = \mathrm{Pr}(X = n) = \frac{1}{6} \qquad \text{para todo } n \text{ en } \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por tanto, se dice que la variable aleatoria discreta X se distribuye **uniformemente**. Todas las barras de la gráfica de su función de probabilidad f tienen la misma altura (*véase* la Figura 7.50). Nótese que

$$\sum_{n=1}^{6} \Pr(X = n) = 1$$

que refleja el hecho de que al tirar el dado se debe producir uno de los seis posibles resultados. La probabilidad de que al tirar el dado salga un valor entre 1 y 4 es

$$\Pr(1 \leqslant X \leqslant 4) = \sum_{n=1}^{4} \Pr(X = n) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

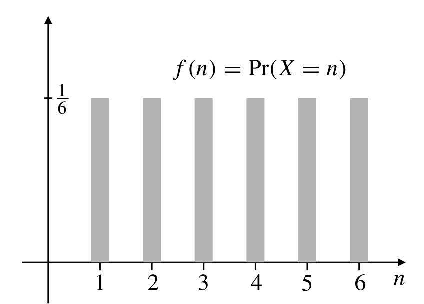


Figura 7.50 Función de probabilidad correspondiente a tirar un único dado.

Ejemplo 2 ¿Cuál es el espacio muestral de los números que salen cuando se arrojan dos dados no trucados? ¿Cuál es la probabilidad de que salgan un 4 y un 2? Calcule la función de probabilidad de la variable aleatoria X correspondiente a la suma de los valores que muestran los dados. ¿Cuál es la probabilidad de que esa suma sea menor que 10?

Solución El espacio muestral está formado por todas las parejas de enteros (m, n) que cumplen $1 \leqslant m \leqslant 6$ y $1 \leqslant n \leqslant 6$. Existen 36 parejas, por lo que la probabilidad de cualquiera de ellas es 1/36. Dos de las parejas, (4, 2) y (2, 4), corresponden a mostrar un 4 y un 2, por lo que la probabilidad del suceso es $(1/36) + (1/36) = 1/18$. La variable aleatoria X definida como $X(m, n) = m + n$ tiene 11 posibles valores, los enteros desde el 2 hasta el 12, ambos inclusive. La siguiente tabla muestra las parejas que producen cada valor k de X y la probabilidad $f(k)$ de que se produzca ese valor, es decir, el valor de la función de probabilidad en k.

Tabla 2. Función de probabilidad de la suma de dos dados

$k = m + n$	Realizaciones en las que $X = k$	$f(k) = \Pr(X = k)$
2	(1, 1)	1/36
3	(1, 2), (2, 1)	2/36 = 1/18
4	(1, 3), (2, 2), (3, 1)	3/36 = 1/12
5	(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)	4/36 = 1/9
6	(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)	5/36
7	(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)	6/36 = 1/6
8	(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)	5/36
9	(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)	4/36 = 1/9
10	(4, 6), (5, 5), (6, 4)	3/36 = 1/12
11	(5, 6), (6, 5)	2/36 = 1/18
12	(6, 6)	1/36

El diagrama de barras de la función de probabilidad f se muestra en la Figura 7.51. Tenemos que

$$\Pr(X < 10) = 1 - \Pr(X \geqslant 10) = 1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}\right) = \frac{5}{6}$$

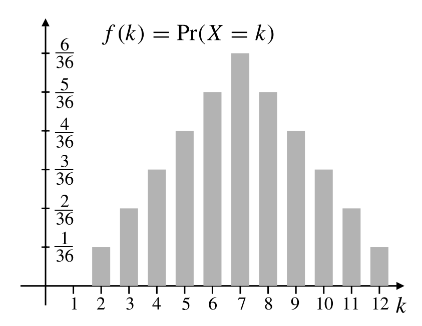


Figura 7.51 Función de probabilidad de la suma de dos dados.

Esperanza, media, varianza y desviación típica

Consideremos un juego simple en el que el jugador paga a la banca C euros por tener el privilegio de lanzar un dado, con el que gana X euros, siendo X el número que sale al lanzar el dado. En cada juego, las posibles ganancias son 1, 2, 3, 4, 5 o 6 euros, cada una de ellas con probabilidad $1/6$. Al realizar n juegos esperará ganar aproximadamente $n/6 + 2n/6 + 3n/6 + 4n/6 + 5n/6 + + 6n/6 = 21n/6 = 7n/2$ euros, por lo que sus *ganancias medias esperadas por juego* son de $7/2$ euros, es decir, 3.50 €. Si $C > 3.5$, el jugador debe esperar, en promedio, perder dinero. La cantidad 3.5 se denomina **esperanza** o **media** de la variable aleatoria discreta X. La media se representa en general por medio de μ, la letra griega «mu».

DEFINICIÓN 2 **Media o esperanza**

Si X es una variable aleatoria discreta con rango de valores R y función de probabilidad f, entonces la **media** (representada por μ), o **esperanza** de X (representada por $E(X)$), es

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in R} x \ f(x)$$

Además, la **esperanza** de cualquier función $g(X)$ de la variable aleatoria X es

$$E(g(X)) = \sum_{x \in R} g(x) \ f(x)$$

Nótese que en este uso $E(X)$ no define una función de X, sino una constante (parámetro) asociada con la variable aleatoria X. Nótese también que si $f(x)$ fuera una densidad de masa como las que se estudiaron en la Sección 7.4, entonces μ sería el momento de la masa respecto a 0, y como la masa total sería $\Sigma_{x \in R} \ f(x) = 1$, μ sería de hecho el centro de masas.

Otro parámetro utilizado para describir la forma en que se distribuye la probabilidad de una variable aleatoria es la desviación típica.

DEFINICIÓN 3 **Varianza y desviación típica**

La **varianza** de una variable aleatoria X con rango R y función de probabilidad f es la esperanza del cuadrado de la distancia de X a su media μ. La varianza se indica como σ^2 o $\mathrm{Var}(X)$.

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_{x \in R} (x - \mu)^2 f(x)$$

La **desviación típica** de X es la raíz cuadrada de la varianza y, por tanto, se indica como σ.

El símbolo σ es la letra griega minúscula «sigma» (el símbolo Σ que se usa en los sumatorios es la letra griega sigma mayúscula). La desviación típica es una medida de la dispersión que tiene la distribución de probabilidad de X. Cuanto menor sea la desviación típica, más concentrada estará la probabilidad en valores de X cercanos a su media. Las Figuras 7.52 y 7.53 muestran las funciones de probabilidad de dos variables aleatorias cuyo espacio muestral es $\{1, 2, ..., 9\}$. Una de ellas tiene un valor de σ pequeño y la otra un valor de σ grande. Nótese cómo una fracción significativa de la probabilidad total está entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ en cada caso. Nótese también que la distribución de probabilidad de la Figura 7.52 es simétrica, por lo que $\mu = 5$, el punto medio del espacio muestral; en cambio, la distribución de la Figura 7.53 está ligeramente desplazada a la derecha, por lo que $\mu > 5$.

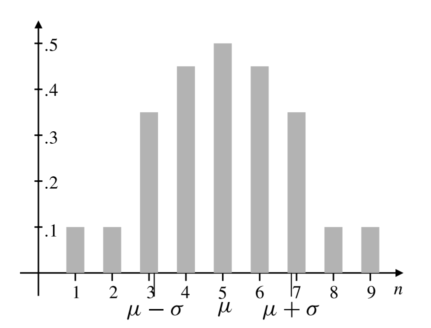


Figura 7.52 Una función de probabilidad de media $\mu = 5$ y desviación típica $\sigma = 1.86$.

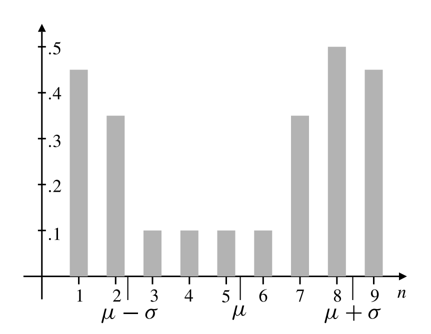


Figura 7.53 Una función de probabilidad de media $\mu = 5.38$ y desviación típica $\sigma = 3.05$.

Como $\Sigma_{x \in R}\ f(x) = 1$, la expresión de la definición de la varianza se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X) &= \sum_{x \in R} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) \\ &= \sum_{x \in R} x^2 f(x) - 2\mu \sum_{x \in R} x f(x) + \mu^2 \sum_{x \in R} f(x) \\ &= \sum_{x \in R} x^2 f(x) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2\end{aligned}$$

es decir,

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Por tanto, la desviación típica de X se puede expresar como

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - \mu^2}$$

Ejemplo 3 Calcule la media de la variable aleatoria X del Ejemplo 2. Calcule también la esperanza de X^2 y la desviación típica de X.

Solución Tenemos que

$$\mu = E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36}$$

$$+ 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = 7$$

un hecho que es bastante obvio a partir de la simetría de la gráfica de la función de probabilidad que se muestra en la Figura 7.51. Además,

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + 4^2 \times \frac{3}{36} + 5^2 \times \frac{4}{36} + 6^2 \times \frac{5}{36}$$
$$+ 7^2 \times \frac{6}{36} + 8^2 \times \frac{5}{36} + 9^2 \times \frac{4}{36} + 10^2 \times \frac{3}{36}$$
$$+ 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{1974}{36} \approx 54.8333$$

La varianza de X es $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \approx 54.8333 - 49 = 5.8333$, por lo que su desviación típica es $\sigma \approx 2.4152$.

Variables aleatorias continuas

Consideraremos ahora un ejemplo con un rango continuo de resultados posibles.

Ejemplo 4 Suponga que se lanza una aguja de forma aleatoria sobre una tabla plana donde se ha dibujado una línea recta. Sea X el número de grados del ángulo (agudo) que forma la aguja con la recta cada vez que se lanza (*véase* la Figura 7.54(a)). Evidentemente, X puede tomar cualquier valor real en el intervalo $[0, 90]$; por tanto, X se denomina **variable aleatoria continua**. La probabilidad de que X tome cualquier valor real en particular es 0 (hay infinitos números reales en el intervalo $[0, 90]$ y ninguno es más probable que otro). Sin embargo, la probabilidad de que X esté en algún intervalo, por ejemplo $[10, 20]$, es la misma que la de que esté en cualquier otro intervalo de la misma longitud. Como la longitud del intervalo es 10 y la del intervalo de todos los posibles valores de X es 90, dicha probabilidad es

$$\Pr(10 \leqslant X \leqslant 20) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$$

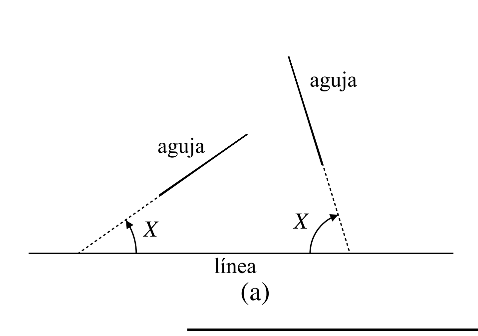
De forma más general, si $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 90$, entonces

$$\Pr(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \frac{1}{90}(x_2 - x_1)$$

Esta situación se puede representar convenientemente como sigue: sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[0, 90]$, que toma en cada punto el valor constante $1/90$:

$$f(x) = \frac{1}{90}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 90$$

El área encerrada por la gráfica de f es 1, y $\Pr(x_1 \leqslant X \leqslant x_2)$ es igual al área que hay bajo la parte de la gráfica que está en el intervalo $[x_1, x_2]$ (*véase* la Figura 7.54(b)). La función $f(x)$ se denomina **función de densidad de probabilidad** de la variable aleatoria X. Como $f(x)$ es constante en su dominio, se dice que X tiene **distribución uniforme**.



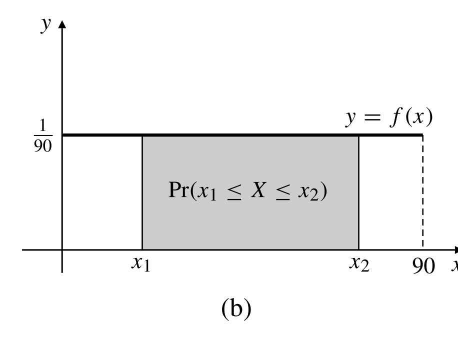


Figura 7.54
(a) X es el número de grados del ángulo agudo que forma la aguja con la línea.
(b) Función de densidad de probabilidad f de la variable aleatoria X.

DEFINICIÓN 4 Funciones de densidad de probabilidad

Una función definida en un intervalo $[a, b]$ es una función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X distribuida en el intervalo $[a, b]$ si, siempre que x_1 y x_2 cumplan que $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$, se satisface

$$\Pr(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

Para ser una función de densidad de probabilidad, f debe cumplir dos condiciones:

(a) $f(x) \geqslant 0$ en $[a, b]$ (la probabilidad no puede ser negativa) y

(b) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$ ($\Pr(a \leqslant X \leqslant b) = 1$)

Estas ideas se pueden ampliar a variables aleatorias distribuidas en intervalos semiinfinitos o infinitos, pero en esos casos las integrales que aparecen serán impropias. En cualquier caso, el papel que tenían las sumas en el análisis de variables aleatorias discretas es asumido ahora por las integrales en el caso de variables aleatorias continuas.

En el ejemplo en que se lanzaba la aguja, la función de densidad de probabilidad tenía una gráfica en forma de recta horizontal, y denominamos a esa probabilidad distribución uniforme. La función de densidad de probabilidad uniforme en el intervalo $[a, b]$ es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Muchas otras funciones aparecen normalmente como funciones de densidad de probabilidad de variables aleatorias continuas.

Ejemplo 5 **(Distribución exponencial)** El intervalo de tiempo T que sobrevive un átomo cualquiera de una muestra radiactiva antes de desintegrarse es una variable aleatoria que toma valores en el intervalo $[0, \infty)$. Se ha observado que la proporción de átomos que sobreviven hasta el instante t decrece exponencialmente cuando t crece. Así,

$$\Pr(T \geqslant t) = Ce^{-kt}$$

Sea f la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria T. Entonces,

$$\int_t^{\infty} f(x)\,dx = \Pr(T \geqslant t) = Ce^{-kt}$$

Diferenciando esta ecuación con respecto a t (utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo), se obtiene $-f(t) = -Cke^{-kt}$, por lo que $f(t) = Cke^{-kt}$. C se determina por la condición de que $\int_0^{\infty} f(t)\,dt = 1$. Tenemos que

$$1 = Ck\int_0^{\infty} e^{-kt}\,dt = \lim_{R\to\infty} Ck\int_0^{R} e^{-kt}\,dt = -C\lim_{R\to\infty}(e^{-kR} - 1) = C$$

Entonces $C = 1$ y $f(t) = ke^{-kt}$. Nótese que $\Pr(T \geqslant (\ln 2)/k) = e^{-k(\ln 2)/k} = 1/2$, lo que refleja el hecho de que la semivida de una muestra radiactiva es $(\ln 2)/k$. ■

Ejemplo 6 ¿Para qué valor de C es $f(x) = C(1 - x^2)$ una función de densidad de probabilidad en el intervalo $[-1, 1]$? Si X es una variable aleatoria con esta densidad, ¿cuál es la probabilidad de que $X \leqslant 1/2$?

Solución Obsérvese que $f(x) \geqslant 0$ en $[-1, 1]$ si $C \geqslant 0$. Como

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = C\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = 2C\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4C}{3}$$

$f(x)$ será una función de densidad de probabilidad si $C = 3/4$. En este caso,

$$\Pr\left(X \leqslant \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1/2}(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1/2}$$
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}-(-1)+\frac{-1}{3}\right) = \frac{27}{32}$$

Por analogía con el caso discreto, formularemos definiciones de la media (o esperanza), varianza y desviación típica de una variable aleatoria continua como sigue:

DEFINICIÓN 5

Si X es una variable aleatoria continua en el intervalo $[a, b]$ con función de densidad de probabilidad $f(x)$, su **media** μ (o **esperanza** $E(X)$) es

$$\mu = E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx$$

La esperanza de una función g de X es

$$E(g(X)) = \int_a^b g(x) f(x)\,dx$$

De forma similar, la **varianza** σ^2 de X es la media de las desviaciones al cuadrado de X con respecto a su media:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E((X-\mu)^2) = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

y la **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza.

Como en el caso de variables aleatorias discretas, se puede demostrar fácilmente que

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2, \qquad \sigma = \sqrt{E(X^2)-\mu^2}$$

De nuevo, la desviación típica proporciona una medida de la dispersión que tiene la distribución de probabilidad de X. Cuanto menor sea la desviación típica, más concentrada estará el área bajo la curva de densidad alrededor de la media, y por tanto, menor será la probabilidad de que un valor de X esté lejos de dicha media (*véase* la Figura 7.55).

Ejemplo 7 Calcule la media μ y la desviación típica σ de una variable aleatoria X distribuida uniformemente en el intervalo $[a, b]$. Calcule $\Pr(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$.

Solución La función de densidad de probabilidad es $f(x) = 1/(b-a)$ en $[a, b]$, por lo que la media es

$$\mu = E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

Por tanto, la media es, como podríamos haber anticipado, el punto medio del intervalo $[a, b]$. La esperanza de X^2 se expresa como

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

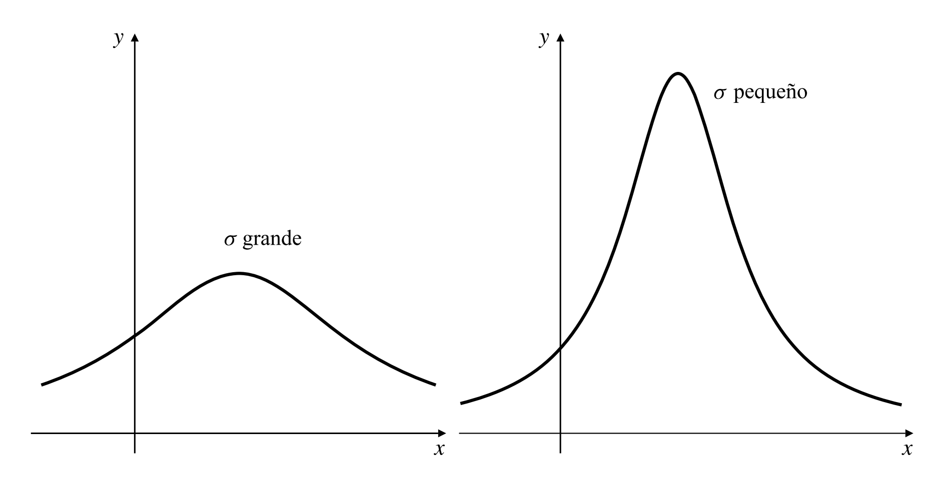


Figura 7.55 Densidades con desviaciones típicas grande y pequeña.

Entonces, la varianza es

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

y la desviación típica es

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \approx 0.29(b-a)$$

Finalmente,

$$\Pr(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\,\frac{2(b-a)}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$$

Ejemplo 8 Calcule la media μ y la desviación típica σ de una variable aleatoria X distribuida exponencialmente con función de densidad $f(x) = ke^{-kx}$ en el intervalo $[0, \infty)$. Calcule $\Pr(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$.

Solución Utilizaremos integración por partes para calcular la media:

$$\begin{aligned}
\mu = E(x) &= k\int_0^{\infty} xe^{-kx}\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty} k\int_0^R xe^{-kx}\,dx \qquad \begin{array}{lll} \text{Sea} & U = x, & dV = e^{-kx}\,dx \\ \text{Entonces} & dU = dx, & V = -e^{-kx}/k \end{array} \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(-xe^{-kx}\Big|_0^R + \int_0^R e^{-kx}\,dx\right) \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(-Re^{-kR} - \frac{1}{k}(e^{-kR} - 1)\right) = \frac{1}{k}, \qquad \text{ya que } k > 0
\end{aligned}$$

Por tanto, la media de la distribución exponencial es $1/k$. Este hecho puede ser muy útil para determinar el valor de k cuando una variable aleatoria tiene distribución exponencial. Integrando de nuevo por partes, como antes, se puede calcular

$$E(X^2) = k\int_0^{\infty} x^2 e^{-kx}\,dx = 2\int_0^{\infty} xe^{-kx}\,dx = \frac{2}{k^2}$$

por lo que la varianza de la distribución exponencial es

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{k^2}$$

y la desviación típica es igual a la media

$$\sigma = \mu = \frac{1}{k}$$

Tenemos ahora que

$$\begin{aligned}\Pr(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) &= \Pr(0 \leqslant X \leqslant 2/k)\\ &= k\int_0^{2/k} e^{-kx}\,dx\\ &= -e^{-kx}\Big|_0^{2/k}\\ &= 1 - e^{-2} \approx 0.86\end{aligned}$$

que es independiente del valor de k. La Figura 7.56 muestra dos densidades exponenciales para valores de k grande y pequeño.

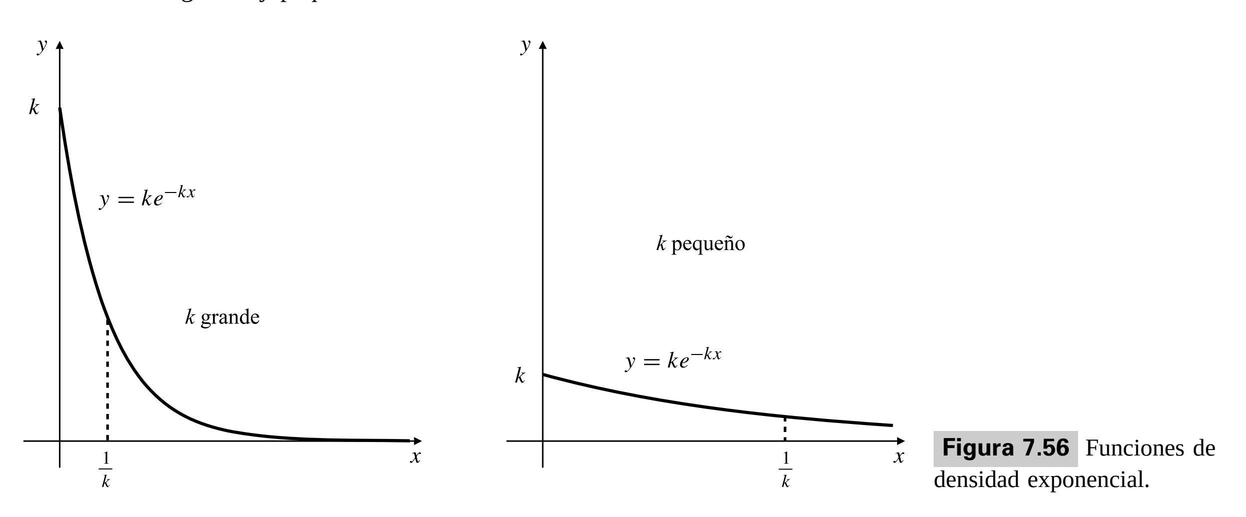


Figura 7.56 Funciones de densidad exponencial.

La distribución normal

Las distribuciones de probabilidad más importantes son las que se denominan distribuciones **normales** o **gaussianas**. Estas distribuciones gobiernan el comportamiento de muchas variables aleatorias interesantes, en particular, las asociadas con los errores aleatorios de las medidas. Existe una familia de distribuciones normales, todas ellas relacionadas con una distribución normal concreta denominada **distribución normal estándar**, que tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

DEFINICIÓN 6 **Densidad de probabilidad normal estándar**

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}, \qquad -\infty < z < \infty$$

Es habitual utilizar z para indicar la variable aleatoria en la distribución normal estándar; las otras distribuciones se pueden obtener a partir de ésta mediante un cambio de variable. La Figura 7.57 muestra la densidad normal estándar, que tiene una bonita forma de campana.

Figura 7.57 La función de densidad normal estándar $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$.

Como ya indicamos anteriormente, la función e^{-z^2} no tiene una primitiva elemental, por lo que la integral impropia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz$$

no se puede calcular utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, aunque es una integral impropia convergente. Dicha integral se puede calcular utilizando técnicas de cálculo multivariable, que emplean integrales dobles de funciones de dos variables (lo haremos en el Ejercicio 4 de la Sección 14.4). Su valor es $I = \sqrt{2\pi}$, lo que asegura que la densidad normal estándar definida anteriormente $f(z)$ es realmente una función de densidad de probabilidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz = 1$$

Como $ze^{-z^2/2}$ es una función impar de z y su integral en $(-\infty, \infty)$ converge, la media de la distribución normal estándar es 0:

$$\mu = E(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ze^{-z^2/2}\, dz = 0$$

Calcularemos la varianza de la distribución normal estándar utilizando de nuevo integración por partes, como sigue:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E(Z^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2}\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} z^2 e^{-z^2/2}\, dz \qquad \begin{array}{lll} \text{Sea} & U = z, & dV = ze^{-z^2/2}\,dz \\ \text{Siendo} & dU = dz, & V = -e^{-z^2/2} \end{array} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \left(-ze^{-z^2/2} \Big|_{-R}^{R} + \int_{-R}^{R} e^{-z^2/2}\, dz \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} (-2Re^{-R^2/2}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz \\
&= 0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Por tanto, la desviación típica de la distribución normal estándar es 1.

A partir de la distribución normal estándar se pueden obtener otras distribuciones normales mediante un cambio de variable.

DEFINICIÓN 7 Distribución normal general

Se dice que una variable aleatoria X en el intervalo $(-\infty, \infty)$ tiene *distribución normal de media* μ y *desviación típica* σ (siendo μ cualquier número real y $\sigma > 0$) si su función de densidad de probabilidad $f_{\mu,\sigma}$ se expresa en función de la densidad normal estándar f como

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

Véase la Figura 7.58. Utilizando el cambio de variable $z = (x - \mu)/\sigma$, $dz = dz/\sigma$, se puede verificar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 1$$

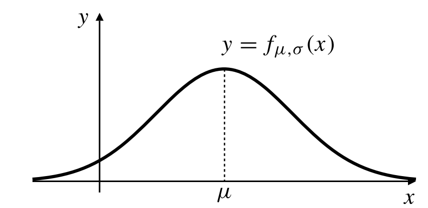


Figura 7.58 Una densidad normal general de media μ.

de forma que $f_{\mu,\sigma}(x)$ es realmente una función de densidad de probabilidad. Utilizando el mismo cambio de variable se puede demostrar que

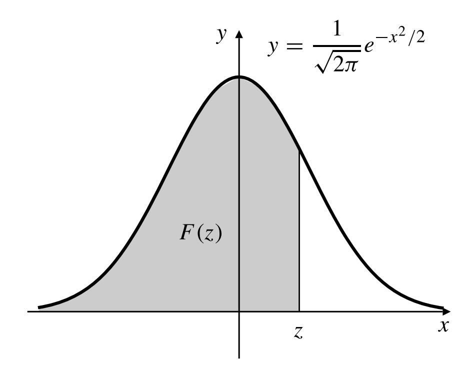
$$E(X) = \mu \quad \text{y} \quad E((X-\mu)^2) = \sigma^2$$

Entonces, la densidad $f_{\mu,\sigma}$ tiene realmente media μ y desviación típica σ.

Como $e^{-z^2/2}$ no tiene una primitiva sencilla, no se pueden determinar probabilidades (es decir, áreas) en una distribución normal utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo. Se puede utilizar integración numérica, o bien consultar un libro de tablas estadísticas que contenga las áreas calculadas bajo la curva normal estándar. Concretamente, estas tablas proporcionan en general los valores de lo que se denomina **función de distribución acumulada** de una variable aleatoria con distribución normal estándar. Se trata de la función

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,dx = \Pr(Z \leqslant z)$$

que representa el área bajo la función de densidad normal estándar desde $-\infty$ hasta z, como se muestra en la Figura 7.59.



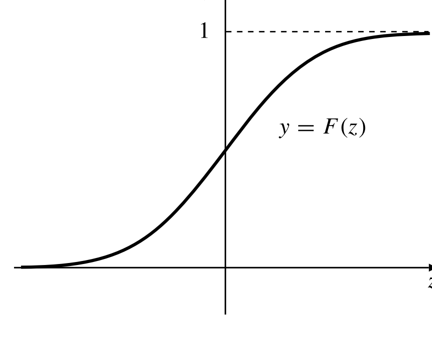


Figura 7.59 La función de distribución acumulada $F(z)$ de la distribución normal estándar es el área que hay bajo la función de densidad normal estándar desde $-\infty$ hasta z.

Incluimos a continuación una versión abreviada de esa tabla para utilizarla en los ejemplos y ejercicios posteriores.

Tabla 3. Valores de la función de distribución normal estándar $F(z)$ (redondeados a tres cifras decimales)

z	**0.0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
−3.0	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
−2.0	0.023	0.018	0.014	0.011	0.008	0.006	0.005	0.003	0.003	0.002
−1.0	0.159	0.136	0.115	0.097	0.081	0.067	0.055	0.045	0.036	0.029
−0.0	0.500	0.460	0.421	0.382	0.345	0.309	0.274	0.242	0.212	0.184
0.0	0.500	0.540	0.579	0.618	0.655	0.691	0.726	0.758	0.788	0.816
1.0	0.841	0.864	0.885	0.903	0.919	0.933	0.945	0.955	0.964	0.971
2.0	0.977	0.982	0.986	0.989	0.992	0.994	0.995	0.997	0.997	0.998
3.0	0.999	0.999	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Ejemplo 9 Si Z es una variable aleatoria normal estándar, calcule

(a) $\Pr(-1.2 \leqslant Z \leqslant 2.0)$ y (b) $\Pr(Z \geqslant 1.5)$.

Solución Utilizando los valores de la tabla se obtiene

$$\begin{aligned}\Pr(-1.2 \leqslant Z \leqslant 2.0) &= \Pr(Z \leqslant 2.0) - \Pr(Z < -1.2)\\ &= F(2.0) - F(-1.2) \approx 0.977 - 0.115\\ &= 0.862\\ \Pr(Z \geqslant 1.5) &= 1 - \Pr(Z < 1.5)\\ &= 1 - F(1.5) \approx 1 - 0.933 = 0.067\end{aligned}$$

Ejemplo 10 Una variable aleatoria X se distribuye normalmente con media 2 y desviación típica 0.4. Calcule

(a) $\Pr(1.8 \leqslant X \leqslant 2.4)$ y (b) $\Pr(X > 2.4)$.

Solución Como X se distribuye normalmente con media 2 y desviación típica 0.4, $Z = (X - 2)/0.4$ se distribuye de acuerdo con una distribución normal estándar (con media 0 y desviación típica 1). Por tanto,

$$\begin{aligned}\Pr(1.8 \leqslant X \leqslant 2.4) &= \Pr(-0.5 \leqslant Z \leqslant 1)\\ &= F(1) - F(-0.5) \approx 0.841 - 0.309 = 0.532\\ \Pr(X > 2.4) &= \Pr(Z > 1) = 1 - \Pr(Z \leqslant 1)\\ &= 1 - F(1) \approx 1 - 0.841 = 0.159\end{aligned}$$

Ejercicios 7.8

1. ¿Cuánto desearía pagar para jugar a un juego en el que se tira la moneda presentada al principio de esta sección y se gana 1 € si sale cara, 2 € si sale cruz y 50 € si cae de canto? Suponga que el juego se va jugar muchas veces y que su objetivo en el peor caso es quedarse como está.

2. Un dado está cargado de forma que si X representa el número que sale cuando se tira, entonces $\Pr(X = n) = Kn$ para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) Calcule el valor de la constante K.

(b) Calcule la probabilidad de que $X \leqslant 3$ en cualquier tirada del dado.

3. Calcule la desviación típica de sus ganancias en el juego del Ejercicio 1.

4. Calcule la media y desviación típica de la variable aleatoria X del Ejercicio 2.

5. Un dado está cargado de forma que la probabilidad de que salgan los números 2, 3, 4 y 5 sigue siendo todavía 1/6, pero la probabilidad de que salga 1 es 9/60 y la probabilidad de que salga 6 es 11/60. ¿Cuánto valen la media y la desviación típica del número X que sale al tirar este dado? ¿Cuál es la probabilidad de que $X \leqslant 3$?

6. Se tiran dos dados, ambos cargados de la forma que se indica en el Ejercicio 5. Sea X la variable aleatoria correspondiente a la suma de los números que salen al tirarlos.

(a) Calcule la función de probabilidad de X.
(b) Determine la media y la desviación típica de X. Compárelas con las calculadas para el dado no trucado del Ejemplo 3.

7. Una moneda fina pero cargada tiene una probabilidad de 0.55 de salir cara y 0.45 de salir cruz (esta moneda no puede caer de canto). Se tira la moneda tres veces (determine las respuestas numéricas de las cuestiones siguientes con una precisión de seis cifras decimales).

(a) ¿Cuál es el espacio muestral de los posibles resultados de tirar la moneda tres veces?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de esos posibles resultados?
(c) Calcule la función de probabilidad del número de veces X que sale cara en las tres tiradas.
(d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de caras sea al menos 1?
(e) ¿Cuál es la esperanza de X?

8. Un saco contiene 20 bolas del mismo tamaño; algunas son rojas y las restantes azules. Si se saca una bola de forma aleatoria, la probabilidad de que sea roja es 0.6.

(a) Si se sacan dos bolas y se dejan fuera del saco, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean azules?
(b) Suponga ahora que saca tres bolas y los deja fuera del saco. Describa el espacio muestral de los posibles resultados de este experimento. ¿Cuál es la esperanza del número de bolas rojas que hay en las tres que se han extraído del saco?

Para cada una de las funciones $f(x)$ en los Ejercicios 9-15, calcule lo siguiente:

(a) El valor de C para el que f es una función de densidad de probabilidad en el intervalo dado.
(b) La media μ, la varianza σ^2 y la desviación típica σ de la densidad de probabilidad f, y
(c) $\Pr(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$, es decir, la probabilidad de que la variable aleatoria X tenga un valor alejado de su media menos de una desviación típica.

9. $f(x) = Cx$ en $[0, 3]$ **10.** $f(x) = Cx$ en $[1, 2]$

11. $f(x) = Cx^2$ en $[0, 1]$ **12.** $f(x) = C \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

13. $f(x) = C(x - x^2)$ en $[0, 1]$

14. $f(x) = Cxe^{-kx}$ en $[0, \infty)$, $(k > 0)$

15. $f(x) = Ce^{-x^2}$ en $[0, \infty)$. *Sugerencia*: Utilice las propiedades de la densidad normal estándar para demostrar que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.

16. ¿Es posible que una variable aleatoria esté uniformemente distribuida en toda la recta real? Explique por qué.

17. Realice los cálculos para demostrar que la densidad normal $f_{\mu,\sigma}(x)$ definida en el texto es una función de densidad de probabilidad y tiene media μ y desviación típica σ.

***18.** Demuestre que $f(x) = \dfrac{2}{\pi(1 + x^2)}$ es una densidad de probabilidad en el intervalo $[0, \infty)$. Calcule la esperanza de X para esta densidad. Si una máquina genera valores de una variable aleatoria X con distribución $f(x)$, ¿cuánto le gustaría pagar, por juego, para jugar de forma que usted maneja la máquina para producir un valor de X y gana X euros? Justifique su respuesta.

19. Calcule $\Pr(|X - \mu| \geqslant 2\sigma)$ para:

(a) La distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$.
(b) La distribución exponencial con densidad $f(x) = ke^{-kx}$ en el intervalo $[0, \infty)$.
(c) La distribución normal con densidad $f_{\mu,\sigma}(x)$.

20. El intervalo de tiempo T (medido en horas) entre averías de un computador es una variable aleatoria distribuida exponencialmente. Si la amplitud media del intervalo de tiempo entre averías sucesivas es de 20 horas, calcule la probabilidad de que el computador, que acaba de ser reparado, funcione sin problemas al menos 12 horas.

21. El número X de metros de cable producidos al día por una empresa es una variable aleatoria distribuida normalmente de media 5000 y desviación estándar 200. ¿En qué fracción de los días que opera la compañía el número de metros de cable producido superará los 5500?

22. Un instrumento de medida dispone de una escala de 0 a 1. Con el paso del tiempo sufre desgaste y tiende a quedarse fijo en el número 1/4. Suponga que eso ocurre la cuarta parte del tiempo y que el resto proporciona un valor uniformemente distribuido en el intervalo $[0, 1]$. ¿Cuál es la media y la desviación típica de los valores de la medida? (Nota: la variable aleatoria correspondiente al valor de la medida tiene una distribución que es parcialmente discreta y parcialmente continua).

7.9 Ecuaciones diferenciales de primer orden

Esta sección final de aplicaciones de integración se concentra en la aplicación de las integrales indefinidas en vez de las integrales definidas. Podemos utilizar las técnicas de integración desarrolladas en los Capítulos 5 y 6 para resolver ciertas clases de ecuaciones diferenciales de primer orden que aparecen al modelar diversas situaciones. En la Sección 3.4 ya hemos visto algunos ejemplos de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales para modelar los fenómenos de crecimiento y decaimiento.

Ecuaciones separables

Consideremos la ecuación logística presentada en la Sección 3.4 que modela el crecimiento de una población animal con suministro de alimentos limitado:

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$

siendo $y(t)$ el tamaño de la población en el instante t, k una constante positiva relacionada con la fertilidad de la población y L el tamaño de la población en estado estacionario que se puede mantener con el suministro de alimentos disponible. Esta ecuación es un ejemplo de una clase de ecuaciones diferenciales de primer orden denominadas **ecuaciones separables** porque cuando se expresan en términos de diferenciales, se pueden separar de forma que la variable dependiente está en un miembro de la ecuación y la variable independiente en el otro. La ecuación logística se puede expresar de la forma

$$\frac{L\,dy}{y(L-y)} = k\,dt$$

que se puede resolver integrando ambos miembros. Descomponiendo el miembro izquierdo en fracciones simples e integrando, se obtiene

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L-y}\right) dy = kt + C$$

Suponiendo que $0 < y < L$, se obtiene entonces

$$\ln y - \ln(L-y) = kt + C$$

$$\ln\left(\frac{y}{L-y}\right) = kt + C$$

Ahora se puede despejar y de la ecuación tomando exponenciales en ambos miembros:

$$\frac{y}{L-y} = e^{kt+C} = C_1 e^{kt}$$

$$y = (L-y)C_1 e^{kt}$$

$$y = \frac{C_1 L e^{kt}}{1 + C_1 e^{kt}}$$

siendo $C_1 = e^C$.

En general, las ecuaciones separables son de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Y se resuelven expresándolas de la forma

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

e integrando ambos miembros.

Ejemplo 1 Resuelva la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$.

Solución Expresamos la ecuación de la forma $y\,dy = x\,dx$ e integramos ambos miembros, con lo que se obtiene

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

o $y^2 - x^2 = C$, siendo $C = 2C_1$ una constante arbitraria. Las curvas de la solución son hipérbolas rectangulares (*véase* la Figura 7.60). Sus asíntotas $y = x$ e $y = -x$ son también soluciones correspondientes a $C = 0$.

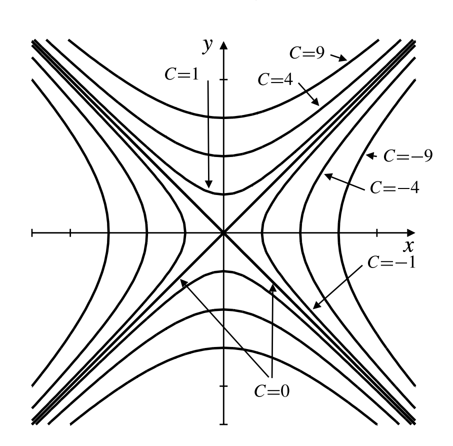


Figura 7.60 Algunas curvas de la familia $y^2 - x^2 = C$. ■

Ejemplo 2 Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2y^3 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Solución Al separar la ecuación diferencial se obtiene $\dfrac{dy}{y^3} = x^2\,dx$. Entonces,

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2\,dx, \qquad \text{de forma que} \qquad \frac{-1}{2y^2} = \frac{x^3}{3} + C$$

Como $y = 3$ cuando $x = 1$, tenemos que $-\frac{1}{18} = \frac{1}{3} + C$ y $C = -\frac{7}{18}$. Sustituyendo este valor en la solución anterior y despejando y se obtiene

$$y(x) = \frac{3}{\sqrt{7 - 6x^3}}$$

Esta solución es válida para $x < \left(\frac{7}{6}\right)^{1/3}$ (*véase* la Figura 7.61).

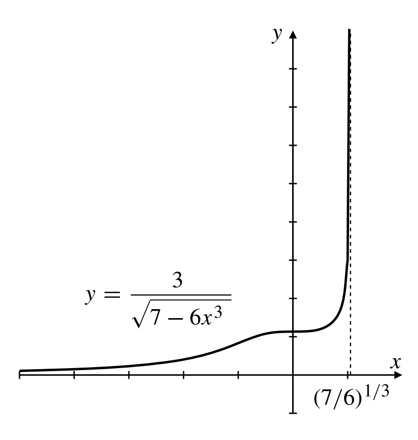


Figura 7.61 La solución de $\frac{dy}{dx} = x^2y^3$ que cumple $y(1) = 3$.

■

Ejemplo 3 Resuelva la **ecuación integral** $y(x) = 3 + 2\int_1^x ty(t)\,dt$.

Solución Diferenciando la ecuación integral con respecto a x se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 2xy(x) \quad \text{o} \quad \frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

por tanto, $\ln|y(x)| = x^2 + C$ y, despejando y, $y(x) = C_1e^{x^2}$. Sustituyendo $x = 1$ en la ecuación integral se obtiene un valor inicial: $y(1) = 3 + 0 = 3$, por lo que $C_1 = 3/e$ y

$$y(x) = 3e^{x^2-1}$$

■

Ejemplo 4 **(Una solución al problema de la concentración)** Un tanque contiene inicialmente 1000 l de salmuera con 50 kg de sal disuelta. Al tanque fluye salmuera que contiene 10 g de sal por litro con una velocidad constante de 10 l/min. Si el contenido del tanque se mantiene perfectamente mezclado todo el tiempo, y la solución sale del tanque con una velocidad de 10 l/min, ¿cuánta sal quedará en el tanque transcurridos 40 minutos?

Solución Sea $x(t)$ el número de kilogramos de sal en solución en el tanque después de s minutos. Por tanto $x(0) = 50$. Se incorpora sal al tanque con una velocidad de 10 g/l × 10 l/min = 100 g/min = = 1/10 kg/min. El tanque contiene 1000 l de líquido en todo momento, por lo que la concentración de sal en el tanque en el instante t es $x/1000$ kg/l. Como el contenido del tanque se vacía con una velocidad de 10 l/min, la sal se elimina con una velocidad de $10x/1000 = x/100$ kg/min. Por tanto,

$$\frac{dx}{dt} = \text{velocidad de entrada} - \text{velocidad de salida} = \frac{1}{10} - \frac{x}{100} = \frac{10 - x}{100}$$

o bien

$$\frac{dx}{10 - x} = \frac{dt}{100}$$

Integrando los dos miembros de esta ecuación se obtiene

$$-\ln|10 - x| = \frac{t}{100} + C$$

Obsérvese que $x(t) \neq 10$ para todo instante t finito (ya que $\ln 0$ no está definido). Como $x(0) = 50 > 10$, se deduce que $x(t) > 10$ para todo $t > 0$ ($x(t)$ es necesariamente continua, por lo que no puede tomar valores

menores que 10 sin haber tomado el valor 10 por el Teorema del Valor Medio). Por lo tanto, podemos quitar el valor absoluto de la solución anterior y obtener

$$\ln(x - 10) = -\frac{t}{100} - C$$

Como $x(0) = 50$, tenemos que $-C = \ln 40$ y

$$x = x(t) = 10 + 40e^{-t/100}$$

Tras 40 minutos habrá $10 + 40e^{-0.4} \approx 36.8$ kg de sal en el tanque. ■

Ejemplo 5 **(Un problema de velocidad de reacción)** En una reacción química que se produce en una solución, una molécula de cada uno de los dos reactivos A y B se combina para formar una molécula del producto C. De acuerdo con la ley de acción de masas, la reacción procede con una velocidad proporcional al producto de las concentraciones de A y B en la solución. Por tanto, si inicialmente hay a moléculas/cm^3 del reactivo A y b moléculas/cm^3 del reactivo B, entonces el número $x(t)$ de moléculas/cm^3 de C presentes del instante t en adelante está determinado por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

Resolveremos esta ecuación mediante la técnica de descomposición en fracciones simples partiendo del supuesto de que $b \neq a$:

$$\int \frac{dx}{(a - x)(b - x)} = k \int dt = kt + C$$

Como

$$\frac{1}{(a - x)(b - x)} = \frac{1}{b - a}\left(\frac{1}{a - x} - \frac{1}{b - x}\right)$$

y como necesariamente $x \leqslant a$ y $x \leqslant b$, tenemos que

$$\frac{1}{b - a}(-\ln(a - x) + \ln(b - x)) = kt + C$$

o bien

$$\ln\left(\frac{b - x}{a - x}\right) = (b - a)kt + C_1, \qquad \text{siendo } C_1 = (b - a)C$$

Por hipótesis, $x(0) = 0$, por lo que $C_1 = \ln(b/a)$ y

$$\ln\frac{a(b - x)}{b(a - x)} = (b - a)kt$$

De la ecuación anterior se puede despejar x resultando $x = x(t) = \dfrac{ab(e^{(b-a)kt} - 1)}{be^{(b-a)kt} - a}$. ■

Ejemplo 6 Obtenga una familia de curvas de forma que cada una de ellas corte a cualquier parábola con ecuación $y = Cx^2$ formando ángulos rectos.

Solución La familia de parábolas $y = Cx^2$ cumple la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}C = 0$$

es decir,

$$x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

Cualquier curva que corte a las parábolas $y = Cx^2$ formando ángulos rectos debe tener en cualquier punto (x, y) una pendiente igual al inverso cambio de signo de la pendiente de la parábola particular que pasa por ese punto. Por tanto, esas curvas deberán cumplir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

Separando las variables se llega a $2y\,dy = -x\,dx$, e integrando ambos miembros resulta $y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$ o $x^2 + 2y^2 = C$, siendo $C = 2C_1$. Esta ecuación representa a una familia de elipses centradas en el origen. Las elipses y las parábolas se cortan formando ángulos rectos, como se muestra en la Figura 7.62. Cuando las curvas de una familia cortan a las curvas de una segunda familia formando ángulos rectos, se dice que una de ellas es la familia de **trayectorias ortogonales** de la otra familia.

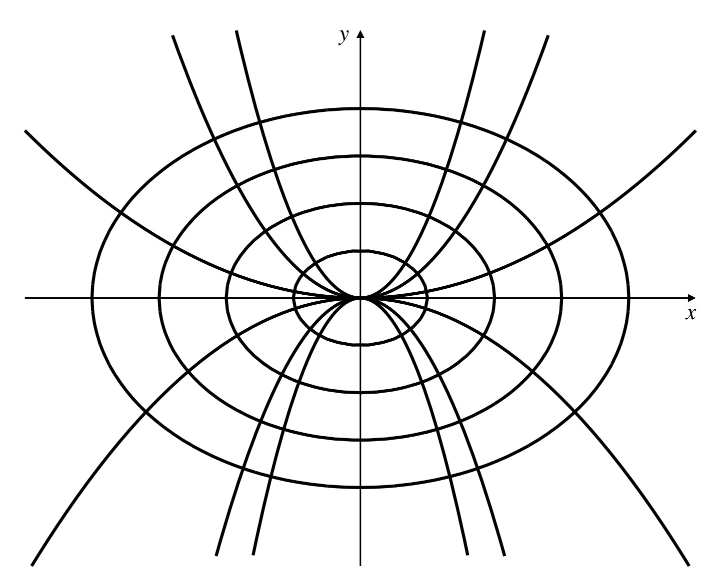


Figura 7.62 Las parábolas $y = C_1x^2$ y las elipses $x^2 + 2y^2 = C_2$ se cortan formando ángulos rectos.

Ecuaciones lineales de primer orden

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

siendo $p(x)$ y $q(x)$ funciones dadas, que se suponen continuas. Estas ecuaciones se pueden resolver (es decir, obtener y en función de x) mediante el procedimiento siguiente.

Sea $\mu(x)$ una primitiva de $p(x)$:

$$\mu(x) = \int p(x)\,dx \quad \text{y} \quad \frac{d\mu}{dx} = p(x)$$

Si $y = y(x)$ cumple la ecuación dada, entonces se puede calcular, utilizando la Regla del Producto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{\mu(x)}y(x)\right) &= e^{\mu(x)}\frac{dy}{dx} + e^{\mu(x)}\frac{d\mu}{dx}\,y(x)\\ &= e^{\mu(x)}\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = e^{\mu(x)}q(x)\end{aligned}$$

Por tanto, $e^{\mu(x)}y(x) = \int e^{\mu(x)}q(x)\,dx$, o

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)}q(x)\,dx$$

En los ejemplos que siguen volveremos a utilizar este método, en vez de la fórmula final. $e^{\mu(x)}$ se denomina **factor de integración** de la ecuación diferencial dada porque, si se multiplica la ecuación por $e^{\mu(x)}$, el miembro izquierdo se convierte en la derivada de $e^{\mu(x)}y(x)$.

Ejemplo 7 Resuelva $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 1$ para $x > 0$.

Solución En este caso, $p(x) = 1/x$, por lo que $\mu(x) = \int p(x)\,dx = \ln x$ para $x > 0$ y $e^{\mu(x)} = x$. Calculamos

$$\frac{d}{dx}(xy) = x\frac{dy}{dx} + y = x\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\right) = x$$

y

$$xy = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Finalmente,

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

que es una solución de la ecuación dada para cualquier valor de la constante C. ■

Ejemplo 8 Resuelva $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3$.

Solución En este caso, $p(x) = x$, por lo que $\mu(x) = x^2/2$ y $e^{\mu(x)} = e^{x^2/2}$. Calculamos

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2/2}y) = e^{x^2/2}\frac{dy}{dx} + e^{x^2/2}xy = e^{x^2/2}\left(\frac{dy}{dx} + xy\right) = x^3e^{x^2/2}$$

por tanto,

$$e^{x^2/2}y = \int x^3e^{x^2/2}\,dx \qquad \begin{array}{lll} \text{Sea} & U = x^2, & dV = xe^{x^2/2}\,dx \\ \text{Siendo} & dU = 2x\,dx, & V = e^{x^2/2} \end{array}$$

$$= x^2e^{x^2/2} - 2\int xe^{x^2/2}\,dx$$

$$= x^2e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + C$$

y, finalmente, $y = x^2 - 2 + Ce^{-x^2/2}$. ■

Ejemplo 9 **(Un circuito resistencia-inductancia)** Un circuito eléctrico (Figura 7.63) contiene una fuente de tensión continua de V voltios, un interruptor, una resistencia de valor R ohmios y una bobina de valor L henrios. El circuito no tiene capacitancia. El conmutador está inicialmente abierto, de forma que no circula corriente, y se cierra en el instante $t = 0$ de forma que la corriente empieza a circular en ese instante. Si la inductancia L fuera cero, la corriente saltaría bruscamente desde 0 amperios cuando $t < 0$ hasta $I = V/R$ amperios cuando $t > 0$. Sin embargo, si $L > 0$, la corriente no puede cambiar instantáneamente;

dependerá del tiempo t. Sea $I(t)$ (amperios) la corriente t segundos después de cerrar el interruptor. Se sabe que $I(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} L\,\dfrac{dI}{dt} + RI = V \\ I(0) = 0 \end{cases}$$

Calcule $I(t)$. ¿Cuánto vale $\lim_{t\to\infty} I(t)$? ¿Cuánto tiempo debe transcurrir después de que se cierra el interruptor para que la corriente alcance el 90% de su valor límite?

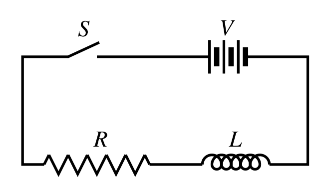


Figura 7.63 Un circuito resistencia-inductancia.

Solución La ecuación diferencial se puede escribir en la forma $\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L}\,I = \dfrac{V}{L}$. Es lineal y su factor de integración es $e^{\mu(t)}$, siendo

$$\mu(t) = \int \frac{R}{L}\,dt = \frac{Rt}{L}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt}\,(e^{Rt/L}I) = e^{Rt/L}\left(\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}\,I\right) = e^{Rt/L}\,\frac{V}{L}$$

$$e^{Rt/L}I = \frac{V}{L}\int e^{Rt/L}\,dt = \frac{V}{R}\,e^{Rt/L} + C$$

$$I(t) = \frac{V}{R} + Ce^{-Rt/L}$$

Como $I(0) = 0$, tenemos que $0 = (V/R) + C$, por lo que $C = -V/R$. Por tanto, la intensidad de corriente en cualquier instante $t > 0$ es

$$I(t) = \frac{V}{R}\,(1 - e^{-Rt/L})$$

Observando esta solución resulta claro que $\lim_{t\to\infty} I(t) = V/R$; la corriente en *estado estacionario* es la corriente que circularía si la inductancia fuera cero.

$I(t)$ alcanzará el 90% de su valor límite cuando

$$\frac{V}{R}\,(1 - e^{-Rt/L}) = \frac{90}{100}\,\frac{V}{R}$$

Esta ecuación implica que $e^{-Rt/L} = 1/10$, o $t = (L\ln 10)/R$. La intensidad de corriente alcanzará el 90% de su valor límite en $(L\ln 10)/R$ segundos. ■

Nuestro ejemplo final revisa un problema típico de *serie de pagos* considerado en la Sección 7.7. Esta vez trataremos el problema como un problema de valor inicial utilizando la ecuación diferencial.

Ejemplo 10 Se abre una cuenta de ahorro con un depósito de A euros. En cualquier instante t posterior, el dinero se deposita en la cuenta de forma continua con una velocidad de $(C + Dt)$ € al año. Si la cuenta tiene un interés nominal de $100R$% al año, computado de forma continua, calcule el estado de la cuenta $B(t)$ euros transcurridos t años. Ilustre la solución con los datos $A = 5000$, $C = 1000$, $D = 200$, $R = 0.13$ y $t = 5$.

Solución Como se indicó en la Sección 3.4, el cómputo continuo de interés con una tasa nominal de $100R\,\%$ hace que 1 € crezca hasta valer e^{Rt} € en t años. Si no hubiera depósitos posteriores, el estado de la cuenta crecería de acuerdo con la ecuación diferencial del crecimiento exponencial:

$$\frac{dB}{dt} = RB$$

Al permitir un crecimiento adicional debido a la aportación de depósitos, podemos observar que B debe cumplir la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dB}{dt} = RB + (C + Dt)$$

o, en otros términos, $dB/dt - RB = C + Dt$. Se trata de una ecuación lineal en B con $p(t) = -R$. Por tanto, podemos tomar $\mu(t) = -Rt$ y $e^{\mu(t)} = e^{-Rt}$. Ahora calculamos

$$\frac{d}{dt}(e^{-Rt}B(t)) = e^{-Rt}\frac{dB}{dt} - Re^{-Rt}B(t) = (C + Dt)e^{-Rt}$$

y

$$\begin{aligned} e^{-Rt}B(t) &= \int (C + Dt)e^{-Rt}\,dt \qquad \text{Sea} \quad U = C + Dt, \quad dV = e^{-Rt}\,dt \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{Siendo} \quad dU = D\,dt, \quad V = -e^{-Rt}/R \\ &= -\frac{C + Dt}{R}e^{-Rt} + \frac{D}{R}\int e^{-Rt}\,dt \\ &= -\frac{C + Dt}{R}e^{-Rt} - \frac{D}{R^2}e^{-Rt} + K, \qquad (K = \text{constante}) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$B(t) = -\frac{C + Dt}{R} - \frac{D}{R^2} + Ke^{Rt}$$

Como $A = B(0) = -\dfrac{C}{R} - \dfrac{D}{R^2} + K$, tenemos que $K = A + \dfrac{C}{R} + \dfrac{D}{R^2}$ y

$$B(t) = \left(A + \frac{C}{R} + \frac{D}{R^2}\right)e^{Rt} - \frac{C + Dt}{R} - \frac{D}{R^2}$$

Para la ilustración $A = 5000$, $C = 1000$, $D = 200$, $R = 0.13$ y $t = 5$ obtenemos, utilizando la calculadora, $B(5) = 19\,762.82$. La cuenta contendrá 19 762.82 € después de cinco años, en estas circunstancias. ■

Ejercicios 7.9

Resuelva las ecuaciones separables de los Ejercicios 1-10.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y - 1}{x}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^2$

5. $\dfrac{dY}{dt} = tY$

6. $\dfrac{dx}{dt} = e^x \operatorname{sen} t$

7. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - y^2$

8. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$

9. $\dfrac{dy}{dt} = 2 + e^y$

10. $\dfrac{dy}{dx} = y^2(1 - y)$

Resuelva las ecuaciones lineales de los Ejercicios 11-16.

11. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = x^2$

12. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$

13. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$

14. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^x$

15. $\dfrac{dy}{dx} + y = x$

16. $\dfrac{dy}{dx} + 2e^xy = e^x$

Resuelva los problemas de valor inicial de los Ejercicios 17-20.

17. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 10y = 1 \\ y(1/10) = 2/10 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2y' + y = x^2e^{1/x} \\ y(1) = 3e \end{cases}$

20. $\begin{cases} y' + (\cos x)y = 2xe^{-\operatorname{sen} x} \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

Resuelva las ecuaciones integrales de los Ejercicios 21-24.

21. $y(x) = 2 + \displaystyle\int_0^x \frac{t}{y(t)}\, dt$

22. $y(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{(y(t))^2}{1+t^2}\, dt$

23. $y(x) = 1 + \displaystyle\int_1^x \frac{y(t)\, dt}{t(t+1)}$

24. $y(x) = 3 + \displaystyle\int_0^x e^{-y(t)}\, dt$

25. Si $a > b > 0$ en el Ejemplo 5, calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

26. Si $b > a > 0$ en el Ejemplo 5, calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

27. ¿Por qué no es válida la solución dada en el Ejemplo 5 para $a = b$? Calcule la solución para el caso $a = b$.

28. Un objeto de masa m que cae cerca de la superficie de la tierra es retrasado por la resistencia del aire proporcional a su velocidad de forma que, de acuerdo con la Segunda Ley del Movimiento de Newton,

$$m\,\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

siendo $v = v(t)$ la velocidad del objeto en el instante t, y g la aceleración de la gravedad cerca de la superficie de la tierra. Suponiendo que el objeto parte del reposo en el instante $t = 0$, es decir, $v(0) = 0$, calcule la velocidad $v(t)$ para cualquier instante $t > 0$ (hasta que el objeto llega al suelo). Demuestre que $v(t)$ tiende a un determinado límite cuando $t \to \infty$. ¿Es necesaria la fórmula explícita de $v(t)$ para determinar esta velocidad límite?

29. Repita el Ejercicio 28, con la única diferencia de asumir que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, de forma que la ecuación del movimiento es

$$m\,\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

30. Calcule el ahorro acumulado tras un año si el estado inicial de la cuenta era de 1000 €, el interés se paga de forma continua en la cuenta con una tasa nominal del 10% anual, computado de forma continua, y la cuenta disminuye de forma continua (por ejemplo, debido a los impuestos) con una velocidad de $y^2/1\,000\,000$ de euros al año, siendo $y = y(t)$ el estado de la cuenta transcurridos t años. ¿Cuánto puede crecer la cuenta? ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la cuenta alcance la mitad del valor máximo?

31. Calcule la familia de curvas que cortan a las hipérbolas $xy = C$ formando ángulos rectos.

32. Repita la solución al problema de concentración del Ejemplo 4, cambiando la velocidad de entrada de salmuera en el tanque a 12 l/min y dejando todos los otros datos con el mismo valor del ejemplo. Nótese que el volumen de líquido en el tanque ya no es constante con el tiempo.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes frases?**
  - ◇ Sólido de revolución.
  - ◇ Elemento de volumen.
  - ◇ Longitud de arco de una curva.
  - ◇ Momento de un punto de masa m respecto a $x = 0$.
  - ◇ Centro de masas de una distribución de masas.
  - ◇ Centroide de una región plana.
  - ◇ Ecuación diferencial separable de primer orden.
  - ◇ Ecuación diferencial lineal de primer orden.
- **Sea D la región plana $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Utilice integrales para representar lo siguiente:**
  - ◇ El volumen generado al rotar D alrededor del eje x.
  - ◇ El volumen generado al rotar D alrededor del eje y.
  - ◇ El momento de D respecto al eje y.
  - ◇ El momento de D respecto al eje x.
  - ◇ El centroide de D.
- **Sea C la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Utilice integrales para representar lo siguiente:**
  - ◇ La longitud de C.
  - ◇ El área de la superficie generada al rotar C alrededor del eje x.
  - ◇ El área de la superficie generada al rotar C alrededor del eje y.

Ejercicios de repaso

1. La Figura 7.64 muestra la sección cruzada a lo largo de los ejes de dos carretes circulares. El carrete de la

izquierda puede almacenar 1000 m de hilo si se enrolla completo perfectamente. ¿Cuántos metros de hilo del mismo tamaño puede almacenar el carrete de la derecha?

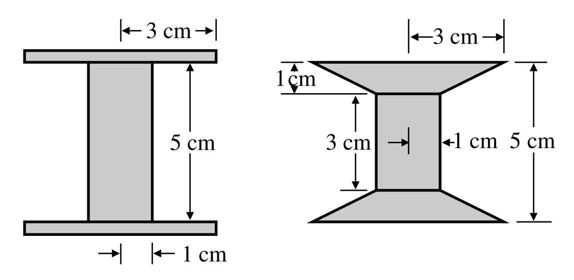


Figura 7.64

2. El agua de un cuenco se evapora con una velocidad proporcional al área de su superficie. Demuestre que la profundidad de agua en el cuenco disminuye con una velocidad constante, independientemente de la forma del cuenco.

3. Un barril mide 4 pies de altura y tiene un volumen de 16 pies cúbicos. Su base y su tapa son discos circulares de radio 1 pie, y su pared lateral se obtiene rotando la parte de la parábola $x = a - by^2$ que está entre $y = -2$ y $y = 2$ alrededor del eje y. Calcule, aproximadamente, los valores de las constantes positivas a y b.

4. El sólido de la Figura 7.65 se corta de un cilindro vertical de radio 10 cm mediante dos planos que forman ángulos de 60º con la horizontal. Calcule su volumen.

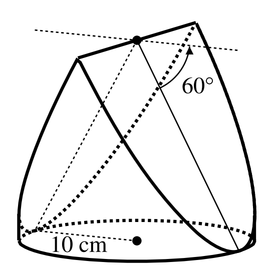


Figura 7.65

5. Calcule con cuatro cifras decimales de precisión el valor de la constante positiva a para la que la curva $y = (1/a)\cosh ax$ tenga una longitud de arco de dos unidades entre $x = 0$ y $x = 1$.

6. Calcule el área de la superficie que se obtiene rotando la curva $y = \sqrt{x}$, $(0 \leqslant x \leqslant 6)$ alrededor del eje x.

7. Calcule el centroide de la región plana $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2 + 4y^2 \leqslant 4$.

8. Una placa plana con forma de disco circular tiene un radio de 3 pies y su densidad de área es constante. Se corta un agujero circular de radio 1 pie, centrado a una distancia de 1 pie desde el centro del disco. Calcule el centro de masas de la parte restante del disco.

9. De acuerdo con la Ley de Boyle, si un gas se expande o se comprime isotérmicamente el producto de su presión por su volumen permanece constante. El cilindro de la Figura 7.66 se llena con un gas que realiza una fuerza de 1000 N sobre el pistón cuando éste está a 20 cm por encima de la base del cilindro. ¿Cuánto trabajo realiza el pistón si comprime el gas isotérmicamente, descendiendo hasta una altura de 5 cm por encima de la base?

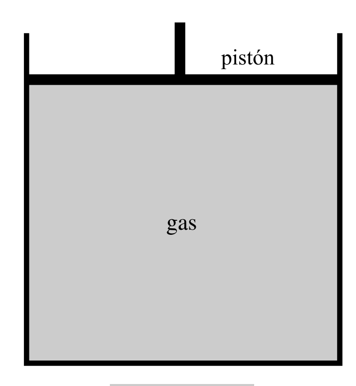


Figura 7.66

10. Suponga dos funciones f y g que tienen la siguiente propiedad: para todo $a > 0$, el sólido producido al rotar la región del plano xy limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = a$ alrededor del eje x tiene el mismo volumen que el sólido que se produce al rotar la misma región alrededor del eje y. ¿Qué se puede decir sobre f y g?

11. Calcule la ecuación de la curva que pasa por el punto (2, 4) y tiene pendiente $3y/(x-1)$ en cualquier punto (x, y) de la misma.

12. Obtenga una familia de curvas que corte a las elipses de la forma $3x^2 + 4y^2 = C$ formando ángulos rectos.

13. Los ingresos y los gastos de un negocio estacional producen depósitos y retiradas de una cuenta de un banco, que se pueden modelar en forma de una velocidad de flujo en la cuenta de $P(t)$ € al año en el instante t (años), siendo $P(t) = 10\,000\,\mathrm{sen}\,(2\pi t)$. Si el interés de la cuenta tiene una tasa instantánea del 4% anual y hay 8000 € en el instante $t = 0$, ¿cuánto habrá en la cuenta dos años más tarde?

Problemas avanzados

1. La curva $y = e^{-kt}\,\mathrm{sen}\,x$ $(x \geqslant 0)$ se rota alrededor del eje x para generar una ristra de «gotas» cuyos volúmenes disminuyen hacia la derecha si $k > 0$.

(a) Demuestre que la relación entre el volumen de la gota $(n+1)$ y la gota n depende de k, pero no de n.
(b) ¿Para qué valor de k es igual a $1/2$ la relación del apartado (a)?
(c) Calcule el volumen total de todas las gotas en función de $k > 0$.

2. **(Conservación de tierra)** Una paisajista desea crear a nivel del suelo un estanque con forma de anillo, con un radio exterior de 10 m y una profundidad máxima de 1 m rodeando una colina que se construirá utilizando la tierra excavada para formar el estanque (*véase* la Figura 7.67). Decide utilizar un polinomio de cuarto grado para determinar la forma de la sección cruzada de la colina y del fondo del estanque: a una distancia de r metros del centro de la composición, la altura por encima o por debajo del nivel normal del suelo será

$$h(r) = a(r^2 - 100)(r^2 - k^2) \text{ metros}$$

para algún valor $a > 0$, siendo k el radio interior del estanque. Calcule k y a de forma que se cumplan los requisitos dados anteriormente.

¿Cuánta tierra se debe mover del estanque para construir la colina?

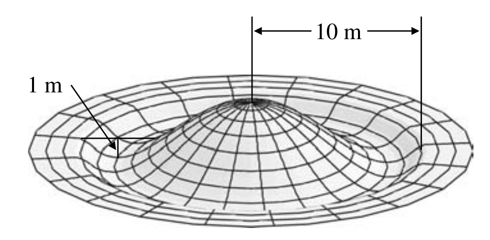


Figura 7.67

3. **(Diseño de un cohete)** El morro de un cohete es un sólido de revolución con radio en la base r y altura h. El morro se debe unir suavemente con el cuerpo cilíndrico del cohete (*véase* la Figura 7.68). Tomando como origen la punta del morro del cohete y como eje x el eje central del cohete, se pueden obtener varias formas de morro rotando la curva cúbica:

$$y = f(x) = ax + bx^2 + cx^3$$

Figura 7.68

alrededor del eje x. La curva cúbica debe tener pendiente 0 en $x = h$, y su pendiente debe ser positiva para $0 < x < h$. Calcule la curva cúbica concreta que maximiza el volumen del morro. Demuestre también que esta elección de la curva cúbica hace la pendiente dy/dx en el origen lo más grande posible y, por tanto, corresponde al morro más puntiagudo.

4. **(Splines cuadráticos)** Sean $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$ y $C = (x_3, y_3)$ tres puntos que cumplen $x_1<x_2<x_3$. Una función $f(x)$ cuya gráfica pasa por los tres puntos se denomina *spline cuadrático* si $f(x)$ es una función cuadrática en el intervalo $[x_1, x_2]$ y, posiblemente, una función cuadrática diferente en el intervalo $[x_2, x_3]$, y las dos funciones cuadráticas tienen la misma pendiente en x_2. En este problema, tome $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$ y $C = (3, 0)$.

(a) Obtenga una familia $f(x, m)$ de splines cuadráticos de un parámetro que pasen por A, B y C, y que tengan pendiente m en B.

(b) Calcule el valor de m para que la longitud de la gráfica $y = f(x, m)$ entre $x = 0$ y $x = 3$ sea mínima. ¿Cuánto vale dicha longitud mínima? Compárela con la longitud de la línea poligonal ABC.

5. Se debe construir un muro de cemento con forma de anillo circular, con una altura máxima de 2 m, un radio interior de 15 m, y una anchura de 1 m a nivel de tierra, de forma que su radio exterior sea de 16 m (*véase* la Figura 7.69). La sección cruzada transversal de la pared a una distancia de $15 + x$ m del centro del anillo tiene la forma de la función cúbica

$$f(x) = x(1 - x)(ax + b) \text{ m}$$

que no se debe anular en ningún punto del intervalo abierto $(0, 1)$. Calcule los valores de a y b que minimizan el volumen total de cemento necesario para construir el muro.

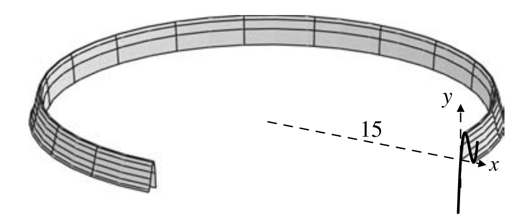


Figura 7.69

6. **(Volumen de una bola *n*-dimensional)** El espacio euclídeo n-dimensional está formado por los *puntos* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ con n coordenadas reales. Por analogía con el caso tridimensional, denominaremos al conjunto de puntos que cumplen la desigualdad $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant r^2$, *bola* n-dimensional centrada en el origen. Por ejemplo, la bola unidimensional es el intervalo $-r \leqslant x_1 \leqslant r$, cuyo *volumen* (es decir,

longitud) es $V_1(r) = 2r$. La bola bidimensional es el disco $x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2$, cuyo *volumen* (es decir, *área*) es

$$V_2(r) = \pi r^2 = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$
$$= \int_{-r}^{r} V_1(\sqrt{r^2 - x^2})\,dx$$

El volumen de la bola tridimensional $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant r^2$ es

$$V_3(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 = \int_{-r}^{r} \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx$$
$$= \int_{-r}^{r} V_2(\sqrt{r^2 - x^2})\,dx$$

Por analogía con estas fórmulas, el volumen $V_n(r)$ de una bola n-dimensional de radio r es la integral del volumen de la bola $(n-1)$-dimensional de radio $\sqrt{r^2 - x^2}$ desde $x = -r$ hasta $x = r$:

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} V_{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2})\,dx$$

Utilizando un programa de matemáticas por computador, calcule $V_4(r)$, $V_5(r)$, ..., $V_{10}(r)$ y plantee fórmulas para $V_{2n}(r)$ (las bolas de dimensión par) y $V_{2n+1}(r)$ (las bolas de dimensión impar). Si su programa de matemáticas por ordenador es lo suficientemente potente, podrá verificar sus planteamientos por inducción. Si no es así, utilícelos para predecir $V_{11}(r)$ y $V_{12}(r)$; después compruebe su previsión empezando con $V_{10}(r)$.

*7. **(El problema de la aguja de Buffon)** Una superficie plana horizontal está marcada con líneas paralelas separadas 10 cm, como se muestra en la Figura 7.70. Se lanza una aguja de 5 cm de longitud de forma aleatoria en la superficie. Calcule la probabilidad de que la aguja corte a una de las líneas. *Sugerencia*: Consideremos como punto de referencia el extremo «inferior» de la aguja (es decir, el que apunta hacia abajo de la página en la figura). Si los dos extremos están a la misma altura, se utilizará el extremo izquierdo. Sea y la distancia desde el punto de referencia a la línea más cercana por encima de él, y sea θ el ángulo que forman la aguja y la recta que se extiende hacia la derecha desde el punto de referencia en la figura. ¿Cuáles son los posibles valores de y y de θ? Dibuje en un plano con coordenadas cartesianas θ e y, la región formada por todos los puntos (θ, y) correspondientes a las posibles posiciones de la aguja. Dibuje también la región correspondiente a aquellas posiciones en las que la aguja cruza una de las líneas paralelas. La probabilidad pedida es el área de la segunda región dividida por el área de la primera.

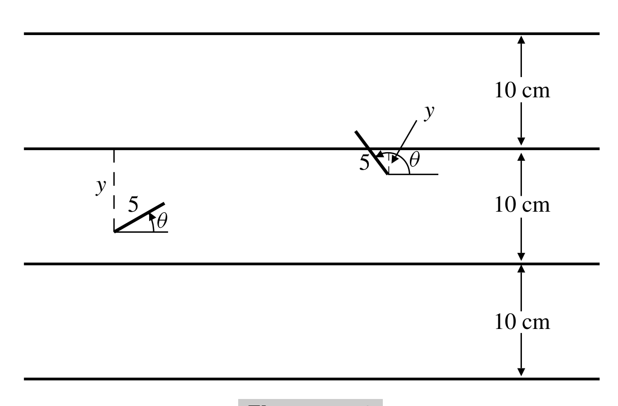


Figura 7.70

*8. **(El camino de un remolque)** Obtenga la ecuación $y = f(x)$ de una curva en el primer cuadrante del plano xy, empezando en el punto $(L, 0)$ y con la propiedad de que si la tangente a la curva en P cruza al eje y en Q, entonces la longitud de PQ es la constante L (*véase* la Figura 7.71). Esta curva se denomina **tractriz**, del participio latino *tractus*, que significa arrastrado. Corresponde al camino del extremo trasero P de un remolque de longitud L, originalmente dispuesto a lo largo del eje x, cuando es remolcado (arrastrado) por un tractor Q que se mueve por el eje y, alejándose del origen.

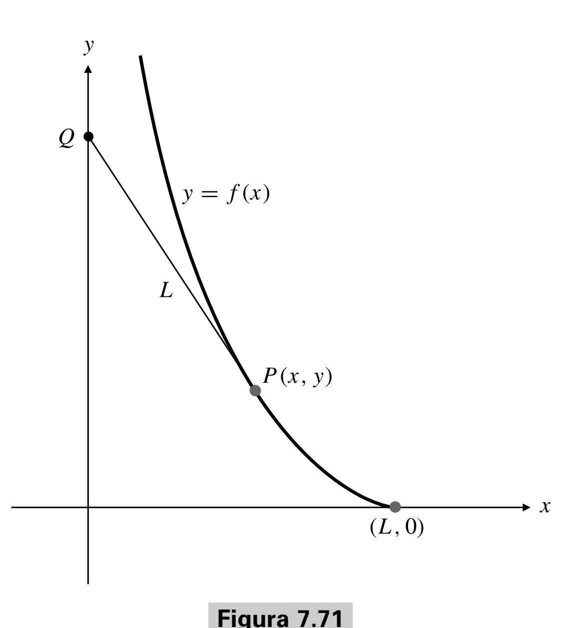


Figura 7.71

*9. **(Aproximación al área de superficie de un elipsoide)** Un geógrafo físico que estudia el flujo de las corrientes que rodean piedras ovales necesita calcular las áreas de superficie de muchas piedras que se modelan como elipsoides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Desea obtener una fórmula simple de dicha área de superficie, de forma que la pueda incluir en una hoja de cálculo que contenga las medidas a, b y c de las piedras. Desafortunadamente, no hay una fórmula exacta para calcular el área de un elipsoide general por medio de funciones elementales. Sin embargo, sí existen fórmulas para elipsoides de revolución, donde dos de los tres semiejes son iguales. Este tipo de elipsoides se denominan esferoides; un *esferoide oblado* (como la tierra) tiene sus dos semiejes más largos iguales; un *esferoide prolado* (como un balón de rugby) tiene sus dos semiejes más cortos iguales. Una aproximación razonable para calcular el área de un elipsoide general se puede obtener mediante interpolación lineal de esos dos casos.

Para concretar, supongamos que los semiejes se disponen en orden decreciente $a \geqslant b \geqslant c$, y sea el área de la superficie $S(a, b, c)$.

(a) Calcule $S(a, a, c)$, el área de un esferoide oblado.

(b) Calcule $S(a, c, c)$, el área de un esferoide prolado.

(c) Construya una aproximación a $S(a, b, c)$ que divida el intervalo desde $S(a, a, c)$ hasta $S(a, c, c)$ en la misma proporción que b divide el intervalo desde a hasta c.

(d) Aproxime el área del elipsoide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

utilizando el método anterior.



CAPÍTULO 8

Cónicas, curvas paramétricas y curvas en polares

Todo el mundo sabe lo que es una curva, hasta que estudia suficientes matemáticas y queda confundido por el gran número de posibles excepciones... Una curva es la totalidad de puntos cuyas coordenadas son funciones de un parámetro que se puede diferenciar tantas veces como se requiera.

Felix Klein (1849-1925)

Introducción Hasta el momento, la mayor parte de las curvas que hemos encontrado han sido gráficas de funciones, y nos han proporcionado información visual de utilidad sobre el comportamiento de dichas funciones. En este capítulo vamos a considerar las curvas planas como objetos de interés por su propio derecho. Primero, examinaremos las secciones cónicas, que son curvas con ecuaciones cuadráticas que se obtienen como intersección de un plano con un cono circular recto. Seguidamente, consideraremos curvas descritas por dos ecuaciones paramétricas que proporcionan las coordenadas de sus puntos como funciones de un parámetro. Si este parámetro es el tiempo, entonces las curvas describen el movimiento de un punto en el plano. Finalmente, consideraremos curvas descritas por ecuaciones en un nuevo sistema de coordenadas denominado sistema de coordenadas polares, en el que cada punto se localiza mediante su distancia y su dirección desde el origen. En el Capítulo 11 ampliaremos nuestro estudio a las curvas en tres dimensiones.

8.1 Cónicas

Los círculos, las elipses, las parábolas y las hipérbolas se denominan **secciones cónicas** (o, más sencillamente, **cónicas**) porque son curvas resultantes de la intersección de planos con conos circulares rectos.

Para concretar, supongamos una recta A fija en el espacio, y sea V un punto fijo de A. El **cono circular recto** de **eje** A, **vértice** V y **semiángulo vertical** α es la superficie formada por todos los puntos de las rectas que pasan por V y que forman un ángulo α con la recta A (*véase* la Figura 8.1). El cono tiene dos mitades en lados opuestos de vértice V. Todo plano P que no pase por V cortará al cono (a una de sus mitades o a las dos), formando una curva $\mathcal{C}$ (*véase* la Figura 8.2). Si una recta normal (es decir, perpendicular) a P forma un ángulo θ con el eje A del cono, siendo $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, entonces

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C} \text{ es una circunferencia si} && \theta = 0 \\
&\mathcal{C} \text{ es una elipse si} && 0 < \theta < \frac{\pi}{2} - \alpha \\
&\mathcal{C} \text{ es una parábola si} && \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \\
&\mathcal{C} \text{ es una hipérbola si} && \frac{\pi}{2} - \alpha < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

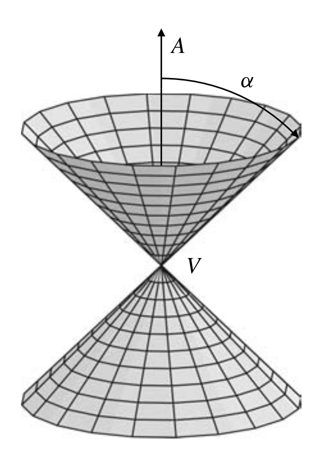


Figura 8.1 Un cono de vértice V, eje A y semiángulo vertical α.

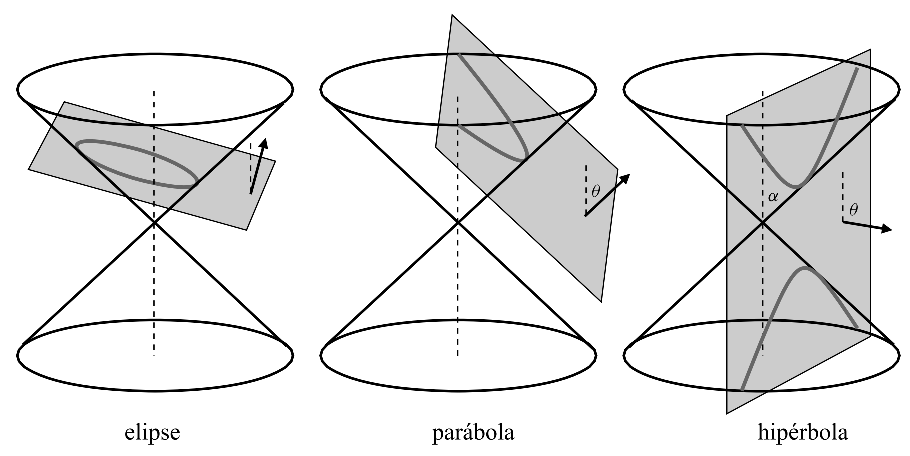


Figura 8.2 Planos que cortan a un cono formando una elipse, una parábola y una hipérbola.

En las Secciones 10.4 y 10.5 se demuestra que los planos se representan mediante ecuaciones de primer grado y los conos mediante ecuaciones de segundo grado. Por tanto, todas las cónicas se pueden representar analíticamente (respecto a un sistema de coordenadas cartesianas x e y en el plano de la cónica) mediante una ecuación de segundo grado cuya forma general es

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

siendo A, B, ..., F constantes. Sin embargo, una ecuación como ésa puede representar también el conjunto vacío, un solo punto, o una o dos rectas si los factores del miembro izquierdo son factores lineales:

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

Después de las líneas rectas, las secciones cónicas son las curvas planas más simples. Poseen muchas propiedades que las hacen útiles en aplicaciones de matemáticas, y por ello las incluimos aquí. Una buena parte de este material es opcional desde el punto de vista de un curso de cálculo, pero el tener familiaridad con las propiedades de las cónicas puede ser muy importante en algunas aplicaciones. La mayoría de las propiedades de las cónicas fueron descubiertas por el geómetra griego Apolonio de Perga, sobre el año 200 a. C. Resulta notable que fuera capaz de obtener estas propiedades utilizando sólo las técnicas de la geometría euclídea clásica. Actualmente, estas propiedades se expresan de forma más conveniente utilizando geometría analítica y sistemas de coordenadas específicos.

Parábolas

DEFINICIÓN 1 Parábolas

Una **parábola** está formada por todos los puntos del plano equidistantes de un punto dado (denominado **foco** de la parábola) y de una recta (denominada **directriz** de la parábola). La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se denomina **eje principal** (o simplemente **eje**) de la parábola. El **vértice** de la parábola es el punto donde la parábola corta a su eje principal. Se encuentra en dicho eje a medio camino entre el foco y la directriz.

Ejemplo 1 Calcule la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F = (a, 0)$ y cuya directriz es la recta L de ecuación $x = -a$.

Solución El eje de la parábola está en el eje x y su vértice es el origen (*véase* la Figura 8.3). Si $P = (x, y)$ representa a un punto de la parábola, entonces la distancia de P a F es igual a la distancia desde P al punto más cercano de Q en L. Por tanto,

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x + a$$

o

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

o, tras simplificar, $y^2 = 4ax$.

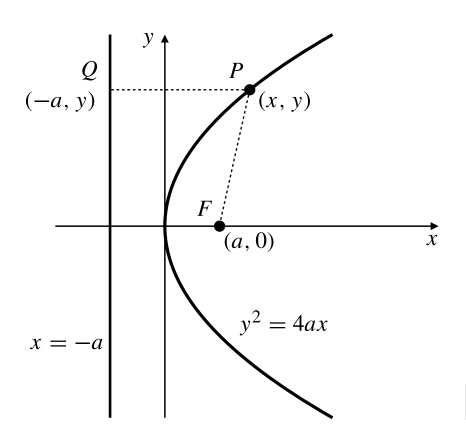


Figura 8.3 $PF = PQ$: propiedad de definición de la parábola.

De forma similar, se pueden obtener ecuaciones estándar de parábolas con vértices en el origen y focos en $(-a, 0)$, $(0, a)$ y $(0, -a)$:

Tabla 1. Ecuaciones estándar de parábolas

Foco	Directriz	Ecuación
$(a, 0)$	$x = -a$	$y^2 = 4ax$
$(-a, 0)$	$x = a$	$y^2 = -4ax$
$(0, a)$	$y = -a$	$x^2 = 4ay$
$(0, -a)$	$y = a$	$x^2 = -4ay$

Propiedad focal de la parábola

Todas las secciones cónicas tienen propiedades focales interesantes y útiles, relacionadas con la forma en la que las superficies de revolución que las generan reflejan la luz si dichas superficies fueran espejos. Por ejemplo, una circunferencia reflejará claramente de vuelta y por el mismo camino cualquier rayo de luz emitida por una línea que pase por su centro. Las propiedades focales de las parábolas, elipses e hipérbolas se pueden obtener a partir de las propiedades de reflexión de una línea recta (es decir, un espejo plano) mediante argumentos geométricos elementales.

En medios con densidad óptica constante (es decir, medios donde la velocidad de la luz es constante) la luz viaja en línea recta. Esto es una consecuencia del Principio del Camino Mínimo, que dice que al viajar entre dos puntos, la luz toma el camino que requiere el mínimo tiempo de viaje. Dada una línea recta L en un plano y dos puntos A y B en el mismo plano y al mismo lado de L, el punto P de la recta L para el que la suma de las distancias $AP + PB$ es mínima, cumple que AP y PB forman ángulos iguales con L o, de forma equivalente, con la normal a L en P (*véase* la Figura 8.4). Si B' es un punto tal que L corta al segmento BB' en dos mitades iguales, entonces P es la intersección de L y AB'. Como la longitud de todo lado de un triángulo debe ser menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados,

$$AP + PB = AP + PB' = AB' \leqslant AQ + QB' = AQ + QB$$

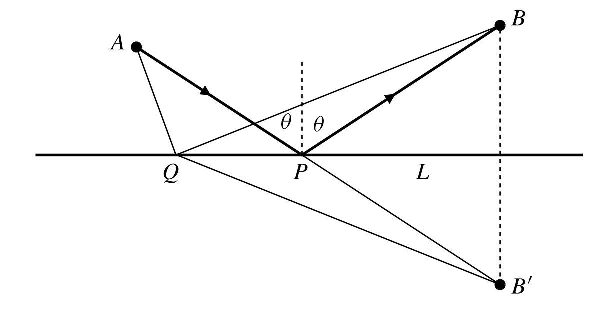


Figura 8.4 Reflexión en una línea recta.

> **Reflexión en una línea recta**
>
> El punto P de la recta L en el que un rayo procedente de A se refleja pasando por B es el punto que minimiza la suma de las distancias $AP + PB$.

Consideremos ahora una parábola de foco F y directriz D. Sea P un punto de la parábola y sea T la recta tangente a la parábola en P (*véase* la Figura 8.5). Sea Q un punto cualquiera de la recta T. Entonces FQ cruza a la parábola en el punto X entre F y Q. Sean M y N dos puntos de D tales que MX y NP son perpendiculares a D, y sea A un punto de la recta que pasa por N y P que está al mismo lado de la parábola que F. Tenemos que

$$\begin{aligned} FP + PA = NP + PA = NA &\leqslant MX + XA = FX + XA \\ &\leqslant FX + XQ + QA = FQ + QA \end{aligned}$$

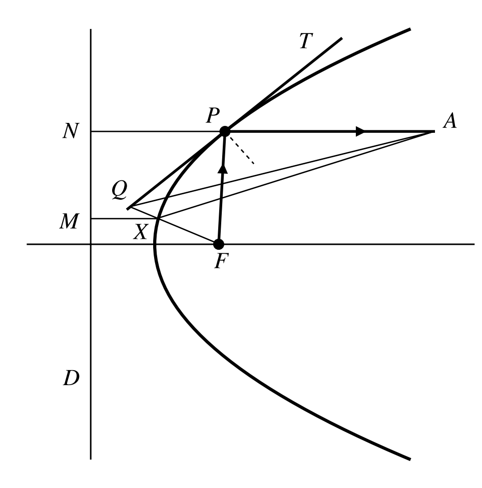


Figura 8.5 Reflexión en una parábola.

¡¡ ATENCIÓN !! Considere las ecuaciones e inecuaciones de esta cadena de una en una. ¿Por qué es cada una de ellas cierta?

Por tanto, entre todos los puntos Q de la recta T, $Q = P$ es el único que minimiza la suma de distancias $FQ + QA$. Por la observación hecha sobre las rectas anteriores, FP y PA forman ángulos iguales con T y, por tanto, también con la normal a la parábola en P (la parábola y la tangente tienen la misma normal en P).

Reflexión en una parábola

Cualquier rayo que salga del foco será reflejado formando una paralela con el eje de la parábola. En otras palabras, cualquier rayo incidente paralelo al eje de la parábola se reflejará pasando por su foco.

Elipses

DEFINICIÓN 2 Elipses

Una **elipse** está formada por todos los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (los **focos**) es constante.

Ejemplo 2 Obtenga la elipse cuyos focos están en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ si la suma de las distancias a los dos focos de cualquier punto P de la elipse es $2a$.

Solución La elipse pasa por los cuatro puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$, siendo $b^2 = a^2 - c^2$ (*véase* la Figura 8.6). Además, si $P = (x, y)$ es un punto de la elipse, entonces

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Pasando un término del miembro izquierdo al derecho y elevando al cuadrado se obtiene

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

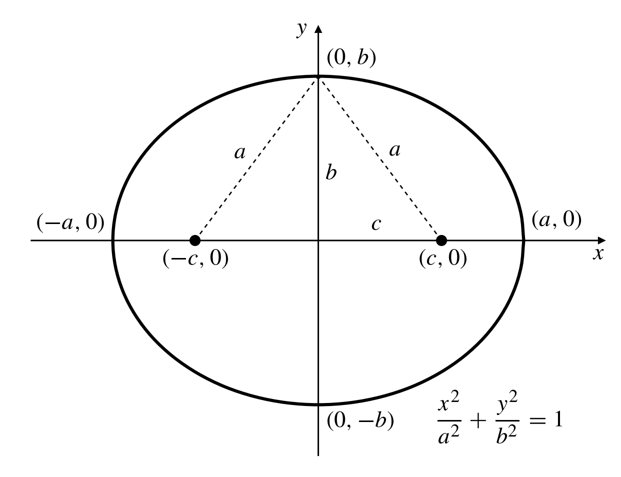


Figura 8.6 Una elipse.

Desarrollando ahora los cuadrados, simplificando términos, ordenando y elevando al cuadrado de nuevo:

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Finalmente, se sustituye a^2-c^2 por b^2 y se divide por a^2b^2 para obtener la ecuación estándar de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Las siguientes cantidades describen a la elipse:

a	es el **semieje mayor**
b	es el **semieje menor**
$c=\sqrt{a^2-b^2}$	es la **semidistancia focal**

El punto que está en la mitad de los focos se denomina **centro** de la elipse. En el ejemplo anterior es el origen. Nótese que $a > b$ en este ejemplo. Si $a < b$, entonces la elipse tiene sus focos en $(0, c)$ y $(0, -c)$, siendo $c=\sqrt{b^2-a^2}$. La recta que pasa por los focos (el **eje mayor**) y la recta que pasa por el centro perpendicular a la anterior (el **eje menor**) se denominan **ejes principales** de la elipse.

La **excentricidad** de una elipse es la razón entre la semidistancia focal y el semieje mayor. Expresaremos la excentricidad como ε. En el caso de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con $a > b$:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

Nótese que $\varepsilon < 1$ para cualquier elipse; cuanto mayor es el valor de ε, más elongada (menos circular) es la elipse. Si $\varepsilon = 0$, de forma que $a = b$ y $c = 0$, los dos focos coinciden y la elipse se convierte en una circunferencia.

La propiedad focal de la elipse

Sea P un punto de una elipse cuyos focos son F_1 y F_2. La normal a la elipse en P es la bisectriz del ángulo que forman las rectas F_1P y F_2P.

> **Reflexión en una elipse**
>
> Cualquier rayo procedente de un foco de la elipse se reflejará hacia el otro foco.

Para ver que esto es así, obsérvese que si Q es un punto cualquiera de la recta T tangente a la elipse en el punto P, entonces F_1Q cruza a la elipse en un punto X entre F_1 y Q (*véase* la Figura 8.7), de forma que

$$F_1P + PF_2 = F_1X + XF_2 \leqslant F_1X + XQ + QF_2 = F_1Q + QF_2$$

Entre todos los puntos de T, P es el que minimiza la suma de las distancias a F_1 y F_2. Esto implica que la normal a la elipse en P es la bisectriz del ángulo F_1PF_2.

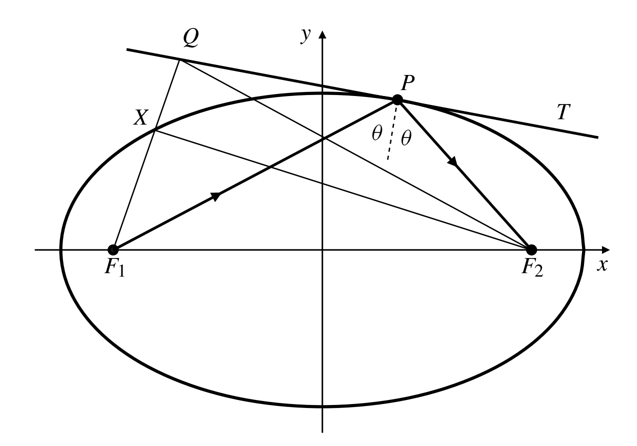


Figura 8.7 Un rayo procedente de un foco de la elipse se refleja hacia el otro foco.

Directrices de una elipse

Si $a > b > 0$, las dos rectas $x = a/\varepsilon$ y $x = -a/\varepsilon$ se denominan **directrices** de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Si P es un punto de la elipse, entonces la razón de la distancia desde P a un foco de la elipse y la correspondiente directriz es igual a la excentricidad ε. Si $P = (x, y)$, F es el foco $(c, 0)$, Q es la correspondiente directriz $x = a/\varepsilon$ y PQ es perpendicular a la directriz, entonces (*véase* la Figura 8.8)

$$\begin{aligned}
PF^2 &= (x - c)^2 + y^2 \\
&= x^2 - 2cx + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\
&= x^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) - 2cx + a^2 - b^2 + b^2 \\
&= \varepsilon^2x^2 - 2\varepsilon ax + a^2 \qquad \text{(ya que } c = \varepsilon a) \\
&= (a - \varepsilon x)^2
\end{aligned}$$

Así, $PF = a - \varepsilon x$. Además, $QP = (a/\varepsilon) - x = (a - \varepsilon x)/\varepsilon$. Por tanto, se cumple $PF/QP = \varepsilon$.

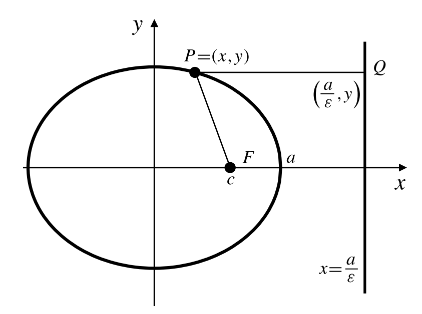


Figura 8.8 Un foco y la correspondiente directriz de una elipse.

Una parábola puede considerarse como el caso límite de una elipse cuya excentricidad crece hasta 1. La distancia entre los focos es infinita, por lo que el centro, un foco y su correspondiente directriz se han desplazado hasta el infinito dejando únicamente en el plano finito un foco y su directriz.

Hipérbolas

DEFINICIÓN 3 Hipérbolas

Una **hipérbola** está formada por todos los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (los **focos**) es constante.

Ejemplo 3 Si los focos de una hipérbola son $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$, y la diferencia de las distancias de un punto $P = (x, y)$ de la hipérbola a dichos focos es $2a$ (siendo $a < c$), entonces

$$PF_2 - PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \begin{cases} 2a & \text{(rama derecha)} \\ -2a & \text{(rama izquierda)} \end{cases}$$

Véase la Figura 8.9. Simplificando esta ecuación elevando al cuadrado y ordenando términos, tal como se hizo en el caso de la elipse en el Ejemplo 2, se obtiene la ecuación estándar de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

siendo $b^2 = c^2 - a^2$.

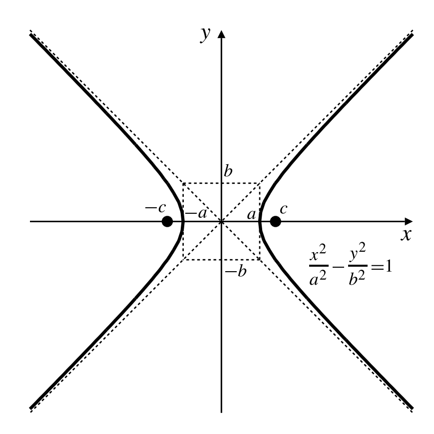


Figura 8.9

Los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ (denominados **vértices**) pertenecen a la hipérbola, cada uno a una rama. Las dos ramas corresponden a las intersecciones del plano de la hipérbola con las dos partes del cono. Algunos parámetros que se utilizan para describir la hipérbola son

a	es el **semieje transversal**
b	es el **semieje conjugado**
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	es la **semidistancia focal**

El punto medio del segmento F_1F_2 (en este caso el origen) se denomina **centro** de la hipérbola. La línea que pasa por el centro, los vértices y los focos se denomina **eje transversal**. La línea que pasa por el centro y es perpendicular al eje transversal se denomina **eje conjugado**. El eje conjugado no corta a la hipérbola. Si se dibuja un rectángulo de lados $2a$ y $2b$, centrado en el centro de la hipérbola y con dos de sus lados tangentes a dicha hipérbola en sus vértices, entonces las dos diagonales del rectángulo son **asíntotas** de la hipérbola. Sus ecuaciones son $(x/a) \pm (y/b) = 0$; es decir, son soluciones de la ecuación degenerada

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

La hipérbola se aproxima tanto como deseemos a esas rectas a medida que nos alejamos del origen (*véase* la Figura 8.10). Una hipérbola **rectangular** es aquella cuyas asíntotas son rectas perpendiculares (esto se cumple si $b = a$).

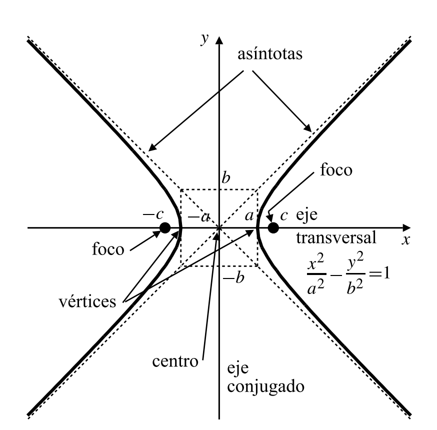


Figura 8.10 Términos asociados a una hipérbola.

La excentricidad de la hipérbola es

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Nótese que $\varepsilon > 1$. Las rectas $x = \pm(a/\varepsilon)$ reciben el nombre de **directrices** de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ (*véase* la Figura 8.11). De forma similar al caso de la elipse, se puede demostrar que si P es un punto de la hipérbola, entonces

$$\frac{\text{distancia de } P \text{ a un foco}}{\text{distancia de } P \text{ a la correspondiente directriz}} = \varepsilon$$

La excentricidad de una hipérbola rectangular es $\sqrt{2}$.

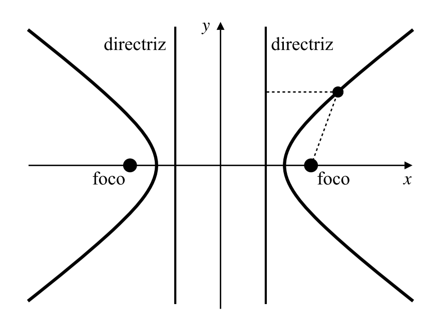


Figura 8.11 Directrices de una hipérbola.

Una hipérbola con las mismas asíntotas que $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, pero cuyo eje transversal es el eje y, sus vértices son $(0, b)$ y $(0, -b)$, y sus focos son $(0, c)$ y $(0, -c)$, se representa mediante la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad \text{en otros términos,} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Se dice que las dos hipérbolas son **conjugadas** entre sí (*véase* la Figura 8.12). El *eje conjugado* de una hipérbola es el *eje transversal* de su hipérbola conjugada. El eje transversal y el eje conjugado de una hipérbola se denominan en conjunto **ejes principales**.

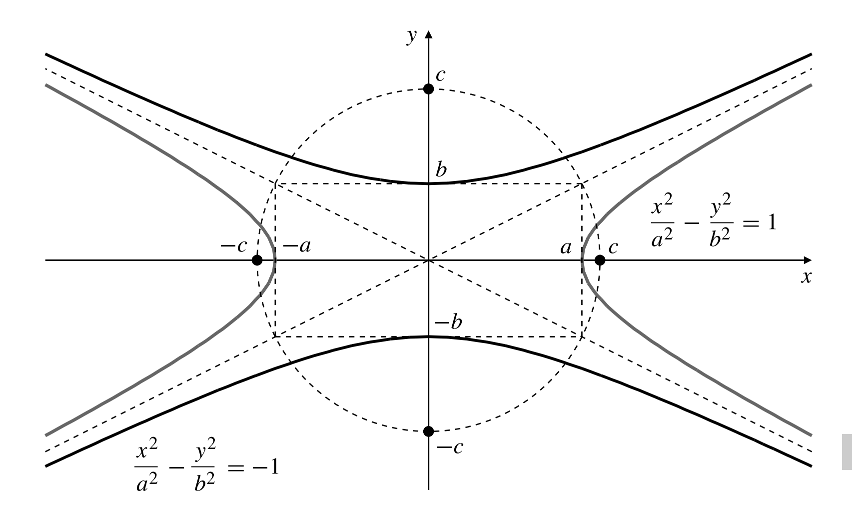


Figura 8.12 Dos hipérbolas conjugadas y sus asíntotas comunes.

Propiedad focal de una hipérbola

Sea un punto P cualquiera de una hipérbola cuyos focos son F_1 y F_2. Entonces la tangente a la hipérbola en el punto P es la bisectriz del ángulo que forman las rectas F_1P y F_2P.

Reflexión en una hipérbola

Un rayo procedente de uno de los focos de una hipérbola se refleja en dicha hipérbola de modo que parece provenir del otro foco.

Para ver que esto es así, sea P un punto de la rama derecha, sea T la recta tangente a la hipérbola en el punto P, y sea C una circunferencia de radio grande centrada en F_2 (*véase* la Figura 8.13). Sea D el punto donde la recta F_2P corta esta circunferencia. Sea Q un punto cualquiera de T. Entonces QF_1 corta a la hipérbola en un punto X situado entre Q y F_1, y F_2X corta a C en E.

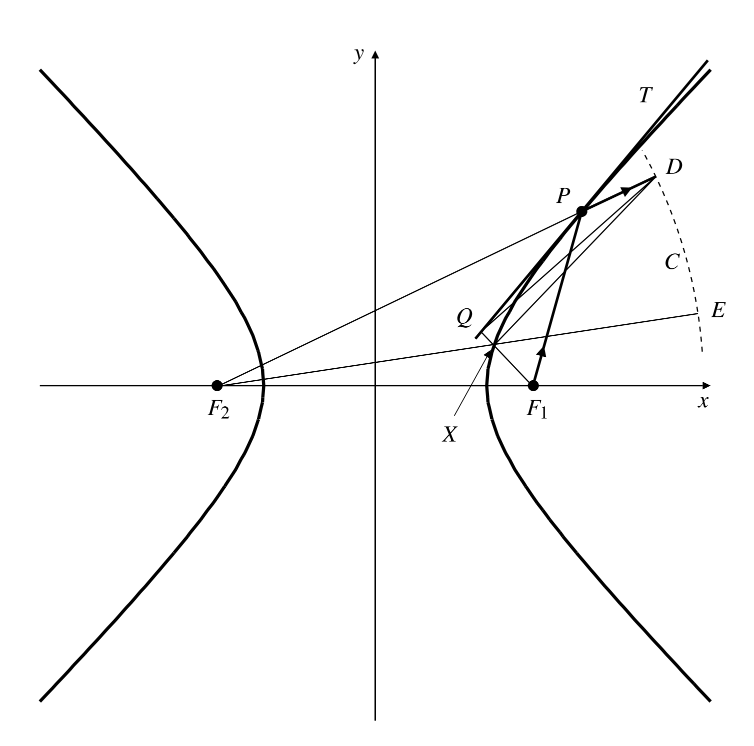


Figura 8.13 Un rayo procedente de un foco se refleja como si proviniera del otro foco.

Como X está en la recta radial F_2E, está más cerca de E que de cualquier otro punto de C. Es decir, $XE \leqslant XD$. Por tanto,

$$\begin{aligned} F_1P + PD &= F_1P + F_2D - F_2P \\ &= F_2D - (F_2P - F_1P) \\ &= F_2E - (F_2X - F_1X) \\ &= F_1X + F_2E - F_2X \\ &= F_1X + XE \\ &\leqslant F_1X + XD \\ &\leqslant F_1X + XQ + QD = F_1Q + QD \end{aligned}$$

P es el punto de T que minimiza la suma de las distancias F_1 y D. Por lo tanto, la normal a la hipérbola en P es la bisectriz del ángulo F_1PD. Por consiguiente, T es la bisectriz del ángulo F_1PF_2.

¡¡ ATENCIÓN !! Compruebe las ecuaciones e inecuaciones de la cadena anterior de una en una, asegurándose de que entiende por qué son verdaderas.

Clasificación de cónicas generales

Una ecuación de segundo grado en dos variables,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

representa en general una curva cónica, pero en ciertos casos degenerados puede representar dos líneas rectas ($x^2 - y^2 = 0$ representa las rectas $x = y$ y $x = -y$), una línea recta ($x^2 = 0$ representa la recta $x = 0$), un único punto ($x^2 + y^2 = 0$ representa el origen), o ningún punto en absoluto ($x^2 + y^2 = -1$ no se cumple para ningún punto del plano).

La naturaleza del conjunto de puntos representados por una ecuación de segundo grado se puede determinar escribiendo la ecuación de forma que se pueda reconocer como uno de los tipos estándar. Si $B = 0$, esto se puede hacer completando los cuadrados en los términos en x y en y.

Ejemplo 4 Describa la curva cuya ecuación es $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 7 = 0$.

Solución Se completan los cuadrados en los términos en x y en y, escribiendo la ecuación en la forma

$$x^2 + 6x + 9 + 2(y^2 - 2y + 1) = 9 + 2 - 7 = 4$$

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

Por tanto, representa una elipse conc centro en $(-3, 1)$, semieje mayor $a = 2$ y semieje menor $b = \sqrt{2}$. Como $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}$, los focos son $(-3 \pm \sqrt{2}, 1)$. *Véase* la Figura 8.14.

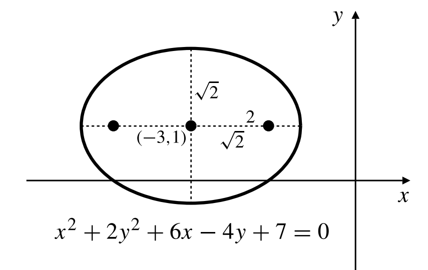


Figura 8.14

Si $B \neq 0$, la ecuación tiene un término xy, y no puede representar una circunferencia. Para ver lo que representa, se pueden rotar los ejes coordenados para producir una ecuación sin término xy. Sea un nuevo sistema de coordenadas (con ejes u y v), con el mismo origen pero rotado un ángulo θ con respecto a los ejes x e y anteriores (*véase* la Figura 8.15). Si las coordenadas de un punto P en los ejes antiguos son (x, y) y con respecto a los ejes nuevos son (u, v), entonces un análisis de triángulos en la figura permite demostrar que

$$x = OA - XA = OU\cos\theta - OV\operatorname{sen}\theta = u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta$$

$$y = XB + BP = OU\operatorname{sen}\theta + OV\cos\theta = u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

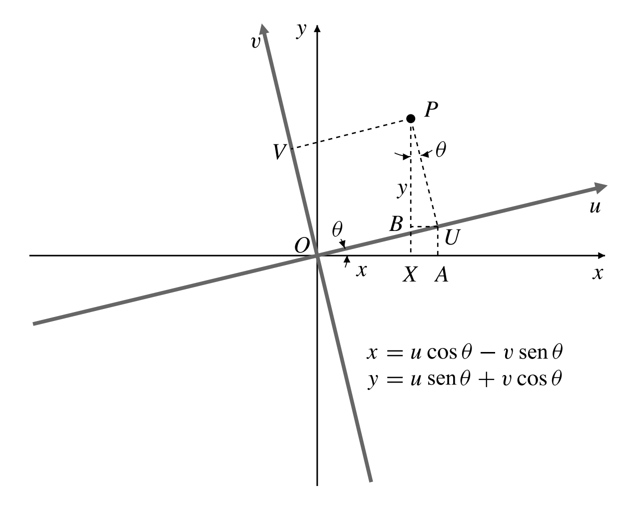


Figura 8.15 Rotación de ejes.

¡¡ ATENCIÓN !! Aquí es necesario un cálculo largo y tedioso. Los detalles se han omitido.

se llega a la nueva ecuación,

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F = 0$$

siendo

$$A' = \frac{1}{2}\,(A(1 + \cos 2\theta) + B\,\mathrm{sen}\,2\theta + C(1 - \cos 2\theta))$$
$$B' = (C - A)\,\mathrm{sen}\,2\theta + B\cos 2\theta$$
$$C' = \frac{1}{2}\,(A(1 - \cos 2\theta) - B\,\mathrm{sen}\,2\theta + C(1 + \cos 2\theta))$$
$$D' = D\cos\theta + E\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$E' = -D\,\mathrm{sen}\,\theta + E\cos\theta$$

Nótese que F no cambia. Si se escoge θ de forma que

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C} \qquad \text{o} \qquad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ si } A = C,\ B \neq 0$$

entonces $B' = 0$, y la nueva ecuación se puede analizar como se ha descrito anteriormente.

Ejemplo 5 Identifique la curva cuya ecuación es $xy = 1$.

Solución Es bastante probable que el lector ya sepa que la ecuación dada representa una hipérbola rectangular cuyas asíntotas son los ejes coordenados. Como la ecuación dada tiene $A = C = D = E = 0$ y $B = 1$, es apropiado rotar los ejes un ángulo de $\pi/4$, de forma que

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(u - v), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(u + v)$$

La ecuación transformada es $u^2 - v^2 = 2$, que es, como sospechábamos, una hipérbola rectangular con vértices en $u = \pm\sqrt{2}$, $v = 0$, focos en $u = \pm 2$, $v = 0$ y asíntotas $u = \pm v$. Por consiguiente, $xy = 1$ representa una hipérbola rectangular cuyas asíntotas son los ejes coordenados, sus vértices están en $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ y sus focos están en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Ejemplo 6 Demuestre que la curva $2x^2 + xy + y^2 = 2$ es una elipse y calcule las longitudes de sus semiejes mayor y menor.

Solución En este ejemplo, $A = 2$, $B = C = 1$, $D = E = 0$ y $F = -2$. Rotamos los ejes un ángulo θ, siendo $\tan 2\theta = B/(A - C) = 1$. Por tanto, $B' = 0$, $2\theta = \pi/4$ y $\mathrm{sen}\,2\theta = \cos 2\theta = 1/\sqrt{2}$. Tenemos que

$$A' = \frac{1}{2}\left[2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$$

$$C' = \frac{1}{2}\left[2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$$

La ecuación transformada es $(3 + \sqrt{2})u^2 + (3 - \sqrt{2})v^2 = 4$, que representa una elipse cuyo semieje mayor tiene una longitud de $2/\sqrt{3 - \sqrt{2}}$ y cuyo semieje menor tiene una longitud de $2/\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ (en la Sección 13.3 descubriremos otra forma de preguntar esto).

Ejercicios 8.1

Calcule las ecuaciones de las cónicas que se especifican en los Ejercicios 1-6.

1. Elipse con focos en $(0, \pm 2)$ y semieje mayor de longitud 3.

2. Elipse con focos en (0, 1) y (4, 1) y excentricidad 1/2.

3. Parábola con foco en (2, 3) y vértice en (2, 4).

4. Parábola que pasa por el origen, su foco está en $(0, -1)$ y su eje está en la recta $y = -1$.

5. Hipérbola con focos en $(0, \pm 2)$ y semieje transversal de longitud 1.

6. Hipérbola con focos en $(\pm 5, 1)$ y asíntotas $x = \pm(y - 1)$.

En los Ejercicios 7-15, identifique y dibuje el conjunto de puntos del plano que satisfacen las ecuaciones dadas. Especifique las asíntotas de las posibles hipérbolas.

7. $x^2 + y^2 + 2x = 1$

8. $x^2 + 4y^2 - 4y = 0$

9. $4x^2 + y^2 - 4y = 0$

10. $4x^2 - y^2 - 4y = 0$

11. $x^2 + 2x - y = 3$

12. $x + 2y + 2y^2 = 1$

13. $x^2 - 2y^2 + 3x + 4y = 2$

14. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y = -13$

15. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y = 23$

16. Identifique y dibuje la curva que es la gráfica de la ecuación $(x - y)^2 - (x + y)^2 = 1$.

***17.** Los rayos de luz en el plano *xy* procedentes del punto (3, 4) se reflejan en una parábola de manera que forman un rayo paralelo al eje *x*. La parábola pasa por el origen. Obtenga su ecuación (existen dos respuestas posibles).

18. Los rayos de luz en el plano *xy* procedentes del origen se reflejan en una elipse de forma que convergen en el punto (3, 0). Calcule todas las posibles ecuaciones de dicha elipse.

En los Ejercicios 19-22, identifique la cónica y calcule su centro, ejes principales, focos y excentricidad. Especifique las asíntotas de las posibles hipérbolas.

19. $xy + x - y = 2$

***20.** $x^2 + 2xy + y^2 = 4x - 4y + 4$

***21.** $8x^2 + 12xy + 17y^2 = 20$

***22.** $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y = 0$

23. La *definición foco-directriz de una cónica* define ésta como un conjunto de puntos *P* del plano que satisface la condición

$$\frac{\text{distancia de } P \text{ a } F}{\text{distancia de } P \text{ a } D} = \varepsilon$$

siendo *F* un punto fijo, *D* una recta fija y ε un número positivo fijo. La cónica es una elipse, una parábola o una hipérbola dependiendo de si $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ o $\varepsilon > 1$. Calcule la ecuación de la cónica si *F* es el origen y *D* es la recta $x = -p$.

Otro parámetro asociado con las cónicas es el **semi-latus rectum**, que se denota generalmente como ℓ. En el caso de una circunferencia es igual a su radio. Para otras cónicas, es la mitad de la longitud de la cuerda que pasa por un foco y es perpendicular al eje (para una parábola), al eje mayor (para una elipse) o al eje transversal (para una hipérbola). Dicha cuerda se denomina **latus rectum** de la cónica.

24. Demuestre que el semi-latus rectum de la parábola es el doble de la distancia de su vértice a su foco.

25. Demuestre que el semi-latus rectum de una elipse con semieje mayor *a* y semieje menor *b* es $\ell = b^2/a$.

26. Demuestre que la fórmula del ejercicio anterior coincide con la del semi-latus rectum de una hipérbola con semieje transversal *a* y semieje conjugado *b*.

***27.** Suponga que un plano corta a un cono circular recto formando una elipse, y que dos esferas (una en cada lado del plano), se inscriben entre el cono y el plano de forma que cada una de ellas es tangente al cono en una circunferencia y es también tangente al plano en un punto. Demuestre que los puntos donde esas dos esferas tocan al plano son los focos de la elipse. *Sugerencia*: Todas las rectas tangentes a una esfera desde un punto dado en el exterior de dicha esfera tienen la misma longitud. La distancia entre las dos circunferencias en las que las esferas cortan al cono, medidas sobre generatrices del cono (es decir, rectas en el cono), es la misma para todas las generatrices.

***28.** Formule y demuestre un resultado análogo al del Ejercicio 27 pero con una hipérbola.

***29.** Suponga que un plano corta a un cono circular recto formando una parábola con vértice en *V*. Suponga que se inscribe una esfera entre el cono y el plano, como en los ejercicios anteriores, que es tangente al plano de la parábola en el punto *F*. Demuestre que la cuerda a la parábola que pasa por *F* y que es perpendicular a la recta *FV* tiene una longitud igual a la del latus rectum de la parábola. Por tanto, *F* es el foco de la parábola.

8.2 Curvas paramétricas

Supongamos que un objeto se mueve por el plano xy de forma que las coordenadas de su posición en cualquier instante t son funciones continuas de la variable t:

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

El camino seguido por el objeto es una curva $\mathcal{C}$ en el plano, especificada por las dos ecuaciones anteriores, que denominaremos *ecuaciones paramétricas* de $\mathcal{C}$. Una curva especificada por una pareja concreta de ecuaciones paramétricas se denomina *curva paramétrica*.

DEFINICIÓN 4 Curvas paramétricas

Una **curva paramétrica** $\mathcal{C}$ en el plano está formada por un par ordenado (f, g) de funciones continuas, ambas definidas en el mismo intervalo I. Las ecuaciones

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad \text{para } t \text{ en } I$$

se denominan **ecuaciones paramétricas** de la curva $\mathcal{C}$. La variable independiente t se denomina **parámetro**.

Nótese que la curva paramétrica $\mathcal{C}$ no se define como un conjunto de puntos del plano, sino como un par ordenado de funciones cuyo rango es ese conjunto de puntos. Diferentes pares de funciones pueden producir el mismo conjunto de puntos del plano, pero puede ser conveniente considerarlas como curvas paramétricas diferentes. No obstante, denominaremos a menudo curva $\mathcal{C}$ al conjunto de puntos seguido por (x, y) cuando t se mueve por I. El eje (recta real) del parámetro t es diferente de los ejes coordenados del plano de la curva (*véase* la Figura 8.16). Generalmente, denominaremos t al parámetro. En muchas aplicaciones el parámetro representa tiempo, pero no es necesario que sea así. Como f y g se suponen funciones continuas, la curva $x = f(t)$, $y = g(t)$ no presenta saltos. Una curva paramétrica tiene una *dirección* (indicada, por ejemplo, mediante flechas), que es la dirección correspondiente a los valores crecientes del parámetro t, como se muestra en la Figura 8.16.

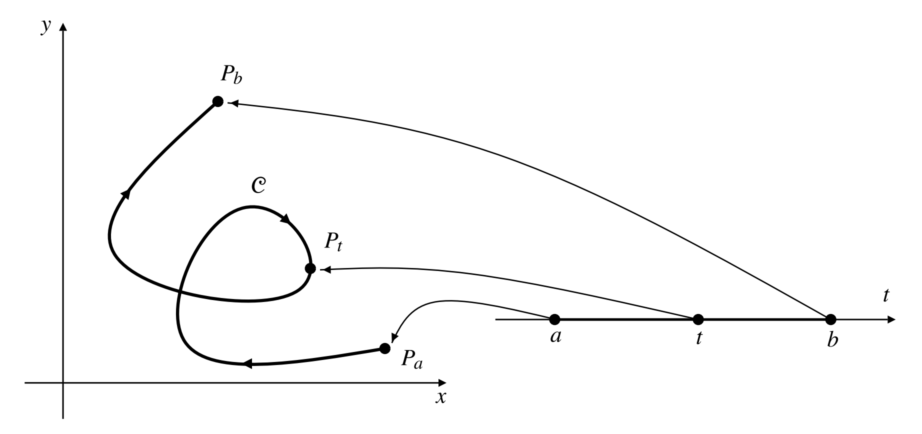


Figura 8.16 Una curva paramétrica.

Ejemplo 1 Dibuje e identifique la curva paramétrica

$$x = t^2 - 1, \qquad y = t + 1 \qquad (-\infty < t < \infty)$$

Solución Podríamos construir una tabla con valores de x e y en función de valores de t, con lo que se obtendrían las coordenadas de algunos puntos de la curva. Sin embargo, en este ejemplo es más fácil *elimi-*

nar el parámetro de la pareja de ecuaciones paramétricas y obtener así una única ecuación en x e y cuya gráfica es la curva deseada:

$$t = y - 1, \qquad x = t^2 - 1 = (y-1)^2 - 1 = y^2 - 2y$$

Todos los puntos de la curva están en la parábola $x = y^2 - 2y$. Como $y \to \pm\infty$ cuando $t \to \pm\infty$, la curva paramétrica es la parábola completa (*véase* la Figura 8.17).

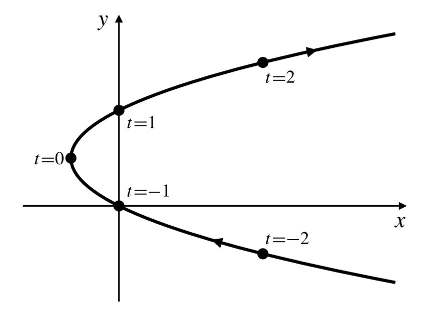


Figura 8.17 La parábola definida paramétricamente como $x = t^2 - 1$, $y = t + 1$, $(-\infty < t < \infty)$.

■

Aunque la curva del Ejemplo 1 se identifica más fácilmente cuando se elimina el parámetro, al pasar a la forma no paramétrica se produce una pérdida de información. Concretamente, se pierde el sentido de la curva como el camino que sigue un punto que se mueve y, por tanto, también la dirección de la curva. Si la variable t en la forma paramétrica indica el tiempo en el que un objeto está en el punto (x, y), la ecuación no paramétrica $x = y^2 - 2y$ ya no indica en qué punto está el objeto en el instante concreto t.

Ejemplo 2 **(Ecuaciones paramétricas de una recta)** Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$ (*véase* la Figura 8.18) son:

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

Para ver que estas ecuaciones representan una línea recta, nótese que

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \text{constante} \qquad (\text{suponiendo } x_1 \neq x_0)$$

El punto $P = (x, y)$ está en la posición P_0 cuando $t = 0$, y en la posición P_1 cuando $t = 1$. Si $t = 1/2$, entonces P está en el punto medio entre P_0 y P_1. Nótese que el segmento que va de P_0 a P_1 corresponde a valores de t entre 0 y 1.

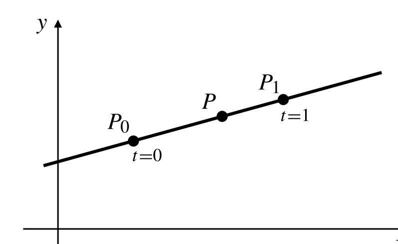


Figura 8.18

■

Ejemplo 3 **(Arco de una circunferencia)** Dibuje e identifique la curva $x = 3\cos t$, $y = 3\,\mathrm{sen}\, t$, $(0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2)$.

Solución Como $x^2 + y^2 = 9\cos^2 t + 9\,\mathrm{sen}^2 t = 9$, todos los puntos de la curva están en la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. Cuando t aumenta desde 0, pasando por $\pi/2$ y π hasta $3\pi/2$, el punto (x, y) se mueve desde (3, 0), pasando por (0, 3) y (−3, 0), hasta (0, −3). La curva paramétrica corresponde a las tres cuartas partes

de una circunferencia (*véase* la Figura 8.19). El parámetro t tiene en este ejemplo un significado geométrico. Si P_t es el punto de la curva que corresponde a un valor del parámetro t, entonces t es el ángulo medido desde el centro de la circunferencia correspondiente al arco recorrido desde el punto inicial hasta P_t.

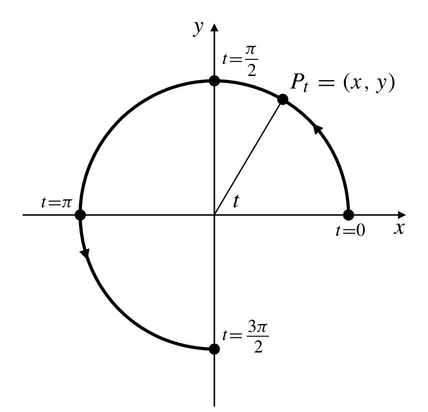


Figura 8.19

Ejemplo 4 **(Ecuaciones paramétricas de una elipse)** Dibuje e identifique la curva $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, siendo $a > b > 0$.

Solución Obsérvese que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \text{sen}^2\, t = 1$$

Por tanto, la curva es una elipse parcial o completa, cuyo eje mayor va desde $(-a, 0)$ hasta $(a, 0)$, y cuyo eje menor va desde $(0, -b)$ hasta $(0, b)$. Cuando t aumenta desde 0 hasta 2π, el punto (x, y) se mueve por la elipse en sentido contrario al de las agujas del reloj, empezando en $(a, 0)$ y volviendo al mismo punto. Por tanto, la curva es la elipse completa.

La Figura 8.20(a) muestra cómo se puede interpretar el parámetro t como un ángulo, y cómo se pueden obtener los puntos de la elipse utilizando circunferencias de radios a y b. Como la curva empieza y termina en el mismo punto, se denomina **curva cerrada**.

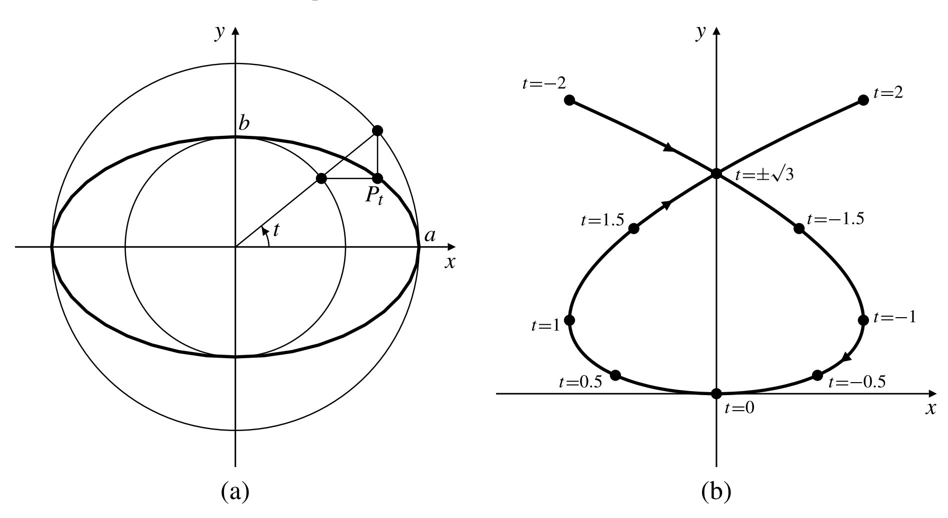


Figura 8.20 Elipse parametrizada en función de un ángulo y construida con la ayuda de dos circunferencias.
(b) Una curva paramétrica que se cruza consigo misma.

Ejemplo 5 Dibuje la curva paramétrica

$$x = t^3 - 3t, \qquad y = t^2, \qquad (-2 \leqslant t \leqslant 2)$$

Solución Eliminando el parámetro se obtiene

$$x^2 = t^2(t^2 - 3)^2 = y(y - 3)^2$$

pero esto no resulta de mucha ayuda ya que no podemos reconocer esta curva a partir de su ecuación en coordenados cartesianas. Lo que haremos será calcular las coordenadas de algunos puntos:

Tabla 2. Coordenadas de algunos puntos de la curva del Ejemplo 5

t	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	$\frac{9}{8}$	2	$\frac{11}{8}$	0	$-\frac{11}{8}$	-2	$-\frac{9}{8}$	2
y	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

Nótese que la curva es simétrica respecto al eje y ya que x es una función impar de t e y es una función par de t (en t y $-t$, x tiene valores de signo contrario, e y tiene el mismo valor).

La curva se cruza consigo misma en el eje y (*véase* la Figura 8.20(b)). Para encontrar el punto de intersección, se hace $x = 0$:

$$0 = x = t^3 - 3t = t(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})$$

Para $t = 0$, la curva está en (0, 0), pero para $t = \pm\sqrt{3}$, la curva está en (0, 3). El punto de intersección consigo misma se produce porque la curva pasa por el mismo punto para dos valores diferentes del parámetro. ■



Observación He aquí cómo conseguir que Maple dibuje la curva paramétrica del ejemplo anterior. Nótense los corchetes que rodean a las dos funciones $t^3 - 3t$ y t^2, y el intervalo de valor del parámetro, seguido por los rangos de x e y en la gráfica.

```
> plot([t^3-3*t, t^2, t=-2..2], x=-3..3, y=-1..5);
```

Curvas planas generales y parametrizaciones

De acuerdo con la Definición 4, una curva paramétrica siempre está definida mediante un conjunto particular de ecuaciones paramétricas; no es sólo un conjunto de puntos del plano. Cuando estamos interesados en considerar una curva únicamente como un conjunto de puntos (un *objeto geométrico*), no es necesario preocuparse por la pareja de ecuaciones en concreto que representa a la curva. En este caso la curva es simplemente una *curva plana*.

DEFINICIÓN 5 **Curvas planas**

Una **curva plana** es un conjunto de puntos (x, y) del plano tales que $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para algún valor de t en el intervalo I, siendo f y g funciones continuas definidas en I. A dicho intervalo I y al par de funciones (f, g) que generan los puntos de $\mathcal{C}$ se los denomina **parametrización** de $\mathcal{C}$.

Como una curva plana no está ligada a una parametrización específica, tampoco tiene una dirección específica.

Ejemplo 6 La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es una curva plana. A continuación se presentan algunas posibles parametrizaciones de dicha circunferencia:

(i) $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

(ii) $x = \operatorname{sen} s^2,\ y = \cos s^2, \qquad (0 \leqslant s \leqslant \sqrt{2\pi})$

(iii) $x = \cos(\pi u + 1),\ y = \operatorname{sen}(\pi u + 1), \qquad (-1 \leqslant u \leqslant 1)$

(iv) $x = 1 - t^2,\ y = t\sqrt{2 - t^2}, \qquad (-\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2})$

Para verificar que cualquiera de ellas representa a la circunferencia se pueden sustituir las funciones de x e y en la expresión $x^2 + y^2$ y demostrar que el resultado se simplifica al valor de 1. Esto demuestra que la curva paramétrica es una circunferencia. Después se pueden examinar los rangos de x e y a medida que el parámetro varía en su dominio. Por ejemplo, en el caso (iv) tenemos

$$x^2 + y^2 = (1 - t^2)^2 + (t\sqrt{2 - t^2})^2 = 1 - 2t^2 + t^4 + 2t^2 - t^4 = 1$$

y (x, y) va desde $(-1, 0)$ pasando por $(0, -1)$ hasta $(1, 0)$ cuando t se incrementa desde $-\sqrt{2}$, pasando por -1, hasta 0, y después continúa por $(0, 1)$ y vuelve a $(-1, 0)$ cuando t va desde 0, pasando por 1, hasta $\sqrt{2}$.

Existen, por supuesto, otras infinitas posibles parametrizaciones de esta curva. ■

Ejemplo 7 Si f es una función continua en un intervalo I, entonces la gráfica de f es una curva plana. Una posible parametrización obvia de esta curva es

$$x = t, \qquad y = f(t), \qquad (t \text{ en } I)$$

■

Algunas curvas planas de interés

Completaremos esta sección parametrizando dos curvas que aparecen en el mundo físico.

Ejemplo 8 **(Cicloide)** Si una circunferencia rueda sin deslizamiento por una línea recta, calcule el camino que sigue un punto fijo del círculo. Ese camino se denomina **cicloide**.

Solución Supongamos que la recta sobre la que rueda la circunferencia es el eje x, que la circunferencia tiene radio a y está sobre dicha recta y que el punto cuyo movimiento vamos a seguir está inicialmente en el origen O (*véase* la Figura 8.21). Después de que el círculo haya rodado un ángulo t, es tangente a la recta en T, y el punto cuya trayectoria estamos siguiendo se habrá movido hasta la posición P, como muestra la citada figura. Como no hay deslizamiento,

$$\text{segmento } OT = \text{arco } PT = at$$

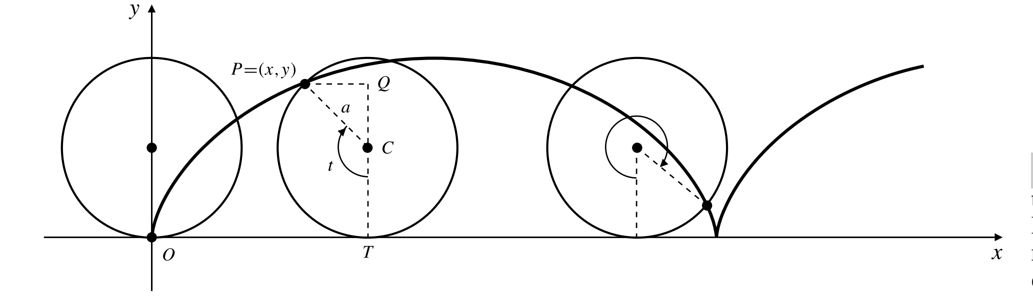


Figura 8.21 El punto P traza los arcos de la cicloide a medida que la rueda realiza una revolución completa.

Sea PQ perpendicular a TC, como se muestra la figura. Si las coordenadas de P son (x, y), entonces

$$x = OT - PQ = at - a \operatorname{sen}(\pi - t) = at - a \operatorname{sen} t$$

$$y = TC + CQ = a + a \cos(\pi - t) = a - a \cos t$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

Obsérvese que la cicloide presenta un vértice en los puntos donde vuelve al eje x, es decir, en los puntos correspondientes a $t = 2n\pi$, siendo n un entero. Aunque las funciones x e y son funciones diferenciables en t, la curva no es suave en todas partes. En la sección siguiente consideraremos estos aspectos.

Los problemas de la braquistócrona y de la tautócrona

Suponga que se dobla un alambre desde un punto A hasta un punto más bajo B y que una pequeña cuenta puede deslizarse sin rozamiento por dicho alambre. Si la cuenta se suelta en el punto A, se deslizará hasta el punto B. ¿Qué curva se debería utilizar para minimizar el tiempo que tarda en ir desde A hasta B? Este problema, denominado de la *braquistócrona* (del griego «tiempo mínimo»). Tiene como solución parte de un arco de cicloide puesto boca abajo. Es más, la cuenta emplea la misma cantidad de tiempo en deslizarse desde cualquier punto de la curva al punto más bajo B, por lo que la cicloide es también la solución del problema de la *tautócrona* («mismo tiempo»). Examinaremos estos aspectos posteriormente, en los Problemas Avanzados del final del Capítulo 11.

Ejemplo 9 **(Involución de una circunferencia)** Se enrolla una cuerda alrededor de una circunferencia fija. Uno de sus extremos se desenrrolla de forma que la parte de la cuerda que no está en la circunferencia se extiende en forma de línea recta. La curva que sigue este extremo libre de la curva se denomina **involución** de la circunferencia (la involución de cualquier curva es el camino que sigue un extremo de dicha curva cuando se desenrolla empezando por ese extremo).

Suponga que la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = a^2$, y que el extremo de la cuerda que se desenrolla empieza en el punto $A = (a, 0)$. En algún instante posterior mientras se desenrolla, denominaremos P a la posición del extremo de la cuerda, y T al punto donde la cuerda deja a la circunferencia. La recta PT debe ser tangente a la circunferencia en T.

Parametrizaremos a continuación el camino que sigue P en función del ángulo AOT, que denominaremos t. Sean los puntos R en OA y S en TR, como se muestra en la Figura 8.22. TR es perpendicular a OA y a PS. Nótese que

$$OR = OT \cos t = a \cos t, \qquad RT = OT \operatorname{sen} t = a \operatorname{sen} t$$

Como el ángulo OTP es de 90º, el ángulo $STP = t$. Como $PT = \operatorname{arc} AT = at$ (ya que la cuerda no se enrolla ni se desliza en la circunferencia), tenemos que

$$SP = TP \operatorname{sen} t = at \operatorname{sen} t, \qquad ST = TP \cos t = at \cos t$$

Si P tiene coordenadas a (x, y), entonces $x = OR + SP$ e $y = RT - ST$:

$$x = a \cos t + at \operatorname{sen} t, \qquad y = a \operatorname{sen} t - at \cos t, \qquad (t \geqslant 0)$$

que son las ecuaciones paramétricas de la involución.

Figura 8.22 Involución de una circunferencia.

Ejercicios 8.2

En los Ejercicios 1-10, dibuje las curvas paramétricas dadas, mostrando su dirección con una flecha. Elimine el parámetro para obtener una ecuación cartesiana en x e y cuya gráfica sea la curva paramétrica.

1. $x = 1 + 2t,\ y = t^2,\ (-\infty < t < \infty)$

2. $x = 2 - t,\ y = t + 1,\ (0 \leqslant t < \infty)$

3. $x = \dfrac{1}{t},\ y = t - 1,\ (0 < t < 4)$

4. $x = \dfrac{1}{1 + t^2},\ y = \dfrac{t}{1 + t^2},\ (-\infty < t < \infty)$

5. $x = 3\,\text{sen}\,2t,\ y = 3\cos 2t,\ \left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{3}\right)$

6. $x = a\sec t,\ y = b\tan t,\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$

7. $x = 3\,\text{sen}\,\pi t,\ y = 4\cos \pi t,\ (-1 \leqslant t \leqslant 1)$

8. $x = \cos\text{sen}\,s,\ y = \text{sen}\,\text{sen}\,s,\ (-\infty < s < \infty)$

9. $x = \cos^3 t,\ y = \text{sen}^3 t,\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

10. $x = 1 - \sqrt{4 - t^2},\ y = 2 + t,\ (-2 \leqslant t \leqslant 2)$

11. Describa la curva paramétrica $x = \cosh t$, y calcule su ecuación en cartesianas.

12. Describa la curva paramétrica $x = 2 - 3\cosh t$, $y = -1 + 2\,\text{senh}\,t$.

13. Describa la curva $x = t\cos t,\ y = t\,\text{sen}\,t,\ (0 \leqslant t \leqslant 4\pi)$.

14. Demuestre que cada uno de los siguientes conjuntos de ecuaciones paramétricas representa un arco diferente de la parábola cuya ecuación es $2(x + y) = 1 + (x - y)^2$.

(a) $x = \cos^4 t,\ y = \text{sen}^4 t$

(b) $x = \sec^4 t,\ y = \tan^4 t$

(c) $x = \tan^4 t,\ y = \sec^4 t$

15. Calcule una parametrización de la parábola $y = x^2$, utilizando como parámetro la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera.

16. Calcule una parametrización de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, utilizando como parámetro la pendiente m de la recta que une un punto cualquiera con el punto $(R, 0)$. ¿Falla la parametrización en la obtención de algún punto de la circunferencia?

17. Una circunferencia de radio a está centrada en el origen O. T es un punto de la circunferencia tal que OT forma un ángulo t con el eje x positivo. La tangente a la circunferencia en T cruza al eje x en el punto X. El punto $P = (x, y)$ es la intersección de la recta vertical que pasa por X y de la recta horizontal que pasa por T. Calcule, en función del parámetro t, ecuaciones paramétricas de la curva $\mathcal{C}$ que describe el punto P a medida que el punto T se mueve por la circunferencia. Elimine t y calcule una ecuación de $\mathcal{C}$ en función de x e y. Dibuje $\mathcal{C}$.

18. Repita el Ejercicio 17 con la siguiente modificación: OT cruza una segunda circunferencia de radio b centrada en O en el punto Y. $P = (x, y)$ es la intersección de la recta vertical que pasa por X y la recta horizontal que pasa por Y.

∗**19.** **(El folium de Descartes)** Elimine el parámetro de las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3t^2}{1+t^3} \qquad (t \neq -1)$$

y obtenga una ecuación ordinaria en x e y de esta curva. El parámetro t se puede interpretar como la pendiente de la recta que une el punto general (x, y) con el origen. Dibuje la curva y demuestre que la recta $x + y = -1$ es una asíntota.

∗**20.** **(Una cicloide prolada)** Una rueda de ferrocarril tiene una pestaña que se extiende por debajo del nivel de la vía sobre la que se mueve la rueda. Si el radio de la rueda es a y el de la pestaña es $b > a$, calcule las ecuaciones paramétricas del camino que sigue un punto P en la circunferencia de la pestaña a medida que la rueda se mueve por la vía (nótese que, durante una parte de cada revolución de la rueda, P se mueve hacia atrás). Intente dibujar la gráfica de esta cicloide prolada.

∗**21.** **(Hipocicloides)** Si una circunferencia de radio b rueda, sin deslizarse, por el interior de una circunferencia fija de radio $a > b$, un punto de la circunferencia que rueda traza una curva denominada hipocicloide. Si la circunferencia fija está centrada en el origen y el punto que traza la curva empieza en $(a, 0)$, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$x = (a-b)\cos t + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\,t\right)$$

$$y = (a-b)\,\mathrm{sen}\,t - b\,\mathrm{sen}\left(\frac{a-b}{b}\,t\right)$$

siendo t el ángulo entre el eje x positivo y la línea que va del origen al punto en el cual la circunferencia que rueda toca a la circunferencia fija.

Si $a = 2$ y $b = 1$, demuestre que la hipocicloide se convierte en un segmento de recta.

Si $a = 4$ y $b = 1$, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide se simplifican en la forma a $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\,\mathrm{sen}^3\,t$. Esta curva se denomina hipocicloide de cuatro vértices o **astroide** (*véase* la Figura 8.23). Su ecuación en cartesianas es $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$.

Las hipocicloides recuerdan a las curvas producidas por unos juguetes de niños muy populares denominados espirógrafos, pero las curvas de los espirógrafos resultan de seguir un punto en el interior del círculo que gira en lugar de en la circunferencia, y por tanto no tienen vértices agudos.

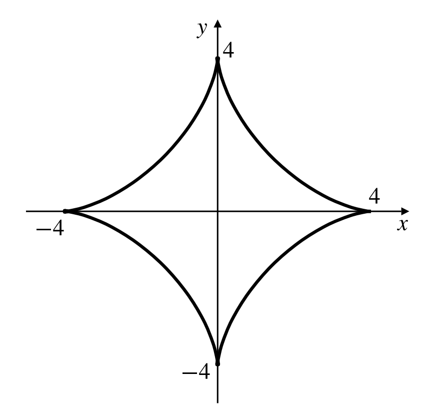


Figura 8.23 El astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$.

∗**22.** **(La bruja de Agnesi)**

(a) Demuestre que la curva que traza un punto P obtenido a partir de una circunferencia, como se muestra en la Figura 8.24, tiene como ecuaciones paramétricas $x = \tan t$, $y = \cos^2 t$ en función del ángulo t que se muestra en dicha figura (*Sugerencia*: Será necesario hacer un uso intensivo de la similitud de triángulos).

(b) Utilice una igualdad trigonométrica para eliminar t de las ecuaciones paramétricas y obtenga una ecuación ordinaria en cartesianas de dicha curva.

Esta curva toma su nombre de la matemática italiana Maria Agnesi (1718-1799), una de las mujeres más brillantes de su siglo y autora de un importante libro de cálculo. El término *bruja* se debe a una traducción errónea de la palabra italiana *versiera* («curva que gira»), utilizada para describir la curva. Dicha palabra es similar a *avversiera* («esposa del diablo» o «bruja»).

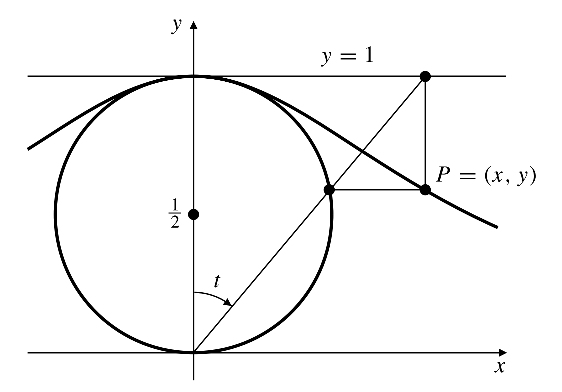


Figura 8.24 La bruja de Agnesi.

En los Ejercicios 23-26, obtenga las gráficas de las curvas $x = \mathrm{sen}\,(mt)$, $y = \mathrm{sen}\,(nt)$ para los valores dados de m y n. Estas curvas se denominan **figuras de Lissajous**. Aparecen cuando se analizan señales eléctricas utilizando un osciloscopio. Una señal de frecuencia fija, pero desconocida,

se aplica a la entrada vertical, y una señal de control se aplica a la entrada horizontal. La frecuencia horizontal se modifica hasta que se observa una figura de Lissajous estable. La frecuencia (conocida) de la señal de control y la forma de la figura permiten determinar la frecuencia desconocida.

23. $m = 1, \quad n = 2$ **24.** $m = 1, \quad n = 3$

25. $m = 2, \quad n = 3$ **26.** $m = 2, \quad n = 5$

27. **(Epicicloides)** Utilizando una calculadora gráfica o un programa de gráficos por ordenador, investigue el comportamiento de las curvas cuyas ecuaciones son de la forma



$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\cos t - \frac{1}{n}\cos(nt)$$

$$y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\operatorname{sen} t - \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nt)$$

para varios valores enteros y fraccionarios de $n \geqslant 3$. ¿Se pueden formular principios que gobiernan el comportamiento de estas curvas?

28. **(Más hipocicloides)** Utilice una calculadora gráfica o un programa de gráficos por ordenador para investigar el comportamiento de las curvas cuyas ecuaciones son de la forma

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\cos t + \frac{1}{n}\cos((n-1)t)$$

$$y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\operatorname{sen} t - \frac{1}{n}\operatorname{sen}((n-1)t)$$

para varios valores enteros y fraccionarios de $n \geqslant 3$. ¿Se pueden formular principios que gobiernan el comportamiento de estas curvas?

8.3 Curvas paramétricas suaves y sus pendientes

Se dice que una curva plana es suave si existe tangente en todo punto P de dicha curva, y dicha tangente evoluciona de una forma continua a medida que P recorre la curva (es decir, el ángulo que forman la tangente en P y otra recta fija, por ejemplo el eje x, es una función continua de la posición de P).

Si la curva $\mathcal{C}$ es la gráfica de una función f, entonces $\mathcal{C}$ será suave en cualquier intervalo donde exista la derivada $f'(x)$ y ésta sea una función continua de x. Puede ser también suave en intervalos que contengan puntos singulares aislados; por ejemplo, la curva $y = x^{1/3}$ es suave en todas partes, aunque dy/dx no exista en $x = 0$.

En el caso de curvas paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, la situación es más complicada. Aunque f y g tengan derivadas continuas en todas partes, esas curvas pueden no ser suaves en ciertos puntos, concretamente los puntos donde $f'(t) = g'(t) = 0$.

Ejemplo 1 Considere la curva paramétrica $x = f(t) = t^2$, $y = g(t) = t^3$. Eliminando t se llega a la curva en cartesianas $y^2 = x^3$ o $x = y^{2/3}$, que no es suave en el origen, incluso aunque $f'(t) = 2t$ y $g'(t) = 3t^2$ sean continuas para todo t (*véase* la Figura 8.25). Obsérvese que tanto f' como g' se anulan en $t = 0$: $f'(0) = g'(0) = 0$. Si vemos las ecuaciones paramétricas como una forma de especificar la posición de un

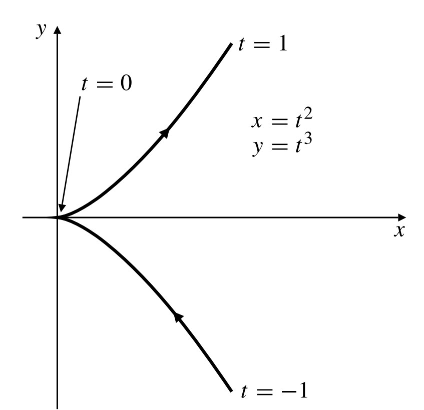


Figura 8.25 Esta curva no es suave en el origen y presenta allí un vértice.

punto móvil P en el instante t, entonces la velocidad horizontal es $f'(t)$ y la velocidad vertical es $g'(t)$. Ambas velocidades son 0 en $t = 0$, por lo que P se detiene en ese instante. Cuando empieza a moverse de nuevo, no necesita hacerlo en la misma dirección en la que iba cuando se detuvo. La cicloide del Ejemplo 8 de la Sección 8.2 es otro ejemplo en el que una curva paramétrica no es suave en puntos donde dx/dt y dy/dt se anulan. ■

Pendiente de una curva paramétrica

El teorema que sigue confirma que una curva paramétrica es suave en los puntos donde las derivadas de las funciones de sus coordenadas son continuas y no se anulan simultáneamente.

TEOREMA 1 Sea $\mathcal{C}$ la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde $f'(t)$ y $g'(t)$ son continuas en un intervalo I. Si $f'(t) \neq 0$ en I, entonces $\mathcal{C}$ es suave y tiene en cada valor de t una tangente cuya pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Si $g'(t) \neq 0$ en I, entonces $\mathcal{C}$ es suave y tiene en cada valor de t una normal cuya pendiente es

$$-\frac{dx}{dy} = -\frac{f(t)}{g'(t)}$$

Por tanto, $\mathcal{C}$ es suave excepto, posiblemente, en aquellos puntos donde $f'(t)$ y $g'(t)$ sean simultáneamente 0.

DEMOSTRACIÓN Si $f'(t) \neq 0$ en I, entonces f es o bien creciente o bien decreciente en I, y por tanto es uno a uno e invertible. La parte de $\mathcal{C}$ correspondiente a los valores de t en I tiene como ecuación ordinaria $y = g(f^{-1}(x))$, y por tanto su pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = g'(f^{-1}(x))\,\frac{d}{dx}\,f^{-1}(x) = \frac{g'(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Donde hemos utilizado la fórmula

$$\frac{d}{dx}\,f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

para expresar la derivada de una función inversa, que se obtuvo en la Sección 3.1. Esta pendiente es una función continua de t, por lo que la tangente a $\mathcal{C}$ evoluciona de forma continua con t en I. La demostración para $g'(t) \neq 0$ es similar. En este caso, la pendiente de la normal es una función continua de t, por lo que la normal evoluciona de forma continua, y así lo hace también la tangente. ●

Si f' y g' son continuas, y ambas se anulan en algún punto t_0, entonces la curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, *puede ser o no ser* continua alrededor de t_0. En el Ejemplo 1 se ha presentado un ejemplo de una curva que no es suave en un punto de ese tipo.

Ejemplo 2 La curva cuya parametrización es $x = t^3$, $y = t^6$ corresponde a la parábola $y = x^2$, por lo que es suave en todas partes, aunque $dx/dt = 3t^2$ y $dy/dt = 6t^5$ se anulen simultáneamente en $t = 0$. ■

Tangentes y normales a curvas paramétricas

Si f' y g' son continuas y no se anulan simultáneamente en t_0, entonces las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \\ y = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

representan la tangente a la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ en el punto $(f(t_0), g(t_0))$. Las ecuaciones paramétricas a la normal en ese punto son

$$\begin{cases} x = f(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) \\ y = g(t_0) - f'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

Ambas rectas pasan por $(f(t_0), g(t_0))$ cuando $t = t_0$.

Ejemplo 3 Calcule las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva paramétrica $x = t^2 - t$, $y = t^2 + t$ en el punto donde $t = 2$.

Solución En $t = 2$ tenemos que $x = 2$, $y = 6$ y

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 1 = 3, \qquad \frac{dy}{dt} = 2t + 1 = 5$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de las rectas tangente y normal son

$$\text{Tangente:} \quad \begin{cases} x = 2 + 3(t - 2) = 3t - 4 \\ y = 6 + 5(t - 2) = 5t - 4 \end{cases}$$

$$\text{Normal:} \quad \begin{cases} x = 2 + 5(t - 2) = 5t - 8 \\ y = 6 - 3(t - 2) = -3t + 12 \end{cases}$$

■

La concavidad de una curva paramétrica se puede determinar utilizando las segundas derivadas de las ecuaciones paramétricas. El procedimiento consiste en calcular d^2y/dx^2 utilizando la Regla de la Cadena:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^2}\,\frac{1}{f'(t)}$$

Concavidad de una curva paramétrica

En un intervalo donde $f'(t) \neq 0$, la concavidad de la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ está determinada por

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}$$

Dibujo de curvas paramétricas

Como en el caso del dibujo de gráficas de funciones, las derivadas proporcionan información de utilidad sobre la forma de una curva paramétrica. En los puntos donde $dy/dt = 0$ pero $dx/dt \neq 0$, la tangente es horizontal; en los puntos donde $dx/dt = 0$ pero $dy/dt \neq 0$, la tangente es vertical.

En los puntos donde $dx/dt = dy/dt = 0$ puede ocurrir cualquier cosa; es conveniente calcular los límites por la derecha y por la izquierda de la pendiente dy/dx cuando el parámetro t se aproxima a uno de esos puntos. La concavidad se puede determinar utilizando la fórmula obtenida anteriormente. Ilustraremos estas ideas reconsiderando una curva paramétrica que encontramos en la sección anterior.

Ejemplo 4 Utilice información de pendiente y de concavidad para dibujar la gráfica de la curva paramétrica

$$x = f(t) = t^3 - 3t, \qquad y = g(t) = t^2, \qquad (-2 \leqslant t \leqslant 2)$$

que encontramos previamente en el Ejemplo 5 de la Sección 8.2.

Solución Tenemos que

$$f'(t) = 3(t^2 - 1) = 3(t-1)(t+1), \qquad g'(t) = 2t$$

La curva tiene tangente horizontal en $t = 0$, es decir, en $(0, 0)$, y tangentes verticales en $t = \pm 1$, es decir, en $(2, 1)$ y $(-2, 1)$. La tabla que sigue resume la información direccional de la curva entre esos puntos.

t	-2		-1		0		1		2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$g'(t)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x		$\rightarrow$	$\cdot$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\cdot$	$\rightarrow$	
y		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\cdot$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
curva		$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	

Para estudiar la concavidad se calcula la segunda derivada d^2y/dx^2 mediante la fórmula obtenida anteriormente. Como $f''(t) = 6t$ y $g''(t) = 2$, tenemos que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}$$

$$= \frac{3(t^2-1)(2) - 2t(6t)}{[3(t^2-1)]^3} = -\frac{2}{9}\,\frac{t^2+1}{(t^2-1)^3}$$

que nunca se anula pero que no está definida en $t = \pm 1$. Evidentemente la curva es convexa para $-1 < t < 1$ y cóncava en el resto. La Figura 8.26 muestra la curva.

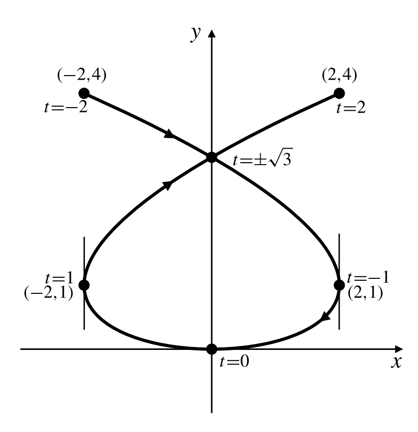


Figura 8.26

Ejercicios 8.3

En los Ejercicios 1-8, calcule las coordenadas de los puntos en los que las curvas paramétricas dadas tienen (a) una tangente horizontal y (b) una tangente vertical.

1. $x = t^2 + 1,\ y = 2t - 4$

2. $x = t^2 - 2t,\ y = t^2 + 2t$

3. $x = t^2 - 2t,\ y = t^3 - 12t$

4. $x = t^3 - 3t,\ y = 2t^3 + 3t^2$

5. $x = te^{-t^2/2},\ y = e^{-t^2}$

6. $x = \operatorname{sen} t,\ y = \operatorname{sen} t - t\cos t$

7. $x = \operatorname{sen} 2t,\ y = \operatorname{sen} t$

8. $x = \dfrac{3t}{1+t^3},\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$

Calcule las pendientes de las curvas de los Ejercicios 9-12 en los puntos que se indican.

9. $x = t^3 + t,\ y = 1 - t^3$, en $t = 1$

10. $x = t^4 - t^2,\ y = t^3 + 2t$, en $t = -1$

11. $x = \cos 2t,\ y = \operatorname{sen} t$, en $t = \pi/6$

12. $x = e^{2t},\ y = te^{2t}$, en $t = -2$

Calcule las ecuaciones paramétricas de las tangentes a las curvas de los Ejercicios 13 y 14 en los puntos indicados.

13. $x = t^3 - 2t,\ y = t + t^3$, en $t = 1$

14. $x = t - \cos t,\ y = 1 - \operatorname{sen} t$, en $t = \pi/4$

15. Demuestre que la curva $x = t^3 - t,\ y = t^2$ tiene dos tangentes diferentes en el punto (0, 1) y calcule sus pendientes.

16. Calcule las pendientes de dos rectas que sean tangentes a $x = \operatorname{sen} t,\ y = \operatorname{sen} 2t$ en el origen.

¿Dónde dejan de ser suaves las curvas de los Ejercicios 17-20, si es que lo hacen?

17. $x = t^3,\ y = t^2$

18. $x = (t-1)^4,\ y = (t-1)^3$

19. $x = t\operatorname{sen} t,\ y = t^3$

20. $x = t^3,\ y = t - \operatorname{sen} t$

En los Ejercicios 21-25, dibuje las gráficas de las curvas paramétricas dadas, haciendo uso de la información de las dos primeras derivadas. A menos que se indique lo contrario, el intervalo del parámetro en cada curva es toda la recta real.

21. $x = t^2 - 2t,\ y = t^2 - 4t$

22. $x = t^3,\ y = 3t^2 - 1$

23. $x = t^3 - 3t,\ y = \dfrac{2}{1+t^2}$

24. $x = t^3 - 3t - 2,\ y = t^2 - t - 2$

25. $x = \cos t + t\operatorname{sen} t,\ y = \operatorname{sen} t - t\cos t,\ (t \geqslant 0)$ (*véase* el Ejemplo 9 de la Sección 8.2).

8.4 Longitudes de arco y áreas de curvas paramétricas

Esta sección está dedicada a los problemas del cálculo de longitudes de curvas definidas paramétricamente, de áreas de superficies de revolución obtenidas rotando curvas paramétricas y de áreas de regiones planas limitadas por curvas paramétricas.

Longitudes de arco y áreas de superficie

Sea $\mathcal{C}$ una curva paramétrica suave con ecuaciones

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

Se supone que $f'(t)$ y $g'(t)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$ y que nunca valen cero simultáneamente. A partir del triángulo diferencial con catetos dx y dy e hipotenusa ds (*véase* la Figura 8.27) se obtiene $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, por lo que tenemos

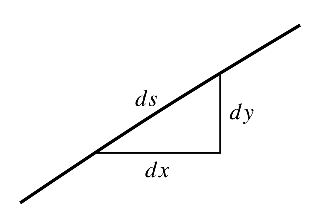


Figura 8.27 Un triángulo diferencial.

Elemento de longitud de arco de una curva paramétrica

$$ds = \frac{ds}{dt}\,dt = \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

La longitud de la curva $\mathcal{C}$ se expresa como

$$s = \int_{t=a}^{t=b} ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Ejemplo 1 Calcule la longitud de la curva paramétrica

$$x = e^t \cos t, \qquad y = e^t \operatorname{sen} t, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2)$$

Solución Tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = e^t (\cos t - \operatorname{sen} t), \qquad \frac{dy}{dt} = e^t (\operatorname{sen} t + \cos t)$$

Elevando al cuadrado las expresiones anteriores, sumando y simplificando, se obtiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= e^{2t}(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + e^{2t}(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 \\ &= e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t + \cos^2 t) \\ &= 2e^{2t}\end{aligned}$$

Por tanto, la longitud de la curva es

$$s = \int_0^2 \sqrt{2e^{2t}}\,dt = \sqrt{2}\int_0^2 e^t\,dt = \sqrt{2}\,(e^2 - 1) \text{ unidades}$$

Las curvas paramétricas se pueden rotar alrededor de diversos ejes para generar superficies de revolución. Las áreas de estas superficies se pueden calcular mediante el mismo procedimiento utilizado para gráficas de funciones, con la versión apropiada de ds. Si la curva

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

se rota alrededor del eje x, el área S de la superficie generada se expresa como

$$S = 2\pi \int_{t=a}^{s=b} |y|\,ds = 2\pi \int_a^b |g(t)| \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\,dt$$

Si la rotación es respecto al eje y, entonces el área es

$$S = 2\pi \int_{t=a}^{s=b} |x|\,ds = 2\pi \int_a^b |f(t)| \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\,dt$$

Ejemplo 2 Calcule el área de la superficie de revolución que se obtiene rotando la curva astroide

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\operatorname{sen}^3 t$$

con $a > 0$, alrededor del eje x.

Solución La curva es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados (*véase* la Figura 8.28). La superficie completa se generará rotando la mitad superior de la curva; de hecho, sólo es necesario rotar la parte del primer cuadrante y multiplicar después por 2. La parte del primer cuadrante de la curva corresponde a $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Tenemos entonces

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \operatorname{sen} t, \qquad \frac{dy}{dt} = 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t$$

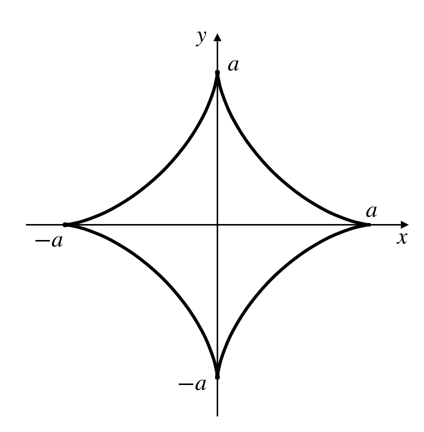


Figura 8.28

De acuerdo con esto, la longitud del elemento de arco es

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{9a^2\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9a^2 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t}\, dt \\ &= 3a\cos t \operatorname{sen} t \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\, dt \\ &= 3a \cos t \operatorname{sen} t\, dt \end{aligned}$$

Por tanto, el área de la superficie pedida es

$$\begin{aligned} S &= 2 \times 2\pi \int_0^{\pi/2} a \operatorname{sen}^3 t\, 3a\cos t \operatorname{sen} t\, dt \\ &= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t \cos t\, dt \qquad \text{Sea } u = \operatorname{sen} t, \; du = \cos t\, dt \\ &= 12\pi a^2 \int_0^1 u^4\, du = \frac{12\pi a^2}{5} \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

Áreas limitadas por curvas paramétricas

Considere la curva paramétrica $\mathcal{C}$ con ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$, siendo f diferenciable y g continua en el intervalo $[a, b]$. Por el momento, supongamos también que $f'(t) \geqslant 0$ y $g(t) \geqslant 0$ en $[a, b]$, por lo que $\mathcal{C}$ no tiene puntos por debajo del eje x y se recorre de izquierda a derecha cuando t va desde a hasta b.

El elemento de área de la región bajo la curva $\mathcal{C}$ y por encima del eje x es $dA = y\,dx = g(t)f'(t)\,dt$, por lo que su área (*véase* la Figura 8.29) es

$$A = \int_a^b g(t) f'(t)\, dt$$

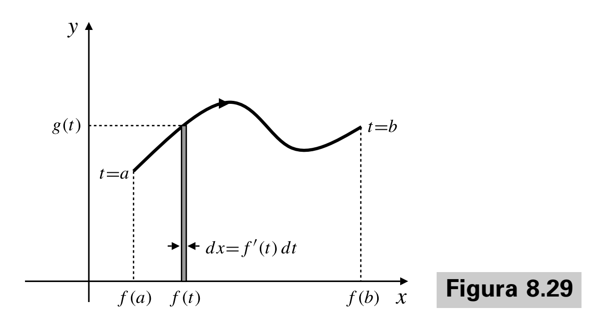


Figura 8.29

En los otros tres casos se pueden dar argumentos similares:

$$\text{Si } f'(t) \geqslant 0 \text{ y } g(t) \leqslant 0 \text{ en } [a, b], \text{ entonces } A = -\int_a^b g(t)f'(t)\,dt,$$

$$\text{Si } f'(t) \leqslant 0 \text{ y } g(t) \geqslant 0 \text{ en } [a, b], \text{ entonces } A = -\int_a^b g(t)f'(t)\,dt,$$

$$\text{Si } f'(t) \leqslant 0 \text{ y } g(t) \leqslant 0 \text{ en } [a, b], \text{ entonces } A = \int_a^b g(t)f'(t)\,dt,$$

siendo A el área (positiva) limitada por $\mathcal{C}$, el eje x y las rectas verticales $x = f(a)$ y $x = f(b)$. Combinando estos resultados podemos ver que

$$\int_a^b g(t)f'(t)\,dt = A_1 - A_2$$

siendo A_1 el área dispuesta verticalmente entre $\mathcal{C}$ y la parte del eje x formada por los puntos $x = f(t)$ tales que $g(t)f'(t) \geqslant 0$, y A_2 un área similar correspondiente a los puntos donde $g(t)f'(t) < 0$. Esta fórmula es válida para funciones arbitrarias g continuas y f diferenciables. Véase la Figura 8.30 donde se presentan ejemplos genéricos. En particular, si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada que no se cruza consigo misma, entonces el área de la región limitada por $\mathcal{C}$ se expresa como

$$A = \int_a^b g(t)f'(t)\,dt \qquad \text{si } \mathcal{C} \text{ se recorre en el sentido de las agujas del reloj cuando } t \text{ crece}$$

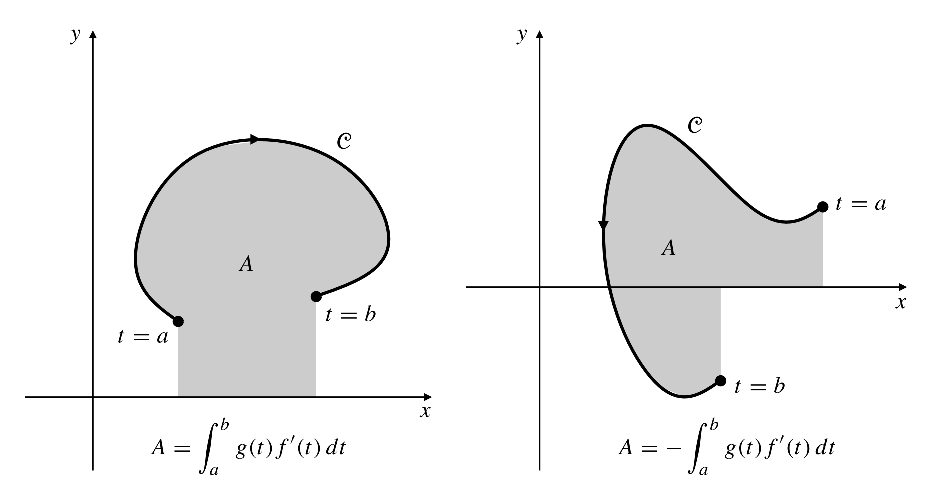


Figura 8.30 Áreas definidas por curvas paramétricas.

$$A = -\int_a^b g(t)\,f'(t)\,dt \qquad \text{si } \mathcal{C} \text{ se recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj}$$

Ambos casos se ilustran en la Figura 8.31.

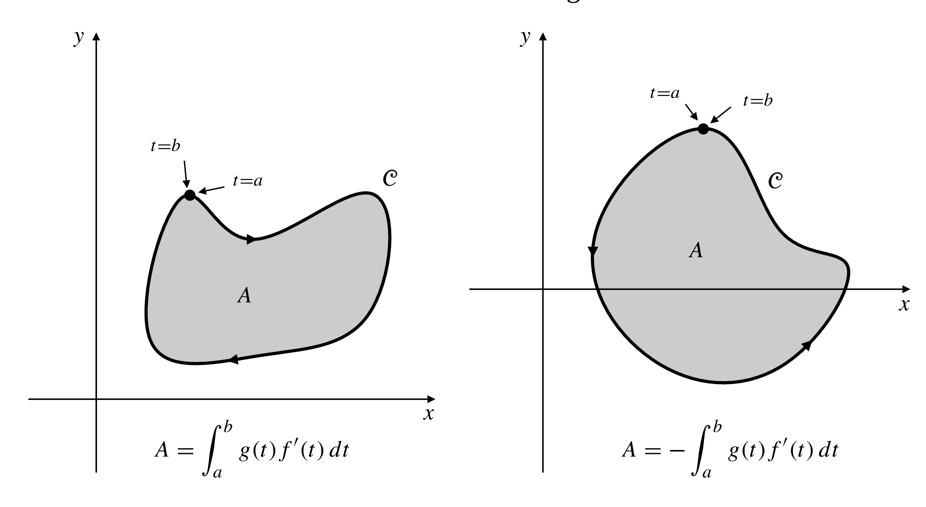


Figura 8.31 Áreas limitadas por curvas paramétricas cerradas.

Ejemplo 3 Calcule el área limitada por la elipse $x = a\cos s$, $y = b\,\text{sen}\,s$.

Solución Esta elipse se recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj (*véase* el Ejemplo 4 de la Sección 8.2). El área encerrada es

$$\begin{aligned} A &= -\int_0^{2\pi} b\,\text{sen}\,s(-a\,\text{sen}\,s)\,ds \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2s)\,ds \\ &= \frac{ab}{2}\,s\bigg|_0^{2\pi} - \frac{ab}{4}\,\text{sen}\,2s\bigg|_0^{2\pi} = \pi ab \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

Ejemplo 4 Calcule el área comprendida por encima del eje x y por debajo de un arco de la cicloide $x = at - a\,\text{sen}\,t$, $y = a - a\cos t$.

Solución Parte de la cicloide se muestra en la Figura 8.21 en la Sección 8.2. Un arco corresponde al intervalo de valores del parámetro $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Como $y = a(1-\cos t) \geqslant 0$ y $dx/dt = a(1-\cos t) \geqslant 0$, el área bajo un arco es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt \\ &= a^2\left(t - 2\,\text{sen}\,t + \frac{t}{2} + \frac{\text{sen}\,2t}{4}\right)\bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Argumentos similares a los usados anteriormente permiten demostrar que si f es continua y g es diferenciable, entonces también podemos interpretar

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \int_{t=a}^{t=b} x\,dy = A_1 - A_2$$

siendo A_1 el área de la región dispuesta *horizontalmente* entre la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$ y la parte del eje y formada por los puntos $y = g(t)$ tales que $f(t)g'(t) \geqslant 0$, y A_2 el área de una región similar correspondiente a $f(t)g'(t) < 0$. Por ejemplo, el área de la región sombreada en la Figura 8.32 es $\int_a^b f(t)g'(t)\,dt$. El Teorema de Green de la Sección 16.3 proporcionará un enfoque más coherente para el cálculo de estas áreas.

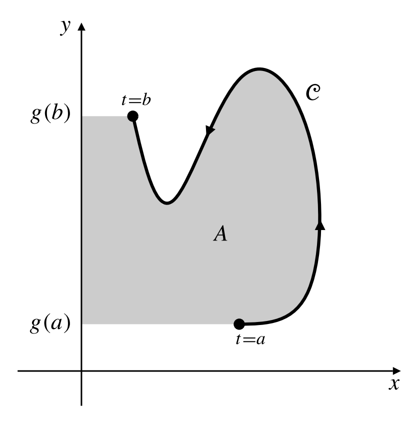


Figura 8.32 El área sombreada es $A = \int_b^a f(t)g'(t)\,dt$.

Ejercicios 8.4

Calcule las longitudes de las curvas en los Ejercicios 1-8.

1. $x = 3t^2$, $y = 2t^3$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$

2. $x = 1 + t^3$, $y = 1 - t^2$, $(-1 \leqslant t \leqslant 2)$

3. $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3 t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

4. $x = \ln(1 + t^2)$, $y = 2\tan^{-1} t$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$

5. $x = t^2\,\mathrm{sen}\,t$, $y = t^2\cos t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

6. $x = \cos t + t\,\mathrm{sen}\,t$, $y = \mathrm{sen}\,t - t\cos t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

7. $x = t + \mathrm{sen}\,t$, $y = \cos t$, $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$

8. $x = \mathrm{sen}^2 t$, $y = 2\cos t$, $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$

9. Calcule la longitud de un arco de la cicloide $x = at - a\,\mathrm{sen}\,t$, $y = a - a\cos t$ (un arco corresponde a $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$).

10. Calcule el área de la superficie que se obtiene al rotar un arco de la cicloide del Ejercicio 9 alrededor de (a) el eje x, (b) el eje y.

11. Calcule el área de la superficie generada al rotar la curva $x = e^t\cos t$, $y = e^t\,\mathrm{sen}\,t$, $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$ alrededor del eje x.

12. Calcule el área de la superficie generada al rotar la curva del Ejercicio 11 alrededor del eje y.

13. Calcule el área de la superficie generada al rotar la curva $x = 3t^2$, $y = 2t^3$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ alrededor del eje y.

14. Calcule el área de la superficie generada al rotar la curva $x = 3t^2$, $y = 2t^3$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ alrededor del eje x.

En los Ejercicios 15-20, dibuje y calcule el área de la región R descrita en función de las curvas paramétricas dadas.

15. R es la región cerrada limitada por $x = t^3 - 4t$, $y = t^2$, $(-2 \leqslant t \leqslant 2)$.

16. R está limitada por la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3 t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

17. R está limitada por los ejes coordenados y el arco parabólico $x = \mathrm{sen}^4 t$, $y = \cos^4 t$.

18. R está limitada por $x = \cos s\,\mathrm{sen}\,s$, $y = \mathrm{sen}^2 s$ $(0 \leqslant s \leqslant \pi/2)$, y el eje y.

19. R está limitada por el óvalo $x = (2 + \mathrm{sen}\,t)\cos t$, $y = (2 + \mathrm{sen}\,t)\,\mathrm{sen}\,t$.

***20.** R está limtada por el eje x, la hipérbola $x = \sec t$, $y = \tan t$, y el rayo que une el origen con el punto $(\sec t_0, \tan t_0)$.

21. Demuestre que la región limitada por el eje x, la hipérbola $x = \cosh t$, $y = \mathrm{senh}\,t$ (siendo $t > 0$) y el rayo que une el origen con el punto $(\cosh t_0, \mathrm{senh}\,t_0)$ tiene un área de $t_0/2$ unidades al cuadrado. Esto ilustra la afirmación hecha al principio de la Sección 3.6.

22. Calcule el volumen del sólido obtenido al rotar alrededor del eje x la región limitada por dicho eje y un arco de la cicloide $x = at - a\,\mathrm{sen}\,t$, $y = a - a\cos t$ (*véase* el Ejemplo 8 de la Sección 8.2).

23. Calcule el volumen generado al rotar alrededor del eje x la región bajo la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3 t$ y por encima del eje x.

8.5 Coordenadas polares y curvas en polares

El **sistema de coordenadas polares** es una alternativa al sistema de coordenadas rectangulares (cartesianas) para indicar la posición de puntos en el plano. Algunas veces es más importante conocer la distancia y la dirección de un punto respecto al origen que conocer sus coordenadas cartesianas. En el sistema de coordenadas polares hay un origen (o **polo**), O, y un **eje polar**, que es un rayo (es decir, una semirrecta) cuyo origen es O y que se extiende horizontalmente hacia la derecha. La posición de un punto cualquiera P en el plano queda determinada por sus coordenadas polares $[r, \theta]$, siendo

(i) r la distancia de O a P, y

(ii) θ el ángulo que forma el rayo OP con el eje polar (los ángulos positivos se miden en sentido contrario al de las agujas del reloj).

Representaremos entre corchetes las coordenadas polares de un punto para distinguirlas de sus coordenadas rectangulares (cartesianas). La Figura 8.33 muestra algunos puntos y sus coordenadas polares. En una gráfica en polares se suelen mostrar también los ejes de coordenadas rectangulares x e y. El eje polar coincide con el eje x positivo.

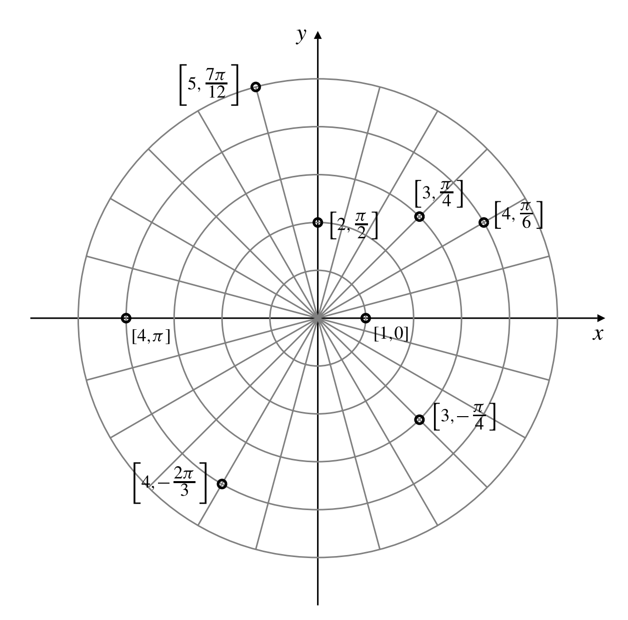


Figura 8.33 Coordenadas polares de algunos puntos en el plano xy.

A diferencia de las coordenadas rectangulares, las coordenadas polares de un punto no son únicas. Las coordenadas polares $[r, \theta_1]$ y $[r, \theta_2]$ representan el mismo punto siempre que θ_1 y θ_2 se diferencien en un múltiplo entero de 2π:

$$\theta_2 = \theta_1 + 2n\pi, \qquad \text{donde } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Por ejemplo, las coordenadas polares

$$\left[3, \frac{\pi}{4}\right], \quad \left[3, \frac{9\pi}{4}\right] \quad \text{y} \quad \left[3, -\frac{7\pi}{4}\right]$$

representan el mismo punto en coordenadas cartesianas: $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. Análogamente, $[4, \pi]$ y $[4, -\pi]$ representan el mismo punto de coordenadas cartesianas $(-4, 0)$, y $[1, 0]$ y $[1, 2\pi]$ representan el punto de coordenadas cartesianas $(1, 0)$. Además, las coordenadas polares del origen O

son $[0, \theta]$ para cualquier valor de θ (si nos desplazamos una distancia cero desde el origen, no importa en qué dirección lo hagamos).

Algunas veces es necesario interpretar las coordenadas polares $[r, \theta]$ cuando $r < 0$. La interpretación adecuada de esta «distancia negativa» r es que representa una distancia positiva $-r$ medida en la *dirección opuesta* (es decir, en la dirección $\theta + \pi$):

$$[r, \theta] = [-r, \theta + \pi]$$

Por ejemplo, $[-1, \pi/4] = [1,5\pi/4]$. Si se permite que $r < 0$, aumenta el número de conjuntos de coordenadas polares diferentes que representan al mismo punto.

Si se desea considerar sistemas de coordenadas polares y rectangulares en el mismo plano, y se escoge como eje polar la dirección positiva del eje x, entonces las relaciones entre las coordenadas rectangulares de un punto y sus correspondientes coordenadas polares se muestran en la Figura 8.34.

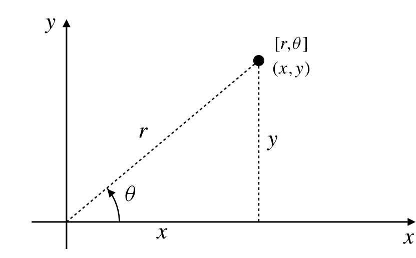


Figura 8.34 Relación entre las coordenadas cartesianas y polares de un punto.

Conversión polar-rectangular

$$x = r\cos\theta \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Una ecuación en x e y representa en general una curva en el plano respecto a un sistema de coordenadas cartesianas. De forma similar, una ecuación en r y θ representa en general una curva con respecto a un sistema de coordenadas polares. Las fórmulas de conversión anteriores se pueden emplear para transformar una representación de una curva en la otra.

Ejemplo 1 La ecuación en polares de la recta $2x - 3y = 5$ es $r(2\cos\theta - 3\,\mathrm{sen}\,\theta) = 5$ o

$$r = \frac{5}{2\cos\theta - 3\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Ejemplo 2 Calcule la ecuación en cartesianas de la curva cuya ecuación en polares es $r = 2a\cos\theta$, e identifique dicha curva.

Solución La ecuación en polares se puede transformar a coordenadas cartesianas multiplicando primero por r:

$$r^2 = 2ar\cos\theta$$

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

La ecuación en polares dada $r = 2a\cos\theta$ representa, por tanto, una circunferencia con centro en $(a, 0)$ y radio a, como se muestra en la Figura 8.35. Obsérvese en la ecuación que $r \to 0$ cuando $\theta \to \pm\pi/2$. En la figura, esto corresponde al hecho de que la circunferencia se aproxima al origen en la dirección vertical.

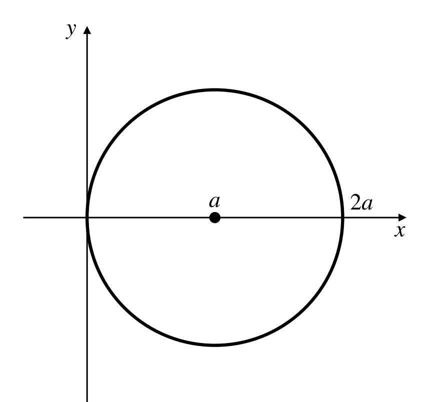


Figura 8.35 La circunferencia $r = 2a\cos\theta$.

Algunas curvas en polares

La Figura 8.36 muestra las gráficas de las ecuaciones en polares $r = a$ y $\theta = \beta$, siendo a y β (la letra griega «beta») constantes. Son, respectivamente, una circunferencia de radio $|a|$ centrada en el origen, y una recta que pasa por el origen y forma un ángulo β con el eje polar. Nótese que la recta y la circunferencia se cruzan en dos puntos, cuyas coordenadas en polares son $[a, \beta]$ y $[-a, \beta]$. Las «curvas coordenadas» en coordenadas polares, es decir, las curvas cuyas ecuaciones son $r =$ constante y $\theta =$ constante son, respectivamente, circunferencias centradas en el origen y rectas que pasan por el origen. Las «curvas coordenadas» en coordenadas cartesianas, $x =$ constante e $y =$ constante son rectas verticales y horizontales. El papel para dibujar gráficas en cartesianas se encuentra regulado mediante divisiones horizontales y verticales, y el papel para dibujar gráficas en polares se encuentra regulado con circunferencias concéntricas y rectas radiales que salen del origen, como se muestra en las Figuras 8.33 y 8.38.

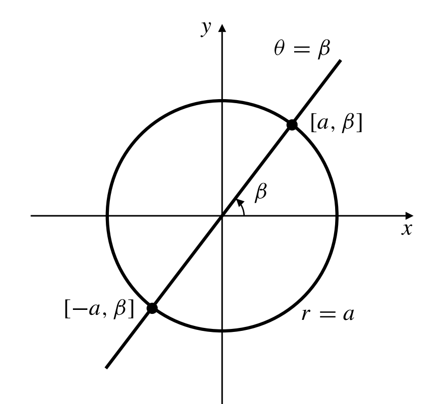


Figura 8.36 Curvas coordenadas del sistema de coordenadas polares.

La gráfica de una ecuación de la forma $r = f(\theta)$ se denomina **gráfica en polares** de la función f. Algunas gráficas en polares se pueden reconocer fácilmente si la ecuación en polares se transforma en su forma rectangular. En otros casos, esta transformación no sirve de ayuda; la ecuación en coordenadas rectangulares puede ser demasiado complicada como para ser reconocible. En estos casos hay que utilizar el recurso de construir una tabla de valores y dibujar los puntos.

Ejemplo 3 Dibuje e identifique la curva $r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$.

Solución Procedemos como en el Ejemplo 2.

$$r^2 = 2ar\cos(\theta - \theta_0) = 2ar\cos\theta_0\cos\theta + 2ar\,\mathrm{sen}\,\theta_0\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$x^2 + y^2 = 2a\cos\theta_0 x + 2a\,\mathrm{sen}\,\theta_0 y$$
$$x^2 - 2a\cos\theta_0 x + a^2\cos^2\theta_0 + y^2 - 2a\,\mathrm{sen}\,\theta_0 y + a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_0 = a^2$$
$$(x - a\cos\theta_0)^2 + (y - a\,\mathrm{sen}\,\theta_0)^2 = a^2$$

Se trata de una circunferencia de radio a que pasa por el origen en la dirección $\theta = \theta_0 \pm \frac{\pi}{2}$, que hace $r = 0$ (*véase* la Figura 8.37). Las coordenadas cartesianas de su centro son $(a\cos\theta_0,\ a\,\mathrm{sen}\,\theta_0)$, que en polares son $[a, \theta_0]$. Para $\theta_0 = \pi/2$ tenemos que $r = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta$ corresponde a la ecuación de una circunferencia de radio a centrada en el eje y.

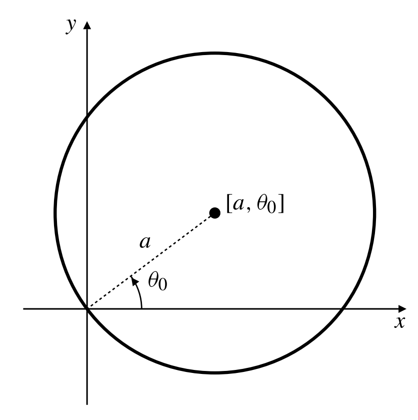


Figura 8.37 La circunferencia $r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$.

Comparando los Ejemplos 2 y 3, podemos formular el siguiente principio:

Rotación de una gráfica en polares

La gráfica en polares de ecuación $r = f(\theta - \theta_0)$ corresponde a la gráfica en polares de ecuación $r = f(\theta)$ rotada un ángulo θ_0 alrededor del origen.

Ejemplo 4 Dibuje la curva en polares $r = a(1 - \cos\theta)$ siendo $a > 0$.

Solución La transformación a coordenadas rectangulares no sirve aquí de mucha ayuda. La ecuación resultante es $(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ (verifíquese), que no podemos reconocer. Por tanto, construiremos una tabla de valores y dibujaremos algunos puntos.

Tabla 3.

θ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	$0.13a$	$0.29a$	$0.5a$	a	$1.5a$	$1.71a$	$1.87a$	$2a$

Como tiene forma de corazón, esta curva se denomina **cardioide**. Obsérvese en la Figura 8.38 el vértice en el origen. Como en el ejemplo anterior, la curva llega al origen en las direcciones θ que hacen $r = f(\theta) = 0$. En este caso, la única dirección que lo cumple es $\theta = 0$. Es importante, al dibujar gráficas en polares, mostrar claramente en qué dirección se aproximan al origen.

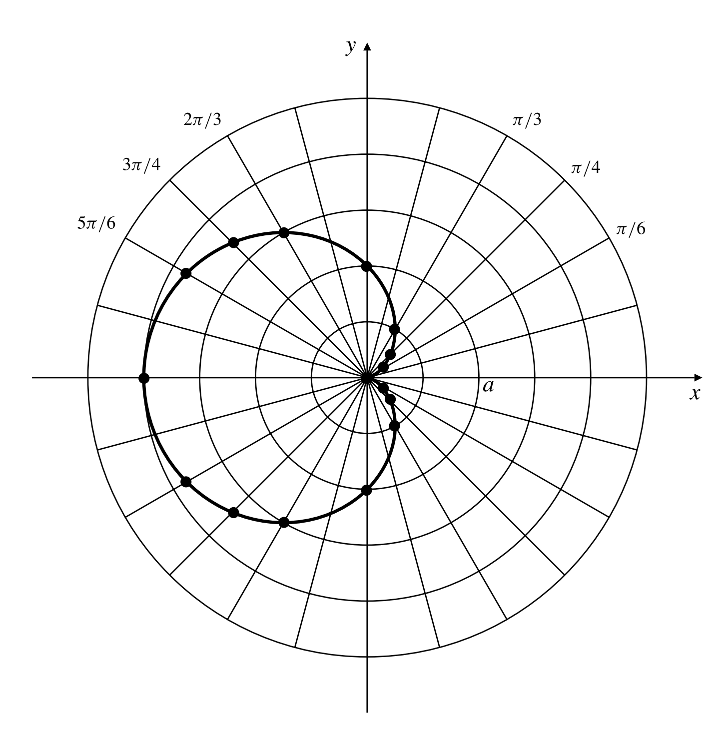


Figura 8.38 La cardioide $r = a(1 - \cos\theta)$.

Dirección de una gráfica en polares en el origen

Una gráfica en polares $r = f(\theta)$ se aproxima al origen siguiendo la dirección θ para la que $f(\theta) = 0$.

La ecuación $r = a(1 - \cos(\theta - \theta_0))$ representa una cardioide del mismo tamaño y forma que la de la Figura 8.38, pero rotada un ángulo θ_0 en sentido contrario al de las agujas del reloj. Su vértice está en la dirección $\theta = \theta_0$. En particular, $r = a(1 - \operatorname{sen}\theta)$ tiene un vértice vertical, como se muestra en la Figura 8.39.

En general, no es necesario construir una tabla detallada de valores a la hora de dibujar una curva en polares de una ecuación simple de la forma $r = f(\theta)$. Es esencial determinar aquellos valores de θ para los que $r = 0$, e indicarlos en la gráfica mediante rayos. También es de utilidad determinar los puntos en los que la gráfica se encuentra más alejada del origen (¿serán donde $f(\theta)$ sea máxima o mínima?). Con la posibilidad de una excepción en el origen, las curvas en polares serán suaves siempre que $f(\theta)$ sea diferenciable con respecto a θ.

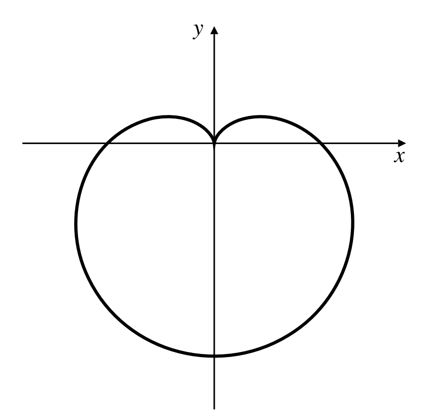


Figura 8.39 La cardioide $r = a(1 - \operatorname{sen}\theta)$.

Ejemplo 5 Dibuje la gráfica en polares (a) $r = \cos(2\theta)$, (b) $r = \operatorname{sen}(3\theta)$ y (c) $r^2 = \cos(2\theta)$.

Solución Las gráficas se muestran en las Figuras 8.40-8.42. Obsérvese cómo las curvas (a) y (c) se acercan al origen en las direcciones $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ y $\theta = \pm\frac{3\pi}{4}$ y cómo la curva (b) se acerca al origen en las direcciones $\theta = 0$, π, $\pm\frac{\pi}{3}$ y $\pm\frac{2\pi}{3}$. La curva se traza dos veces cuando θ pasa de $-\pi$ a π. También lo hace la curva (c) si admitimos los dos valores de la raíz cuadrada $r = \pm\sqrt{\cos(2\theta)}$. Nótese que la curva (c) no tiene puntos entre $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ y $\theta = \pm\frac{3\pi}{4}$ ya que r^2 no puede ser negativo.

La curva (c) se denomina **lemniscata**. Las lemniscatas son curvas formadas por puntos P tales que el producto de las distancias de dichos puntos a ciertos puntos fijos es constante. En el caso de la curva (c), esos puntos son $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

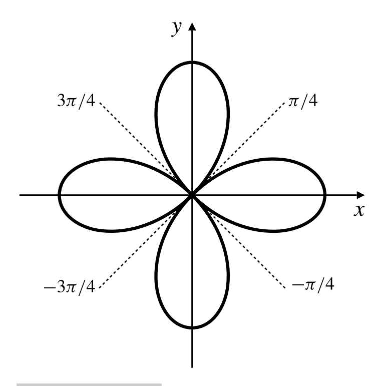


Figura 8.40 Curva (a): la curva en polares $r = \cos(2\theta)$.

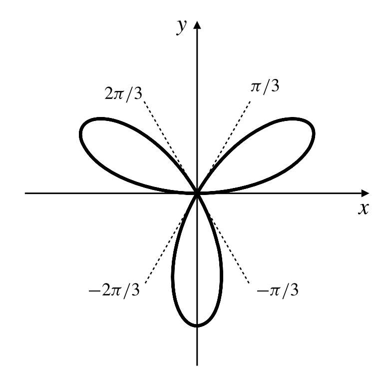


Figura 8.41 Curva (b): la curva en polares $r = \operatorname{sen}(3\theta)$.

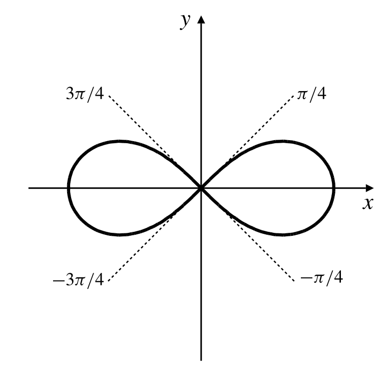


Figura 8.42 Curva (c): la lemniscata $r^2 = \cos(2\theta)$.

En todos los ejemplos anteriores, las funciones $f(\theta)$ son periódicas de periodo 2π, de forma que cualquier recta que pasa por el origen puede cortar a la gráfica en polares como máximo dos veces (θ y $\theta + \pi$ determinan la misma recta). Si $f(\theta)$ no es de periodo 2π, entonces la curva puede enrollarse muchas veces alrededor del origen. La Figura 8.43 muestra dos *espirales* de este tipo, la **espiral equiangular** $r = \theta$ y la **espiral exponencial** $r = e^{-\theta/3}$, las dos dibujadas para valores positivos de θ.

Observación Maple incorpora la rutina `polarplot` como parte de su paquete «plots», que se debe cargar antes de utilizar dicha rutina. He aquí la forma en la que Maple dibuja en la misma gráfica las curvas en polares $r = 1$ y $r = 2\operatorname{sen}(3\theta)$ para $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$:

```
> with(plots):
> polarplot([1,2*sin(3*t)],t=0..2*Pi,scaling=constrained)
```

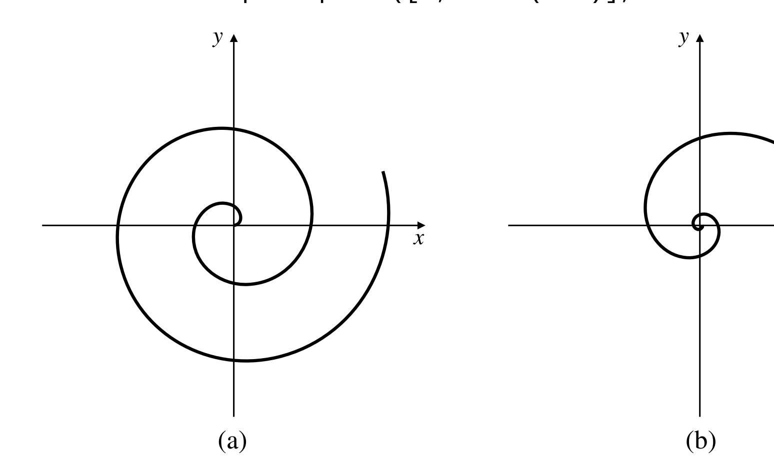


Figura 8.43
(a) La espiral equiangular $r = \theta$.
(b) La espiral exponencial $r = e^{-\theta/3}$.

La opción `scaling=constrained` es necesaria en curvas en polares para que Maple utilice las mismas unidades de distancia en los dos ejes (de forma que una circunferencia tenga forma circular).

Intersecciones de curvas en polares

Como las coordenadas polares de los puntos no son únicas, el cálculo de los puntos de intersección de dos puntos en polares puede ser más complicado que el mismo problema en coordenadas cartesianas. Por supuesto, las curvas en polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ se cortarán en los puntos $[r_0, \theta_0]$ para los que

$$f(\theta_0) = g(\theta_0) \quad \text{y} \quad r_0 = f(\theta_0)$$

pero pueden existir muchas otras intersecciones. En particular, si ambas curvas pasan por el origen, entonces el origen será un punto de intersección, que puede no aparecer al resolver la ecuación $f(\theta) = g(\theta)$, ya que las curvas pueden pasar por el origen con diferentes valores de θ. Por ejemplo, las circunferencias $r = \cos\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta$ se cortan en el origen y también en el punto $[1/\sqrt{2}, \pi/4]$. Pero sólo se obtiene este último punto al resolver la ecuación $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$ (*véase* la Figura 8.44).

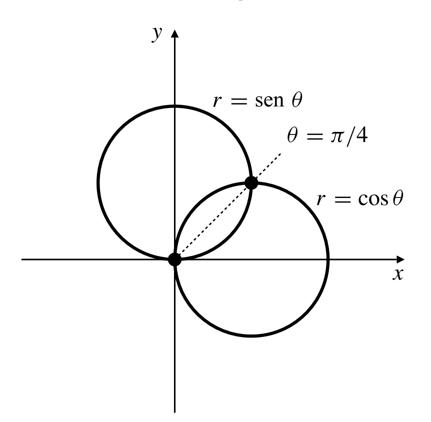


Figura 8.44

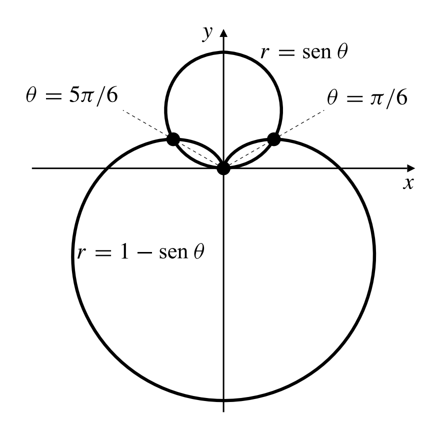


Figura 8.45

Ejemplo 6 Calcule la intersección de las curvas $r = \operatorname{sen}\theta$ y $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$.

Solución Como las dos funciones de θ son periódicas de periodo 2π, sólo es necesario buscar las soluciones que cumplan $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Resolviendo la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta = 1 - \operatorname{sen}\theta$$

se obtiene $\operatorname{sen}\theta = 1/2$, por lo que $\theta = \pi/6$ o $\theta = 5\pi/6$. Ambas curvas tienen $r = 1/2$ en esos puntos, por lo que las dos curvas se cruzan en $[1/2, \pi/6]$ y $[1/2, 5\pi/6]$. Además, el origen pertenece a la curva $r = \operatorname{sen}\theta$ (para $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$) y también a la curva $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$ (para $\theta = \pi/2$). Por consiguiente, el origen es también un punto de intersección de las curvas (*véase* la Figura 8.45). ■

Finalmente, si se admiten valores de r negativos, entonces las curvas $r = f(\theta)$ e $y = g(\theta)$ se cortarán también en $[r_1, \theta_1] = [r_2, \theta_2]$ si, para algún entero k,

$$\theta_1 = \theta_2 + (2k+1)\pi \qquad \text{y} \qquad r_1 = f(\theta_1) = -g(\theta_2) = -r_2$$

El Ejercicio 28 plantea un ejemplo.

Cónicas en polares

Sea D la recta vertical $x = -p$, y sea ε un número real positivo. El conjunto de puntos P del plano que cumplen la ecuación

$$\frac{\text{distancia de } P \text{ al origen}}{\text{distancia perpendicular de } P \text{ a } D} = \varepsilon$$

es una sección cónica de excentricidad ε, foco en el origen y directriz D, como se vio en la Sección 8.1 (será una elipse si $\varepsilon < 1$, una parábola si $\varepsilon = 1$ y una hipérbola si $\varepsilon > 1$). Si las coordenadas polares de P son $[r, \theta]$, entonces la condición anterior se convierte en (*véase* la Figura 8.46)

$$\frac{r}{p + r\cos\theta} = \varepsilon$$

o, despejando r,

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

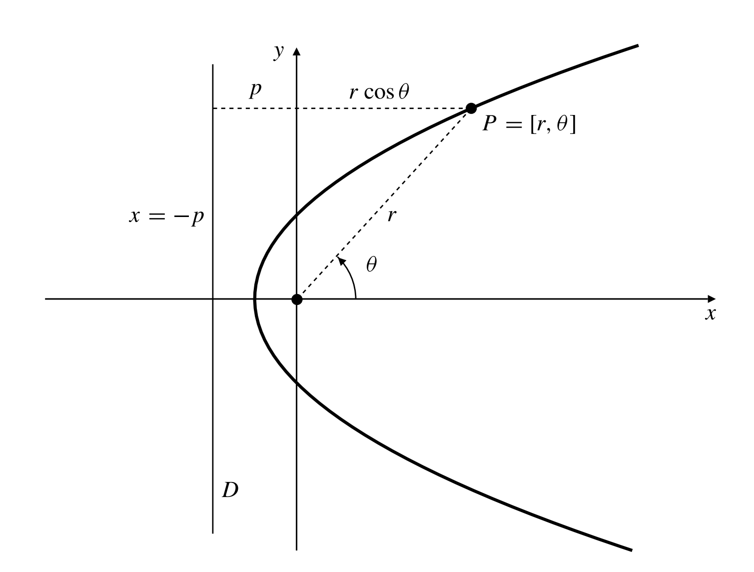


Figura 8.46 Una curva cónica con excentricidad ε, foco en el origen y directriz $x = -p$.

Las Figuras 8.47-8.49 muestran un ejemplo de las tres posibilidades (elipse, parábola e hipérbola). Nótese que, en el caso de la hipérbola, las direcciones de las asíntotas son los ángulos que hacen que el denominador sea $1 - \varepsilon\cos\theta = 0$. En la Sección 11.6 tendremos más cosas que decir sobre las ecuaciones en polares de las cónicas, especialmente de las elipses.

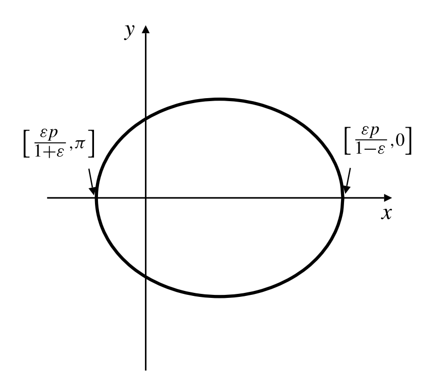


Figura 8.47 Elipse: $\varepsilon < 1$.

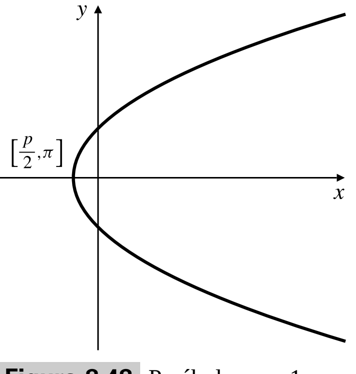


Figura 8.48 Parábola: $\varepsilon = 1$.

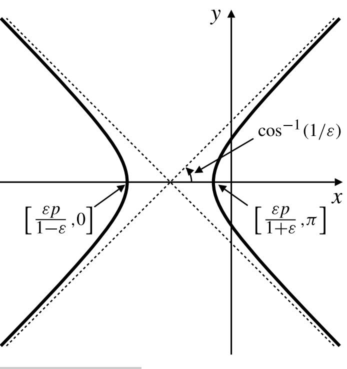


Figura 8.49 Hipérbola: $\varepsilon > 1$.

Ejercicios 8.5

En los Ejercicios 1-12, transforme las ecuaciones dadas en polares a coordenadas rectangulares, e identifique la curva representada.

1. $r = 3 \sec \theta$

2. $r = -2 \csc \theta$

3. $r = \dfrac{5}{3 \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta}$

4. $r = \operatorname{sen} \theta + \cos \theta$

5. $r^2 = \csc 2\theta$

6. $r = \sec \theta \tan \theta$

7. $r = \sec \theta (1 + \tan \theta)$

8. $r = \dfrac{2}{\sqrt{\cos^2 \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta}}$

9. $r = \dfrac{1}{1 - \cos \theta}$

10. $r = \dfrac{2}{2 - \cos \theta}$

11. $r = \dfrac{2}{1 - 2 \operatorname{sen} \theta}$

12. $r = \dfrac{2}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

En los Ejercicios 13-24, dibuje las gráficas en polares de las ecuaciones dadas.

13. $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

14. $r = 1 - \cos(\theta + \frac{\pi}{4})$

15. $r = 1 + 2 \cos \theta$

16. $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$

17. $r = 2 + \cos \theta$

18. $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$

19. $r = \cos 3\theta$

20. $r = 2 \cos 4\theta$

21. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

22. $r^2 = 4 \cos 3\theta$

23. $r^2 = \operatorname{sen} 3\theta$

24. $r = \ln \theta$

Calcule todas las intersecciones de las parejas de curvas de los Ejercicios 25-28.

25. $r = \sqrt{3} \cos \theta, \quad r = \operatorname{sen} \theta$

26. $r^2 = 2 \cos(2\theta), \quad r = 1$

27. $r = 1 + \cos \theta, \quad r = 3 \cos \theta$

***28.** $r = \theta, \quad r = \theta + \pi$

29. Dibuje la gráfica de la ecuación $r = 1/\theta$, $\theta > 0$. Demuestre que dicha curva tiene una asíntota horizontal. ¿Tiene $r = 1/(\theta - \alpha)$ una asíntota?

30. ¿Cuántas hojas tiene la curva $r = \cos n\theta$? ¿Y la curva $r^2 = \cos n\theta$? Distinga los casos de n par e impar.

31. Demuestre que la gráfica en polares $r = f(\theta)$ (siendo f continua) se puede expresar como una curva paramétrica con parámetro θ.

En los Ejercicios 32-37, utilice un programa de gráficos por computador o una calculadora gráfica para dibujar algunos miembros de las familias dadas de curvas en polares, e intente descubrir pautas que le permitan adivinar el comportamiento de otras curvas que sean miembros de la misma familia.

32. $r = \cos \theta \cos(m\theta), \quad m = 1, 2, 3, \ldots$

33. $r = 1 + \cos \theta \cos(m\theta), \quad m = 1, 2, 3, \ldots$

34. $r = \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}(m\theta), \quad m = 2, 3, 4, 5, \ldots$

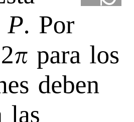
35. $r = 1 + \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}(m\theta), \quad m = 2, 3, 4, 5, \ldots$



36. $r = C + \cos \theta \cos(2\theta)$ para $C = 0$, $C = 1$, valores de C entre 0 y 1, y valores de C mayores que 1.



37. $r = C + \cos \theta \operatorname{sen}(3\theta)$ para $C = 0$, $C = 1$, valores de C entre 0 y 1, valores de C menores que 0 y valores de C mayores que 1.



38. Dibuje la curva $r = \ln \theta$ para $0 < \theta \leqslant 2\pi$. Esta gráfica se cruza consigo misma en el punto P. Por tanto, existen dos valores θ_1 y θ_2 entre 0 y 2π para los que $[f(\theta_1), \theta_1] = [f(\theta_2), \theta_2]$. ¿Qué ecuaciones deben cumplir θ_1 y θ_2? Calcule θ_1 y θ_2, y obtenga las coordenadas cartesianas de P con una precisión de 6 cifras decimales.

39. Dibuje simultáneamente las dos curvas $r = \ln \theta$ y $r = 1/\theta$ para $0 < \theta \leqslant 2\pi$. Las curvas se cortan en dos puntos. ¿Qué ecuaciones deben cumplir los valores de θ de esos puntos? ¿Qué valor tienen sus coordenadas cartesianas con una precisión de 6 cifras decimales?

8.6 Pendientes, áreas y longitudes de arco de curvas en polares

Existe una fórmula simple que se puede utilizar para calcular la dirección de la tangente a una curva en polares $r = f(\theta)$ en un punto $P = [r, \theta]$ distinto del origen. Sea Q un punto de la curva cercano a P y cuyo ángulo en polares es $\theta + h$. Sea S un punto en OQ y sea PS perpendicular a OQ. Obsérvese que $PS = f(\theta)\,\mathrm{sen}\,h$ y $SQ = OQ - OS = f(\theta + h) - f(\theta)\cos h$. Si la tangente a $r = f(\theta)$ en P forma un ángulo ψ (letra griega «psi») con la recta radial OP, como se muestra en la Figura 8.50, entonces ψ es el límite del ángulo SQP cuando $h \to 0$. Entonces,

$$\tan\psi = \lim_{h\to 0}\frac{PS}{SQ} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\theta)\,\mathrm{sen}\,h}{f(\theta+h) - f(\theta)\cos h} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(\theta)\cos h}{f'(\theta+h) + f(\theta)\,\mathrm{sen}\,h} \qquad \text{(por la Regla de l'Hôpital)}$$

$$= \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{r}{dr/d\theta}$$

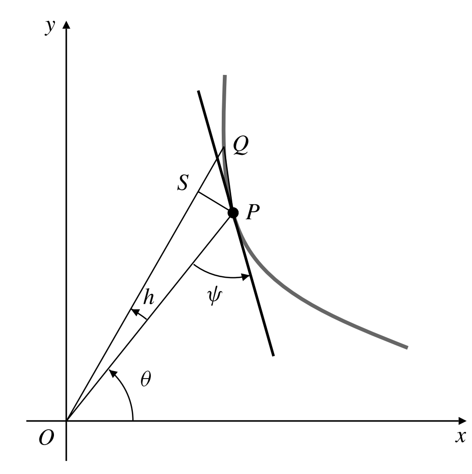


Figura 8.50 El ángulo ψ es el límite del ángulo SQP cuando $h \to 0$.

Dirección tangente a una curva en polares

En cualquier punto P de una curva en polares $r = f(\theta)$ distinto del origen, el ángulo ψ entre la recta radial desde el origen a P y la tangente a la curva se expresa como

$$\tan\psi = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

En particular, $\psi = \pi/2$ si $f'(\theta) = 0$.

Si $f(\theta_0) = 0$ y la curva tiene una tangente en θ_0, entonces la ecuación de dicha tangente es $\theta = \theta_0$.

La fórmula anterior se puede utilizar para calcular los puntos donde una gráfica en polares tiene tangente horizontal o vertical:

$$\psi + \theta = \pi, \quad \text{por lo que } \tan\psi = -\tan\theta \qquad \text{para una tangente horizontal}$$

$$\psi + \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{por lo que } \tan\psi = \cot\theta \qquad \text{para una tangente vertical}$$

Observación Como en las curvas paramétricas las tangentes horizontales y verticales corresponden a $dy/dt = 0$ y $ds/dt = 0$, respectivamente, en general es más fácil obtener los puntos críticos de $y = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$ para el caso de tangentes horizontales y $x = f(\theta)$ para el caso de tangentes verticales.

Ejemplo 1 Calcule los puntos de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ donde sus tangentes son horizontales o verticales.

Solución Tenemos que $y = (1 + \cos\theta)\,\text{sen}\,\theta$ y $x = (1 + \cos\theta)\cos\theta$. Para el caso de tangentes horizontales

$$0 = \frac{dy}{d\theta} = -\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta + \cos\theta$$
$$= 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1$$
$$= (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$$

Las soluciones son $\cos\theta = \frac{1}{2}$ y $\cos\theta = -1$, es decir, $\theta = \pm\pi/3$ y $\theta = \pi$. Existen tangentes horizontales en $[\frac{3}{2}, \pm\frac{\pi}{3}]$. En $\theta = \pi$ tenemos $r = 0$. La curva no tiene tangente en el origen (sino un vértice). Véase la Figura 8.51.

Para el caso de tangentes verticales

$$0 = \frac{dx}{d\theta} = -\text{sen}\,\theta - 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = -\text{sen}\,\theta\,(1 + 2\cos\theta)$$

las soluciones son $\text{sen}\,\theta = 0$ y $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, es decir, $\theta = 0, \pi, \pm 2\pi/3$. Existen tangentes verticales en $[2, 0]$ y $[\frac{1}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}]$.

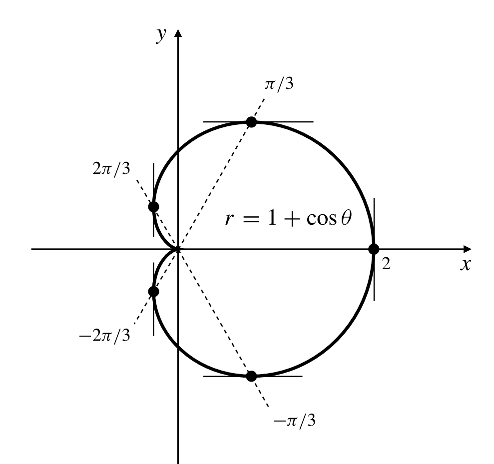


Figura 8.51 Tangentes horizontales y verticales a una cardioide. ■

Áreas limitadas por curvas en polares

El problema básico del área en coordenadas polares es el de calcular el área A de la región R limitada por la gráfica en polares $r = f(\theta)$ y por los dos rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. Se supone que $\beta > \alpha$ y que f es continua para $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$. *Véase* la Figura 8.52.

Un elemento de área adecuado en este caso es un sector angular de anchura $d\theta$, como se muestra en la citada figura. Para $d\theta$ infinitesimal, es un sector de una circunferencia de radio $f = f(\theta)$:

$$dA = \frac{d\theta}{2\pi}\,\pi r^2 = \frac{1}{2}\,r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\,(f(\theta))^2\,d\theta$$

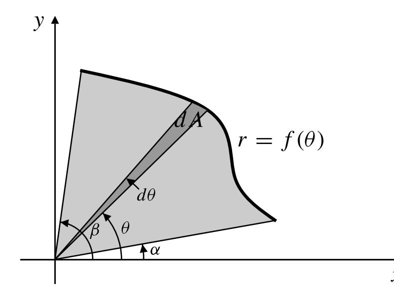


Figura 8.52 Un elemento de área en coordenadas polares.

Área en coordenadas polares

El área de la región limitada por $r = f(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, $(\alpha < \beta)$ es

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2\, d\theta$$

Ejemplo 2 Calcule el área encerrada por la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, como se muestra en la Figura 8.53.

Solución Por simetría, el área total será el doble del área de la mitad superior:

$$\begin{aligned} A &= 2 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1 + \cos\theta)^2\, d\theta \\ &= a^2\int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \\ &= a^2\int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= a^2\left(\frac{3}{2}\,\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\,\pi a^2 \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

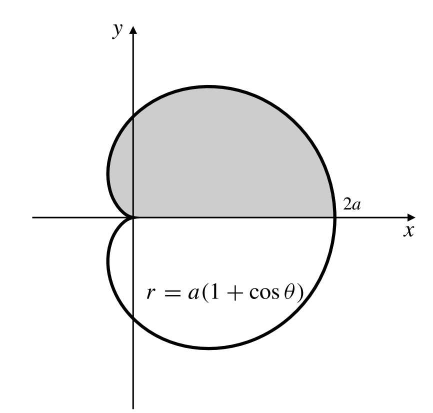


Figura 8.53

Ejemplo 3 Calcule el área de la región que pertenece simultáneamente al interior de la circunferencia $r = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$ y de la lemniscata $r^2 = \mathrm{sen}\,2\theta$.

Solución La región se muestra sombreada en la Figura 8.54. Además de en el origen, las curvas se cortan en el punto del primer cuadrante que cumple

$$2\,\mathrm{sen}^2\theta = \mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

Figura 8.54

Por tanto, $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$ y $\theta = \pi/4$. El área pedida es

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta - \frac{1}{4}\cos 2\theta\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} \quad \text{unidades al cuadrado}$$

Longitudes de arco de curvas en polares

El elemento de arco de la curva en polares $r = f(\theta)$ se puede determinar a partir del triángulo diferencial que se muestra en la Figura 8.55. El cateto $r\,d\theta$ se calcula como la longitud de arco de un arco circular de radio r que abarca un ángulo $d\theta$ en el origen. Tenemos que

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right](d\theta)^2$$

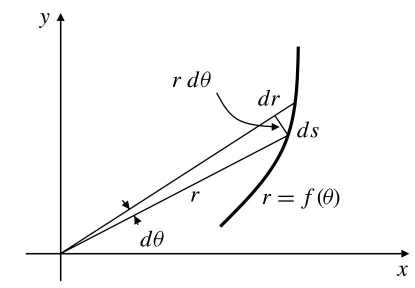


Figura 8.55 Elemento de longitud de arco de una curva en polares.

por lo que se obtiene la siguiente fórmula:

Longitud de un elemento de arco de una curva en polares

El elemento de longitud de arco de la curva en polares $r = f(\theta)$ es

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta = \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}\, d\theta$$

La expresión del elemento de arco se puede obtener también a partir del de una curva paramétrica. *Véase* el Ejercicio 26 al final de esta sección.

Ejemplo 4 Calcule la longitud total de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$.

Solución La longitud total será dos veces la longitud desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$ (*véase* la Figura 8.53). Como para la cardioide $dr/d\theta = -a\,\mathrm{sen}\,\theta$, la longitud de arco es

$$\begin{aligned} s &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + a^2(1+\cos\theta)^2}\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\theta}\,d\theta \qquad (\text{pero } 1+\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)) \\ &= 2\sqrt{2}a\int_2^{\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta \\ &= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\bigg|_0^{\pi} = 8a \text{ unidades} \end{aligned}$$

Ejercicios 8.6

En los Ejercicios 1-11, dibuje las regiones R dadas en polares y calcule sus áreas.

1. R está entre el origen y la espiral $r = \sqrt{\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

2. R está entre el origen y la espiral $r = a^2\cos 2\theta$.

3. R está limitada por la curva $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

4. R es una hoja de la curva $r = \mathrm{sen}\,3\theta$.

5. R está limitada por la curva $r = \cos 4\theta$.

6. R está en el interior de las circunferencias $r = a$ y $r = 2a\cos\theta$.

7. R está dentro de la cardioide $r = 1 - \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

8. R está dentro de la cardioide $r = a(1 - \mathrm{sen}\,\theta)$ y dentro de la circunferencia $r = a$.

9. R está dentro de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 3\cos\theta$.

10. R está limitada por la lemniscata $r^2 = 2\cos 2\theta$ y está fuera de la circunferencia $r = 1$.

11. R está limitada por el lazo más pequeño de la curva $r = 1 + 2\cos\theta$.

Calcule las longitudes de las curvas en polares de los Ejercicios 12-14.

12. $r = \theta^2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

13. $r = e^{a^{\theta}}$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$

14. $r = a\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

15. Demuestre que la longitud de arco total de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ es $4\int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec 2\theta}\,d\theta$.

16. Una hoja de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ se rota (a) alrededor del eje x y (b) alrededor del eje y. Calcule el área de la superficie generada en cada caso.

***17.** Determine los ángulos a los que la recta $\theta = \pi/4$ corta a la cardioide $r = 1 + \mathrm{sen}\,\theta$.

***18.** ¿En qué puntos se cortan las curvas $r^2 = 2\,\mathrm{sen}\,2\theta$ y $r = 2\cos\theta$? ¿Con qué ángulos se cortan las curvas en cada uno de esos puntos?

***19.** ¿En qué puntos se cortan las curvas $r = 1 - \cos\theta$ y $r = 1 - \mathrm{sen}\,\theta$? ¿Con qué ángulos se cortan las curvas en cada uno de esos puntos?

En los Ejercicios 20-25, calcule todos los puntos de las curvas dadas donde la tangente es horizontal, vertical o no existe.

***20.** $r = \cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta$

***21.** $r = 2\cos\theta$

***22.** $r^2 = \cos 2\theta$

***23.** $r = \mathrm{sen}\,2\theta$

***24.** $r = e^{\theta}$

***25.** $r = 2(1 - \mathrm{sen}\,\theta)$

26. La curva en polares $r = f(\theta)$, $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ se puede parametrizar:

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Obtenga la fórmula del elemento de longitud de arco de la curva en polares a partir del de la curva paramétrica.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significa lo siguiente?**
  - ◇ Sección cónica ◇ Elipse
  - ◇ Parábola ◇ Hipérbola
  - ◇ Curva paramétrica ◇ Parametrización de una curva
  - ◇ Curva suave ◇ Curva en polares
- **¿Cuál es la definición foco-directriz de una cónica?**
- **¿Cómo se puede calcular la pendiente de una curva paramétrica?**
- **¿Cómo se puede calcular la longitud de una curva paramétrica?**
- **¿Cómo se puede calcular la longitud de una curva en polares?**
- **¿Cómo se puede calcular el área encerrada por una curva en polares?**

Ejercicios de repaso

En los Ejercicios 1-4, describa las cónicas que tienen las ecuaciones dadas. Calcule sus focos y ejes principales y, si son hipérbolas, sus asíntotas.

1. $x^2 + 2y^2 = 2$ **2.** $9x^2 - 4y^2 = 36$

3. $x + y^2 = 2y + 3$ **4.** $2x^2 + 8y^2 = 4x - 48y$

Identifique las curvas paramétricas de los Ejercicios 5-10.

5. $x = t,\ y = 2 - t,\ (0 \leqslant t \leqslant 2)$

6. $x = 2\,\mathrm{sen}\,3t,\ y = 2\cos 3t,\ (0 \leqslant t \leqslant 1/2)$

7. $x = \cosh t,\ y = \mathrm{senh}^2\, t$

8. $x = e^t,\ y = e^{-2t},\ (-1 \leqslant t \leqslant 1)$

9. $x = \cos(t/2),\ y = 4\,\mathrm{sen}(t/2),\ (0 \leqslant t \leqslant \pi)$

10. $x = \cos t + \mathrm{sen}\, t,\ y = \cos t - \mathrm{sen}\, t,\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

En los Ejercicios 11-14, determine los puntos donde las curvas paramétricas dadas tienen tangentes horizontales y verticales, y dibuje dichas curvas.

11. $x = \dfrac{4}{1 + t^2},\ y = t^3 - 3t$

12. $x = t^3 - 3t,\ y = t^3 + 3t$

13. $x = t^3 - 3t,\ y = t^3$

14. $x = t^3 - 3t,\ y = t^3 - 12t$

15. Calcule el área limitada por la parte de la curva $x = t^3 - t,\ y = |t^3|$ que forma un lazo cerrado.

16 Calcule el volumen del sólido generado rotando el lazo cerrado del Ejercicio 15 alrededor del eje y.

17. Calcule la longitud de la curva $x = e^t - t,\ y = 4e^{t/2}$ desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

18. Calcule el área de la superficie que se obtiene rotando el arco del Ejercicio 17 alrededor del eje x.

Dibuje las gráficas en polares de las ecuaciones de los Ejercicios 19-24.

19. $r = \theta,\ (-\frac{3\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2})$ **20.** $r = |\theta|,\ (-2\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

21. $r = 1 + \cos 2\theta$ **22.** $r = 2 + \cos 2\theta$

23. $r = 1 + 2\cos 2\theta$ **24.** $r = 1 - \mathrm{sen}\, 3\theta$

25. Calcule el área de uno de los dos lazos mayores de la curva del Ejercicio 23.

26. Calcule el área de uno de los dos lazos menores de la curva del Ejercicio 23.

27. Calcule el área del más pequeño de los dos lazos encerrados por la curva $r = 1 + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$.

28. Calcule el área de la región que está dentro de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y a la izquierda de la recta $x = 1/4$.

Problemas avanzados

1. Un vaso con forma de cilindro circular de radio 4 cm se rellenan más de la mitad con agua. Si el vaso se inclina a un ángulo θ de la vertical, siendo θ lo suficientemente pequeño para que no se derrame el agua, calcule el área de la superficie del agua.

2. Demuestre que un plano que no es paralelo al eje de un cilindro circular corta al cilindro formando una elipse. *Sugerencia*: Se puede utilizar el mismo método empleado en el Ejercicio 27 de la Sección 8.1.

3. Dados dos puntos F_1 y F_2 que son los focos de una elipse, y un tercer punto P en dicha elipse, describa un método geométrico (utilizando una regla y un compás) para construir la tangente a la elipse en P. *Sugerencia*: Piense en la propiedad de reflexión de las elipses.

4. Sea C una parábola de vértice V, y sea P un punto cualquiera de dicha parábola. Sea R el punto donde la tangente a la parábola en P corta a su eje (por tanto, dicho eje es la recta RV). Sea Q el punto de RV tal que PQ es perpendicular a RV. Demuestre que V divide en dos mitades iguales el segmento RQ. ¿Cómo puede sugerir este resultado un método geométrico para construir una tangente a una parábola en un punto de ésta, sabiendo el eje y el vértice de la parábola?

5. Un barril tiene la forma de un sólido de revolución obtenido rotando alrededor de su eje mayor la parte de una elipse que está entre dos rectas que cruzan a sus focos, y son perpendiculares a dicho eje mayor. El barril tiene 4 pies de altura y 2 pies de radio en su parte central. ¿Cuánto vale su volumen?

6. (a) Demuestre que cualquier recta que no pasa por el origen se puede expresar en forma polar como

$$r = \frac{a}{\cos(\theta - \theta_0)}$$

siendo a y θ_0 constantes. ¿Cuál es el significado geométrico de estas constantes?

(b) Sea $r = g(\theta)$ la ecuación en polares de una recta que no pasa por el origen. Demuestre que

$$g^2 + 2(g')^2 - gg'' = 0$$

(c) Sea $r = f(\theta)$ la ecuación en polares de una curva, siendo f'' continua y $r \neq 0$ en algún intervalo de valores de θ. Sea

$$F = f^2 + 2(f')^2 - ff''$$

Demuestre que la curva se dirige hacia el origen si $F > 0$ y se aleja del origen si $F < 0$. *Sugerencia*: Sea $r = g(\theta)$ la ecuación en polares de una recta tangente a la curva; utilice el apartado (b). ¿Cómo se relacionan f, f' y f'' con g, g' y g'' en el punto de tangencia?

7. **(Un viaje rápido, pero un poco caluroso)** Si se supone que la densidad de la tierra es uniforme en su interior, entonces se puede suponer que la aceleración de la gravedad a una distancia $r \leqslant R$ de su centro está dirigida hacia dicho centro, y tiene un valor de $a(r) = rg/R$, siendo g la aceleración normal de la gravedad en la superficie de la tierra ($g \approx 32$ pies/s^2) y R el radio de la tierra ($R \approx 3960$ mi). Suponga que se excava un túnel AB directo a través de la tierra entre los puntos A y B de superficie, por ejemplo Atlanta y Bagdad (*véase* la Figura 8.56).

Suponga que se construye un vehículo que se puede deslizar sin rozamiento ni resistencia del aire a través de este túnel. Demuestre que ese vehículo, si se liberara en un extremo del túnel, oscilaría entre A y B, ejecutando un movimiento armónico simple de periodo $2\pi\sqrt{R/g}$. ¿Cuántos minutos duraría cada vuelta? Lo que es sorprendente en este caso es que este periodo no depende de dónde están A y B ni de la distancia entre ellos. *Sugerencia*: Suponga el eje x a lo largo del túnel, con el origen en el punto más cercano al centro de la tierra. Cuando el vehículo está en la posición de coordenada x $x(t)$ su aceleración a lo largo del túnel es la componente de la aceleración gravitatoria a lo largo de dicho túnel, es decir, $-a(r)\cos\theta$, siendo θ el ángulo entre la línea del túnel y la recta que va del vehículo al centro de la tierra.

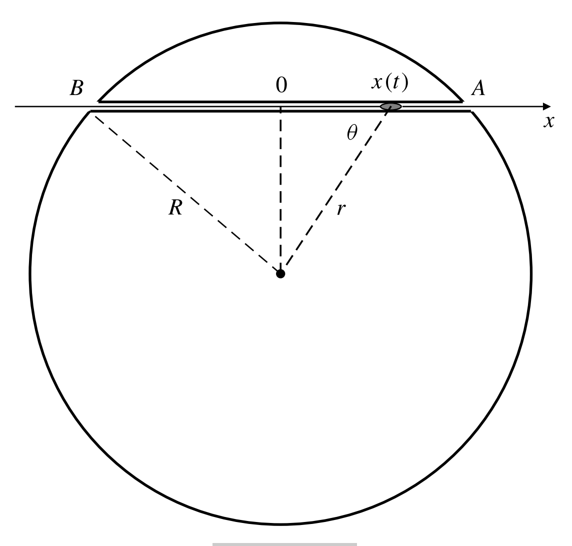


Figura 8.56

$*$**8.** **(Búsqueda y rescate)** Dos estaciones de la Guardia Costera reciben una señal de desastre de un barco y utilizan radiolocalización para situarla. La estación O observa que la señal de desastre proviene del noreste (45º noreste) y la estación P, que está 100 millas al norte de la estación O, observa que la señal proviene del este. La precisión en la radiolocalización de cada estación es de ± 3º.

(a) ¿Cuál es la amplitud del área de océano donde deberán buscar las aeronaves de rescate para asegurarse que encuentran al barco con problemas?

(b) Si la precisión de la radiolocalización es $\pm\varepsilon$, ¿qué sensibilidad tiene el área de búsqueda con cambios en ε cuando $\varepsilon = 3$º? Exprese su respuesta en millas al cuadrado por grado.

9. La Figura 8.57 muestra las gráficas de la curva paramétrica $x = \operatorname{sen} t$, $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ y de la curva en polares $r^2 = \cos(2\theta)$. Ambas tienen la forma de un «∞». ¿Cuál es cada curva? Calcule el área encerrada entre la curva externa y el exterior de la curva interna.

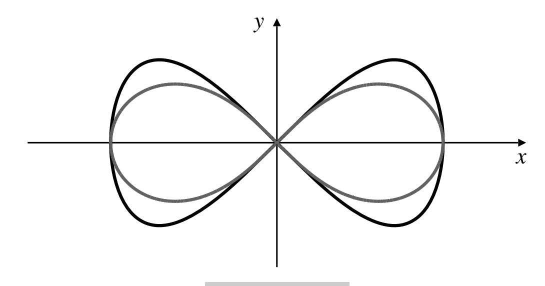


Figura 8.57



CAPÍTULO 9

Secuencias, series y series de potencias

—Entonces dices lo que piensas —siguió la Liebre de Marzo.

—Sí —dijo Alicia apresuradamente—, al menos... al menos pienso lo que digo... que es lo mismo, como sabes.

—¡De ninguna manera es lo mismo! —dijo el Sombrerero—. ¡Entonces, podrías también decir que ‘‘yo veo lo que como’’ es lo mismo que decir ‘‘yo como lo que veo’’!

Lewis Carrol (Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898)
de *Alicia en el País de las Maravillas*

Introducción Una serie infinita es una suma en la que intervienen infinitos términos. Como las sumas se realizan de dos en dos números, el cálculo de la suma de una serie infinita requiere necesariamente el cálculo de un límite. Las funciones complicadas $f(x)$ se pueden expresar frecuentemente como series de funciones más simples. Por ejemplo, una buena parte de las funciones trascendentes que ya hemos estudiado, se pueden expresar como series de potencias de x que se parecen a polinomios de grado infinito. Estas series se pueden diferenciar e integrar término a término y tienen un papel muy importante en el estudio del cálculo.

9.1 Secuencias y convergencia

Por **secuencia** (o **secuencia infinita**) queremos decir una lista ordenada que tiene un primer elemento, pero no un último elemento. A nuestros efectos, los elementos (denominados **términos**) de una secuencia serán siempre números reales, aunque una buena parte de nuestra presentación se puede aplicar también a números complejos. Unos ejemplos de secuencias pueden ser:

$\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, la secuencia de los enteros positivos.

$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right\}$ la secuencia de enteros positivos que son potencias de $-\frac{1}{2}$.

Los términos de la secuencia generalmente se encierran entre llaves, tal como se indica. Los puntos suspensivos (...) quieren decir «y así sucesivamente».

Una secuencia infinita es una clase especial de función, cuyo dominio es una serie de enteros que van desde algún entero inicial hasta el infinito. El entero inicial es generalmente 1, por lo que el dominio es el conjunto de los enteros positivos. La secuencia $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ es la función f que toma el valor $f(n) = a_n$ en cada entero positivo n. Una secuencia se puede especificar de tres formas:

(i) Se pueden indicar unos cuantos términos del principio seguidos por ... *si el patrón de la secuencia es obvio.*
(ii) Se puede dar la fórmula del **término general** a_n en función de n.
(iii) Se puede dar la fórmula para calcular el término a_n en función de términos anteriores a_1, a_2, ..., a_{n-1}, y especificar los suficientes términos al comienzo de la secuencia para poder comenzar el cálculo de los términos posteriores.

En todos los casos, debe ser posible determinar cualquier término de la secuencia, aunque puede ser necesario calcular primero todos los términos anteriores.

Ejemplo 1 **(Algunos ejemplos de secuencias)**

(a) $\{n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

(b) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right\}$

(c) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right\}$

(d) $\{(-1)^{n-1}\} = \{\cos((n-1)\pi)\} = \{1, -1, 1, -1, 1, ...\}$

(e) $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, ...\right\}$

(f) $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} = \left\{2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, ...\right\}$

(g) $\left\{\frac{\cos(n\pi/2)}{n}\right\} = \left\{0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, ...\right\}$

(h) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, $(n = 1, 2, 3, ...)$

En este caso $\{a_n\} = \{1, \sqrt{7}, \sqrt{6 + \sqrt{7}}, ...\}$ Nótese que no hay una fórmula *obvia* para a_n como función explícita de n, pero todavía se puede calcular a_n para cualquier valor deseado de n calculando primero todos los valores anteriores $a_2, a_3, ..., a_{n-1}$.

(i) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $(n = 1, 2, 3, ...)$

En este caso $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...\}$. Esta secuencia se denomina **secuencia de Fibonacci**. Cada uno de sus términos, después del segundo, es la suma de los dos términos anteriores.

En los apartados (a)-(g) del Ejemplo 1, las fórmulas de los miembros izquierdos definen el término general de cada secuencia $\{a_n\}$ como una función explícita de n. En los apartados (h) e (i) se dice que la secuencia $\{a_n\}$ se define **recursivamente** o **inductivamente**; cada término se debe calcular a partir de los anteriores en vez de calcularse como una función directa de n.

Presentamos a continuación la terminología utilizada para describir diversas propiedades de las secuencias.

DEFINICIÓN 1 **Términos utilizados para describir las secuencias**

(a) La secuencia $\{a_n\}$ está **acotada inferiormente** por L, y L es una **cota inferior** de $\{a_n\}$, si $a_n \geqslant L$ para todo $n = 1, 2, 3, ...$ La secuencia está **acotada superiormente** por M, y M es una **cota superior**, si $a_n \leqslant M$ para todo n entero positivo.
La secuencia $\{a_n\}$ está **acotada** si está acotada inferiormente y superiormente. En este caso, existe una constante K tal que $|a_n| \leqslant K$ para todo $n = 1, 2, 3, ...$ (podemos tomar K como el mayor de los enteros $-L$ y M).

(b) La secuencia $\{a_n\}$ es **positiva** si está acotada inferiormente por cero, es decir, si $a_n \geqslant 0$ para todo $n = 1, 2, 3, ...$; es **negativa** si $a_n \leqslant 0$ para todo n.

(c) La secuencia $|a_n\}$ es **creciente** si $a_{n+1} \geqslant a_n$ para todo $n = 1, 2, 3, ...$; es **decreciente** si $a_{n+1} \leqslant a_n$ para todo n entero positivo. Se dice que una secuencia es **monótona** si no es creciente ni decreciente (la terminología en este caso es algo más relajada que la utilizada para funciones, donde utilizábamos las expresiones *no decreciente* y *no creciente* para describir este comportamiento. La distinción entre $a_{n+1} > a_n$ y $a_{n+1} \geqslant a_n$ no es tan importante en el caso de secuencias como lo es en el caso de funciones definidas en intervalos).

(d) La secuencia $\{a_n\}$ es **alternante** si $a_n a_{n+1} < 0$ para todo $n = 1, 2, ...$, es decir, si dos términos consecutivos cualesquiera tienen signo opuesto. Nótese que esta definición requiere $a_n \neq 0$ para todo n.

Ejemplo 2 **(Descripción de algunas secuencias)**

(a) La secuencia $\{n\} = \{1, 2, 3, ...\}$ es positiva, creciente y acotada inferiormente. Un límite inferior de esta secuencia es 1 o cualquier número más pequeño. La secuencia no está acotada superiormente.

(b) $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, ...\right\}$ es positiva, acotada y creciente. En este caso 0 es una cota inferior y 1 es una cota superior.

(c) $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, ...\right\}$ es acotada y alternante. En este caso $-1/2$ es una cota inferior y $1/4$ es una cota superior.

(d) $\{(-1)^n n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, ...\}$ es alternante pero no está acotada ni superiormente ni inferiormente.

Cuando se desea demostrar que una secuencia es creciente, se puede intentar demostrar que se cumple la inecuación $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ para $n \geqslant 1$. Pero una forma alternativa, si $a_n = f(n)$ para una función diferenciable $f(x)$, es demostrar que f es una función no decreciente en $[1, \infty)$, demostrando que $f'(x) \geqslant 0$ en dicho intervalo. Se puede utilizar un método similar para demostrar que una secuencia es decreciente.

Ejemplo 3 Si $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, demuestre que la secuencia $\{a_n\}$ es decreciente.

Solución Como $a_n = f(n)$, siendo $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ y

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leqslant 0 \qquad \text{para } x \geqslant 1$$

La función $f(x)$ es decreciente en $[1, \infty)$; por tanto, $\{a_n\}$ es una secuencia decreciente. ■

La secuencia $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{9}{8}, 1, \dfrac{25}{32}, \dfrac{36}{64}, \dfrac{49}{128}, ...\right\}$ es positiva y, por tanto, acotada inferiormente. Parece claro que a partir del cuarto término en adelante, todos los términos se van haciendo más pequeños. Sin embargo, $a_2 > a_1$ y $a_3 > a_2$. Como $a_{n+1} \leqslant a_n$, sólo si $n \geqslant 3$ se dice que la secuencia es **definitivamente decreciente**. El adverbio *definitivamente* se utiliza para describir cualquier propiedad de los términos de la secuencia desde algún punto en adelante, pero no necesariamente al principio de la secuencia. Por tanto, la secuencia

$$\{n - 100\} = \{-99, -98, ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

es *definitivamente positiva*, incluso aunque los 99 primeros términos sean negativos y la secuencia

$$\left\{(-1)^n + \frac{4}{n}\right\} = \left\{3, 3, \frac{1}{3}, 2, -\frac{1}{5}, \frac{5}{3}, -\frac{3}{7}, \frac{3}{2}, ...\right\}$$

es *definitivamente alternante*, aun cuando algunos términos iniciales no alternen.

Convergencia de secuencias

La noción de convergencia es fundamental en el estudio de secuencias. El concepto de límite de una secuencia es un caso especial del concepto de límite de una función $f(x)$ cuando $x \to \infty$. Se dice que la secuencia $\{a_n\}$ **converge al límite** L, y se expresa como $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, siempre que la distancia desde a_n a L sobre la recta real tienda a cero cuando n tiende a ∞. Expresaremos esta definición de manera más formal:

DEFINICIÓN 2 Límite de una secuencia

Se dice que la secuencia $\{a_n\}$ converge al límite L, y se expresa como $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, si para todo número real positivo ϵ existe un entero N (que puede depender de ϵ) tal que si $n \geqslant N$, entonces $|a_n - L| < \epsilon$.

Esta definición se ilustra en la Figura 9.1.

Ejemplo 4 Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c}{n^p} = 0$ para todo número real c y cualquier $p > 0$.

Solución Sea $\epsilon > 0$. Entonces

$$\left|\frac{c}{n^p}\right| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad n^p > \frac{|c|}{\epsilon}$$

Es decir, si $n \geqslant N$, el mínimo entero mayor que $(|c|/\epsilon)^{1/p}$. Por tanto, por la Definición 2, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c}{n^p} = 0$. ■

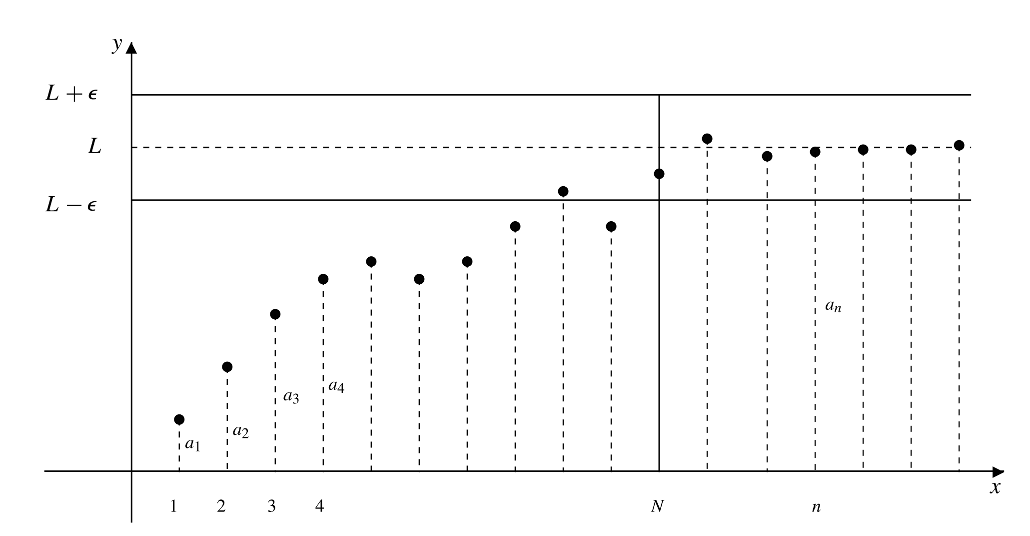


Figura 9.1 Una secuencia convergente.

Toda secuencia $\{a_n\}$ debe **converger** a un límite finito L o **divergir**. Es decir, o $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existe (es un número real) o $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, se puede decir que la secuencia diverge a infinito; si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, se puede decir que diverge a $-\infty$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ simplemente no existe (pero no es ∞ ni $-\infty$), sólo se puede decir que la secuencia diverge.

Ejemplo 5 **(Ejemplos de secuencias convergentes y divergentes)**

(a) $\{(n-1)/n\}$ converge a 1; $\lim_{n\to\infty} (n-1)/n = \lim_{n\to\infty} (1-(1/\text{n})) = 1$.

(b) $\{n\} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ diverge a ∞.

(c) $\{-n\} = \{-1, -2, -3, -4, ...\}$ diverge a $-\infty$.

(d) $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, ...\}$ simplemente diverge.

(e) $\{(-1)^n n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, ...\}$ diverge (pero no a ∞ ni a $-\infty$, aun cuando $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$).

El límite de una secuencia es equivalente al límite de una función cuando su argumento tiende infinito:

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{y} \quad a_n = f(n), \quad \text{entonces} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Debido a esto, las reglas estándar de los límites de funciones (Teoremas 2 y 4 de la Sección 1.2) se pueden aplicar también para límites de secuencias, con los cambios apropiados de notación. Es decir, si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \qquad \text{suponiendo } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\text{Si } a_n \leqslant b_n \text{ definitivamente, entonces } \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\text{Si } a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \text{ definitivamente, y } \lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n, \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} b_n = L$$

Los límites de muchas secuencias definidas explícitamente se pueden calcular utilizando estas propiedades, de modo similar a los métodos utilizados para límites de la forma $\lim_{x\to\infty} f(x)$ en la Sección 1.3.

Ejemplo 6 Calcule los límites de las secuencias

(a) $\left\{\dfrac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3}\right\}$, (b) $\left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$, y (c) $\{\sqrt{n^2 + 2n} - n\}$

Solución

(a) Se divide el numerador y el denominador de la expresión de a_n por la máxima potencia de n en el denominador, es decir, por n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - (1/n) - (1/n^2)}{5 + (1/n) - (3/n^2)} = \frac{2 - 0 - 0}{5 + 0 - 0} = \frac{2}{5}$$

ya que $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$. La secuencia converge y su límite es $2/5$.

(b) Como $|\cos n| \leqslant 1$ para todo n, tenemos que

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{para} \quad n \geqslant 1$$

En este caso, $\lim_{n\to\infty} - 1/n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Por tanto, por la versión para secuencias del Teorema del Sándwich, $\lim_{n\to\infty} (\cos n)/n = 0$. La secuencia dada converge a 0.

(c) En esta secuencia multiplicamos el numerador y el denominador (que es 1) por el conjugado de la expresión del numerador:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + (2/n)} + 1} = 1$$

La secuencia converge a 1.

Ejemplo 7 Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solución En este ejemplo, es mejor sustituir el término n-ésimo de la secuencia por la correspondiente función de una variable real x y tomar el límite cuando $x \to \infty$. Utilizaremos la Regla del l'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} n \tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to\infty} x \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{1 + (1/x^2)}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\left(\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{x^2}} = 1$$

TEOREMA 1 Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\{a_n\}$ está acotada.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. De acuerdo con la Definición 2, para $\epsilon = 1$ existe un número N tal que si $n > N$, entonces $|a_n - L| < 1$; por lo tanto, $|a_n| < 1 + |L|$ para ese n (¿por qué es esto cierto?). Si K indica el máximo de los números $|a_1|, |a_2|, ..., |a_N|$ y $1 + |L|$, entonces $|a_n| \leqslant K$ para todo $n = 1, 2, 3, ...$ Por lo tanto, $\{a_n\}$ está acotada.

Lo contrario del Teorema 1 es falso; la secuencia $\{(-1)^n\}$ está acotada pero no converge.

La *propiedad de completitud* del sistema de los números reales (*véase* la Sección P.1) se puede reformular en términos de secuencias como sigue:

Las secuencias monótonas acotadas convergen

Si la secuencia $\{a_n\}$ está acotada superiormente y es (definitivamente) creciente, entonces converge. La misma conclusión se mantiene si $\{a_n\}$ está acotada inferiormente y es (definitivamente) decreciente.

Por tanto, una secuencia acotada y definitivamente monótona es convergente (*véase* la Figura 9.2).

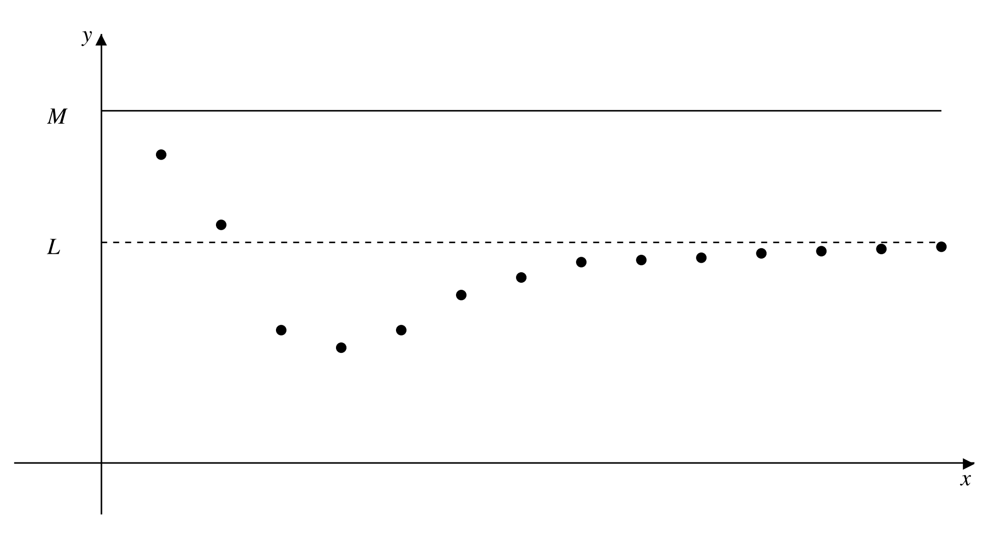


Figura 9.2 Una secuencia definitivamente creciente que está acotada superiormente.

Ejemplo 8 Sea a_n una secuencia definida recursivamente como

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe y calcule su valor.

Solución Obsérvese que $a_2 = \sqrt{6+1} = \sqrt{7} > a_1$. Si $a_{k+1} > a_k$, entonces $a_{k+2} = \sqrt{6 + a_{k+1}} > \sqrt{6 + a_k} = a_{k+1}$, por lo que $\{a_n\}$ es creciente, por inducción. Obsérvese ahora que $a_1 = 1 < 3$. Si $a_k < 3$, entonces $a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k} < \sqrt{6+3} = 3$, por lo que $a_n < 3$ para todo n por inducción. Como $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existe, por completitud. Como $\sqrt{6+x}$ es una función continua de x, tenemos que

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{6 + a}$$

Entonces $a^2 = 6 + a$ o $a^2 - a - 6 = 0$, o $(a-3)(a+2) = 0$. Las raíces de esta ecuación de segundo grado son $a=3$ y $a=-2$. Como $a_n \geqslant 1$ para todo n, debemos tener $a \geqslant 1$. Por tanto, $a=3$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$. ■

Hay que notar un punto sutil en esta solución. Demostrar que $\{a_n\}$ es creciente es bastante obvio, pero ¿cómo hemos sabido que había que probar con 3 (en vez de cualquier otro número) para demostrar que era una cota superior? La respuesta es que realmente hicimos primero la última parte y demostramos que *si* $\lim a_n = a$ existe, *entonces* $a = 3$. Por tanto, tiene sentido probar con 3 y demostrar que $a_n < 3$ para todo n.

Ejemplo 9 ¿Converge o diverge la secuencia $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$?

Solución Podríamos hacer un esfuerzo para demostrar que la secuencia dada es, de hecho, creciente y acotada superiormente (*véase* el Ejercicio 32 al final de esta sección). Sin embargo, ya conocemos la respuesta. La secuencia converge por el Teorema 6 de la Sección 3.4:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$$

■

TEOREMA 2 Si $\{a_n\}$ es (definitivamente) creciente, entonces, o está acotada superiormente, y por tanto es convergente, o no está acotada superiormente y diverge a infinito.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio. Se puede plantear un resultado equivalente para secuencias (definitivamente) decrecientes.

El siguiente teorema calcula dos límites importantes de frecuente aplicación en el estudio de series.

TEOREMA 3 (a) Si $|x| < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

(b) Si x es un número real cualquiera, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

DEMOSTRACIÓN Para el apartado (a), obsérvese que

$$\lim_{n\to\infty} \ln|x|^n = \lim_{n\to\infty} n\ln|x| = -\infty$$

ya que $\ln|x| < 0$ cuando $|x| < 1$. De acuerdo con esto, como e^x es continua,

$$\lim_{n\to\infty} |x|^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln|x|^n} = e^{\lim_{n\to\infty}\ln|x|^n} = 0$$

Como $-|x|^n \leqslant x^n \leqslant |x|^n$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ por el Teorema del Sándwich.

Para el apartado (b), escójase cualquier x y sea N un entero tal que $N > |x|$. Si $n > N$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^n}{n!}\right| &= \frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\frac{|x|}{3}\cdots\frac{|x|}{N-1}\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N+1}\cdots\frac{|x|}{n}\\ &< \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N}\cdots\frac{|x|}{N}\\ &= \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N+1} = K\left(\frac{|x|}{N}\right)^n\end{aligned}$$

donde $K = \dfrac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\dfrac{|x|}{N}\right)^{1-N}$ es una constante independiente de n. Como $|x|/N < 1$, tenemos que en $\lim_{n\to\infty} (|x|/N)^n = 0$ por el apartado (a). Así, $\lim_{n\to\infty} |x^n/n!| = 0$ y, por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$.

Ejemplo 10 Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n + 4^n + 5^n}{5^n}$.

Solución $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1\right] = 0 + 0 + 1 = 1$, por el Teorema 3(a).

Ejercicios 9.1

En los Ejercicios 1-13, determine si la secuencia dada es (a) acotada (superiormente o inferiormente), (b) (definitivamente) positiva o negativa, (c) creciente, decreciente o alternante, y (d) convergente, divergente o divergente a ∞ o $-\infty$.

1. $\left\{\dfrac{2n^2}{n^2+1}\right\}$

2. $\left\{\dfrac{2n}{n^2+1}\right\}$

3. $\left\{4 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$

4. $\left\{\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right\}$

5. $\left\{\dfrac{n^2-1}{n}\right\}$

6. $\left\{\dfrac{e^n}{\pi^n}\right\}$

7. $\left\{\dfrac{e^n}{\pi^{n/2}}\right\}$

8. $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{e^n}\right\}$

9. $\left\{\dfrac{2^n}{n^n}\right\}$

10. $\left\{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right\}$

11. $\left\{n\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}$

12. $\left\{\dfrac{\operatorname{sen} n}{n}\right\}$

13. $\{1, 1, -2, 3, 3, -4, 5, 5, -6, ...\}$

En los Ejercicios 14-29 calcule, siempre que sea posible, los límites de las secuencias $\{a_n\}$.

14. $a_n = \dfrac{5-2n}{3n-7}$

15. $a_n = \dfrac{n^2-4}{n+5}$

16. $a_n = \dfrac{n^2}{n^3+1}$

17. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n^3+1}$

18. $a_n = \dfrac{n^2 - 2\sqrt{n} + 1}{1 - n - 3n^2}$

19. $a_n = \dfrac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$

20. $a_n = n\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$

21. $a_n = \left(\dfrac{n-3}{n}\right)^n$

22. $a_n = \dfrac{n}{\ln(n+1)}$

23. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

24. $a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$

25. $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}$

26. $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

27. $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

28. $a_n = \dfrac{n^2 2^n}{n!}$

29. $a_n = \dfrac{\pi^n}{1 + 2^{2n}}$

30. Sea $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente. *Sugerencia*: Demuestre que 3 es una cota superior. A partir de aquí, concluya que la secuencia converge y obtenga su límite.

***31.** Repita el Ejercicio 30 para la secuencia definida por $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{15 + 2a_n}$, $n = 1, 2, 3, ...$ Esta vez tendrá que buscar una cota superior.

***32.** Sea $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, de forma que $\ln a_n = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Utilice las propiedades de la función logaritmo para demostrar que (a) $\{a_n\}$ es creciente y (b) e es una cota superior de $\{a_n\}$.

***33.** Demuestre el Teorema 2. Formule además un teorema análogo correspondiente a secuencias definitivamente decrecientes.

34. Si $\{|a_n|\}$ está acotada, demuestre que $\{a_n\}$ está acotada.

35. Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

***36.** ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas? Justifique sus respuestas.

(a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = L > 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

(b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$.

(c) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

(d) Si no convergen $\{a_n\}$ ni $\{b_n\}$, entonces $\{a_n b_n\}$ no converge.

(e) Si $\{|a_n|\}$ converge, entonces $\{a_n\}$ converge.

9.2 Series infinitas

Una **serie infinita**, denominada también simplemente **serie**, es una suma formal de infinitos términos; por ejemplo, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ es una serie formada sumando los términos de la secuencia $\{a_n\}$. Esta serie se puede expresar también como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$$

Algunas veces es necesario o útil empezar la suma con un índice distinto de 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdots$$

Nótese que la última serie no tendría sentido si hubiéramos empezado la suma desde $n = 1$, ya que entonces el primer término habría quedado indefinido.

Cuando sea necesario, se puede cambiar el índice de la suma para que empiece en un valor diferente. Esto se hace realizando un cambio como se ilustra en el Ejemplo 3 de la Sección 5.1. Por ejemplo, utilizando el cambio $n = m - 2$, se puede reformular $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en la forma $\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$. Ambas sumas se desarrollan de la misma forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$$

La suma es una operación que se realiza con dos números cada vez. Si se desea calcular la suma finita $a_1 + a_2 + a_3$, se puede proceder sumando $a_1 + a_2$ y después sumando a_3 al resultado; o bien se puede sumar primero $a_2 + a_3$ y después sumar a_1 al resultado. Por supuesto, la propiedad asociativa de la suma nos asegura que obtendremos el mismo resultado de las dos formas. Esta es la razón de que la expresión simbólica $a_1 + a_2 + a_3$ tenga sentido; si no, habría que haber escrito $(a_1 + a_2) + a_3$ o $a_1 + (a_2 + a_3)$. Este razonamiento se puede ampliar a cualquier suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ de un número finito de términos, pero no es obvio qué queremos decir en una suma con infinitos términos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

No podemos asegurar que los términos que no se sumen en el mismo orden producirán el mismo resultado. De hecho, veremos en la Sección 9.4 que, en ciertas circunstancias, cambiar el orden

de los términos en una serie puede cambiar realmente la suma de la serie. La interpretación que haremos de la suma infinita es la de sumar de izquierda a derecha, como sugiere el agrupamiento

$$\cdots((((a_1 + a_2) + a_3) + a_4) + a_5) + \cdots$$

Realizaremos esto definiendo una nueva secuencia $\{s_n\}$, denominada **secuencia de sumas parciales** de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, de forma que s_n es la suma de los n primeros términos de la serie:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= s_1 + a_2 = a_1 + a_2 \\
s_3 &= s_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= s_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definiremos entonces la suma de una serie infinita como el límite de esta secuencia de sumas parciales.

DEFINICIÓN 3 **Convergencia de una serie**

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge a la suma** s, y se escribe como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, siendo s_n la suma parcial n-ésima de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Por tanto, una *serie* converge si y sólo si la *secuencia* de sus sumas parciales converge.

De forma similar, se dice que una serie diverge a infinito, diverge a menos infinito o simplemente diverge si su secuencia de sumas parciales lo hace. Hay que hacer hincapié en que la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ depende de la convergencia de la secuencia $\{s_n\} = \{\sum_{j=1}^{n} a_j\}$, *no* de la secuencia $\{a_n\}$.

Serie geométrica

DEFINICIÓN 4 **Serie geométrica**

Una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$, cuyo término n-ésimo es $a_n = ar^{n-1}$ se denomina **serie geométrica**. El número a es su primer término. En número r se denomina **razón común** de la serie, ya que es el valor de la razón entre el término $(n + 1)$ y el término n para todo $n \geqslant 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

La suma parcial n-ésima s_n de una serie geométrica se calcula como sigue:

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$
$$rs_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

La segunda ecuación se obtiene multiplicando la primera por r. Restando esas dos ecuaciones (nótense las cancelaciones), se obtiene $(1-r)s_n = a - ar^n$. Si $r \neq 1$ se puede dividir por $1-r$ y obtener una fórmula para s_n.

Sumas parciales de una serie geométrica

Si $r = 1$, entonces la n-ésima suma parcial de una serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ es $s_n = a + a + \cdots + a = na$. Si $r \neq 1$, entonces

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Si $a = 0$, entonces $s_n = 0$ para todo n, y $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Supongamos ahora que $a \neq 0$. Si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, por lo que $\lim_{n\to\infty} s_n = a/(1-r)$. Si $r > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ si $a > 0$, o $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ si $a < 0$. Se mantiene la misma conclusión si $r = 1$, ya que en este caso $s_n = na$. Si $r \leqslant -1$, $\lim_{n\to\infty} r^n$ no existe, y tampoco existe $\lim_{n\to\infty} s_n$. Por tanto, se concluye que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \begin{cases} \text{converge a } 0 & \text{si } a = 0 \\ \text{converge a } \dfrac{a}{1-r} & \text{si } |r| < 1 \\ \text{diverge a } \infty & \text{si } r \geqslant 1 \text{ y } a > 0 \\ \text{diverge a } -\infty & \text{si } r \geqslant 1 \text{ y } a < 0 \\ \text{diverge} & \text{si } r \leqslant -1 \text{ y } a \neq 0 \end{cases}$$

La representación de la función $1/(1-x)$ como suma de una serie geométrica,

$$\frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad \text{para } -1 < x < 1$$

será importante en la presentación de las series de potencias posteriormente en este capítulo.

Ejemplo 1 **(Ejemplos de series geométricas y sus sumas)**

(a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. En este caso $a = 1$ y $r = \frac{1}{2}$.

Como $|r| < 1$, la serie converge.

(b) $\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}$. En este caso $a = \pi$ y $r = -\frac{e}{\pi}$.

$$= \frac{\pi}{1-\left(-\frac{e}{\pi}\right)} = \frac{\pi^2}{\pi + e}.$$

La serie converge ya que $\left|-\frac{e}{\pi}\right| < 1$.

(c) $1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{n-1}$. Esta serie diverge a ∞ ya que $a = 1 > 0$ y $r = \sqrt{2} > 1$.

(d) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$. Esta serie diverge ya que $r = -1$.

(e) Sea $x = 0.32\,32\,32 \cdots = 0.\overline{32}$; entonces,

$$x = \frac{32}{100} + \frac{32}{100^2} + \frac{32}{100^3} + = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} = \frac{32}{100}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{32}{99}.$$

Ésta es una alternativa al método del Ejemplo 1 de la Sección P.1 para representar decimales repetidos como cocientes de enteros.

Ejemplo 2 Si el dinero produce un interés con una tasa efectiva constante del 5% anual, ¿cuánto habría que poner ahora en una anualidad que produjera (a) 1000 € al final de cada uno de los 10 años siguientes y (b) 1000 € al final de cada año de aquí en adelante?

Solución Un pago de 1000 € que se va a recibir n años desde ahora tiene un valor en este momento de $1000 \times \left(\frac{1}{1.05}\right)^n$ € (ya que A € crecería hasta valer $A(1.05)^n$ € en n años). Por tanto, los pagos de 1000 € al final de cada uno de los n años siguientes valen s_n € en este momento, siendo

$$\begin{aligned} s_n &= 1000\left[\frac{1}{1.05} + \left(\frac{1}{1.05}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{1.05}\right)^n\right] \\ &= \frac{1000}{1.05}\left[1 + \frac{1}{1.05} + \left(\frac{1}{1.05}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{1.05}\right)^{n-1}\right] \\ &= \frac{1000}{1.05}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{1.05}\right)^n}{1 - \frac{1}{1.05}} = \frac{1000}{0.05}\left[1 - \left(\frac{1}{1.05}\right)^n\right] \end{aligned}$$

(a) El valor actual de los 10 pagos futuros es s_{10} € = 7721.73 €.

(b) El valor actual de los pagos futuros continuando para siempre es

$$\lim_{n\to\infty} s_n \text{ €} = \frac{1000 \text{ €}}{0.05} = 20\,000 \text{ €}$$

Series telescópicas y series armónicas

Ejemplo 3 Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots$$

converge y calcule su suma.

Solución Como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, se puede escribir la suma parcial s_n en la forma

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \end{aligned}$$

$$\cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ y la serie converge a 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Esto es un ejemplo de **serie telescópica**, denominada así porque las sumas parciales se convierten en una forma simple cuando los términos se descomponen en fracciones simples. En los ejercicios al final de esta sección se pueden encontrar otros ejemplos. Como muestran estos ejemplos, el método de descomposición en fracciones simples puede ser una herramienta de utilidad para series además de para integrales. ■

Ejemplo 4 Demuestre que la **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

diverge a infinito.

Solución Si s_n es la suma parcial n-ésima de la serie armónica, entonces

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

= suma de áreas de los rectángulos sombreados en la Figura 9.3

$$> \text{área bajo } y = \frac{1}{x} \text{ desde } x = 1 \text{ hasta } x = n+1$$

$$= \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

Ahora $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad \text{diverge a infinito}$$

Como la serie geométrica, la serie armónica aparecerá a menudo en las secciones siguientes.

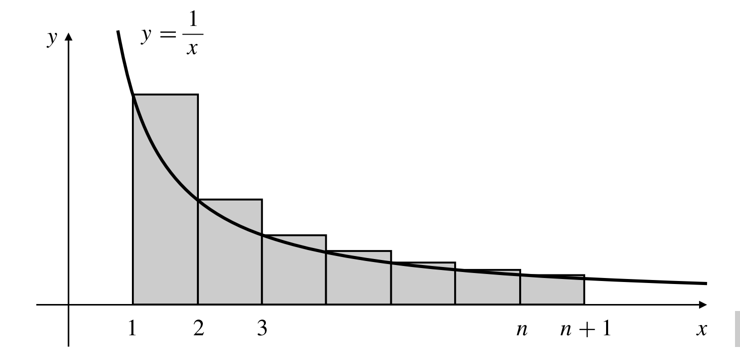


Figura 9.3 Suma parcial de la serie armónica. ■

Algunos teoremas sobre series

TEOREMA 4 Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMOSTRACIÓN Si $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, entonces $s_n - s_{n-1} = a_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe, y $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = s - s = 0$.

Observación El Teorema 4 es *muy importante* para la comprensión de las series infinitas. Los estudiantes muchas veces se equivocan u olvidan que *una serie no puede converger si sus términos no tienden a cero* o confunden este resultado con su *inverso*, que es falso. El inverso diría que, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ debe converger. La serie armónica es un contra-ejemplo que muestra la falsedad de esta afirmación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{pero} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge a infinito}$$

Al considerar si una serie dada converge, la primera cuestión a plantearse es la siguiente: «¿Tiende el término n-ésimo a 0 cuando n tiende a ∞?». Si la respuesta es *no*, entonces la serie *no* converge. Si la respuesta es *sí*, entonces la serie *puede converger o no converger*. Si la secuencia de términos $\{a_n\}$ tiende a un límite L distinto de cero, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a infinito si $L > 0$ y diverge a menos infinito si $L < 0$.

Ejemplo 5

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ diverge a infinito ya que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n-1} = 1/2 > 0$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \,\mathrm{sen}\,(1/n)$ un diverge, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n n \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sen}\,(1/n)}{1/n} = \lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} = 1 \neq 0$$

El siguiente teorema afirma que es sólo el comportamiento *definitivo* de $\{a_n\}$ lo que determina si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Se puede eliminar cualquier número de términos desde el comienzo de la serie sin afectar a su convergencia; ésta depende sólo de la *cola* de la serie. Por supuesto, la suma real de la serie depende de todos sus términos.

TEOREMA 5 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge para cualquier entero $N \geqslant 1$.

TEOREMA 6 Si $\{a_n\}$ es definitivamente positiva, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ debe, o bien converger (si sus sumas parciales están acotadas superiormente), o bien divergir a infinito (si sus sumas parciales no están acotadas superiormente).

Las demostraciones de estos dos teoremas se dejan como ejercicios al final de esta sección. El teorema siguiente es simplemente una reformulación de las leyes estándares de los límites.

TEOREMA 7 Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen a A y B, respectivamente, entonces

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ converge a cA (siendo c una constante cualquiera);

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ converge a $A \pm B$;

(c) Si $a_n \leqslant b_n$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $A \leqslant B$.

Ejemplo 6 Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{n+1}}{3^n}$.

Solución La serie dada es la suma de dos series geométricas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/3}{1 - (1/3)} = \frac{1}{2} \quad \text{y}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4/3}{1 - (2/3)} = 4$$

Por tanto, su suma es $\dfrac{1}{2} + 4 = \dfrac{9}{2}$, por el Teorema 7(b).

Ejercicios 9.2

En los Ejercicios 1-18, calcule las sumas de las series dadas, o demuestre que divergen (posiblemente a infinito o a menos infinito). Los Ejercicios 11-14 son series telescópicas y, por tanto, deben resolverse mediante descomposición en fracciones simples, como sugiere el Ejemplo 3 de esta sección.

1. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

2. $3 - \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{16} - \dfrac{3}{64} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(2 + \pi)^{2n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$

8. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2} \cos(j\pi)$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + 2^n}{2^{n+2}}$

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + 2^n}{3^{n+2}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \cdots$

***14.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$

19. Obtenga una expresión simple para las sumas parciales s_n de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, y utilícela para demostrar que la serie diverge.

20. Calcule la suma de la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots$$

21. Cuando se deja caer, una pelota elástica se eleva hasta una altura tres cuartos de la altura inicial. Si dicha altura inicial es de 2 m y se permite que la pelota rebote indefinidamente, ¿cuál es la distancia total que viaja antes de pararse?

22. Si un banco paga en una cuenta un 10% de interés simple anual, ¿cuál es el estado de la cuenta tras ocho años, si se depositan 1000 € al comienzo de cada uno de esos ocho años? Suponga que inicialmente la cuenta está vacía.

***23.** Demuestre el Teorema 5.

*24. Demuestre el Teorema 6.

*25. Plantee un teorema análogo al Teorema 6, pero para una secuencia negativa.

En los Ejercicios 26-31, decida si las afirmaciones dadas son verdaderas o falsas. Si son verdaderas, demuéstrelas. Si son falsas, dé un contraejemplo para demostrar su falsedad.

*26. Si $a_n = 0$ para todo n, entonces $\sum a_n$ converge.

*27. Si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum (1/a_n)$ diverge a infinito.

*28. Si tanto $\sum a_n$ como $\sum b_n$ divergen, entonces también diverge $\sum (a_n + b_n)$.

*29. Si $a_n \geqslant c > 0$ para todo n, entonces $\sum a_n$ diverge a infinito.

*30. Si $\sum a_n$ diverge y $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\sum a_n b_n$ diverge.

*31. Si tanto $a_n > 0$ como $\sum a_n$ convergen, entonces $\sum (a_n)^2$ converge.

9.3 Tests de convergencia para series positivas

En la sección anterior hemos visto algunos ejemplos de series convergentes (geométricas y telescópicas) cuyas sumas se pueden determinar de forma exacta, ya que las sumas parciales s_n se pueden expresar en forma cerrada como funciones explícitas de n cuyos límites cuando $n \to \infty$ se pueden calcular. En general, no es posible hacer siempre esto para una serie dada y por tanto, en general, no es posible determinar de forma exacta la suma de una serie. Sin embargo existen muchas técnicas para determinar si una serie dada converge y, si lo hace, para aproximar su suma con cualquier grado deseado de precisión.

En esta sección consideraremos exclusivamente *series positivas*, es decir, series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

siendo $a_n \geqslant 0$ para todo $n \geqslant 1$. Como se indicó en el Teorema 6, una serie convergerá si su suma parcial está acotada superiormente y divergirá a infinito en otro caso. Todos nuestros resultados se aplican también a series *definitivamente* positivas, ya que la convergencia o divergencia depende sólo de las *colas* de las series.

El test de la integral

El test de la integral proporciona una forma de determinar si una serie definitivamente positiva converge o diverge, comparándola con una integral impropia de comportamiento similar.

El Ejemplo 4 de la Sección 9.2 es un ejemplo del uso de esta técnica. Formalizaremos el método con el siguiente teorema.

TEOREMA 8 **El test de la integral**

Supongamos que $a_n = f(n)$, siendo f positiva, continua y no decreciente en un intervalo $[N, \infty)$ para algún entero positivo N. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \int_N^{\infty} f(t)\, dt$$

ambas convergen o divergen a infinito.

DEMOSTRACIÓN Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Si $n > N$, tenemos que

$$\begin{aligned} s_n &= s_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n \\ &= s_N + f(N+1) + f(N+2) + \cdots + f(n) \\ &= s_N + \text{suma de las áreas de los rectángulos sombreadas en la Figura 9.4(a)} \\ &\leqslant s_N + \int_N^{\infty} f(t)\, dt \end{aligned}$$

Si la integral impropia $\int_N^\infty f(t)\,dt$ converge, entonces la secuencia $\{s_n\}$ está acotada superiormente y $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge.

A la inversa, supongamos que $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge a la suma s. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_N^\infty f(t)\,dt &= \text{área bajo } y = f(t), \text{ por encima de } y = 0 \text{ y desde } t = N \text{ hasta } t = \infty \\ &\leqslant \text{suma de las áreas de los rectángulos sombreados en la Figura 9.4(b)} \\ &= a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots \\ &= s - s_{N-1} < \infty\end{aligned}$$

por lo que la integral impropia representa un área finita y, por tanto, es convergente (omitiremos los detalles restantes para demostrar que $\lim_{R\to\infty} \int_N^R f(t)\,dt$ existe; como en el caso de las series, el argumento se basa en la completitud de los números reales).

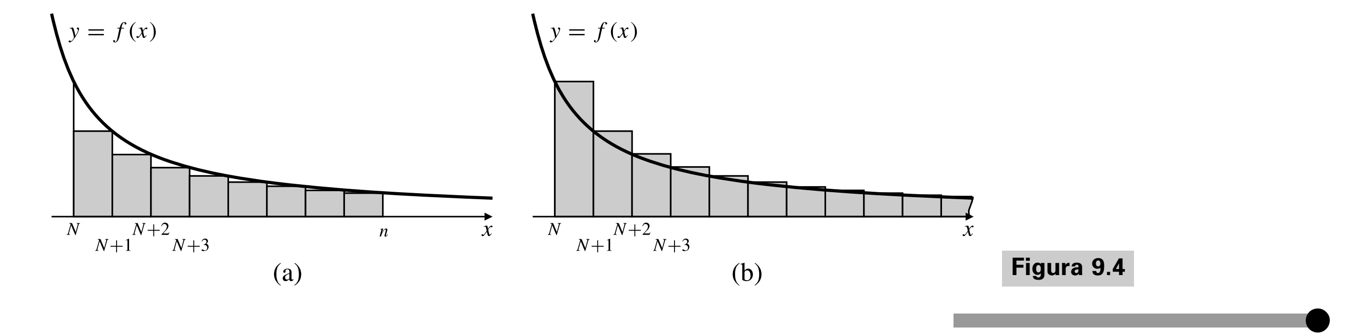


Figura 9.4

Observación Si $a_n = f(n)$, siendo f una función positiva, continua y no decreciente en el intervalo $[1, \infty)$, entonces el Teorema 8 nos asegura que $\sum_{n=1}^\infty a_n$ y $\int_1^\infty f(x)\,dx$ convergen ambas o divergen ambas a infinito. *No* nos dice que la suma de las series sea igual al valor de la integral. Probablemente no tendrán el mismo valor en el caso de convergencia. Sin embargo, como veremos posteriormente, las integrales pueden ayudarnos a aproximar la suma de una serie.

El principal uso del test de la integral es establecer el resultado del siguiente ejemplo, referente a la serie $\sum_{n=1}^\infty n^{-p}$, denominada **serie *p***. Este resultado debe memorizarse; en esta sección y en secciones posteriores compararemos frecuentemente el comportamiento de otras series con la serie p.

Ejemplo 1 **(Serie *p*)** Demuestre que

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-p} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \begin{cases}\text{converge si } p > 1 \\ \text{diverge a infinito si } p \leqslant 1\end{cases}$$

Solución Obsérvese que si $p > 0$, entonces $f(x) = x^{-p}$ es positiva, continua y decreciente en el intervalo $[1, \infty)$. Por el test de la integral, la serie p converge para $p > 1$ y diverge para $0 < p \leqslant 1$, por comparación con $\int_1^\infty x^{-p}\,dx$ (*véase* el Teorema 2(a) de la Sección 6.5). Si $p \leqslant 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$, por lo que en este caso la serie no puede converger. Al ser una serie positiva, debe divergir a infinito. ∎

Observación La serie armónica $\sum_{n=1}^\infty n^{-1}$ (el caso $p = 1$ de serie p) está en la frontera entre la convergencia y la divergencia, aunque de hecho diverge. Si bien sus términos tienden a 0 cuando n crece, no decrecen lo suficientemente rápido para permitir que la suma de la serie sea finita. Si $p > 1$, los términos de $\sum_{n=1}^\infty n^{-p}$ tienden a cero lo suficientemente rápido para que su suma sea finita. Podemos refinar la distinción entre convergencia y divergencia en $p = 1$ utilizando términos que disminuyan más rápido que $1/n$, pero no tan rápido como $1/n^q$ para todo

$q > 1$. Si $p > 0$, los términos $1/(n(\ln n)^p)$ tienen esta propiedad, ya que $\ln n$ crecen más lentamente que cualquier potencia positiva de n cuando n crece. La pregunta que surge ahora es si $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n(\ln n)^p)$ converge. Lo hace, suponiendo de nuevo que $p > 1$; para comprobarlo se puede utilizar el cambio $u = \ln x$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^p}$$

que converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leqslant 1$. Este proceso de ajuste fino se puede llevar más allá (*véase* el Ejercicio 36 posterior).

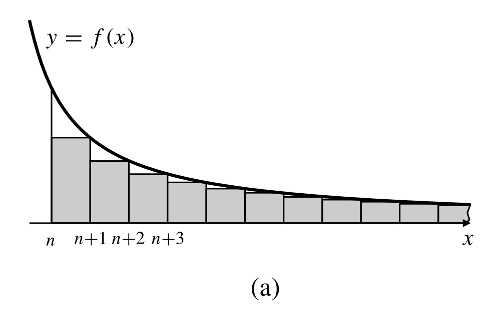
Uso de cotas de integrales para estimar la suma de una serie

Supongamos que $a_k = f(k)$ para $k = n+1, n+2, n+3, \ldots$, siendo f una función positiva, continua y decreciente al menos en el intervalo $[n, \infty)$. Tenemos que:

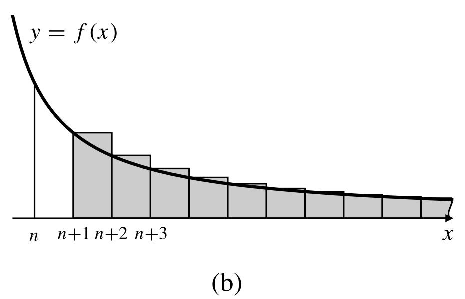
$$\begin{aligned} s - s_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \\ &= \text{suma de las áreas de los rectángulos sombreados en la Figura 9.5(a)} \\ &\leqslant \int_n^{\infty} f(x)\, dx \end{aligned}$$

De forma similar,

$$\begin{aligned} s - s_n &= \text{suma de las áreas de los rectángulos de la Figura 9.5(b)} \\ &\geqslant \int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx \end{aligned}$$



(a)



(b)

Figura 9.5

Si definimos

$$A_n = \int_n^{\infty} f(x)\, dx$$

entonces podemos combinar las inecuaciones anteriores para obtener

$$A_{n+1} \leqslant s - s_n \leqslant A_n$$

o, en otros términos,

$$s_n + A_{n+1} \leqslant s \leqslant s_n + A_n$$

El error en la aproximación $s \approx s_n$ cumple $0 \leqslant s - s_n \leqslant A_n$. Sin embargo, como s debe pertenecer al intervalo $[s_n + A_{n+1}, s_n + A_n]$, podemos mejorar la estimación utilizando el punto medio s_n^* de este intervalo como aproximación de s. El error será entonces menor que la mitad de la longitud $A_n - A_{n+1}$ del intervalo:

Una aproximación integral mejorada

El error $|s - s_n^*|$ en la aproximación

$$s \approx s_n^* = s_n + \frac{A_{n+1} + A_n}{2}, \quad \text{siendo} \quad A_n = \int_n^\infty f(x)\,dx$$

cumple $|s - s_n^*| \leqslant \dfrac{A_n - A_{n+1}}{2}$.

Siempre que se sabe que una cantidad pertenece un cierto intervalo, el punto medio dicho intervalo se puede utilizar para aproximar dicha cantidad, y el valor absoluto del error no será nunca superior a la semiamplitud del intervalo.

Ejemplo 2 Calcule la mejor aproximación s_n^* a la suma s de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, haciendo uso de la suma parcial s_n de los n primeros términos. ¿Cuánto tendría que valer n para asegurar que la aproximación $s \approx s_n^*$ tiene un error menor que 0.001 en valor absoluto? ¿Cuánto tendría que valer n para asegurar que la aproximación $s \approx s_n$ tiene un error menor que 0.001 en valor absoluto?

Solución Como $f(x) = 1/x^2$ es positiva, continua y decreciente en el intervalo $[1, \infty)$ para todo $n = 1, 2, 3, ...$, tenemos que

$$s_n + A_{n+1} \leqslant s \leqslant s_n + A_n$$

siendo

$$A_n = \int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_n^R = \frac{1}{n}$$

La mejor aproximación a s utilizando s_n es

$$\begin{aligned} s_n^* &= s_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) = s_n + \frac{2n+1}{2n(n+1)} \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{2n+1}{2n(n+1)} \end{aligned}$$

El error en esta aproximación cumple

$$|s - s_n^*| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n(n+1)} \leqslant 0.001$$

suponiendo que $2n(n + 1) \geqslant 1/0.001 = 1000$. Se puede comprobar fácilmente que esta condición se cumple si $n \geqslant 22$; la aproximación

$$s \approx s_{22}^* = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{22^2} + \frac{45}{44 \times 23}$$

tendrá un error cuyo valor absoluto no superará 0.001. Si hubiéramos utilizado la aproximación $s \approx s_n$, sólo podríamos haber concluido que

$$0 \leqslant s - s_n \leqslant A_n = \frac{1}{n} < 0.001$$

suponiendo que $n > 1000$; se necesitarían 1000 términos de la serie para obtener la precisión deseada. ■

Tests de comparación

El siguiente test que vamos a considerar para series positivas es análogo al teorema de comparación de integrales impropias (*véase* el Teorema 3 de la Sección 6.5). Hace posible determinar la

convergencia o divergencia de una serie comparándola con otra serie de convergencia o divergencia conocida.

TEOREMA 9 **Un test de comparación**

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ secuencias para las que existe una constante positiva K tal que, definitivamente, $0 \leqslant a_n \leqslant Kb_n$.

(a) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces también lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(b) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a infinito, entonces también lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

DEMOSTRACIÓN Como una serie converge si y sólo si su cola converge (Teorema 5), podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que la condición $0 \leqslant a_n \leqslant Kb_n$ se cumple para todo $n \geqslant 1$. Sean $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ y $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Entonces $s_n \leqslant KS_n$. Si $\sum b_n$ converge, entonces $\{S_n\}$ es convergente y, por tanto, acotada por el Teorema 1. Por tanto, $\{s_n\}$ está acotada superiormente. Por el Teorema 6, $\sum a_n$ converge. Como la convergencia de $\sum b_n$ garantiza la de $\sum a_n$, si la última serie diverge a infinito, entonces la primera no puede converger, por lo que debe divergir también a infinito.

¡¡ ATENCIÓN !! El Teorema 9 *no* dice que si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum b_n$ converge. Es posible que la suma *más pequeña* sea finita y que la suma *más grande* sea infinita (no debe confundirse un teorema con su inverso).

Ejemplo 3 ¿Cuáles de las siguientes series convergen? Justifique sus respuestas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Solución Para cada caso hay que encontrar una serie de comparación adecuada, que ya sepamos que converge o diverge.

(a) Como $0 < \dfrac{1}{2^n + 1} < \dfrac{1}{2^n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y como $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ es una serie geométrica convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + 1}$ también converge por comparación.

(b) Obsérvese que $\dfrac{3n+1}{n^3+1}$ se comporta como $\dfrac{3}{n^2}$ para n grande, por lo que podemos comparar esta serie con la serie p convergente $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. Tenemos, para $n \geqslant 1$,

$$\frac{3n+1}{n^3+1} = \frac{3n}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

Por tanto, la serie dada converge por el Teorema 9.

(c) Para $n = 2, 3, 4, \ldots$, tenemos que $0 < \ln n < n$. Por tanto, $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$. Como $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge a infinito (es una serie armónica), también lo hace $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ por comparación.

El teorema siguiente proporciona una versión del test de comparación que no es tan general como el Teorema 9, pero que muchas veces es más fácil de aplicar en casos específicos.

TEOREMA 10 **Un test de comparación en el límite**

Supongamos que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son secuencias positivas y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Siendo L un número finito no negativo o $+\infty$.

(a) Si $L < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

(b) Si $L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge a infinito, entonces también lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

DEMOSTRACIÓN Si $L < \infty$, entonces para n suficientemente grande, tenemos que $b_n > 0$ y

$$0 \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant L + 1$$

por lo que $0 \leqslant a_n \leqslant (L+1)b_n$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, por el Teorema 9(a).

Si $L > 0$, entonces, para n suficientemente grande,

$$\frac{a_n}{b_n} \geqslant \frac{L}{2}$$

por tanto, $0 < b_n \leqslant (2/L)a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y diverge a infinito si lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, por el Teorema 9(b).

Ejemplo 4 ¿Cuáles de las siguientes series convergen? Justifique sus respuestas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}$

Solución De nuevo debemos escoger apropiadamente las series de comparación.

(a) Los términos de esta serie disminuyen como $1/\sqrt{n}$. Obsérvese que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/\sqrt{n})+1} = 1$$

Como la serie p $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge a infinito ($p = 1/2$), también lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$, por la prueba de comparación en el límite.

(b) Para n grande, los términos se comportan como n/n^3, por lo que podemos comparar la serie con la serie p $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, que sabemos que converge.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n+5}{n^3-2n+3}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+5n^2}{n^3-2n+3} = 1$$

Como $L < \infty$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}$ también converge por la prueba de comparación en el límite.

Para aplicar con éxito la versión original del test de comparación (Teorema 9), es importante intuir si la serie dada converge o diverge. La forma de la comparación dependerá de si estamos intentando demostrar la convergencia o la divergencia. Por ejemplo, si no intuimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n + 20\,000}$$

diverge a infinito, podríamos intentar demostrar que

$$\frac{1}{100n + 20\,000} < \frac{1}{n} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Aunque eso es cierto, no sirve de nada. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge a infinito; por tanto, el Teorema 9 no nos da información para esta comparación. Por supuesto, podríamos demostrar que

$$\frac{1}{100n + 20\,000} \geqslant \frac{1}{20\,100n} \qquad \text{si } n \geqslant 1$$

y concluir por el Teorema 9 que $\sum_{n=1}^{\infty} (1/(100n + 20\,000))$ diverge a infinito por comparación con la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Una forma más fácil es utilizar el Teorema 10 y el hecho de que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{100n + 20\,000}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{100n + 20\,000} = \frac{1}{100} > 0$$

Sin embargo, el test de comparación en el límite del Teorema 10 tiene una desventaja cuando se compara con el test de comparación ordinaria del Teorema 9. Puede fallar en ciertos casos porque el límite L puede no existir. En tales casos es posible que el test de comparación ordinario sirva todavía.

Ejemplo 5 Compruebe la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} n}{n^2}$.

Solución Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1 + \operatorname{sen} n}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (1 + \operatorname{sen} n)$$

no existe, el test de comparación en el límite no nos da información. Sin embargo, como $n \leqslant 1$, tenemos que

$$0 \leqslant \frac{1 + \operatorname{sen} n}{n^2} \leqslant \frac{2}{n^2} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

La serie dada converge, de hecho, por comparación con $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, utilizando el test de comparación ordinario.

Tests de la razón y de la raíz

TEOREMA 11 **Test la razón**

Supongamos que $a_n > 0$ (definitivamente) y que $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe o es $+\infty$.

(a) Si $0 \leqslant \rho < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Si $1 < \rho \leqslant \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a infinito.

(c) Si $\rho = 1$, no se tiene información; la serie puede converger o divergir a infinito.

DEMOSTRACIÓN Aquí, ρ es la letra griega «rho» minúscula (que se pronuncia «ro»).

(a) Supongamos que $\rho < 1$. Selecciónese un número r tal que $\rho < r < 1$. Como sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \rho$, tenemos que $a_{n+1}/a_n \leqslant r$ para n suficientemente grande; es decir, $a_{n+1} \leqslant ra_n$ para, por ejemplo, $n \geqslant N$. En particular,

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leqslant ra_N \\ a_{N+2} &\leqslant ra_{N+1} \leqslant r^2 a_N \\ a_{N+3} &\leqslant ra_{N+2} \leqslant r^3 a_N \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\leqslant r^k a_N \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

Entonces, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge por comparación con la serie geométrica convergente $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$. Se deduce entonces que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ debe también converger.

(b) En este caso, supongamos que $\rho > 1$. Selecciónese un número r tal que $1 < r < \rho$. Como $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \rho$, tenemos que $a_{n+1}/a_n \geqslant r$ para n suficientemente grande, por ejemplo, $n \geqslant N$. Se supone que N se escoge lo suficientemente grande para que $a_N > 0$. Utilizando un argumento similar al del apartado (a), se deduce que $a_{N+k} \geqslant r^k a_N$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, y como $r > 1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a infinito.

(c) Si ρ se calcula para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, se obtiene en ambos casos $\rho = 1$. Como la primera serie diverge a infinito y la segunda converge, la prueba de la razón no puede distinguir entre convergencia y divergencia si $\rho = 1$.

Todas las series p caen en la categoría indefinida de $\rho = 1$, como también $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, siendo a_n cualquier función racional de n. El test de la razón es de mayor utilidad en el caso de series cuyos términos decrezcan como mínimo exponencialmente rápido. La presencia de factoriales en algún término sugiere también que el test de la razón puede ser de utilidad.

Ejemplo 6 Compruebe la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Solución En cada una de ellas utilizaremos el test de la razón.

(a) $\displaystyle \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{99^{n+1}}{(n+1)!} \bigg/ \frac{99^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{99}{n+1} = 0 < 1.$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (99^n/n!)$ converge.

(b) $\displaystyle \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}} \bigg/ \frac{n^5}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2} < 1.$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (n^5/2^n)$ converge.

(c) $$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \bigg/ \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (n!/n^n)$ converge.

(d) $$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \bigg/ \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1.$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (2n)!/(n!)^2$ diverge a infinito. ■

El teorema siguiente es muy similar al test de la razón, pero se utiliza menos frecuentemente. Su demostración se deja como ejercicio (*véase* el Ejercicio 37). Los Ejercicios 38 y 39 presentan ejemplos de series donde se puede aplicar.

TEOREMA 12 **Test de la raíz**

Supongamos que $a_n > 0$ (definitivamente) y que $\sigma = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$ existe o es $+\infty$.

(a) Si $0 \leqslant \sigma < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Si $1 < \sigma \leqslant \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a infinito.

(c) Si $\sigma = 1$, esta prueba no da información; la serie puede converger o divergir a infinito.

Uso de cotas de la serie geométrica para estimar la suma de una serie

Supongamos que una inecuación de la forma

$$0 \leqslant a_k \leqslant Kr^k$$

se cumple para $k = n+1, n+2, n+3, \ldots$, siendo K y r constantes y $r < 1$. Entonces podemos utilizar una serie geométrica para acotar la cola de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant s - s_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} Kr^k \\ &= Kr^{n+1}(1 + r + r^2 + \cdots) \\ &= \frac{Kr^{n+1}}{1-r} \end{aligned}$$

Como $r < 1$, la serie converge y el error tiende a 0 con una velocidad exponencial cuando n crece.

Ejemplo 7 En la Sección 9.6 demostraremos que

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Recuérdese que $0! = 1$. Estime el error si la suma s_n de los n primeros términos de la serie se utiliza para aproximar el número e. Calcule el valor de e con una precisión de tres cifras decimales utilizando esta serie.

Solución Tenemos que

$$s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}$$

Como la serie comienza con el término correspondiente a $n = 0$, el término n-ésimo es $1/(n-1)!$. El error de la aproximación $s \approx s_n$ se puede estimar como sigue:

$$0 < s - s_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$
$$= \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right)$$
$$< \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots\right)$$

ya que $n + 2 > n + 1$, $n + 3 > n + 1$, y así sucesivamente. La última serie es geométrica, por lo que

$$0 < s - s_n < \frac{1}{n!}\frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n!\,n}$$

Si se desea estimar e con una precisión de tres cifras decimales, entonces hay que asegurar que el error es menor que 5 en la cuarta cifra decimal, es decir, el error es menor que 0.0005. Entonces deseamos que

$$\frac{n+1}{n}\frac{1}{n!} < 0.0005 = \frac{1}{2000}$$

Como $7! = 5040$ pero $6! = 720$, se puede utilizar $n = 7$, pero no más pequeño. Tenemos que

$$e \approx s_7 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$$
$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2.718 \text{ con 3 cifras decimales de precisión}$$

Es apropiado utilizar series geométricas para acotar las colas de series positivas cuya convergencia se podría demostrar por el test de la razón. Esas series convergerán definitivamente más rápido que cualquier serie p $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, para la que la razón límite es $\rho = 1$.

Ejercicios 9.3

En los Ejercicios 1-26, determine si las series dadas convergen o divergen utilizando el test apropiado. Las series p y las series geométricas se pueden utilizar para tests de comparación. Tenga cuidado con las series cuyos términos no tienden a cero.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-2}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}\right|$

6. $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n+5}$

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(3n)}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n - n^\pi}$

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{2+n}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$

13. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 e^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!6^n}{(3n)!}$

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n}$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}2^n}{\sqrt{n!}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!}$

25. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n^3}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$

En los Ejercicios 27-30, utilice s_n y cotas integrales para calcular el mínimo intervalo que pueda asegurar que contiene a la suma s de las series. Si se usa el punto medio de este intervalo s_n^* para aproximar s, ¿cuál debería ser el valor de n para asegurar que el error es menor que 0.001?

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$

Para cada una de las series positivas de los Ejercicios 31-34, calcule la mejor cota superior que pueda para el error $s - s_n$, producido si la suma parcial s_n se utiliza para aproximar la suma s de las series. ¿Cuántos términos de cada serie serían necesarios para asegurar que la aproximación tiene un error menor que 0.001?

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

35. Utilice el test de la integral para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ converge. Demuestre que la suma s de la serie es menor que $\pi/2$.

∗**36.** Demuestre que $\sum_{n=3}^{\infty} (1/(n \ln n (\ln\ln n)^p)$ converge si y sólo si $p > 1$. Generalice este resultado a series de la forma

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)\cdots(\ln_j n)(\ln_{j+1} n)^p}$$

siendo $\ln_j n = \underbrace{\ln\ln\ln\ln\cdots\ln}_{j \ln' s} n$.

∗**37.** Demuestre el test de la raíz. *Sugerencia*: Siga los pasos de la demostración del test de la razón.

38. Utilice el test de la raíz para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ converge.

∗**39.** Utilice el test de la raíz para comprobar la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

40. Repita el Ejercicio 38, pero utilice el test de la razón en vez del test de la raíz.

∗**41.** Intente utilizar el test de la razón para determinar si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$ converge. ¿Qué sucede? Observe ahora que

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{[2n(2n-2)(2n-4)\cdots 6\times 4\times 2]^2}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 4\times 3\times 2\times 1}$$

$$= \frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n-2}{2n-3} \times \cdots \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{1}$$

¿Converge la serie dada? ¿Por qué o por qué no?

∗**42.** Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ converge.
Sugerencia: Proceda como en el Ejercicio 41. Demuestre que $a_n \geqslant 1/(2n)$.

∗**43.** (a) Demuestre que si $k > 0$ y n es un entero positivo, entonces $n < \frac{1}{k}(1+k)^n$.

(b) Utilice el resultado de (a) con $0 < k < 1$ para obtener una cota superior de la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n/2^n$. ¿Para qué valor de k es mínima esta cota?

(c) Si se usa la suma s_n de los n primeros términos para aproximar la suma s de la serie del apartado (b), obtenga una cota superior del error $s - s_n$ utilizando la inecuación de apartado (a). Para un n dado, calcule el valor de k que minimiza esta cota superior.

∗**44.** **(Mejora de la convergencia de una serie)** Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n(n+1)) = 1$ (*véase* el Ejemplo 3 de la Sección 9.2). Como

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n+1)} + c_n, \quad \text{siendo} \quad c_n = \frac{1}{n^2(n+1)}$$

tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge más rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ porque sus términos disminuyen como $1/n^3$. Por tanto, se necesitarán menos términos de esa serie para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ con cualquier grado deseado de precisión, que los que serían necesarios si se calculara con $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ directamente. Utilizando cotas integrales superior e inferior, determine un valor de n para el que la suma parcial modificada s_n^* de la

serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ se aproxima a la suma de esa serie con error menor que 0.001 en valor absoluto. A partir de aquí, determine $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ con una precisión de 0.001 respecto a su verdadero valor.

La técnica presentada en este ejercicio se conoce con el nombre de *mejora de la convergencia* de una serie. Se puede aplicar para estimar la suma de $\sum a_n$ si se conoce la suma de $\sum b_n$ y si $a_n - b_n = c_n$, cuando $|c_n|$ decrece más rápido que $|a_n|$ cuando n tiende a infinito.

45. Considere la serie $s = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2^n + 1)$, y la suma parcial s_n de sus primeros n términos.



(a) ¿Cuánto tendría que valer n para asegurar que el error de la aproximación $s \approx s_n$ es menor que 0.001 en valor absoluto?

(b) La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ converge a 1. Si

$$b_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n + 1}$$

para $n = 1, 2, 3, ...$, ¿cuántos términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son necesarios para calcular su suma con una precisión de 0.001?

(c) Utilice el resultado del apartado (b) para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2^n + 1)$ con una precisión de 0.001.

9.4 Convergencia absoluta y condicional

Todas las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ consideradas en la sección anterior eran definitivamente positivas; es decir, $a_n \geqslant 0$ para n suficientemente grande. Ahora eliminaremos esta restricción y permitiremos que los términos a_n tomen valores reales arbitrarios. Sin embargo, siempre podemos obtener una serie positiva a partir de cualquier serie dada sustituyendo todos los términos por sus valores absolutos.

DEFINICIÓN 5 Convergencia absoluta

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

La serie

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \cdots$$

converge absolutamente ya que

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

converge. Parece razonable pensar que la primera serie debe converger, y su suma s debería cumplir $-S \leqslant s \leqslant S$. En general, la cancelación que se produce cuando algunos términos son negativos y otros positivos hace *más fácil* que una serie converja que en el caso de que todos los términos sean del mismo signo. El siguiente teorema permite verificar esta afirmación.

TEOREMA 13 Si una serie converge absolutamente, entonces converge.

DEMOSTRACIÓN Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutamente convergente, y sea $b_n = a_n + |a_n|$ para todo n. Como $-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|$, tenemos que $0 \leqslant b_n \leqslant 2|a_n|$ para todo n. Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge por el test de comparación. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ también converge.

¡¡ ATENCIÓN !! Aunque la convergencia absoluta implica convergencia, la convergencia *no* implica convergencia absoluta.

De nuevo hay que tener cuidado con no confundir la afirmación del Teorema 13 con la afirmación inversa, que es falsa. Pronto demostraremos en esta sección que la **serie armónica alternante**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

converge, aunque no converge absolutamente. Si sustituimos todos los términos por sus valores absolutos, se obtiene la serie armónica divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

DEFINICIÓN 6 **Convergencia condicional**

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, pero no absolutamente convergente, se dice que es **condicionalmente convergente** o que **converge condicionalmente**.

La serie armónica alternante es un ejemplo de una serie condicionalmente convergente.

Los tests de comparación, el test de la integral y el test de la razón se pueden utilizar para comprobar la convergencia absoluta. Se deben aplicar a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Para el caso del test de la razón se calcula $\rho = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$. Si $\rho < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Si $\rho > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, por lo que tanto $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deben divergir. Si $\rho = 1$, no tenemos información; la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede converger absolutamente, puede converger condicionalmente o puede divergir.

Ejemplo 1 Compruebe la convergencia absoluta de las series siguientes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{2^n}$.

Solución

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right| \Big/ \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} > 0$. Como la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ diverge a infinito, el test de comparación nos asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n-1}/(2n-1))$ no converge absolutamente.

(b) $\displaystyle\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)\cos((n+1)\pi)}{2^{n+1}} \Big/ \frac{n\cos(n\pi)}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$

Obsérvese que $\cos(n\pi)$ no es más que otra forma de escribir $(-1)^n$. Por consiguiente (test de la razón), $\sum_{n=1}^{\infty} ((n\cos(n\pi))/2^n)$ converge absolutamente.

■

El test de la serie alternante

No podemos utilizar ninguno de los tests desarrollados anteriormente para demostrar que la serie armónica alternante converge; todos esos tests se aplican sólo a series (definitivamente) positivas, por lo que solamente se puede comprobar la convergencia absoluta. Demostrar la convergencia que no es absoluta es en general más difícil. Presentaremos sólo un test que puede servir para comprobar esa convergencia; este test sólo se puede usar en una clase muy especial de series.

TEOREMA 14 **Test de series alternantes**

Supongamos que $\{a_n\}$ es una secuencia cuyos términos satisfacen, para algún entero positivo N,

(i) $a_n a_{n+1} < 0$ para $n \geqslant N$

(ii) $|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$ para $n \geqslant N$, y

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

es decir, los términos son definitivamente alternantes en signo y de tamaño decreciente, y la secuencia tiene como límite cero. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

DEMOSTRACIÓN Podemos asumir sin pérdida de generalidad $N = 1$, ya que la convergencia sólo depende de la cola de la serie. Asumimos también $a_1 > 0$, ya que la demostración si $a_1 < 0$ es similar. Si $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ es la suma parcial n-ésima de la serie, a partir de la alternancia de $\{a_n\}$ se deduce que $a_{2n+1} > 0$ y $a_{2n} < 0$ para todo n. Como los términos disminuyen de tamaño, $a_{2n+1} \geqslant -a_{2n+2}$. Por tanto, $s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} \geqslant s_{2n}$ para $n = 1, 2, 3, ...$ Las sumas parciales pares $\{s_{2n}\}$ forman una secuencia creciente. De forma similar, $s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} \leqslant s_{2n-1}$, por lo que las sumas parciales impares $\{s_{2n-1}\}$ forman una secuencia decreciente. Como $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \leqslant s_{2n-1}$, se puede decir, para todo n, que

$$s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant s_{2n-1} \leqslant s_{2n-3} \leqslant \cdots \leqslant s_5 \leqslant s_3 \leqslant s_1$$

Por tanto, s_2 es una cota inferior de la secuencia decreciente $\{s_{2n-1}\}$, y s_1 es una cota superior de la secuencia creciente $\{s_{2n}\}$. Por tanto, ambas secuencias convergen por la completitud de los números reales:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = s_{\text{impar}}, \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s_{\text{par}}$$

Ahora $a_{2n} = s_{2n-1} - s_{2n}$, por lo que $0 = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n-1} - s_{2n}) = s_{\text{impar}} - s_{\text{par}}$. Por tanto, $s_{\text{impar}} = s_{\text{par}} = s$, por ejemplo. Todas las sumas parciales s_n son de la forma s_{2n-1} o de la forma s_{2n}. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe y la serie $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge a esta suma s.

¡¡ ATENCIÓN !! Lea despacio esta demostración y piense por qué cada afirmación es cierta.

Observación La demostración del Teorema 14 prueba que la suma s de la serie siempre está entre dos sumas parciales consecutivas de la serie:

$$\text{o bien } s_n < s < s_{n+1} \qquad \text{o bien} \qquad s_{n+1} < s < s_n$$

Esto demuestra el siguiente teorema.

TEOREMA 15 **Estimación del error en series alternantes**

Si la secuencia $\{a_n\}$ cumple las condiciones del test de las series alternantes (Teorema 14), de forma que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a la suma s, entonces el error en la aproximación $s \approx s_n$ (siendo $n \geqslant N$) tiene el mismo signo que el primer término omitido $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, y su tamaño no es mayor que el de dicho término:

$$|s - s_n| \leqslant |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}|$$

Ejemplo 2 ¿Cuántos términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+2^n}$ son necesarios para calcular su suma con un error menor que 0.001?

Solución Esta serie cumple las hipótesis del Teorema 15. Si utilizamos la suma parcial de los n primeros términos para aproximar la suma de la serie, el error cumplirá

$$|\text{error}| \leqslant |\text{primer término emitido}| = \frac{1}{1+2^{n+1}}$$

Este error será menor que 0.001 si $1 + 2^{n+1} > 1000$. Como $2^{10} = 1024$, $n + 1 = 10$ servirá. Serán necesarios 9 términos de la serie para calcular la suma con un margen de 0.001 respecto a su valor real. ■

Cuando se determina la convergencia de una serie dada, es mejor considerar primero si la serie converge absolutamente. Si no lo hace, entonces queda todavía la posibilidad de convergencia condicional.

Ejemplo 3 Compruebe la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$.

Solución Los valores absolutos de los términos de las series (a) y (b) son, respectivamente, $1/n$ y $1/(\ln n)$. Como $1/(\ln n) > 1/n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge a infinito, ninguna de las series (a) o (b) converge absolutamente. Sin embargo, ambas series cumplen los requisitos del Teorema 14 y, por tanto, ambas convergen. Cada una de esas dos series es condicionalmente convergente.

La serie (c) es absolutamente convergente porque $|(-1)^{n-1}/n^4| = 1/n^4$, y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$ es una serie p convergente ($p = 4 > 1$). Podríamos establecer su convergencia utilizando el Teorema 14, pero no hay necesidad de hacerlo ya que toda serie absolutamente convergente es convergente (Teorema 13). ■

Ejemplo 4 ¿Para qué valores de x converge absolutamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n\,2^n}$? ¿Para qué valores converge condicionalmente? ¿Para qué valores diverge?

Solución En las series en cuyos términos aparecen funciones de una variable x es mejor, en general, empezar probando la convergencia absoluta con el test de la razón. Tenemos que

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \Big/ \frac{(x-5)^n}{n\,2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left| \frac{x-5}{2} \right| = \left| \frac{x-5}{2} \right|$$

La serie converge absolutamente si $|(x-5)/2| < 1$. Esta inecuación es equivalente a $|x-5| < 2$ (la distancia de x a 5 es menor que 2), es decir, $3 < x < 7$. Si $x < 3$ o $x > 7$, entonces $|(x-5)/2| > 1$. La serie diverge; sus términos no tienden a cero.

Si $x = 3$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n/n)$, que converge condicionalmente (es una serie armónica alternante); si $x = 7$, la serie es la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, que diverge a infinito. Por tanto, la serie dada converge absolutamente en el intervalo abierto (3, 7), converge condicionalmente en $x = 3$ y diverge en el resto. ■

Ejemplo 5 ¿Para qué valores de x converge absolutamente la serie de $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{x}{x+2}\right)^n$? ¿Para qué valores converge condicionalmente? ¿Para qué valores diverge?

Solución Empezaremos de nuevo con el test de la razón.

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \left| (n+2)^2 \left(\frac{x}{x+2}\right)^{n+1} \Big/ (n+1)^2 \left(\frac{x}{x+2}\right)^n \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \left| \frac{x}{x+2} \right| = \left| \frac{x}{x+2} \right| = \frac{|x|}{|x+2|}\end{aligned}$$

La serie converge absolutamente si $|x|/|x+2|<1$. Esta condición dice que la distancia desde x hasta 0 es menor que la distancia desde x hasta -2. Entonces $x>-1$. La serie diverge si $|x|/|x+2|>1$, es decir, si $x<-1$. Si $x=-1$, la serie es $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2$, que diverge. Concluimos que la serie converge absolutamente para $x>-1$, no converge condicionalmente en ninguna parte y diverge para $x\leqslant -1$. ■

Cuando se utiliza el test de las series alternantes, es importante verificar (al menos mentalmente) que se cumplen *las tres condiciones* (i)-(iii).

Ejemplo 6 Compruebe la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$

(b) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, siendo

$$a_n=\begin{cases}1/n & \text{si } n \text{ es impar}\\ -1/n^2 & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$$

Solución

(a) En este caso, los términos a_n son alternantes y disminuyen de tamaño cuando n crece. Sin embargo, $\lim_{n\to\infty}a_n=1\neq 0$. Por tanto, no se puede aplicar el test de las series alternantes. De hecho, la serie diverge porque sus términos no tienden a 0.

(b) Estas series alternantes y sus términos tienen como límite cero. Sin embargo, los términos no disminuyen de tamaño (ni siquiera definitivamente). No se puede aplicar tampoco el test de las series alternantes. De hecho, como

$$-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\cdots-\frac{1}{(2n)^2}-\cdots \qquad \text{converge, y}$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots \qquad \text{diverge a infinito}$$

se puede ver rápidamente que la serie dada diverge a infinito. ■

Reordenación de los términos de una serie

La diferencia básica entre la convergencia absoluta y la condicional es que cuando una serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge absolutamente, lo hace porque sus términos $\{a_n\}$ disminuyen de tamaño lo suficientemente rápido para que su suma sea finita aun cuando no se produzca cancelación de términos de signo opuesto. Si se requiere esta cancelación para que la serie converja (porque sus términos decrecen más lentamente), entonces la serie sólo puede converger condicionalmente.

Considere la serie armónica alternante

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

Esta serie converge, pero sólo condicionalmente. Si tomamos la subserie que contiene sólo los términos positivos, se obtiene la serie

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$$

que diverge a infinito. De forma similar, la subserie de los términos negativos

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\cdots$$

diverge a menos infinito.

Si una serie converge absolutamente, la subserie formada por los términos positivos y la subserie formada por los términos negativos deben converger a una suma finita. Si una serie converge condicionalmente, las subseries positiva y negativa pueden divergir, respectivamente, a ∞ y a $-\infty$.

Utilizando estos hechos, se puede responder a una pregunta que surgió al principio de la Sección 9.2. Si reordenamos los términos de una serie convergente, de forma que se sumen en orden diferente, ¿debe converger la serie reordenada, y si lo hace, convergerá a la misma suma que la serie original? La respuesta depende de si la serie original era absolutamente convergente o sólo condicionalmente convergente.

TEOREMA 16 **Convergencia de la reordenación de una serie**

(a) Si los términos de una serie absolutamente convergente se reordenan de forma que su suma se realice en un orden diferente, la serie reordenada convergerá a la misma suma que la serie original.

(b) Si una serie es condicionalmente convergente, y L es un número real cualquiera, entonces los términos de la serie se pueden reordenar de forma que la serie converja (condicionalmente) a la suma L. También se pueden reordenar de forma que diverja a ∞, a $-\infty$ o que simplemente diverja.

El apartado (b) demuestra que la convergencia condicional es un tipo sospechoso de convergencia, ya que depende del orden en que se suman los términos. No presentaremos una demostración formal del teorema, pero daremos un ejemplo que sugiere lo que significa (*véase* también el Ejercicio 30 posterior).

Ejemplo 7 En la Sección 9.5 demostraremos que la serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots$$

converge (condicionalmente) a la suma $\ln 2$. Explique cómo se pueden reordenar sus términos para que converja a 8.

Solución Empezaremos por sumar los términos de la subserie positiva

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$$

continuando hasta que la suma parcial supere 8 (lo que ocurrirá en algún momento ya que la subserie positiva diverge a infinito). Sumamos entonces el primer término $-1/2$ de la subserie negativa

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots$$

Esto reducirá la suma parcial por debajo de 8 de nuevo. Volvemos ahora a sumar términos de la subserie positiva, hasta que la suma parcial vuelva a valer más de 8. Sumamos ahora el segundo término de la subserie negativa y la suma parcial volverá a estar por debajo de 8. Se repite este procedimiento, alternando la suma de términos de la subserie positiva para forzar a que la suma supere 8 y, después, términos de la subserie negativa para forzar a que la suma sea inferior a 8. Como ambas subseries tienen un número infinito de términos y divergen a ∞ y a $-\infty$, respectivamente, al final se incluirán todos los términos de las series originales, y las sumas parciales de las nuevas series oscilarán por encima y por debajo de 8, convergiendo a ese número. Por supuesto, se puede usar cualquier otro número en vez de 8.

Ejercicios 9.4

Determine si las series de los Ejercicios 1-12 convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \ln n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi^n}$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{20n^2 - n - 1}{n^3 + n^2 + 33}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-100)^n}$

12. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)\pi}{\ln\ln n}$

En las series de los Ejercicios 13-16, calcule el mínimo entero n que asegura que la suma parcial s_n se aproxima a la suma s de la serie con un error menor que 0.001 en valor absoluto.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{n!}$

Determine los valores de x para los que las series de los Ejercicios 17-24 convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^{2n}}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2n+3}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3x+2}{-5}\right)^n$

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \ln n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{n^{1/3}4^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$

∗25. ¿Se puede aplicar directamente el test de las series alternantes a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)\operatorname{sen}(n\pi/2)$? Determine si la serie converge.

∗26. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente a $a_n = 10/n^2$ para n par y a $a_n = -1/10n^3$ para n impar.

∗27. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas? Justifique su respuesta en el caso de verdaderas o dé un contraejemplo en el caso de falsas.

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

(b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

(c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge absolutamente.

∗28. (a) Utilice un argumento basado en la suma de Riemann para demostrar que

$$\ln n! \geqslant \int_1^n \ln t\, dt = n\ln n - n + 1$$

(b) ¿Para qué valores de x converge absolutamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$? ¿Para qué valores converge condicionalmente? ¿Para qué valores diverge? (*Sugerencia*: Utilice primero el test de la razón. Para probar los casos donde $\rho = 1$, puede resultar de utilidad la inecuación del apartado (a)).

∗29. ¿Para qué valores de x converge absolutamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,x^n}{2^{2n}(n!)^2}$? ¿Para qué valores converge condicionalmente? ¿Para qué valores diverge? *Sugerencia*: *Véase* el Ejercicio 42 de la Sección 9.3.

∗30. Desarrolle procedimientos para reordenar los términos de la serie armónica alternante de forma que la serie reordenada (a) diverja a ∞, (b) converja a -2.

9.5 Series de potencias

Esta sección trata de un tipo especial de series infinitas denominadas *series de potencias*, que pueden verse como un polinomio de grado infinito.

DEFINICIÓN 7 Series de potencias

Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

se denomina **serie de potencias en potencias de $x = c$** o **serie de potencias alrededor de c**. Las constantes a_0, a_1, a_2, ... se denominan **coeficientes** de la serie de potencias.

Como los términos de una serie de potencias son funciones de una variable x, la serie puede converger o no converger para cada valor de x. En aquellos valores de x donde la serie converge, la suma define una función de x. Por ejemplo, si $-1 < x < 1$, entonces

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

La serie geométrica del miembro izquierdo es una *representación* en serie de potencias de la función $1/(1-x)$ en potencias de x (o alrededor de 0). Nótese que la representación sólo es válida en el intervalo abierto $(-1, 1)$, incluso aunque $1/(1-x)$ esté definida para todos los números reales x excepto $x = 1$. Para $x = -1$ y $|x| > 1$ la serie no converge, por lo que no puede representar a $1/(1-x)$ en estos puntos.

El punto c es el **centro de convergencia** de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. La serie converge seguro (a a_0) en $x = c$ (todos los términos excepto posiblemente el primero son 0). El Teorema 17, que veremos posteriormente, demuestra que si la serie converge en algún otro lugar, entonces converge en un intervalo (posiblemente infinito) centrado en $x = c$, y converge absolutamente en todos los puntos de ese intervalo excepto posiblemente en uno de sus extremos o ambos si el intervalo es finito. La serie geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

es un ejemplo de este comportamiento. Su centro de convergencia es $c = 0$, y converge sólo en el intervalo $(-1, 1)$, centrado en 0. La convergencia es absoluta en todos los puntos del intervalo. Otro ejemplo es la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x-5)^n = \frac{x-5}{2} + \frac{(x-5)^2}{2 \times 2^2} + \frac{(x-5)^3}{3 \times 2^3} + \cdots$$

que se estudió en el Ejemplo 4 de la Sección 9.4. Allí demostramos que esta serie converge en el intervalo $[3, 7)$, un intervalo de centro $x = 5$, y que la convergencia es absoluta en el intervalo abierto $(3, 7)$, pero sólo es condicional en el extremo $x = 3$.

TEOREMA 17

Para cualquier serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ se debe cumplir una de las siguientes alternativas:

(i) La serie puede converger sólo en $x = c$.
(ii) La serie puede converger en cualquier número real x.
(iii) Puede existir un número real positivo R tal que la serie converge en todo valor de x que cumple $|x-c| < R$ y diverge en todo valor de x que cumple $|x-c| > R$. En este caso, la serie puede converger o no converger en cada uno de los dos *extremos* $x = c - R$ y $x = c + R$.

En cada uno de estos casos la convergencia es absoluta excepto, posiblemente, en los extremos $x = c - R$ y $x = c + R$ en el caso (iii).

DEMOSTRACIÓN Observamos anteriormente que toda serie de potencias converge en su centro de convergencia; sólo el primer término puede ser distinto de cero, por lo que la convergencia es absoluta. Para demostrar el resto de este teorema, es suficiente demostrar que si la serie converge en cualquier número $x_0 \neq c$, entonces converge absolutamente en todo número x más cercano a c que x_0, es decir, en todo valor de x que cumpla $|x - c| < |x_0 - c|$. Esto significa que la convergencia en cualquier valor $x_0 \neq c$ implica convergencia absoluta en $(c - x_0, c + x_0)$, por lo que el conjunto de puntos x donde la serie es convergente debe ser un intervalo centrado en c.

Supongamos, por tanto, que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0 - c)^n$ converge. Entonces $\lim a_n(x_0 - c)^n = 0$, por lo que $|a_n(x_0 - c)^n| \leqslant K$ para todo n, siendo K alguna constante (Teorema 1 de la Sección 9.1). Si $r = |x - c|/|x_0 - c| < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - c)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x_0 - c)^n| \left| \frac{x - c}{x_0 - c} \right|^n \leqslant K \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{K}{1 - r} < \infty$$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ converge absolutamente.

Por el Teorema 17, el conjunto de valores x para los que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ converge es un intervalo centrado en $x = c$. Denominaremos a este intervalo el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias. Debe tener una de las siguientes formas:

(i) Un punto aislado $x = c$ (es decir, un intervalo cerrado degenerado $[c, c]$).
(ii) La recta completa $(-\infty, \infty)$.
(iii) Un intervalo finito centrado en c:

$$[c - R, c + R], \text{ o } [c - R, c + R), \text{ o } (c - R, c + R], \text{ o } (c - R, c + R)$$

El número R en (iii) se denomina **radio de convergencia** de la serie de potencias. En el caso (i) se dice que el radio de convergencia es $R = 0$; en el caso (ii) es $R = \infty$.

El radio de convergencia, R, se puede obtener frecuentemente aplicando el test de la razón a la serie de potencias: si

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - c)^{n+1}}{a_n(x - c)^n} \right| = \left(\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) |x - c|$$

existe, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ converge absolutamente donde sea $\rho < 1$, es decir, donde

$$|x - c| < R = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

La serie diverge si $|x - c| > R$.

Radio de convergencia

Supongamos que $L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe o es ∞. En ese caso, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ tiene como radio de convergencia $R = 1/L$ (si $L = 0$, entonces $R = \infty$; si $L = \infty$, entonces $R = 0$).

Ejemplo 1 Determine el centro, el radio y el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x + 5)^n}{(n^2 + 1)3^n}$$

Solución La serie se puede expresar como

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{n^2+1}\left(x+\frac{5}{2}\right)^n$$

El centro de convergencia es $x = -5/2$. El radio de convergencia, R, está dado por

$$\frac{1}{R} = L = \lim\left|\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\frac{1}{n^2+1}}\right| = \lim\frac{2}{3}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, $R = 3/2$. La serie converge absolutamente en $(-5/2 - 3/2, -5/2 + 3/2) = (-4, -1)$ y diverge en $(-\infty, -4)$ y en $(-1, \infty)$. En $x = -1$, la serie es $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n^2+1)$; en $x = -4$, es $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(n^2+1)$. Ambas series convergen (absolutamente). El intervalo de convergencia de la serie de potencias dada es, por tanto, $[-4, -1]$.

Ejemplo 2 Determine los radios de convergencia de las series

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ y (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Solución

(a) $L = \left|\lim \frac{1}{(n+1)!}\bigg/\frac{1}{n!}\right| = \lim\frac{n!}{(n+1)!} = \lim\frac{1}{n+1} = 0$. Por tanto, $R = \infty$.

Esta serie converge (absolutamente) para todo x. La suma es e^x, como demostraremos en el Ejemplo 1 de la siguiente sección.

(b) $L = \left|\lim\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim(n+1) = \infty$. Por tanto, $R = 0$.

Esta serie converge sólo en su centro de convergencia $x = 0$.

Operaciones algebraicas en series de potencias

Para simplificar la presentación que sigue, consideraremos sólo series de potencias con centro de convergencia 0, es decir, series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Todas las propiedades que demostraremos para estas series se extienden automáticamente a series de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-c)^n$, mediante el cambio de variable $x = y - c$.

Observemos primero que las series que tienen el mismo centro de convergencia se pueden sumar o restar en cualquier intervalo que sea común a sus intervalos de convergencia. El siguiente teorema es una consecuencia simple del Teorema 7 de la Sección 9.2, y no requiere demostración.

TEOREMA 18 Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dos series de potencias con radios de convergencia R_a y R_b, respectivamente, y sea c una constante. Entonces,

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n$ tiene radio de convergencia R_a, y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

siempre que la serie de la derecha converja.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ tiene radio de convergencia R al menos tan grande como el mínimo de R_a y R_b ($R \geqslant \min \{R_a, R_b\}$), y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

siempre que las dos series de la derecha converjan.

La situación respecto a la multiplicación y división de series de potencias es más complicada. Sólo mencionaremos los resultados, sin demostrarlos. Se pueden encontrar más detalles en cualquier libro de texto sobre análisis matemático.

La multiplicación de la forma

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)&(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)\\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots\end{aligned}$$

nos lleva a conjeturar la fórmula

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

siendo

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ se denomina **producto de Cauchy** de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Como la suma, el producto de Cauchy tiene también un radio de convergencia como mínimo igual al menor de los de las series que se multiplican.

Ejemplo 3 Como

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

se cumple para $-1 < x < 1$, podemos determinar una representación en serie de potencias de $1/(1-x)^2$ tomando el producto de Cauchy de esta serie consigo misma. Como $a_n = b_n = 1$ para $n = 0, 1, 2, ...$ tenemos que

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} 1 = n + 1 \quad \text{y}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

que debe cumplirse también para $-1 < x < 1$. La misma serie se puede obtener por multiplicación directa de las series:

$$\begin{array}{rcccccccc} & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + & \cdots \\ \times & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + & \cdots \\ \hline & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + & \cdots \\ & & & x & + & x^2 & + & x^3 & + & \cdots \\ & & & & & x^2 & + & x^3 & + & \cdots \\ & & & & & & & x^3 & + & \cdots \\ & & & & & & & & & \cdots \\ \hline & 1 & + & 2x & + & 3x^2 & + & 4x^3 & + & \cdots \end{array}$$

Las series de potencias también se pueden dividir, pero no existe ninguna regla simple para determinar los coeficientes de la serie cociente. El radio de convergencia de la serie cociente será como mínimo el menor de los tres números R_1, R_2 y R_3, siendo R_1 y R_2 los radios de convergencia de las series numerador y denominador y R_3 la distancia desde el centro de convergencia al *número complejo* más cercano donde la serie denominador tenga una suma igual a 0. Para ilustrar este punto, obsérvese que 1 y $1 - x$ son dos series de potencias con radio de convergencia infinito:

$$1 = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots \qquad \text{para todo } x$$
$$1 - x = 1 - x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots \qquad \text{para todo } x$$

Su cociente, $1/(1 - x)$, sin embargo, tiene un radio de convergencia de 1, la distancia del centro de convergencia $x = 0$ al punto $x = 1$ donde el denominador se hace cero:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad \text{para } |x| < 1$$

Diferenciación e integración de series de potencias

Si una serie de potencias tiene radio de convergencia positivo, se puede diferenciar o integrar término a término. La serie resultante convergerá a la derivada o integral apropiada de la suma de la serie original en todas partes excepto, posiblemente, en los extremos del intervalo de convergencia de la serie original. Este hecho muy importante asegura que, a efectos de cálculo, las series de potencias se comportan como si fueran polinomios, que son las funciones más sencillas de diferenciar e integrar. Formalizaremos las propiedades de la diferenciación y la integración de series de potencias en el siguiente teorema.

TEOREMA 19 **Diferenciación e integración término a término de series de potencias**

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge a la suma $f(x)$ en un intervalo $(-R, R)$, siendo $R > 0$, es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \qquad (-R < x < R)$$

entonces f es diferenciable en el intervalo $(-R, R)$ y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots, \qquad (-R < x < R)$$

Además, f es integrable en cualquier subintervalo cerrado de $(-R, R)$, y si $|x| < R$, entonces

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots$$

Aunque comprender lo que dice este teorema es muy importante para lo que sigue, entender la demostración no lo es. El lector puede saltar la demostración y continuar a las aplicaciones.

DEMOSTRACIÓN Sea x un número que satisface $-R < x < R$ y escójase $H > 0$ tal que $|x| + H < R$. Por el Teorema 17 tenemos entonces que[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|(|x| + H)^n = K < \infty$$

El Teorema Binomial (*véase* la Sección 9.9) demuestra que si $n \geqslant 1$, entonces

$$(x + h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k$$

Por tanto, si $|h| \leqslant H$, tenemos que

$$\begin{aligned} |(x + h)^n - x^n - nx^{n-1}h| &= \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k \right| \\ &\leqslant \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \frac{|h|^k}{H^k} H^k \\ &\leqslant \frac{|h|^2}{H^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} H^k \\ &= \frac{|h|^2}{H^2} (|x| + H)^n \end{aligned}$$

Además,

$$|nx^{n-1}| = \frac{n|x|^{n-1}H}{H} \leqslant \frac{1}{H} (|x| + H)^n$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |na_nx^{n-1}| \leqslant \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|(|x| + H)^n = \frac{K}{H} < \infty$$

con lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ converge (absolutamente), por ejemplo, a $g(x)$. Ahora

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - g(x) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x + h)^n - a_nx^n - na_nx^{n-1}h}{h} \right| \\ &\leqslant \frac{1}{|h|} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||(x + h)^n - x^n - nx^{n-1}h| \\ &\leqslant \frac{|h|}{H^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|(|x| + H)^n \leqslant \frac{K|h|}{H^2} \end{aligned}$$

Haciendo que h tienda a cero, se obtiene $|f'(x) - g(x)| \leqslant 0$, por lo que $f'(x) = g(x)$, como queríamos demostrar.

Obsérvese ahora que, como $|a_n/(n + 1)| \leqslant |a_n|$, la serie

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n + 1} x^{n+1}$$

[1] Esta demostración se debe a R. Výborný, *American Mathematical Monthly*, abril 1987.

converge (absolutamente) al menos en el intervalo $(-R, R)$. Utilizando el resultado de la diferenciación demostrado anteriormente, se obtiene

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

Como $h(0) = 0$, tenemos que

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x h'(t)\,dt = h(t)\Big|_0^x = h(x)$$

como queríamos demostrar.

En conjunto, estos resultados implican que una serie diferenciada o integrada término a término tendrá el mismo radio de convergencia que la serie original. De hecho, como ilustran los siguientes ejemplos, el intervalo de convergencia de la serie diferenciada es el mismo que el de la serie original, excepto por la *posible* pérdida de uno de los extremos o de ambos si la serie original converge en los extremos de su intervalo de convergencia. De forma similar, la serie integrada convergerá en todo el intervalo de convergencia de la serie original y, posiblemente, en uno de los extremos del intervalo o en ambos, incluso si la serie original no convergía en los extremos.

Al ser diferenciable en el intervalo $(-R, R)$, siendo R el radio de convergencia, la suma $f(x)$ de una serie de potencias es necesariamente continua en dicho intervalo abierto. Si la serie converge en uno de los extremos o en ambos, $-R$ y R, entonces f es también continua (por un lado) hasta estos extremos. Este resultado se establece formalmente en el teorema que sigue. No lo demostraremos aquí; el lector interesado en una demostración puede consultar libros de texto de análisis matemático.

TEOREMA 20 **Teorema de Abel**

La suma de una serie de potencias es una función continua en todo el intervalo de convergencia de la serie. En particular, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ converge para algún $R > 0$, entonces

$$\lim_{x\to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Y si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ converge, entonces

$$\lim_{x\to -R+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$$

Los siguientes ejemplos muestran la forma en la que se aplican los teoremas anteriores para obtener una representación en serie de potencias de funciones.

Ejemplo 4 Obtenga las representaciones en series de potencias de las funciones

(a) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$, (b) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$, y (c) $\ln(1+x)$

empezando con la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

y utilizando diferenciación, integración y sustitución. ¿Dónde es válida cada serie?

Solución

(a) Diferenciando la serie geométrica término a término se obtiene

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

Este resultado es el mismo obtenido mediante multiplicación de series en el Ejemplo 3 anterior.

(b) Diferenciando otra vez se obtiene, para $-1 < x < 1$,

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = (1 \times 2) + (2 \times 3)x + (3 \times 4)x^2 + \cdots$$

Dividiendo ahora por 2:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

(c) Sustituyendo x por $-t$ en la serie geométrica original:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \cdots \qquad (-1 < t < 1)$$

Integrando desde 0 hasta x, siendo $|x| < 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leqslant 1) \end{aligned}$$

Nótese que la última serie converge (condicionalmente) en el extremo $x = 1$, así como en el intervalo $-1 < x < 1$. Como $\ln(1+x)$ es continua en $x = 1$, el Teorema 20 nos asegura que la serie debe converger a esa función también en $x = 1$. Por tanto, en particular, la serie armónica alternante converge a $\ln 2$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Sin embargo, ésta no sería una fórmula muy útil para calcular el valor de $\ln 2$ (¿por qué no?). ■

Ejemplo 5 Utilice la serie geométrica del ejemplo anterior para obtener una representación en serie de potencias de $\tan^{-1} x$.

Solución Sustituimos x por $-t^2$ en la serie geométrica. Como $0 \leqslant t^2 < 1$ siempre que $-1 < t < 1$, se obtiene

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots \qquad (-1 < t < 1)$$

Integrando ahora desde 0 hasta x, con $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \tan^{-1} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots)\,dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

Nótese, sin embargo, que la serie también converge (condicionalmente) en $x = -1$ y 1. Como $\tan^{-1}$ es continua en ± 1, la representación en serie anterior de $\tan^{-1} x$ también vale para esos valores, por el Teorema 20. Haciendo $x = 1$ se obtiene otro interesante resultado:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

De nuevo, ésta no sería una buena fórmula para calcular un valor numérico de π (¿por qué no?). ■

Ejemplo 6 Calcule la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, calculando primero la suma de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots$$

Solución Obsérvese en el Ejemplo 4(a) cómo el proceso de diferenciar la serie geométrica produce una serie con coeficientes 1, 2, 3, ... Partiendo de la serie obtenida para $1/(1-x)^2$ y multiplicándola por x se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Diferenciando ahora de nuevo para obtener una serie con coeficientes 1^2, 2^2, 3^2, ...:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots = \frac{d}{dx} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Multiplicando de nuevo por x se obtiene la serie de potencias deseada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

La diferenciación y la multiplicación por x no cambian el radio de convergencia, por lo que esta serie converge a la función indicada para $-1 < x < 1$. Haciendo $x = 1/2$ obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6$$

■

El siguiente ejemplo ilustra cómo se puede utilizar sustitución para obtener representaciones en series de potencias de funciones con centros de convergencia diferentes de 0.

Ejemplo 7 Calcule una representación en serie de $f(x) = 1/(2+x)$, en potencias de $x - 1$. ¿Cuál es el intervalo de convergencia de esta serie?

Solución Sea $t = x - 1$, de forma que $x = t + 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+x} &= \frac{1}{3+t} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{t}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{3^2} - \frac{t^3}{3^3} + \cdots\right) && (-1 < t/3 < 1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{3^{n+1}} && (-3 < t < 3) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}} && (-2 < x < 4)
\end{aligned}$$

Nótese que el radio de convergencia de esta serie es 3, que es la distancia del centro de convergencia, 1, al punto -2 donde el denominador es 0. Esto lo podríamos haber predicho con anterioridad. ■

Cálculos con Maple

Maple puede calcular las sumas de muchos tipos de series, incluyendo las series numéricas absolutamente y condicionalmente convergentes, y muchas series de potencias. Incluso cuando no puede obtener la suma formal de una serie (convergente), Maple puede proporcionar una aproximación decimal con la precisión indicada por el valor actual de su variable `Digits`, que por defecto es 10. He aquí algunos ejemplos.

```
> sum(n^4/2^n, n=1..infinity);
```

$$150$$

```
> sum(1/n^2, n=1..infinity);
```

$$\frac{1}{6}\pi^2$$

```
> sum(exp(-n^2), n=0..infinity);
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{(-n^2)}$$

```
> evalf(%);
```

$$1.386\,318\,602$$

```
> f := x -> sum(x^(n-1)/n, n=1..infinity);
```

$$f := x \to \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{(n-1)}}{n}\right)$$

```
> f(1); f(-1); f(1/2);
```

$$\infty$$
$$\ln(2)$$
$$2\ln(2)$$

Ejercicios 9.5

Determine el centro, radio e intervalo de convergencia de las series de potencias de los Ejercicios 1-8.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3n(x+1)^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}} x^n$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3(2x-3)^n$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}(4-x)^n$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+5^n)}{n!} x^n$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$

9. Utilice multiplicación de series para obtener una representación en serie de potencias de $1/(1-x)^3$ válida en el intervalo $(-1, 1)$.

10. Determine el producto de Cauchy de las series $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ y $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$. ¿En qué intervalo y a qué función converge la serie producto?

11. Determine el desarrollo en serie de potencias de $1/(1-x)^2$ dividiendo formalmente 1 por $1 - 2x + x^2$.

Partiendo de la representación en serie de potencias,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad (-1 < x < 1)$$

determine representaciones en serie de potencias de las funciones que se indican en los Ejercicios 12-20. ¿En qué intervalo es válida cada representación?

12. $\dfrac{1}{2-x}$ en potencias de x

13. $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ en potencias de x

14. $\dfrac{1}{1+2x}$ en potencias de x

15. $\ln(2-x)$ en potencias de x

16. $\dfrac{1}{x}$ en potencias de $x-1$

17. $\dfrac{1}{x^2}$ en potencias de $x+2$

18. $\dfrac{1-x}{1+x}$ en potencias de x

19. $\dfrac{x^3}{1-2x^2}$ en potencias de x

20. $\ln x$ en potencias de $x-4$

Determine el intervalo de convergencia y la suma de las series de los Ejercicios 21-26.

21. $1 - 4x + 16x^2 - 64x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x)^n$

*__22.__ $3 + 4x + 5x^2 + 6x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n$

*__23.__ $\dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{x^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+3}$

*__24.__ $1 \times 3 - 2 \times 4x + 3 \times 5x^2 - 4 \times 6x^3 + \cdots$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+3)x^n$

*__25.__ $2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6 + 10x^8 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)x^{2n}$

*__26.__ $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{3} - \dfrac{x^6}{4} + \dfrac{x^8}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n+1}$

Utilice la técnica (o el resultado) del Ejemplo 6 para calcular las sumas de las series numéricas de los Ejercicios 27-32.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n}$

*__29.__ $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)^2}{\pi^n}$

*__30.__ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$

32. $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$

9.6 Series de Taylor y Maclaurin

Si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ tiene radio de convergencia positivo R, entonces la suma de la serie define una función $f(x)$ en el intervalo $(c-R, c+R)$. Se dice entonces que la serie de potencias es una **representación** de $f(x)$ en ese intervalo. ¿Qué relación existe entre la función $f(x)$ y los coeficientes a_0, a_1, a_2, ... de la serie de potencias? El teorema que sigue responde a esta pregunta.

TEOREMA 21 Supongamos que la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

converge a $f(x)$ para $c - R < x < c + R$, siendo $R > 0$. Entonces,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

DEMOSTRACIÓN Esta demostración requiere diferenciar la serie de $f(x)$ término a término varias veces, un proceso justificado por el Teorema 19 (reformulado adecuadamente en potencias de $x - c$):

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-c)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x-c) + 12a_4(x-c)^2 + \cdots$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n(x-c)^{n-k}$$

$$= k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}(x-c) + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}(x-c)^2 + \cdots$$

Cada serie converge para $c - R < x < c + R$. Haciendo $x = c$ se obtiene $f^{(k)}(c) = k!a_k$, lo que demuestra el teorema.

El Teorema 21 demuestra que una función $f(x)$ que tenga una representación en serie de potencias con centro en c y radio de convergencia positivo debe tener derivadas de todos los órdenes en un intervalo alrededor de $x = c$, y sólo puede tener una representación en forma de serie de potencias en potencias de $x - c$, concretamente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$

Esta serie se denomina serie de Taylor o, si $c = 0$, serie de Maclaurin.

DEFINICIÓN 8 Series de Taylor y de Maclaurin

Si $f(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes en $x = c$ (es decir, si $f^{(k)}(c)$ existe para $k =$ $= 0, 1, 2, 3, ...$), entonces la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$

se denomina **serie de Taylor de f alrededor de c** (o **serie de Taylor de f en potencias de $x - c$**). Si $c = 0$, se utiliza generalmente la expresión **serie de Maclaurin** en vez de serie de Taylor.

Nótese que las sumas parciales de la serie de Taylor (o de Maclaurin) son los polinomios de Taylor (o de Maclaurin) estudiados en la Sección 4.8.

La serie de Taylor es una serie de potencias tal como se ha definido en la sección anterior. El Teorema 17 implica que c debe ser el centro de cualquier intervalo en el que esa serie converja, pero la definición de serie de Taylor no exige que la serie deba converger en ninguna parte, excepto en el punto $x = c$, donde la serie es simplemente $f(c) + 0 + 0 + \cdots$. La serie existe siempre que todas las derivadas de f existan en $x = c$. En la práctica esto significa que todas las derivadas deben existir en un intervalo abierto que contenga a $x = c$ (¿por qué?). Sin embargo, la serie puede no converger en ninguna parte excepto en $x = c$, y si converge en alguna otra parte, puede converger a algo distinto de $f(x)$ (*véase* el Ejercicio 40 al final de esta sección donde se presenta un ejemplo en el que esto sucede). Si la serie de Taylor converge a $f(x)$ en un intervalo abierto que contiene a c, entonces se dice que f es analítica en c.

DEFINICIÓN 9 Funciones analíticas

Se dice que una función f es **analítica en c** si tiene una serie de Taylor en c y dicha serie converge a $f(x)$ en un intervalo abierto que contiene a c. Si f es analítica en todos los puntos de un intervalo abierto, se dice que es analítica en dicho intervalo.

La mayoría de las funciones elementales que se encuentran en cálculo, pero no todas, son analíticas siempre que tengan derivadas de todos los órdenes. Por otra parte, siempre que una serie de potencias en potencias de $x - c$ converja para todo x perteneciente a un intervalo abierto que contenga a c, su suma $f(x)$ será analítica en c, y la serie dada será la serie de Taylor de f alrededor de c.

Series de Maclaurin de algunas funciones elementales

El cálculo de las series de Taylor y de Maclaurin de una función f aplicando directamente la Definición 8 sólo es práctico cuando se puede obtener una fórmula para la n-ésima derivada de f. Ejemplos de estas funciones son $(ax + b)^r$, e^{ax+b}, $\ln(ax + b)$, $\operatorname{sen}(ax + b)$, $\cos(ax + b)$, y sumas de dichas funciones.

Ejemplo 1 Calcule la serie de Taylor de e^x alrededor de $x = c$. ¿Dónde converge la serie a e^x? ¿Dónde es analítica e^x? ¿Cuál es la serie de Maclaurin de e^x?

Solución Como todas las derivadas de $f(x) = e^x$ son e^x, tenemos que $f^{(n)}(c) = e^c$ para todo entero $n \geqslant 0$. Por tanto, la serie de Taylor de e^x alrededor de $x = c$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n = e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c}{2!}(x-c)^2 + \frac{e^c}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$

El radio de convergencia R de esta serie está dado por

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^c/(n+1)!}{e^c/n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Por tanto, el radio de convergencia es $R = \infty$ y la serie converge para todo x. Supongamos que la suma es $g(x)$:

$$g(x) = e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c}{2!}(x-c)^2 + \frac{e^c}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$

Por el Teorema 19, tenemos que

$$g'(x) = 0 + e^c + \frac{e^c}{2!}\,2(x-c) + \frac{e^c}{3!}\,3(x-c)^2 + \cdots$$

$$= e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c}{2!}(x-c)^2 + \cdots = g(x)$$

Además, $g(c) = e^c + 0 + 0 + \cdots = e^c$. Como $g(x)$ cumple la ecuación diferencial $g'(x) = g(x)$ del crecimiento exponencial, tenemos que $g(x) = Ce^x$. Sustituyendo $x = c$ se obtiene $e^c = g(c) = Ce^c$, por lo que $C = 1$. Entonces, la serie de Taylor de e^x en potencias de $x - c$ converge a e^x para todo número real x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n$$

$$= e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c}{2!}(x-c)^2 + \frac{e^c}{3!}(x-c)^3 + \cdots \qquad \text{(para todo } x\text{)}$$

En particular, e^x es analítica en toda la recta real $\mathbb{R}$. Haciendo $c = 0$ se obtiene la serie de Maclaurin de e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{(para todo } x\text{)}$$

Ejemplo 2 Calcule la serie de Maclaurin de (a) $\operatorname{sen} x$ y (b) $\cos x$. ¿Dónde converge cada serie?

Solución Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces tenemos que $f(0) = 0$ y

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0\\
f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(0) &= -1\\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0\\
f^{(5)}(x) &= \cos x & f^{(5)}(0) &= 1\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Así, la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen} x$ es

$$\begin{aligned}
g(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \cdots\\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Hemos denominado $g(x)$ a la suma, ya que todavía no sabemos si la serie converge a $\operatorname{sen} x$. La serie converge para todo x por el test de la razón:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} x^{2(n+1)+1}}{\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} |x|^2\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0
\end{aligned}$$

Ahora podemos diferenciar dos veces la función $g(x)$ y obtener

$$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$g''(x) = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots = -g(x)$$

Por tanto, $g(x)$ satisface la ecuación diferencial $g''(x) + g(x) = 0$ del movimiento armónico simple. La solución general de esta ecuación, como se observó en la Sección 3.7, es

$$g(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x$$

Obsérvese, a partir de la serie, que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$. Estos valores determinan que $A = 0$ y $B = 1$. Por consiguiente, $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $g'(x) = \cos x$ para todo x.

En definitiva, hemos demostrado que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \text{(para todo } x\text{)}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad \text{(para todo } x\text{)}$$

El Teorema 21 demuestra que podemos utilizar todos los medios disponibles para calcular una serie de potencias que converja a una función dada en un intervalo, y la serie obtenida resultará ser la serie de Taylor. En la Sección 9.5 se obtuvieron varias series a partir de la serie geométrica. Entre ellas:

Algunas series de Maclaurin

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leqslant 1)$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

Estas series, junto con los intervalos donde convergen, se utilizarán frecuentemente de ahora en adelante, por lo que sería conveniente memorizarlas.

Otras series de Taylor y Maclaurin

Las series se pueden combinar de diversas formas para generar nuevas series. Por ejemplo, podemos calcular la serie de Maclaurin de e^{-x} sustituyendo x por $-x$ en la serie de e^x:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{(para todo } x\text{)}$$

Las series de e^x y e^{-x} se pueden restar o sumar, y los resultados dividirse por 2 para obtener las series de Maclaurin de las funciones hiperbólicas $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad \text{(para todo } x\text{)}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad \text{(para todo } x\text{)}$$

Observación Obsérvese la semejanza de las series de $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{senh} x$, y las de $\cos x$ y $\cosh x$. Si utilizáramos números complejos (números de la forma $z = x + iy$, siendo $i^2 = -1$ y x e y reales; *véase* el Apéndice I) como argumentos de nuestras funciones, y si hubiéramos demostrado que las operaciones sobre series se pueden aplicar a series de números complejos, veríamos que $\cos x = \cosh(ix)$ y $\operatorname{sen} x = -i \operatorname{senh}(ix)$. De hecho, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ y $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$, por lo que

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Estas fórmulas aparecen en el estudio de funciones de variable compleja (*véase* el Apéndice II); desde el punto de vista complejo, las funciones trigonométrica y exponencial son simplemente

diferentes manifestaciones de la misma función básica, la exponencial compleja $e^z = e^{x+iy}$. Aquí nos contentaremos simplemente con mencionar las interesantes relaciones anteriores e invitar al lector a verificarlas formalmente calculando las series (estos cálculos formales no constituyen por supuesto una demostración, ya que no hemos establecido las reglas que hay que aplicar en series de números complejos).

Ejemplo 3 Obtenga las series de Maclaurin de las siguientes funciones:

(a) $e^{-x^2/3}$, (b) $\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$, (c) $\operatorname{sen}^2 x$.

Solución

(a) Sustituimos x por $-x^2/3$ en la serie de Maclaurin de e^x:

$$e^{-x^2/3} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n n!} x^{2n} \qquad \text{(para todo } x\text{)}$$

(b) Para todo $x \neq 0$ tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = \frac{1}{x}\left(x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n+1)!}$$

Nótese que $f(x) = (\operatorname{sen}(x^2))/x$ no está definida en $x = 0$, pero tiene límite (concretamente 0) cuando x tiende a 0. Si definimos $f(0) = 0$ (la extensión continua de $f(x)$ a $x = 0$), entonces la serie converge a $f(x)$ para todo x.

(c) Utilizaremos una igualdad trigonométrica para expresar $\operatorname{sen}^2 x$ en función de $\cos 2x$ y utilizaremos después la serie de Maclaurin de $\cos x$ sustituyendo x por $2x$.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \qquad \text{(para todo } x \text{ real)}$$

■

Las series de Taylor alrededor de puntos distintos de 0 se pueden obtener muchas veces a partir de series de Maclaurin conocidas mediante un cambio de variable.

Ejemplo 4 Calcule la serie de Taylor de $\ln x$ en potencias de $x - 2$. ¿Dónde converge la serie a $\ln x$?

Solución Nótese que si $t = (x-2)/2$, entonces

$$\ln x = \ln(2 + (x-2)) = \ln\left[2\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)\right] = \ln 2 + \ln(1+t)$$

Utilizamos la serie de Maclaurin conocida de $\ln(1+t)$:

$$\begin{aligned}\ln x &= \ln 2 + \ln(1+t)\\ &= \ln 2 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \cdots\\ &= \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2\times 2^2} + \frac{(x-2)^3}{3\times 2^3} - \frac{(x-2)^4}{4\times 2^4} + \cdots\\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,2^n}(x-2)^n\end{aligned}$$

Como la serie de $\ln(1+t)$ es válida para $-1 < t \leqslant 1$, la serie de $\ln x$ es válida para $-1 < (x-2)/2 \leqslant 1$, es decir, para $0 < x \leqslant 4$.

■

Ejemplo 5 Calcule la serie de Taylor de $\cos x$ alrededor de $\pi/3$. ¿Dónde es válida la serie?

Solución Utilizamos la fórmula de suma del coseno:

$$\begin{aligned}\cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 - \cdots\right]\\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots\right]\\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 - \cdots\end{aligned}$$

Esta representación en serie es válida para todo x. Un cálculo similar permitiría calcular el desarrollo de $\cos x$ o $\operatorname{sen} x$ en potencias de $x - c$ para todo c real; ambas funciones son analíticas en todos los puntos de la recta real.

■

Algunas veces es muy difícil, si no imposible, obtener una fórmula del término general de una serie de Maclaurin o de Taylor. En estos casos, en general, es todavía posible obtener algunos términos iniciales, antes de que los cálculos se hagan demasiado complicados. Si hubiéramos intentado resolver el Ejemplo 3(c) multiplicando por sí misma la serie de $\operatorname{sen} x$ nos hubiéramos encontrado en esta situación. Esto puede ocurrir también cuando es necesario sustituir una serie en otra o dividir una serie por otra.

Ejemplo 6 Obtenga los tres primeros términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de (a) $\tan x$ y (b) $\ln \cos x$.

Solución

(a) $\tan x = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$. Podemos obtener los tres primeros términos de la serie de Maclaurin de $\tan x$ dividiendo la serie de $\cos x$ por la de $\operatorname{sen} x$:

$$\begin{array}{r|l}
 & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \hline
1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} & x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \cdots \\
 & x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{24} - \cdots \\ \cline{2-2}
 & \qquad \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} + \cdots \\
 & \qquad \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{6} + \cdots \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad \dfrac{2x^5}{15} - \cdots \\
 & \qquad\qquad \dfrac{2x^5}{15} - \cdots \\ \cline{2-2}
\end{array}$$

Por tanto, $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$.

No es fácil obtener todos los términos de la serie; sólo con un considerable esfuerzo de cómputo se pueden llegar a obtener más términos de los que ya hemos obtenido. La serie de Maclaurin de $\tan x$ converge para $|x| < \pi/2$, pero no podemos demostrarlo con las técnicas de que disponemos hasta ahora (eso es así porque el número complejo $z = x + iy$ más cercano a 0 donde el «denominador» de $\tan z$, que es $\cos z$, es cero, es, de hecho, el valor real $z = \pi/2$).

(b)
$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)\right) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^3 - \cdots \\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \cdots\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{8} + \cdots\right) - \cdots \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \cdots
\end{aligned}$$

Nótese que en cada etapa del cálculo sólo hemos utilizado los términos suficientes para asegurar que podríamos calcular todos los términos en potencias hasta x^6. Como $\ln\cos x$ es una función par, su serie de Maclaurin sólo tiene potencias pares. Tampoco podemos calcular el término general de esta serie. Podríamos intentar calcular términos utilizando la fórmula $a_k = f^{(k)}(0)/k!$, pero incluso esto se hace bastante difícil tras unos pocos valores iniciales de k.

Obsérvese que la serie de $\tan x$ también se podría haber obtenido a partir de la de $\ln\cos x$ ya que $\tan x = -\dfrac{d}{dx}\ln\cos x$.

■

Revisión de la fórmula de Taylor

En los ejemplos anteriores hemos utilizado diversas técnicas para obtener la serie de Taylor de distintas funciones y hemos verificado que esas funciones son analíticas. Como se demuestra

en la Sección 4.8, el Teorema de Taylor proporciona un medio para estimar el tamaño del error $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ que aparece cuando se usa el polinomio de Taylor

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

para aproximar el valor de $f(x)$ con $x \neq c$. Como los polinomios de Taylor son sumas parciales de la serie de Taylor de f en c (si dicha serie existe), otra técnica para verificar la convergencia de una serie de Taylor es utilizar la fórmula de $E_n(x)$ proporcionada por el Teorema de Taylor para demostrar, al menos para un intervalo de valores de x que contenga a c, que $\lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0$. Esto implica que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$, de forma que f es en realidad la suma de su serie de Taylor alrededor de c en ese intervalo, y por tanto f es analítica en c. Presentamos a continuación una versión algo más general del teorema de Taylor.

TEOREMA 22 **Teorema de Taylor**

Si la derivada $(n+1)$-ésima de f existe en un intervalo que contenga a c y a x, y si $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n de f alrededor del punto $x = c$, entonces

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \qquad \textbf{Fórmula de Taylor}$$

se cumple, expresándose el término de error $E_n(x)$ por *una* de las siguientes fórmulas:

Resto de Lagrange $$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$
para algún s entre c y x

Resto integral $$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

El Teorema de Taylor con resto de Lagrange se demostró en la Sección 4.8 (Teorema 10) utilizando el Teorema del Valor Medio, e inducción sobre n. La versión del resto integral también se demuestra por inducción sobre n. *Véase* el Ejercicio 42 donde se da una idea de cómo se puede realizar la demostración. Aquí no utilizaremos uso de la forma integral del resto.

Nuestro ejemplo final de esta sección reformula la serie de Maclaurin de e^x calculando el límite del resto de Lagrange como se ha sugerido anteriormente.

Ejemplo 7 Utilice el Teorema de Taylor para calcular la serie de Maclaurin de $f(x) = e^x$. ¿Dónde converge la serie a $f(x)$?

Solución Como e^x es positiva y creciente, $e^s \leqslant e^{|x|}$ para todo $s \leqslant |x|$. Como $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo k, tenemos, haciendo $c = 0$ en el resto de Lagrange de la Fórmula de Taylor,

$$\begin{aligned}|E_n(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \qquad \text{para alguna } s \text{ entre } 0 \text{ y } x\\ &= \frac{e^s}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leqslant e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ cuando } n\to\infty\end{aligned}$$

para todo x real, como se demuestra en el Teorema 3(b) de la Sección 9.1. Entonces $\lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0$. Como el polinomio de Maclaurin de orden n de e^x es $\sum_{k=0}^{n}(x^k/k!)$,

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + E_n(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

y la serie converge a e^x para todo número real x. ■

Ejercicios 9.6

Calcule las representaciones en serie de Maclaurin de las funciones de los Ejercicios 1-14. ¿Para qué valores de x es válida cada representación?

1. e^{3x+1}

2. $\cos(2x^3)$

3. $\operatorname{sen}(x - \pi/4)$

4. $\cos(2x - \pi)$

5. $x^2 \operatorname{sen}(x/3)$

6. $\cos^2(x/2)$

7. $\operatorname{sen} x \cos x$

8. $\tan^{-1}(5x^2)$

9. $\dfrac{1 + x^3}{1 + x^2}$

10. $\ln(2 + x^2)$

11. $\ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$

12. $(e^{2x^2} - 1)/x^2$

13. $\cosh x - \cos x$

14. $\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x$

Calcule las representaciones en serie de Taylor de las funciones de los Ejercicios 15-26. ¿Dónde es válida la representación de cada serie?

15. $f(x) = e^{-2x}$ alrededor de -1

16. $f(x) = \operatorname{sen} x$ alrededor de $\pi/2$

17. $f(x) = \cos x$ en potencias de $x - \pi$

18. $f(x) = \ln x$ en potencias de $x - 3$

19. $f(x) = \ln(2 + x)$ en potencias de $x - 2$

20. $f(x) = e^{2x+3}$ en potencias de $x + 1$

21. $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ alrededor de $\dfrac{\pi}{4}$

22. $f(x) = \cos^2 x$ alrededor de $\dfrac{\pi}{8}$

23. $f(x) = 1/x^2$ en potencias de $x + 2$

24. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$ en potencias de $x - 1$

25. $f(x) = x \ln x$ en potencias de $x - 1$

26. $f(x) = xe^x$ en potencias de $x + 2$

Calcule los tres primeros términos distintos de cero de las series de Maclaurin de las funciones de los Ejercicios 27-30.

27. $\sec x$

28. $\sec x \tan x$

29. $\tan^{-1}(e^x - 1)$

30. $e^{\tan^{-1} x} - 1$

$*$**31.** Utilice el hecho de que $(\sqrt{1 + x})^2 = 1 + x$ para calcular los tres primeros términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de $\sqrt{1 + x}$.

32. ¿Tiene serie de Maclaurin $\csc x$? ¿Por qué? Calcule los tres primeros términos distintos de cero de la serie de Taylor de $\csc x$ alrededor del punto $x = \pi/2$.

Calcule las sumas de las series de los Ejercicios 33-36.

33. $1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2!} + \dfrac{x^6}{3!} + \dfrac{x^8}{4!} + \cdots$

$*$**34.** $x^3 - \dfrac{x^9}{3! \times 4} + \dfrac{x^{15}}{5! \times 16} - \dfrac{x^{21}}{7! \times 64} + \dfrac{x^{27}}{9! \times 256} - \cdots$

35. $1 + \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} + \dfrac{x^6}{7!} + \dfrac{x^8}{9!} + \cdots$

$*$**36.** $1 + \dfrac{1}{2 \times 2!} + \dfrac{1}{4 \times 3!} + \dfrac{1}{8 \times 4!} + \cdots$

37. Sea $P(x) = 1 + x + x^2$. Calcule (a) la serie de Maclaurin de $P(x)$ y (b) la serie de Taylor de $P(x)$ alrededor de 1.

$*$**38.** Verifique por cálculo directo que $f(x) = 1/x$ es analítica en a para todo $a \neq 0$.

$*$**39.** Verifique por cálculo directo que $\ln x$ es analítica en a para todo $a > 0$.

$*$**40.** Revise el Ejercicio 41 de la Sección 4.3. En él se demuestra que la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

tiene derivadas de todos los órdenes en todo punto de la recta real, y $f^{(k)}(0) = 0$ para todo entero positivo k. ¿Cuál es la serie de Maclaurin de $f(x)$? ¿Cuál es intervalo de convergencia de esta serie de Maclaurin? ¿En qué intervalo la serie converge a $f(x)$? ¿Es f analítica en 0?

$*$**41.** Multiplicando directamente las series de Maclaurin de e^x y e^y, demuestre que $e^x e^y = e^{x+y}$.

$*$**42.** **(Fórmula de Taylor con resto integral)** Verifique que si $f^{(n+1)}$ existe en un intervalo que contenga a c y a x, y si $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f alrededor de c, entonces $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$, siendo

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Proceda como sigue:

(a) En primer lugar, observe que el caso $n = 0$ es precisamente el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f(t)\, dt$$

Integre ahora por partes de la fórmula anterior, tomando $U = f'(t)$ y $dV = dt$. De forma contraria

a nuestra política habitual de no incluir una constante de integración en V, en este caso escribiremos $V = -(x - t)$ en vez de sólo $V = t$. Obsérvese que el resultado de la integración por partes es el caso $n = 1$ de la fórmula.

(b) Utilice un argumento de inducción (e integración por partes de nuevo) para demostrar que si la fórmula es válida para $n = k$, entonces también es válida para $n = k + 1$.

$*$**43.** Utilice la fórmula de Taylor con resto integral para indicar que no es cierto que la serie de Maclaurin de $\ln(1 + x)$ converge a $\ln(1 + x)$ para $-1 < x \leqslant 1$.

$*$**44. (Fórmula de Stirling)** El límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}} = 1$$

indica que el *error relativo* de la aproximación

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}$$

tiende a cero cuando n crece. Es decir, $n!$ crece con una velocidad comparable a $\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}$. Este resultado, conocido como Fórmula de Stirling, es muy útil en matemáticas aplicadas y estadística. Demuéstrelo realizando los siguientes pasos.

(a) Utilice la identidad $\ln(n!) = \sum_{j=1}^{n} \ln j$ y la naturaleza creciente del logaritmo para demostrar que si $n \geqslant 1$,

$$\int_0^n \ln x\, dx < \ln(n!) < \int_1^{n+1} \ln x\, dx$$

y a partir de aquí que

$$n \ln n - n < \ln(n!) < (n + 1) \ln(n + 1) - n$$

(b) Si $c_n = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n$, demuestre que

$$\begin{aligned} c_n - c_{n+1} &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} - 1 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{1 + 1/(2n+1)}{1 - 1/(2n+1)} - 1 \end{aligned}$$

(c) Utilice la serie de Maclaurin de $\ln \dfrac{1+t}{1-t}$ (*véase* el Ejercicio 11) para demostrar que

$$\begin{aligned} 0 < c_n - c_{n+1} &< \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

y, por tanto, que $\{c_n\}$ es decreciente y $\{c_n - \frac{1}{12n}\}$ es creciente. Concluya a partir de aquí que $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ existe, y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+1/2} e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} e^{c_n} = e^c$$

(d) Utilice ahora el Producto de Wallis del Ejercicio 38 de la Sección 6.1 para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

y deduzca a partir de aquí que $e^c = \sqrt{2\pi}$, lo que completa la demostración.

9.7 Aplicaciones de las series de Taylor y Maclaurin

Aproximación de valores de funciones

En la Sección 4.8 vimos que los polinomios de Taylor y Maclaurin (las sumas parciales de las series de Taylor y Maclaurin) se pueden utilizar para formar aproximaciones polinómicas a funciones más complicadas. En el Ejemplo 5 de esa sección utilizamos el resto de Lagrange en la fórmula de Taylor para determinar cuántos términos de la serie de Maclaurin de e^x son necesarios para calcular $e^1 = e$ con una precisión de tres cifras decimales. A efectos de comparación, en el Ejemplo 7 de la Sección 9.3 obtuvimos el mismo resultado utilizando una serie geométrica para acotar la cola de la serie de e.

El ejemplo que sigue muestra cómo la cota del error asociada con el test de la serie alternante (*véase* en Teorema 15 de la Sección 9.4) se puede utilizar también para estas aproximaciones. Cuando el término a_n de una serie (i) alterna de signo, (ii) decrece constantemente de tamaño y (iii) tiende a cero cuando $n \to \infty$, entonces el error que se produce al utilizar una suma parcial de la serie como aproximación a la suma de la serie es del mismo signo que el primer término omitido, y no es mayor en valor absoluto que dicho término.

Ejemplo 1 Calcule $\cos 43^{\text{o}}$ con un error menor que $1/10\,000$.

Solución Daremos dos soluciones alternativas:

MÉTODO I. Podemos utilizar la serie de Maclaurin del coseno:

$$\cos 43^{\text{o}} = \cos\frac{43\pi}{180} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^4 - \cdots$$

Como $43\pi/180 \approx 0.750\,49\cdots < 1$, la serie anterior debe cumplir las condiciones (i)-(iii) mencionadas anteriormente. Si truncamos la serie después del n-ésimo término

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^{2n-2}$$

entonces el error E estará acotado por el tamaño del primer término omitido:

$$|E| \leqslant \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^{2n} < \frac{1}{(2n)!}$$

El error no superará $1/10\,000$ si $(2n)! > 10\,000$, por lo que $n = 4$ servirá $(8! = 40\,320)$.

$$\cos 43^{\text{o}} \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^6 \approx 0.731\,35\cdots$$

MÉTODO II. Como 43^{o} está cerca de $45^{\text{o}} = \pi/4$ rad, podemos mejorar un poco utilizando la serie de Taylor alrededor de $\pi/4$ en vez de la serie de Maclaurin:

$$\begin{aligned}\cos 43^{\text{o}} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{90} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{90}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 - \cdots\right)\right.\\ &\qquad \left. + \left(\frac{\pi}{90} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 + \cdots\right)\right]\end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 < \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 < \frac{1}{20\,000}$$

sólo necesitamos los dos primeros términos de la primera serie y el primer término de la segunda serie:

$$\cos 43^{\text{o}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi}{90} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\right) \approx 0.731\,358\cdots$$

De hecho, $\cos 43^{\text{o}} = 0.731\,353\,7\cdots$.

Al calcular valores aproximados de funciones es mejor, siempre que se pueda, utilizar una serie de potencias alrededor de un punto tan cerca como sea posible del punto donde se desea la aproximación.

Funciones definidas por integrales

Existen muchas funciones que se pueden expresar en forma de combinaciones simples de funciones elementales cuya primitiva no se puede calcular por técnicas sencillas; sus primitivas no son combinaciones simples de funciones elementales. Sin embargo, a menudo podemos calcular la

serie de Taylor de las primitivas de sus funciones y, por tanto, aproximar sus integrales definidas.

Ejemplo 2 Calcule la serie de Maclaurin de

$$E(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

y utilícela para calcular $E(1)$ con una precisión de tres cifras decimales.

Solución La serie de Maclaurin de $E(x)$ está dada por

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \cdots\right)dt \\ &= \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5\times 2!} - \frac{t^7}{7\times 3!} + \frac{t^9}{9\times 4!} - \cdots\right)\Bigg|_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\times 2!} - \frac{x^7}{7\times 3!} + \frac{x^9}{9\times 4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \end{aligned}$$

y es válida para todo x, ya que la serie de e^{-t^2} es válida para todo t. Por tanto,

$$\begin{aligned} E(1) &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\times 2!} - \frac{1}{7\times 3!} + \cdots \\ &\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\times 2!} - \frac{1}{7\times 3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(n-1)!} \end{aligned}$$

Pararemos en el término n-ésimo. De nuevo, el test de la serie alternante nos asegura que el error de esta aproximación no será superior al primer término omitido, por lo que será menor que 0.0005, siempre que $(2n+1)n! > 2000$. Como $13 \times 6! = 9360$, $n = 6$ servirá. Así,

$$E(1) \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} \approx 0.747$$

redondeado a tres cifras decimales. ■

Formas indeterminadas

Los Ejemplos 1 y 2 de la Sección 4.9 mostraron cómo se pueden usar los polinomios de Maclaurin para calcular los límites de formas indeterminadas. Presentaremos aquí dos ejemplos más, esta vez utilizando directamente las series y calculando suficientes términos para que se cancelen los factores [0/0].

Ejemplo 3 Calcule (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ y (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x} - 1)\ln(1 + x^3)}{(1 - \cos 3x)^2}$.

Solución

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ $\quad\left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^5}{5!} + \cdots}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots \right) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

(b) $$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x} - 1) \ln(1 + x^3)}{(1 - \cos 3x)^2} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + (2x) + \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^3}{3!} + \cdots - 1\right)\left(x^3 - \dfrac{x^6}{2} + \cdots\right)}{\left(1 - \left(1 - \dfrac{(3x)^2}{2!} + \dfrac{(3x)^4}{4!} - \cdots\right)\right)^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x^4 + 2x^5 + \cdots}{\left(\dfrac{9}{2} x^2 - \dfrac{3^4}{4!} x^4 + \cdots\right)^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 + 2x + \cdots}{\left(\dfrac{9}{2} - \dfrac{3^4}{4!} x^2 + \cdots\right)^2} = \frac{2}{\left(\dfrac{9}{2}\right)^2} = \frac{8}{81}$$

Podemos comprobar que el segundo de estos ejemplos es mucho más difícil si se intenta resolver utilizando la Regla del l'Hôpital. ■

Ejercicios 9.7

1. Estime el error si se usa el polinomio de Maclaurin de grado 5 de $\operatorname{sen} x$ para aproximar $\operatorname{sen}(0.2)$.

2. Estime el error si se usa el polinomio de Taylor de grado 4 de $\ln x$ en potencias de $x - 2$ para aproximar $\ln(1.95)$.

Utilice las series de Taylor o de Maclaurin para calcular los valores de las funciones indicadas en los Ejercicios 3-14, con error menor que 5×10^{-5} en valor absoluto.

3. $e^{0.2}$ **4.** $1/e$

5. $e^{1.2}$ **6.** $\operatorname{sen}(0.1)$

7. $\cos 5^{\circ}$ **8.** $\ln(6/5)$

9. $\ln(0.9)$ **10.** $\operatorname{sen} 80^{\circ}$

11. $\cos 65^{\circ}$ **12.** $\tan^{-1} 0.2$

13. $\cosh(1)$ **14.** $\ln(3/2)$

Calcule la serie de Maclaurin de las funciones de los Ejercicios 15-19.

15. $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ **16.** $J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt$

17. $K(x) = \displaystyle\int_1^{1+x} \frac{\ln t}{t - 1}\, dt$

18. $L(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\, dt$

19. $M(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\tan^{-1} t^2}{t^2}\, dt$

20. Calcule $L(0.5)$ con una precisión de tres cifras decimales, siendo L la definida en el Ejercicio 18.

21. Calcule $I(1)$ con una precisión de tres cifras decimales, siendo I la definida en el Ejercicio 15.

Calcule los límites en los Ejercicios 22-27.

22. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{senh} x}$ **23.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{(1 - \cos x)^2}$

24. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1 + x^2)}$ **25.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 3x - 3 \operatorname{sen} 2x}{5x - \tan^{-1} 5x}$

26. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - x}{x(\cos(\operatorname{sen} x) - 1)}$ **27.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{\cosh x - \cos x}$

9.8 El teorema binomial y la serie binomial

Ejemplo 1 Utilice la Fórmula de Taylor para demostrar el Teorema Binomial: si n es un entero positivo, entonces

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \cdots + nax^{n-1} + x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}x^k$$

siendo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Solución Sea $f(x) = (a+x)^n$. Entonces,

$$f'(x) = n(a+x)^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!}(a+x)^{n-1}$$

$$f''(x) = \frac{n!}{(n-1)!}(n-1)(a+x)^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!}(a+x)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(a+x)^{n-k} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

En particular, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{0!}(a+x)^{n-n} = n!$, una constante, y así

$$f^{(k)}(x) = 0 \qquad \text{para todo } x, \text{ si } k > n$$

Para $0 \leqslant k \leqslant n$, tenemos que $f^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}a^{n-k}$. Así, por el Teorema de Taylor con resto de Lagrange, para algún valor s entre a y x,

$$(a+x)^n = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}x^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k}x^k + 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}x^k$$

Ésta es, de hecho, la *serie* de Maclaurin de $(a+x)^n$, no sólo el polinomio de Maclaurin de grado n. Como todos los términos de orden superior son cero, la serie tiene sólo un número finito de términos distintos de cero, y por tanto converge para todo x. ■

Observación Si $f(x) = (a+x)^r$, siendo $a > 0$ y r cualquier número real, entonces, cálculos similares a los realizados anteriormente permiten demostrar que el polinomio de Maclaurin de grado n de f es

$$P_n(x) = a^r + \sum_{k=1}^{n} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}a^{r-k}x^k$$

Sin embargo, si r no es un entero positivo, entonces no existirá ningún entero positivo n para el que el resto $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ sea cero y la correspondiente serie de Maclaurin no será un polinomio.

La serie binomial

Para simplificar el análisis de la función $(a + x)^r$ cuando r no es un entero positivo, tomaremos $a = 1$ y consideraremos entonces la función $(1 + x)^r$. Los resultados para el caso general se siguen de la identidad

$$(a + x)^r = a^r \left(1 + \frac{x}{a}\right)^r$$

válida para $a > 0$.

Si r es un número real cualquiera y $x > -1$, entonces la derivada k-ésima de $(1 + x)^r$ es

$$r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)(1+x)^{r-k}, \qquad (k = 1, 2, ...)$$

Así, la serie de Maclaurin de $(1 + x)^r$ es

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} x^k$$

que se denomina **serie binomial**. El teorema que sigue demuestra que la serie binomial converge, de hecho, a $(1 + x)^r$ si $|x| < 1$. Podríamos demostrarlo escribiendo la Fórmula de Taylor para $(1 + x)^r$ con $c = 0$, y demostrando que el resto $E_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ (necesitaríamos utilizar la forma integral del resto para demostrarlo para todo $|x| < 1$). Sin embargo, utilizaremos un método más fácil, similar al utilizado para las funciones exponencial y trigonométrica en la Sección 9.6.

TEOREMA 23 **La serie binomial**

Si $|x| < 1$, entonces

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!} x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

DEMOSTRACIÓN Si $|x| < 1$, entonces la serie

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n$$

converge por el test de la razón, ya que

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)(r-n)}{(n+1)!} x^{n+1}}{\dfrac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{r-n}{n+1} \right| |x| = |x| < 1$$

Nótese que $f(0) = 1$. Necesitamos demostrar que $f(x) = (1 + x)^r$ para $|x| < 1$.

Por el Teorema 19, podemos diferenciar la serie de $f(x)$ término a término en $|x| < 1$ para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n)}{n!} x^{n} \end{aligned}$$

Hemos sustituido n por $n+1$ para obtener la segunda versión de la suma a partir de la primera versión. Sumando la segunda versión a la primera multiplicada por x se obtiene

$$\begin{aligned} (1+x)f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n)}{n!} x^{n} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!} x^{n} \\ &= r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^{n} [(r-n)+n] \\ &= r f(x) \end{aligned}$$

La ecuación diferencial $(1+x)f'(x) = r f(x)$ implica que

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{(1+x)^r} = \frac{(1+x)^r f'(x) - r(1+x)^{r-1} f(x)}{(1+x)^{2r}} = 0$$

para todo x que cumpla $|x| < 1$. Por tanto, $f(x)/(1+x)^r$ es constante en ese intervalo, y como $f(0) = 1$, la constante debe ser 1. Así, $f(x) = (1+x)^r$.

Observación Para algunos valores de r la serie binomial puede converger en los extremos $x = 1$ o $x = -1$. Como se observó anteriormente, si r es un entero positivo, la serie tiene un número finito de términos distintos de cero, y por tanto converge para todo x.

Ejemplo 2 Calcule la serie de Maclaurin de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Solución En este caso $r = -(1/2)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\times 3}{2^2 2!}x^2 - \frac{1\times 3\times 5}{2^3 3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!} x^n \end{aligned}$$

Esta serie converge en $-1 < x \leqslant 1$ (utilice el test de la serie alternante para incorporar al extremo $x = 1$).

Ejemplo 3 Calcule la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen}^{-1} x$.

Solución Sustituimos x por $-t^2$ en la serie obtenida en el ejemplo anterior, con lo que resulta

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} t^{2n} \qquad (-1 < t < 1)$$

Integramos ahora en t desde 0 hasta x:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^{-1} x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} t^{2n}\right) dt \\
&= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1} \\
&= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

■

Ejercicios 9.8

Calcule las representaciones en serie de Maclaurin de las funciones de los Ejercicios 1-6. Utilice la serie binomial para calcular las respuestas.

1. $\sqrt{1+x}$ **2.** $x\sqrt{1-x}$

3. $\sqrt{4+x}$ **4.** $\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

5. $(1-x)^{-2}$ **6.** $(1+x)^{-3}$

*__7.__ **(Coeficientes binomiales)** Demuestre que los coeficientes binomiales

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

cumplen

(i) $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$ para todo n.

(ii) Si $0 \leqslant k \leqslant n$, entonces $\dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k} = \dbinom{n+1}{k}$.

Se deduce entonces que, dado un $n \geqslant 1$ fijo, los coeficientes binomiales

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

son los elementos de la fila n-ésima del **triángulo de Pascal** que se muestra a continuación, en el que cada elemento de valor >1 es la suma de las dos diagonales sobre él.

```
          1    1
        1    2    1
      1    3    3    1
    1    4    6    4    1
  1    5   10   10    5    1
```

*__8.__ **(Una demostración inductiva del Teorema Binomial)** Utilice inducción matemática y los resultados del Ejercicio 7 para demostrar el Teorema Binomial:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \\
&\quad + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n
\end{aligned}$$

*__9.__ **(Regla de Leibniz)** Utilice inducción matemática, la Regla del Producto, y el Ejercicio 7 para verificar la Regla de Leibniz para expresar la derivada n-ésima de un producto de dos funciones:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \\
&= f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)}g'' \\
&\quad + \binom{n}{3} f^{(n-3)}g^{(3)} + \cdots + fg^{(n)}
\end{aligned}$$

9.9 Series de Fourier

Como ya hemos visto, las representaciones de funciones mediante series de potencias hacen posible aproximar dichas funciones tan exactamente como deseemos en intervalos cercanos a un punto de particular interés, mediante la utilización de las sumas parciales de las series, es decir, de polinomios. Sin embargo, en muchas aplicaciones importantes de las matemáticas, las funciones que se deben utilizar son periódicas. Por ejemplo, una buena parte de la ingeniería eléctrica trata del análisis y el manejo de *formas de onda*, que son funciones periódicas del tiempo. Los polinomios no son funciones periódicas, y por esta razón, las series de potencias no se adaptan bien a la representación de esas funciones.

Para la representación de funciones periódicas en intervalos amplios son mucho más apropiadas ciertas series infinitas de funciones periódicas denominadas series de Fourier.

Funciones periódicas

Recordemos que una función f definida en la recta real es **periódica** de periodo T si

$$f(t+T) = f(t) \qquad \text{para todo } t \text{ real} \tag{*}$$

Esto implica que $f(t + mT) = f(t)$ para todo entero m, de forma que si T es un periodo de f, también lo es cualquier múltiplo mT de T. El mínimo número positivo T para el que se cumple (*) se denomina **periodo fundamental** o simplemente **periodo** de f.

La gráfica completa de una función de periodo T se puede obtener desplazando múltiplos enteros del periodo T la parte de la gráfica correspondiente a cualquier intervalo semiabierto de longitud T (por ejemplo, el intervalo $[0, T)$) a la izquierda o a la derecha. La Figura 9.6 muestra la gráfica de una función de periodo 2.

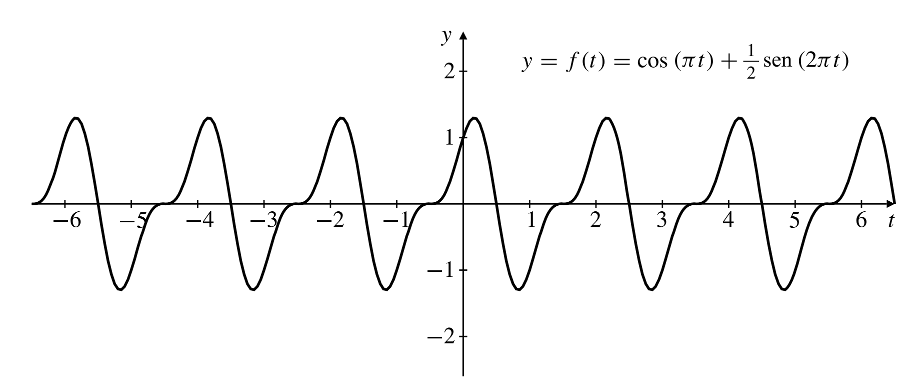


Figura 9.6 Esta función tiene periodo 2. Obsérvese cómo la gráfica repite la parte del intervalo [0, 2) una y otra vez a la izquierda y la derecha.

Ejemplo 1 Las funciones $g(t) = \cos(\pi t)$ y $h(t) = \text{sen}\,(\pi t)$ son periódicas del periodo 2:

$$g(t+2) = \cos(\pi t + 2\pi) = \cos(\pi t) = g(t)$$

La función $k(t) = \text{sen}\,(2\pi t)$ también tiene periodo 2, pero éste no es su periodo fundamental. Su periodo fundamental es 1:

$$k(t+1) = \text{sen}\,(2\pi t + 2\pi) = \text{sen}\,(2\pi t) = k(t)$$

El periodo de la suma $f(t) = g(t) + \frac{1}{2}k(t) = \cos(\pi t) + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2\pi t)$, que se representa en la Figura 9.6, es 2, el mínimo común múltiplo del periodo de sus dos términos. ■

Ejemplo 2 Para todo entero positivo n, las funciones

$$f_n(t) = \cos(n\omega t) \qquad \text{y} \qquad g_n(t) = \text{sen}\,(n\omega t)$$

tienen periodo fundamental $T = 2\pi/(n\omega)$. El conjunto de todas esas funciones, correspondientes a todos los enteros positivos n, tienen periodo común $T = 2\pi/\omega$, el periodo fundamental de f_1 y g_1. T es un múltiplo entero de los periodos fundamentales de las funciones f_n y g_n. Las series de Fourier tratan de expresar funciones generales de período T en forma de series cuyos términos son múltiplos reales de estas funciones. ■

Series de Fourier

Se puede demostrar (pero no lo haremos aquí) que si $f(t)$ es periódica de período fundamental T, es continua y tiene derivada continua por tramos en la recta real, entonces $f(t)$ se puede expresar en todas partes como la suma de una serie de la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)) \qquad (**)$$

que se denomina **serie de Fourier** de f, siendo $\omega = 2\pi/T$ y las secuencias $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ los **coeficientes de Fourier** de f. La determinación de los valores de estos coeficientes, dada una determinada función f, se realiza mediante las siguientes relaciones, válidas para enteros m y n, que se demuestran fácilmente utilizando las fórmulas de suma del seno y el coseno (*véanse* los Ejercicios 49-51 de la Sección 5.6).

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ T & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \operatorname{sen}(n\omega t)\,dt = 0$$

$$\int_0^T \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ T/2 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \operatorname{sen}(m\omega t)\operatorname{sen}(n\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ T/2 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(m\omega t)\operatorname{sen}(n\omega t)\,dt = 0$$

Si multiplicamos la ecuación (**) por $\cos(m\omega t)$ (o por $\operatorname{sen}(m\omega t)$), e integramos la ecuación resultante en el intervalo $[0, T]$ término a término, todos los términos de la derecha excepto el correspondiente a a_m (o b_m) serán 0 (la integración término a término requiere justificación, pero tampoco la daremos aquí). El resultado de la integración es

$$\int_0^T f(t)\cos(m\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\,T a_m$$

$$\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(m\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\,T b_m$$

Nótese que la primera de estas fórmulas es válida incluso para $m = 0$, porque hemos optado por denominar al término constante de la serie de Fourier $a_0/2$ en vez de a_0. Como todos los integrandos son periódicos de periodo T, las integrales se pueden realizar sobre cualquier intervalo

de longitud T; frecuentemente, es conveniente utilizar el intervalo $[-T/2, T/2]$ en vez de $[0, T]$. Los coeficientes de Fourier de f son, por tanto,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}\,(n\omega t)\,dt \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

siendo $\omega = 2\pi/T$.

■

Ejemplo 3 Calcule la serie de Fourier de la función en diente de sierra $f(t)$ de periodo 2π cuyos valores en el intervalo $[-\pi, \pi]$ son $f(t) = \pi - |t|$ (*véase* la Figura 9.7).

Solución En este caso, $T = 2\pi$ y $\omega = 2\pi/(2\pi) = 1$. Como $f(t)$ es una función par, $f(t)\,\mathrm{sen}\,(nt)$ es impar, por lo que todos los coeficientes del seno en la serie de Fourier b_n son cero:

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,(nt)\,dt = 0$$

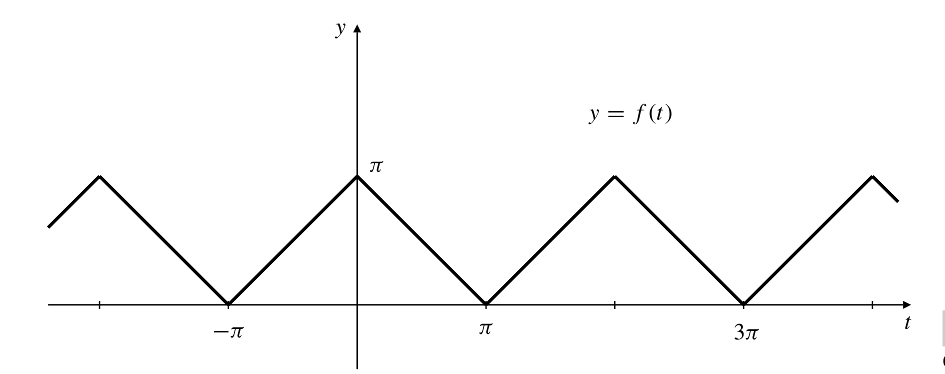


Figura 9.7 Una función en diente de sierra de periodo 2π.

Además, $f(t)\cos(nt)$ es una función par, por lo que

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{4}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$$

$$= \begin{cases} \pi & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \text{ y } n \text{ es par} \\ 4/(\pi n^2) & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

Como los enteros negativos impares n son de la forma $n = 2k - 1$, siendo k un entero positivo, la serie de Fourier de f se expresa como

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)t)$$

■

Convergencia de la serie de Fourier

Las sumas parciales de una serie de Fourier se denominan polinomios de Fourier porque se pueden expresar como polinomios en $\operatorname{sen}(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$, aunque realmente no intentaremos expresarlos de esa forma. El polinomio de Fourier de orden m de la función periódica f de periodo T es

$$f_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t))$$

siendo $\omega = 2\pi/T$, y con los coeficientes $a_n (0 \leqslant n \leqslant m)$ y $b_n (1 \leqslant n \leqslant m)$ expresados por las fórmulas integrales desarrolladas anteriormente.

Ejemplo 4 El polinomio de Fourier de orden 3 de la función en diente de sierra del Ejemplo 3 es

$$f_3(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos t + \frac{4}{9\pi}\cos(3t)$$

La Figura 9.8 muestra la gráfica de esta función. Obsérvese que parece una aproximación razonable a la gráfica de f de la Figura 9.7 pero, como es una suma finita de funciones diferenciables, $f_3(t)$ es también diferenciable en todas partes, incluso en los múltiplos enteros de π donde f no es diferenciable.

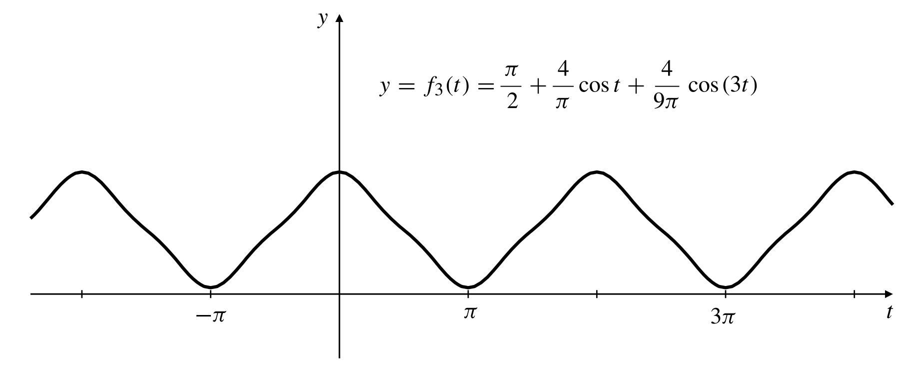


Figura 9.8 Aproximación mediante el polinomio de Fourier $f_3(t)$ de la función en diente de sierra del Ejemplo 3.

Como se dijo anteriormente, la serie de Fourier de una función $f(t)$ periódica, continua y con derivada continua por tramos en la recta real converge a $f(t)$ en todo número real t. Sin embargo, los coeficientes de Fourier (y, por tanto, la serie de Fourier) se pueden calcular también (utilizando las fórmulas dadas anteriormente) para funciones periódicas con derivadas continuas por tramos, incluso si las funciones en sí no son continuas, sino sólo continuas por tramos.

Recuérdese que $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo $[a, b]$, si existe una partición $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b\}$ de $[a, b]$ y funciones $F_1, F_2, \ldots, F_k$ tales que

(i) F_i es continua en $[x_{i-1}, x_i]$.
(ii) $f(t) = F_i(t)$ en (x_{i-1}, x_i).

La integral de una función f de este tipo es la suma de las integrales de las funciones F_i:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F_i(t)\,dt$$

Como $f(t)\cos(n\omega t)$ y $f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)$ son continuas por tramos si lo es f, los coeficientes de Fourier de una función periódica continua por tramos se pueden calcular utilizando las mismas fórmulas que para una función periódica continua. La cuestión de dónde y a qué converge la serie de Fourier en este caso se responde mediante el siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en libros de texto sobre análisis de Fourier.

TEOREMA 24 La serie de Fourier de una función f periódica y continua por tramos con derivada continua por tramos converge a dicha función en todo punto t donde f sea continua. Además, si f es discontinua en $t = c$, entonces tiene límites por la derecha y por la izquierda diferentes, pero finitos, en c:

$$\lim_{t\to c-} f(t) = f(c-) \quad \text{y} \quad \lim_{t\to c+} f(t) = f(c+)$$

La serie de Fourier de f converge en $t = c$ al promedio de esos límites por la izquierda y por la derecha:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega c) + b_n \operatorname{sen}(n\omega c)) = \frac{f(c-) + f(c+)}{2}$$

siendo $\omega = 2\pi/T$.

Ejemplo 5 Calcule la serie de Fourier de la función periódica f de periodo 2 que cumple

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

¿Dónde no es f continua? ¿A qué converge la serie de Fourier de f en esos puntos?

Solución En este caso, $T = 2$ y $\omega = 2\pi/2 = \pi$. Como f es una función impar, los coeficientes de los cosenos son todos cero:

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)\,dt = 0 \qquad \text{(El integrando es impar).}$$

La misma simetría implica que

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^{1} f(t)\operatorname{sen}(n\pi t)\,dt \\ &= 2\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi t)\,dt = -\left.\frac{2\cos(n\pi t)}{n\pi}\right|_0^1 \\ &= -\frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 4/(n\pi) & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

Los enteros impares n son de la forma $n = 2k - 1$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Por tanto, la serie de Fourier de f es

$$\begin{aligned} &\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\operatorname{sen}((2k-1)\pi t) \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}(\pi t) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3\pi t) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(5\pi t) + \cdots\right) \end{aligned}$$

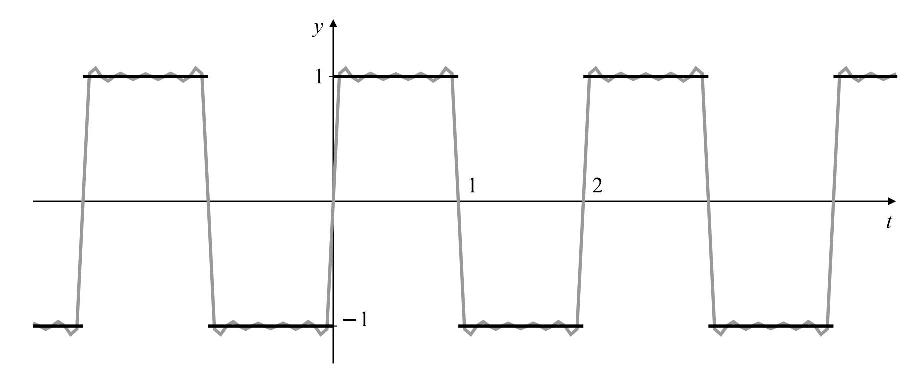


Figura 9.9 La función continua por tramos f (en negro) del Ejemplo 5 y su polinomio de Fourier f_{15} (en gris)

$$f_{15}(t) = \sum_{k=1}^{8} \frac{4\operatorname{sen}((2k-1)\pi t)}{(2k-1)\pi}.$$

Nótese que f es continua excepto en los puntos donde t es entero. En cada uno de esos puntos f salta de -1 a 1 o de 1 a -1, por lo que el promedio de los límites por la izquierda y la derecha de f en esos puntos es 0. Obsérvese que la suma de la serie de Fourier es 0 en valores enteros de t, de acuerdo con el Teorema 24. *Véase* la Figua 9.9.

Serie de Fourier en cosenos y senos

Como se ha observado en los Ejemplos 3 y 5, las funciones pares no tienen términos en seno en su serie de Fourier, y las funciones impares no tienen términos en coseno (incluyendo el término constante $a_0/2$). Muchas veces es necesario en las aplicaciones calcular una representación en serie de Fourier de una función dada, definida en un intervalo finito $[0, a]$ que no tenga términos en seno (una **serie de Fourier en cosenos**) o que no tenga términos en coseno (una **serie de Fourier en senos**). Esto se puede realizar ampliando el dominio de f al intervalo $[-a, 0]$, haciendo que f sea par o impar en $[-a, a]$.

$$f(-t) = f(t) \text{ si } -a \leqslant t < 0 \text{ para la extensión par}$$

$$f(-t) = -f(t) \text{ si } -a \leqslant t < 0 \text{ para la extensión impar}$$

y calculando después su serie de Fourier considerando la función f extendida de periodo $2a$ (si quisiéramos la extensión impar, habría que redefinir $f(0)$ con valor 0).

Ejemplo 6 Calcule la serie de Fourier en cosenos de $g(t) = \pi - t$, definida en $[0, \pi]$.

Solución La extensión par de $g(t)$ a $[-\pi, \pi]$ es la función f del Ejemplo 3. Por tanto, la serie de Fourier en cosenos de g es

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)t)$$

Ejemplo 7 Calcule la serie de Fourier en senos de $h(t) = 1$, definida en $[0, 1]$.

Solución Si definimos $h(0) = 0$, entonces la extensión impar de h al intervalo $[-1, 1]$ coincide con la función $f(t)$ del Ejemplo 5, con la salvedad de que la última función está indefinida en $t = 0$. La serie de Fourier en senos de h es la obtenida en el Ejemplo 5, concretamente,

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen}((2k-1)\pi t)$$

Observación Las series de Fourier en senos y cosenos se tratarán desde una perspectiva diferente en la Sección 13.4.

Ejercicios 9.9

En los Ejercicios 1-4, ¿cuál es el periodo fundamental de las funciones dadas?

1. $f(t) = \operatorname{sen}(3t)$

2. $g(t) = \cos(3 + \pi t)$

3. $h(t) = \cos^2 t$

4. $k(t) = \operatorname{sen}(2t) + \cos(3t)$

En los Ejercicios 5-8, calcule las series de Fourier de las funciones dadas.

5. $f(t) = t, \ -\pi < t \leqslant \pi$, f tiene periodo 2π.

6. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \end{cases}$ f tiene periodo 2

7. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leqslant t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \end{cases}$ f tiene periodo 2

8. $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ 3 - t & \text{si } 2 \leqslant t < 3 \end{cases}$ f tiene periodo 3

9. ¿Cuál es la serie de Fourier en cosenos de la función $h(t)$ del Ejemplo 7?

10. Calcule la serie de Fourier en senos de la función $g(t)$ del Ejemplo 6.

11. Calcule la serie de Fourier en senos de $f(t) = t$ en el intervalo [0, 1].

12. Calcule la serie de Fourier en cosenos de $f(t) = t$ en el intervalo [0, 1].

13. Utilice el resultado del Ejemplo 3 para calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

14. Verifique que si f es una función periódica par de periodo T, entonces los coeficientes de seno de Fourier b_n de f son todos cero y los coeficientes de coseno de Fourier a_n de f se expresan como

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

siendo $\omega = 2\pi/T$. Enuncie y verifique el correspondiente resultado para funciones f impares.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **Indique lo que significa decir que la secuencia $\{a_n\}$:**
  - ◇ Está acotada superiormente.
  - ◇ Es alternante.
  - ◇ Converge.
  - ◇ Es definitivamente positiva.
  - ◇ Es creciente.
  - ◇ Diverge a infinito.
- **Indique lo que significa decir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:**
  - ◇ Converge.
  - ◇ Es geométrica.
  - ◇ Es una serie p.
  - ◇ Converge absolutamente.
  - ◇ Diverge.
  - ◇ Es telescópica.
  - ◇ Es positiva.
  - ◇ Converge condicionalmente.
- **Defina los siguientes tests de convergencia de series.**
  - ◇ Test de la integral
  - ◇ Test de comparación en el límite
  - ◇ Test de la serie alternante
  - ◇ Test de la comparación
  - ◇ Test de la razón
- **¿Cómo se pueden calcular cotas de la cola de una serie?**
- **¿Cuál es una cota de la cola de una serie alternante?**
- **¿Qué significan las siguientes expresiones?**
  - ◇ Serie de potencias
  - ◇ Radio de convergencia
  - ◇ Serie de Taylor
  - ◇ Polinomio de Taylor
  - ◇ Función analítica
  - ◇ Intervalo de convergencia
  - ◇ Centro de convergencia
  - ◇ Serie de Maclaurin
  - ◇ Serie binomial
- **¿Dónde es diferenciable la suma de una serie de potencias?**
- **¿Dónde converge la integral de una serie de potencias?**
- **¿Dónde es continua la suma de una serie de potencias?**
- **Defina el Teorema de Taylor con resto de Lagrange.**
- **Defina el Teorema de Taylor con resto integral.**
- **¿Qué es el Teorema Binomial?**
- **¿Qué es una serie de Fourier?**
- **¿Qué es una serie de Fourier en cosenos? ¿Y en senos?**

Ejercicios de repaso

En los Ejercicios 1-4, determine si las secuencias dadas convergen y calcule su límite en caso de que converjan.

1. $\left\{\frac{(-1)^n e^n}{n!}\right\}$ **2.** $\left\{\frac{n^{100} + 2^n \pi}{2^n}\right\}$

3. $\left\{\frac{\ln n}{\tan^{-1} n}\right\}$ **4.** $\left\{\frac{(-1)^n n^2}{\pi n(n - \pi)}\right\}$

5. Sea $a_1 > \sqrt{2}$, y sea

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Demuestre que $\{a_n\}$ es decreciente y que $a_n > \sqrt{2}$ para $n \geqslant 1$. ¿Por qué debe converger $\{a_n\}$? Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

6. Calcule el límite de la secuencia $\{\ln\ln(n+1) - \ln\ln n\}$.

Calcule las sumas de las series de los Ejercicios 7-10.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n-5)/2}$ **8.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{(\pi - 1)^{2n}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$ **10.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{9}{4}}$

Determine si las series de los Ejercicios 11-16 convergen o divergen. Justifique sus respuestas.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n^3}$ **12.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n}{1 + 3^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1 + n)(1 + n\sqrt{n})}$ **14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1 + 2^n)(1 + n\sqrt{n})}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{n!}$ **16.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n + 2)! + 1}$

Indique si las series de los Ejercicios 17-20 convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1 + n^3}$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n - n}$

18. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln\ln n}$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos(n\pi)}{1 + n^3}$

¿Para qué valores de x convergen absolutamente las series de los Ejercicios 21-22? ¿Para qué valores convergen condicionalmente? ¿Para qué valores divergen?

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 2)^n}{3^n \sqrt{n}}$ **22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 - 2x)^n}{n}$

Determine las sumas de las series de los Ejercicios 23 y 24 con una precisión de 0.001.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ **24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 + n^2}$

En los Ejercicios 25-32, calcule las series de Maclaurin de las funciones dadas. Indique en dónde converge cada serie a la función.

25. $\frac{1}{3 - x}$ **26.** $\frac{x}{3 - x^2}$

27. $\ln(e + x^2)$ **28.** $\frac{1 - e^{-2x}}{x}$

29. $x\cos^2 x$ **30.** $\operatorname{sen}(x + (\pi/3))$

31. $(8 + x)^{-1/3}$ **32.** $(1 + x)^{1/3}$

Calcule las series de Taylor de las funciones de los Ejercicios 33 y 34, alrededor de los puntos indicados $x = c$.

33. $1/x$, $c = \pi$ **34.** $\operatorname{sen} x + \cos x$, $c = \pi/4$

Calcule el polinomio de Maclaurin del grado indicado de las funciones en los Ejercicios 35-38.

35. $e^{x^2 + 2x}$, grado 3 **36.** $\operatorname{sen}(1 + x)$, grado 3

37. $\cos(\operatorname{sen} x)$, grado 4 **38.** $\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}$, grado 4

39. Indique qué función tiene como serie de Maclaurin la siguiente:

$$1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$$

40. Una función $f(x)$ tiene como serie de Maclaurin

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$$

Calcule $f^{(k)}(0)$ para todos los enteros positivos k.

Calcule las sumas de las series de los Ejercicios 41-44.

41. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 1}{\pi^n}$ ***42.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\pi^n}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n}$ ***44.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-4}}{(2n - 1)!}$

45. Si $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, calcule $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 3S(x)}{x^7}$.

46. Utilice series para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{(x - \tan^{-1} x)(e^{2x} - 1)}{2x^2 - 1 + \cos(2x)}$.

47. ¿Cuántos términos distintos de cero en la serie de Maclaurin de e^{-x^4} son necesarios para calcular $\int_0^{1/2} e^{-x^4}\,dx$ con una precisión de 5 cifras decimales? Calcule la integral con esa precisión.

48. Estime el tamaño del error si se utiliza el polinomio de Taylor de grado 4 alrededor de $x = \pi/2$ de la función $f(x) = \ln \operatorname{sen} x$ para aproximar $\ln \operatorname{sen}(1.5)$.

49. Calcule la serie de Fourier en senos de $f(t) = \pi - t$ en $[0, \pi]$.

50. Calcule la serie de Fourier de $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\pi < t \leqslant 0 \\ t & \text{si} \quad 0 < t \leqslant \pi \end{cases}$.

Problemas avanzados

1. **(Un refinamiento del test de la razón)** Sea $a_n > 0$ y $a_{n+1}/a_n \geqslant n/n + 1$ para todo n. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. *Sugerencia*: $a_n \geqslant K/n$ para alguna constante K.

$*$**2.** **(Suma por partes)** Sean $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ dos secuencias, y sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

(a) Demuestre que $\sum_{k=1}^{n} u_k v_k =$ $= u_{n+1}s_n + \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1})s_k$. (*Sugerencia*: Escriba $v_n = s_n - s_{n-1}$, con $s_0 = 0$, y reordene la suma).

(b) Si $\{u_n\}$ es positiva, decreciente y converge a 0, y si $\{v_n\}$ tiene sumas parciales acotadas, $|s_n| \leqslant K$, para todo n, siendo K una constante, demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ converge. (*Sugerencia*: Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})s_n$ converge, comparándola con la serie telescópica $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$.)

$*$**3.** Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \operatorname{sen}(nx)$ converge para todo x. *Sugerencia*: Si x es un entero múltiplo de π, todos los términos de la serie son 0, por lo que no hay nada que demostrar. Si no, $\operatorname{sen}(x/2) \neq 0$. En este caso demuestre que

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen}(nx) = \frac{\cos(x/2) - \cos((N + 1/2)x)}{2 \operatorname{sen}(x/2)}$$

utilizando la relación

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

para convertir la suma en telescópica. Aplique después el resultado del Problema 2(b) con $u_n = 1/n$ y $v_n = \operatorname{sen}(nx)$.

4. Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots$ los enteros positivos que no contienen el dígito 0 en sus representaciones decimales. Es decir, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_9 = 9$, $a_{10} = 11$, ..., $a_{18} = 19$, $a_{19} = 21$, ..., $a_{90} = 99$, $a_{91} = 111$, etc. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge y que su suma es menor que 90. (*Sugerencia*: ¿Cuántos de estos enteros tienen m dígitos? Un término $1/a_n$ donde a_n tiene m dígitos, es menor que 10^{-m+1}).

$*$**5.** **(Uso de una integral para mejorar la convergencia)** Recuerde la fórmula del error de la Regla del Punto Medio, de acuerdo con la cual

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} f(x)\,dx - f(k) = \frac{f''(c)}{24}$$

siendo $k - (1/2) \leqslant c \leqslant k + (1/2)$.

(a) Si $f''(x)$ es una función decreciente de x, demuestre que

$$f'(k + \tfrac{3}{2}) - f'(k + \tfrac{1}{2}) \leqslant f''(c) \leqslant f'(k - \tfrac{1}{2}) - f'(k - \tfrac{3}{2})$$

(b) Si (i) $f''(x)$ es una función decreciente de x, (ii) $\int_{N+1/2}^{\infty} f(x)\,dx$ converge y (iii) $f'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, demuestre que

$$\frac{f'(N - \frac{1}{2})}{24} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) - \int_{N+1/2}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{f'(N + \frac{3}{2})}{24}$$

(c) Utilice el resultado del apartado (b) para aproximar $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ con una precisión de 0.001.

$*$**6.** **(El número *e* es irracional)** Partiendo de $e =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$:

(a) Utilice la técnica del Ejemplo 7 de la Sección 9.3 para demostrar que para todo $n > 0$,

$$0 < e - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} < \frac{1}{n!n}$$

Nótese que aquí la suma tiene $n + 1$ términos, no n términos.

(b) Suponga que e es un número racional, por ejemplo $e = M/N$, para ciertos enteros positivos M y N. Demuestre que $N!\,(e - \sum_{j=0}^{N} (1/j!))$ es un entero.

(c) Combine los apartados (a) y (b) para demostrar que hay un entero entre 0 y $1/N$. ¿Por qué no es esto posible? Concluya que e no puede ser un número racional.

7. Sea

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$
$$= x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3 \times 5}x^5 + \frac{8}{3 \times 5 \times 7}x^7 + \cdots$$

(a) Calcule el radio de convergencia de esta serie de potencias.

(b) Demuestre que $f'(x) = 1 + 2x f(x)$.

(c) ¿Qué es $\frac{d}{dx}(e^{-x^2} f(x))$?

(d) Exprese $f(x)$ por medio de una integral.

$*$**8.** **(El número π es irracional)** El Problema 6 anterior indica cómo demostrar que e es irracional, asumiendo lo contrario y llegando a una contradicción. En este problema se demuestra que π es también irracional. La demostración π se hace de nuevo por reducción al absurdo, pero es algo más complicada, por lo que la dividiremos en varias partes.

(a) Sea $f(x)$ un polinomio, y sea

$$g(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \cdots$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j f^{(2j)}(x)$$

Como f es un polinomio, todos los términos de la suma anterior excepto un número finito de ellos serán cero, por lo que no hay problemas de convergencia. Verifique que

$$\frac{d}{dx}(g'(x)\operatorname{sen}x - g(x)\cos x) = f(x)\operatorname{sen}x$$

y a partir de aquí que

$$\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}x\,dx = g(\pi)+g(0)$$

(b) Suponga que π es racional, es decir, $\pi = m/n$, siendo m y n enteros positivos. Se demostrará que esto conduce una contradicción y, por tanto, no puede ser cierto. Escoja un entero positivo k tal que $(\pi m)^k/k! < 1/2$ (¿por qué es esto posible?). Considere el polinomio

$$f(x) = \frac{x^k(m-nx)^k}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} m^{k-j}(-n)^j x^{j+k}$$

Demuestre que $0 < f(x) < 1/2$ para $0 < x < \pi$, y a partir de aquí, que $0 < \int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}x\,dx < 1$. Así, $0 < g(\pi) + g(0) < 1$, donde $g(x)$ está definida como en el apartado (a).

(c) Demuestre que la derivada i-ésima de $f(x)$ se expresa como

$$f^{(i)}(x) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} m^{k-j}(-n)^j \frac{(j+k)!}{(j+k-i)!}x^{j+k-i}$$

(d) Demuestre que $f^{(i)}(0)$ es un entero para $i=0, 1, 2, ...$ (*Sugerencia*: Observe, para $i < k$, que $f^{(i)}(0) = 0$ y, para $i > 2k$, que $f^{(i)}(x) = 0$ para todo x. Para $k \leqslant i \leqslant 2k$, demuestre que sólo un término de la suma de $f^{(i)}(0)$ es distinto de 0, y que este término es un entero. Necesitará utilizar el hecho de que los coeficientes binomiales $\binom{k}{j}$ son enteros).

(e) Demuestre que $f(\pi - x) = f(x)$ para todo x, y a partir de aquí, que $f^{(i)}(\pi)$ es también un entero para todo $i = 0, 1, 2, ...$ Por tanto, si $g(x)$ se define como en el apartado (a), entonces $g(\pi) + g(0)$ es un entero. Esto contradice la conclusión del apartado (b) y demuestra que π no puede ser racional.

$*$**9. (Una serie asintótica)** Aplique integración por partes para demostrar que

$$\int_0^x e^{-1/t}dt = e^{-1/x}\sum_{n=2}^{N}(-1)^n(n-1)!x^n + (-1)^{N+1}N!\int_0^x t^{N-1}e^{-1/t}dt$$

¿Por qué no se puede utilizar simplemente una serie de Maclaurin para aproximar este integral? Utilizando $N = 5$, calcule un valor aproximado de $\int_0^{0.1} e^{-1/t}dt$ y estime el error. Estime el error para $N = 10$ y $N = 20$.

Nótese que la serie $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)!x^n$ **diverge** para todo $x \neq 0$. Esto es un ejemplo de lo que se denomina **serie asintótica**. Aunque diverge, una buena selección de las sumas parciales permite obtener una buena aproximación a la función cuando x es pequeña.





CAPÍTULO 10

Vectores y geometría de coordenadas en el espacio tridimensional

Lord Ronald no dijo nada; salió de la habitación, se abalanzó sobre su caballo y galopó alocadamente en todas las direcciones...

¿Y quién es este alto joven que se acerca a Gertrude con cada movimiento del caballo?...

Los dos estaban destinados a conocerse. Se acercaban más y más. Y todavía más. Entonces se encontraron por un breve instante. Gertrude levantó la cabeza y se dirigió hacia los ojos del joven noble con una gran intensidad en su expresión, mientras Lord Ronald se dirigía hacia el ocupante del carruaje con la mirada tan fija que nada excepto una gacela, o un conducto de gas, podría haber igualado su intensidad.

Stephen Leacock (1869-1944)
de *Gertrude the Governess: or, Simple Seventeen*

Introducción Un programa completo de cálculo de variable real comprende el estudio de

(i) Funciones reales de una sola variable real.
(ii) Funciones vectoriales de una sola variable real.
(iii) Funciones reales de una variable real vectorial.
(iv) Funciones vectoriales de una variable real vectorial.

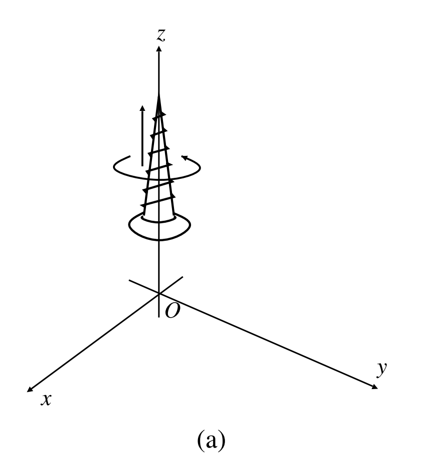
Los Capítulos 1-9 se han ocupado del punto (i). Los restantes capítulos considerarán los puntos (ii), (iii) y (iv). Concretamente, el Capítulo 11 estudiarán las funciones vectoriales de una sola variable real. Los Capítulos 12-14 se ocuparán de la diferenciación e integración de funciones reales de varias variables reales, es decir, de una variable real vectorial. Los Capítulos 15 y 16 presentarán aspectos del cálculo con funciones cuyos dominios y rangos tienen una dimensión mayor que uno, es decir, funciones vectoriales de una variable real vectorial. La mayor parte del tiempo limitaremos nuestra atención a funciones vectoriales con dominios y rangos en el plano o en el espacio tridimensional.

En este capítulo presentaremos las bases del cálculo multivariable y vectorial ampliando los conceptos de geometría analítica a tres o más dimensiones y presentando a los vectores como una forma adecuada para tratar a varias variables como una sola entidad. También presentaremos las matrices, ya que tienen utilidad para formular algunos conceptos de cálculo. No obstante, este capítulo no pretende ser un curso de álgebra lineal. Sólo desarrollaremos los aspectos que sean de utilidad en capítulos posteriores y omitiremos las demostraciones.

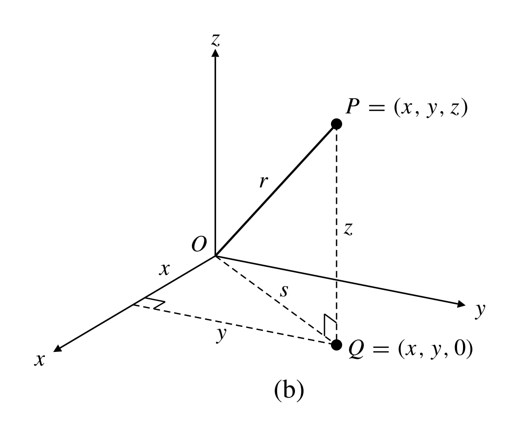
10.1 Geometría analítica en tres dimensiones

Decimos que el mudo físico en el que vivimos es tridimensional porque por cualquier punto sólo pueden pasar tres rectas **mutuamente perpendiculares**, y no más, de forma que cada una de ellas sea perpendicular a las otras dos. Esto equivale al hecho de que se requieren tres números para localizar un punto en el espacio con respecto a un punto de referencia (el **origen**). Una forma de usar tres números para localizar un punto es hacer que representen las distancias (con signo) desde el origen, medidas en la dirección de tres rectas mutuamente perpendiculares que pasen por dicho origen. Esas rectas se denominan sistema de coordenadas cartesianas, y cada una de las rectas se denomina eje coordenado. Dichos ejes se denominan generalmente eje x, eje y y eje z, con los ejes x e y en un plano horizontal y el eje z vertical. Además, el sistema de coordenadas debe estar **orientado a la derecha**. Esto significa que los dedos pulgar, índice y corazón de la mano derecha extendidos deben apuntar, respectivamente, en las direcciones positivas de los ejes x, y y z. Para quienes están acostumbrados a razonamientos mecánicos, un tornillo derecho avanzará en la dirección del eje z si se rota en la dirección que va del eje x positivo al eje y positivo (*véase* la Figura 10.1(a)).

Con respecto a un sistema cartesiano como éste, las **coordenadas** de un punto P en el espacio tridimensional son una tripleta ordenada de números reales (x, y, z). Los números x. y y z son, respectivamente, las distancias con signo de P hasta el origen, medidas en las direcciones de los ejes x, y y z (*véase* la Figura 10.1(b)).



(a)



(b)

Figura 10.1
(a) El tornillo se mueve hacia arriba cuando se gira en sentido contrario al de las agujas del reloj visto desde arriba.
(b) Las tres coordenadas de un punto en el espacio tridimensional.

Sea Q el punto de coordenadas $(x, y, 0)$. Entonces, Q está en el plano xy (el plano que contiene a los ejes x e y), directamente por debajo (o por encima) de P. Se dice que Q es la proyección vertical de P en el plano xy. Si r es la distancia desde el origen O hasta P y s es la distancia desde O a Q, entonces, utilizando dos triángulos rectángulos, tenemos que

$$s^2 = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad r^2 = s^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Por tanto, la distancia desde P al origen se expresa como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

De forma similar, la distancia r entre los puntos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ (*véase* la Figura 10.2) es

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

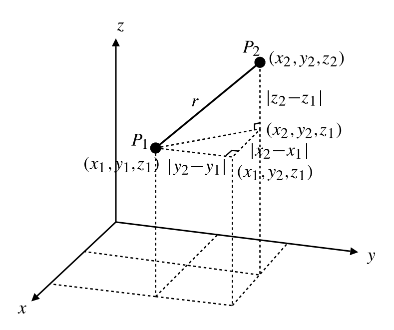


Figura 10.2

Ejemplo 1 Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $A = (1, -1, 2)$, $B = (3, 3, 8)$ y $C = (2, 0, 1)$ tiene un ángulo recto.

Solución Calculamos las longitudes de los tres lados del triángulo:

$$a = |BC| = \sqrt{(2-3)^2 + (0-3)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{59}$$
$$b = |AC| = \sqrt{(2-1)^2 + (0+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{3}$$
$$c = |AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{56}$$

Por el teorema del coseno, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. En este caso, $a^2 = 59 = 3 + 56 = b^2 + c^2$, por lo que $2bc\cos A$ debe ser 0. Por tanto, $\cos A = 0$ y $A = 90^{\circ}$.

De la misma forma que los ejes x e y dividen al plano xy en cuatro cuadrantes, también los tres **planos coordenados** en el espacio tridimensional (el plano xy, el plano xz y el plano yz) dividen el espacio tridimensional en ocho **octantes**. Denominaremos **primer octante** aquel en el que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ y $z \geqslant 0$. Al dibujar gráficas en el espacio tridimensional a veces es más fácil dibujar sólo la parte que está en el primer octante (*véase* la Figura 10.3).

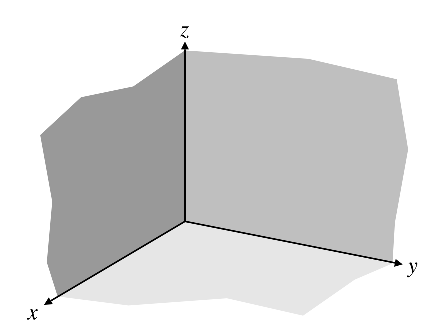


Figura 10.3 El primer octante.

Una ecuación o inecuación en la que intervienen las variables x, y y z define un conjunto de puntos en el espacio tridimensional cuyas coordenadas satisfacen la ecuación o inecuación. Una sola ecuación en general representa una superficie (un objeto bidimensional) en el espacio tridimensional.

Ejemplo 2 **(Algunas ecuaciones y las superficies que representan)**

(a) La ecuación $z = 0$ representa a todos los puntos de coordenadas $(x, y, 0)$, es decir, el plano xy. La ecuación $z = -2$ representa a todos los puntos de coordenadas $(x, y, -2)$, es decir, el plano horizontal que pasa por el punto $(0, 0, -2)$ en el eje z.

(b) La ecuación $x = y$ representa a todos los puntos de coordenadas (x, x, z). Se trata de un plano vertical que contiene a la recta de ecuación $x = y$ en el plano xy. El plano contiene también al eje z (*véase* la Figura 10.4).

(c) La ecuación $x + y + z = 1$ representa a todos los puntos tales que la suma de sus coordenadas es 1. Este conjunto es un plano que pasa por los puntos (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1). Esos puntos no son colineales (es decir, no están en la misma línea recta), por lo que sólo hay un plano que pase por los tres (*véase* la Figura 10.5). La ecuación $x + y + z = 0$ representa un plano paralelo al de la ecuación $x + y + z = 1$ pero que pasa por el origen.

(d) La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ representa a todos los puntos del cilindro circular vertical que contiene a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy. Este cilindro tiene radio 2 y su eje es el eje z (*véase* la Figura 10.6).

(e) La ecuación $z = x^2$ representa a todos los puntos cuyas coordenadas son (x, y, x^2). Esta superficie es un cilindro parabólico tangente al plano xy en el eje y (*véase* la Figura 10.7).

(f) La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ representa a todos los puntos que están a una distancia 5 del origen. Este conjunto de puntos forma una *esfera* de radio 5 centrada en el origen.

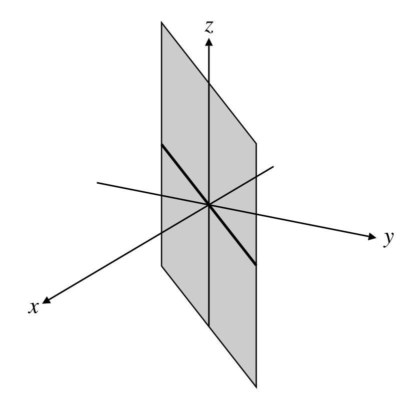


Figura 10.4 La ecuación $x = y$ define un plano vertical.

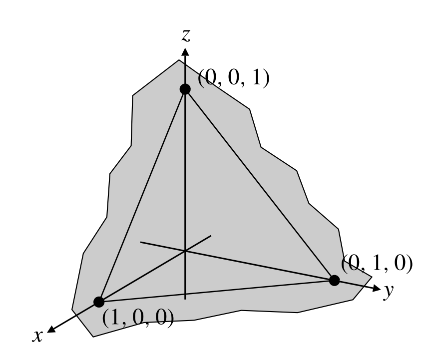


Figura 10.5 El plano de ecuación $x + y + z = 1$.

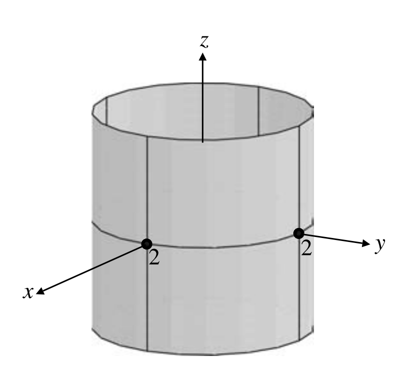


Figura 10.6 El cilindro circular de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

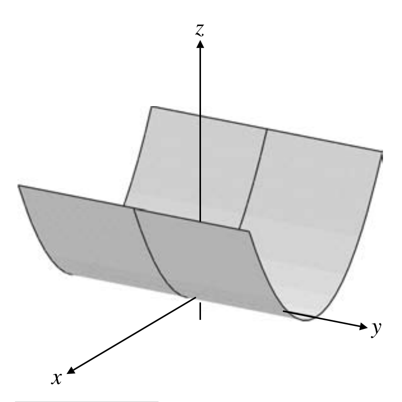


Figura 10.7 El cilindro parabólico de ecuación $z = x^2$.

■

Obsérvese que las ecuaciones en x, y y z no necesitan que estén presentes las tres variables explícitamente. Cuando una de las variables no está en la ecuación, dicha ecuación representa una superficie *paralela* al eje de la variable que falta. Esa superficie puede ser un plano o un cilindro. Por ejemplo, si en una ecuación falta la variable z, dicha ecuación representa en el espacio tridimensional a una superficie vertical (es decir, paralela al eje z) que contiene a la curva con la misma ecuación en el plano xy.

A veces, puede ocurrir que una sola ecuación no represente a un objeto bidimensional (una superficie). Puede representar a un objeto unidimensional (una recta o curva), a un objeto sin dimensiones (uno o más puntos), o incluso a nada en absoluto.

Ejemplo 3 Identifique las gráficas de las ecuaciones: (a) $y^2 + (z-1)^2 = 4$, (b) $y^2 + (z-1)^2 = 0$, (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ y (d) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$.

Solución

(a) Como falta la variable x, la ecuación $y^2 + (z-1)^2 = 4$ representa un objeto paralelo al eje x. En el plano yz, la ecuación representa una circunferencia de radio 2 centrada en el punto $(y, z) = (0, 1)$. En el espacio tridimensional representa un cilindro circular horizontal, paralelo al eje x, cuyo eje está una unidad por encima de dicho eje x (*véase* la Figura 10.8).

(b) Como los cuadrados no pueden ser negativos, la ecuación $y^2 + (z-1)^2 = 0$ implica que $y = 0$ y $z = 1$, por lo que representa a los puntos $(x, 0, 1)$. Todos estos puntos están en una recta paralela al eje x y una unidad por encima de dicho eje (*véase* la Figura 10.8).

(c) Como en el apartado (b), $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ implica que $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. La ecuación representa a un único punto, el origen.

(d) La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ no se cumple para ningún número real x, y y z, por lo que no representa a ningún punto en absoluto.

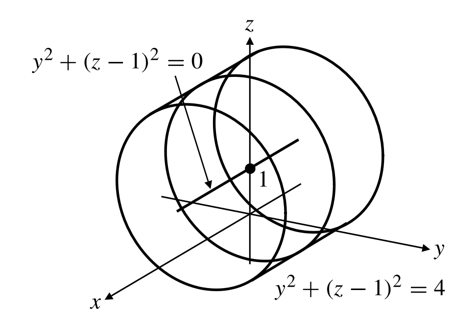


Figura 10.8 El cilindro $y^2 + (z-1)^2 = 4$ y su línea axial $y^2 + (z-1)^2 = 0$.

Una sola inecuación en x, y y z representa generalmente a un conjunto de puntos que están a un lado de la superficie representada por la correspondiente ecuación (junto con los puntos en dicha superficie si la inecuación no es estricta).

Ejemplo 4

(a) La inecuación $z > 0$ representa a todos los puntos que están por encima del plano xy.

(b) La inecuación $x^2 + y^2 \geqslant 4$ dice que el cuadrado de la distancia desde (x, y, z) hasta el punto más cercano $(0, 0, z)$ en el eje z es como mínimo 4. Esta inecuación representa a todos los puntos que están sobre el cilindro del Ejemplo 2(d) o fuera de él.

(c) La inecuación $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25$ expresa que el cuadrado de la distancia desde (x, y, z) al origen no es mayor de 25. Representa una bola sólida de radio 5 centrada en el origen, formada por todos los puntos que están en el interior o en la esfera del Ejemplo 2(f).

Dos ecuaciones en x, y y z representan normalmente a un objeto unidimensional, la recta o curva intersección de las dos superficies representadas por las dos ecuaciones. Todo punto cuyas coordenadas cumplan las dos ecuaciones debe estar en las dos superficies, y por tanto pertenecer a su intersección.

Ejemplo 5 ¿A qué conjuntos de puntos del espacio tridimensional representan las siguientes parejas de ecuaciones?

(a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Solución

(a) La ecuación $x + y + z = 1$ representa al plano oblicuo del Ejemplo 2(c), y la ecuación $y - 2x = 0$ representa un plano vertical que pasa por origen y por el punto (1, 2, 0). En conjunto, estas dos ecuaciones representan a la recta intersección de los dos planos. Esta recta pasa, por ejemplo, por el punto (0, 0, 1) y $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ (*véase* la Figura 10.9(a)).

(b) La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ representa una esfera de radio 1 con centro en el origen, y $x + y = 1$ representa un plano vertical que pasa por los puntos (1, 0, 0) y (0, 1, 0). Las dos superficies se cortan en una circunferencia, como se muestra en la Figura 10.9(b). La recta que va desde (1, 0, 0) hasta (0, 1, 0) es un diámetro de la circunferencia, por lo que el centro de dicha circunferencia es el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ y su radio es $\sqrt{2}/2$.

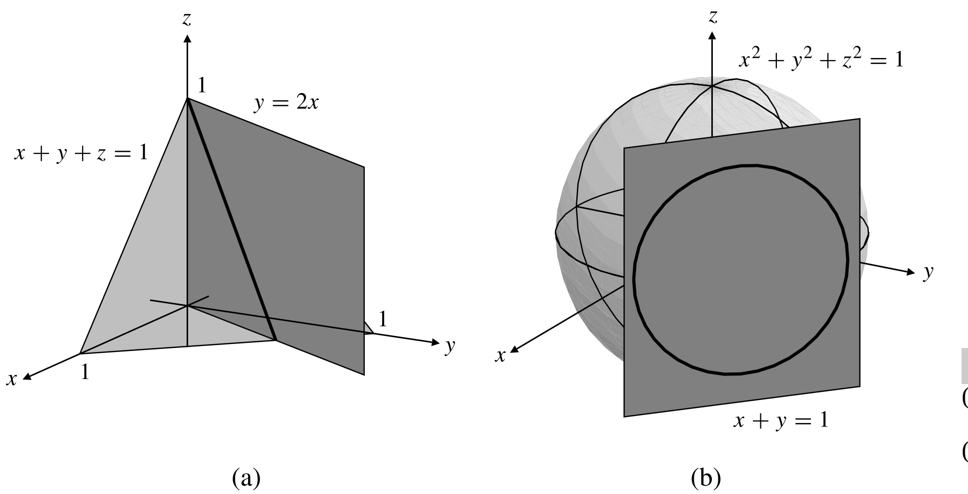


Figura 10.9
(a) Los dos planos se cortan en una línea recta.
(b) Los dos planos cortan a la esfera en una circunferencia.

En las Secciones 10.4 y 10.5 presentaremos muchos más ejemplos de objetos geométricos del espacio tridimensional representados por ecuaciones simples.

Espacio euclídeo *n*-dimensional

Los matemáticos y los usuarios de las matemáticas necesitan frecuentemente considerar un **espacio *n*-dimensional**, siendo n mayor que 3 y pudiendo incluso ser infinito. Es difícil visualizar geométricamente un espacio de dimensión 4 o superior. El secreto para tratar con estos espacios es considerar los puntos de un espacio n-dimensional como una n-tupla de números reales; es decir, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ es un punto en el espacio n-dimensional en vez de ser sólo las coordenadas de dicho punto. Ya no consideraremos a los puntos como elementos existentes en un espacio físico, sino que empezaremos a pensar en ellos como objetos algebraicos. Utilizaremos el símbolo $\mathbb{R}^n$ para representar al espacio n-dimensional, indicando así que los puntos son n-tuplas de núme-

ros *reales*. Por tanto, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ indican el plano y el espacio tridimensional, respectivamente. Nótese que al pasar de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^n$ hemos cambiado un poco la notación. En $\mathbb{R}^3$ denominamos a las coordenadas x, y y z, mientras que en $\mathbb{R}^n$ las hemos denominado x_1, x_2, ... y x_n, para evitar quedarnos sin letras. Por supuesto, podríamos hablar de coordenadas (x_1, x_2, x_3) en $\mathbb{R}^3$ y (x_1, x_2) en el plano $\mathbb{R}^2$, pero en estos casos se utiliza tradicionalmente (x, y, z) y (x, y).

Aunque pensemos en los puntos de $\mathbb{R}^n$ como n-tuplas y no como objetos geométricos, tampoco deseamos perder toda la perspectiva de la geometría subyacente. Por analogía con los casos de 2 y 3 dimensiones, seguiremos considerando que la expresión

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

representa la *distancia* entre los puntos de coordenadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ y $(y_1, y_2, ..., y_n)$. Además denominaremos **hiperplano** al conjunto $(n - 1)$-dimensional de puntos de $\mathbb{R}^n$ que cumplen la ecuación $x_n = 0$, por analogía con el plano $z = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

Descripción de conjuntos en el plano, el espacio tridimensional y el espacio *n*-dimensional

Concluiremos esta sección recopilando algunas definiciones de términos que se utilizan para describir conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^n$ para $n \geqslant 2$. Estos términos pertenecen a la rama de las matemáticas denominada **topología**, y generalizan las nociones de intervalos abiertos y cerrados y de extremos, utilizados para describir conjuntos en la recta real $\mathbb{R}$. Aunque daremos las definiciones para $\mathbb{R}^n$, en general estaremos más interesados en los casos en que $n = 2$ y $n = 3$.

Se denomina **entorno** de un punto P en $\mathbb{R}^n$ a un conjunto de la forma

$$B_r(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : \text{distancia de } Q \text{ a } P < r\}$$

para algún $r > 0$.

Para $n = 1$, si $p \in \mathbb{R}$, entonces $B_r(p)$ es el **intervalo abierto** $(p - r, p + r)$ centrado en p.

Para $n = 2$, $B_r(P)$ es el **disco abierto** de radio r centrado en el punto P.

Para $n = 3$, $B_r(P)$ es la **bola abierta** de radio r centrada en el punto P.

Un conjunto S se denomina **abierto** en $\mathbb{R}^n$ si todo punto de S tiene un entorno contenido en S. Todo entorno es en sí mismo un conjunto abierto. Otros ejemplos de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^2$ son los conjuntos de puntos x, y tales que $x > 0$ o tales que $y > x^2$ o incluso tales que $y \neq x^2$. Generalmente, los conjuntos definidos por inecuaciones estrictas (utilizando $>$ y $<$) son abiertos. Como ejemplos en $\mathbb{R}^3$ tenemos los conjuntos de puntos (x, y, z) que cumplen $x + y + z > 2$ o $1 < x < 3$.

El espacio completo $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto en sí mismo. Por razones técnicas, el conjunto vacío (que no contiene puntos) también se considera abierto (ningún punto del conjunto vacío deja de cumplir la condición de tener un entorno contenido en el conjunto vacío).

El **complemento**, S^c, de un conjunto S en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ que no pertenecen a S. Por ejemplo, el complemento del conjunto de puntos (x, y) en $\mathbb{R}^2$ tales que $x > 0$ es el conjunto de puntos tales que $x \leqslant 0$. Se dice que un conjunto es **cerrado** si su complemento es abierto. En general, los conjuntos definidos por inecuaciones no estrictas (utilizando $\geqslant$ y $\leqslant$) son cerrados. Los intervalos cerrados son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$. Como el espacio completo y el conjunto vacío son ambos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y son complementos uno del otro, también son cerrados. Son los únicos conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados.

Se dice que un punto P es un **punto frontera** de un conjunto S si todo entorno de P contiene puntos de S y puntos de S^c. La **frontera**, $\text{fron}(S)$, de un conjunto S es el conjunto de todos los puntos frontera de S. Por ejemplo, la frontera del disco cerrado $x^2 + y^2 \leqslant 1$ en $\mathbb{R}^2$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Un conjunto cerrado contiene a todos sus puntos frontera. Un conjunto abierto no contiene a ninguno de sus puntos frontera.

Un punto P se denomina **punto interior** de un conjunto S si pertenece a S pero no a su frontera. P es un **punto exterior** de S si pertenece al complemento de S pero no a su frontera. El **interior** $\text{int}(S)$ y el **exterior** $\text{ext}(S)$ de S están formados por todos los puntos de su interior y de su exterior, respectivamente. Tanto $\text{int}(S)$ como $\text{ext}(S)$ son conjuntos abiertos. Si S es abierto, entonces $\text{int}(S) = S$. Si S es cerrado, entonces $\text{ext}(S) = S^c$. *Véase* la Figura 10.10.

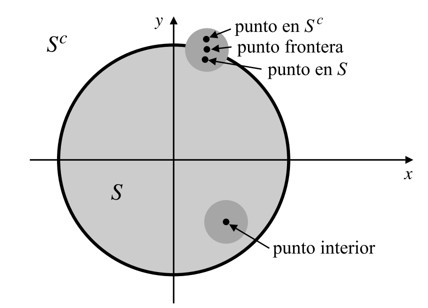


Figura 10.10 El disco cerrado S formado por los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que cumplen la inecuación $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Nótense los entornos sombreados del punto frontera y el punto interior. $\text{Fron}(S)$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$; $\text{int}(S)$ es el disco abierto $x^2 + y^2 < 1$; $\text{ext}(S)$ es el conjunto abierto $x^2 + y^2 > 1$.

Ejercicios 10.1

Calcule la distancia entre las parejas de puntos de los Ejercicios 1-4.

1. $(0, 0, 0)$ y $(2, -1, -2)$

2. $(-1, -1, -1)$ y $(1, 1, 1)$

3. $(1, 1, 0)$ y $(0, 2, -2)$

4. $(3, 8, -1)$ y $(-2, 3, -6)$

5. ¿Cuál es la mínima distancia del punto (x, y, z) (a) al plano xy, (b) al eje x?

6. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $(1, 2, 3)$, $(4, 0, 5)$ y $(3, 6, 4)$ es un triángulo rectángulo.

7. Calcule el ángulo A en el triángulo de vértices

$A = (2, -1, -1)$, $B = (0, 1, -2)$ y $C = (1, -3, 1)$

8. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$ y $(0, 3, 3)$ es equilátero.

9. Calcule el área del triángulo cuyos vértices son $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$.

10. ¿Cuál es la distancia desde el origen hasta el punto $(1, 1, ..., 1)$ en $\mathbb{R}^n$?

11. ¿Cuál es la distancia desde el punto $(1, 1, ..., 1)$ en el espacio n-dimensional al punto más cercano en el eje x_1?

En los Ejercicios 12-23, describa (y dibuje si es posible) el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que cumplen las ecuaciones o inecuaciones dadas.

12. $z = 2$

13. $y \geqslant -1$

14. $z = x$

15. $x + y = 1$

16. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

17. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$

18. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

19. $y^2 + z^2 \leqslant 4$

20. $x^2 + z^2 = 4$

21. $z = y^2$

22. $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$

23. $x + 2y + 3z = 6$

En los Ejercicios 24-32, describa (y dibuje si es posible) el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que cumplen las parejas de ecuaciones o inecuaciones dadas.

24. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4x \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x \end{cases}$

30. $\begin{cases} y \geqslant x \\ z \leqslant y \end{cases}$

31. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ z \geqslant y \end{cases}$

32. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \end{cases}$

En los Ejercicios 33-36, especifique la frontera y el interior de los conjuntos S del plano cuyos puntos (x, y) cumplen las condiciones dadas. ¿Es S abierto, cerrado o ninguna de las dos cosas?

33. $0 < x^2 + y^2 < 1$

34. $x \geqslant 0, \quad y < 0$

35. $x + y = 1$

36. $|x| + |y| \leqslant 1$

En los Ejercicios 37-40, especifique la frontera y el interior de los conjuntos S del espacio tridimensional cuyos puntos (x, y, z) cumplen las condiciones dadas. ¿Es S abierto, cerrado o ninguna de las dos cosas?

37. $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$

38. $x \geqslant 0, \quad y > 1, \quad z < 2$

39. $(x - z)^2 + (y - z)^2 = 0$

40. $x^2 + y^2 < 1, \; y + z > 2$

10.2 Vectores

Un **vector** es una entidad compuesta por un **módulo** (tamaño o longitud) y una **dirección**. Por ejemplo, la *velocidad* de un objeto móvil tiene un valor numérico y una dirección de movimiento, por lo que es un vector. Los vectores se representan geométricamente mediante flechas (segmentos dirigidos) y a menudo se identifican realmente con estas flechas. Por ejemplo, el vector $\overrightarrow{AB}$ es una flecha con origen en el punto A y extremo en el punto B. Los vectores se representan mediante una letra en negrita,

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

Véase la Figura 10.11. Cuando se escriben a mano, para representar un vector se puede utilizar una flecha sobre una letra ($\vec{v} = \overrightarrow{AB}$). El *módulo* del vector **v** es la longitud de la flecha y se indica como $|\mathbf{v}|$ o $|\overrightarrow{AB}|$.

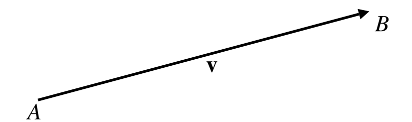


Figura 10.11 El vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$.

Aunque los vectores tienen módulo y dirección, en general no tienen *posición*, es decir, no están situados en ningún punto en particular. Dos vectores, **u** y **v**, se consideran *iguales* si tienen *la misma longitud* y *la misma dirección*, aunque sus flechas representativas no coincidan. Las flechas deben ser paralelas, tener la misma longitud y apuntar en la misma dirección. Por ejemplo, en la Figura 10.12, si $ABYX$ es un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$.

Por el momento, consideraremos vectores en el plano, es decir, vectores cuyas flechas representativas están en un plano. Si se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, se pueden definir las componentes x e y de cualquier vector. Si $A = (a, b)$ y $P = (p, q)$, como se muestra en la Figura 10.13, entonces las componentes x e y de $\overrightarrow{AP}$ son, respectivamente, $p - a$ y $q - b$. Nótese que si O es el origen y X es el punto $(p - a, q - b)$, entonces

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} = |\overrightarrow{OX}|$$

$$\text{pendiente de } \overrightarrow{AP} = \frac{q-b}{p-a} = \text{pendiente de } \overrightarrow{OX}$$

Por tanto, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OX}$. En general, dos vectores son iguales si y sólo si tienen las mismas componentes x e y.

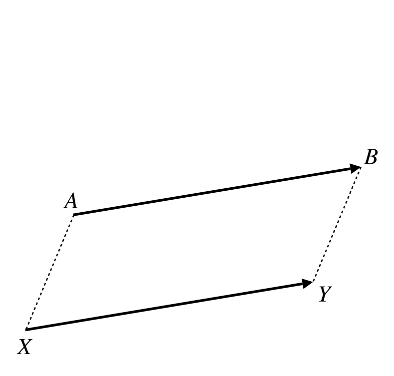


Figura 10.12 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$.

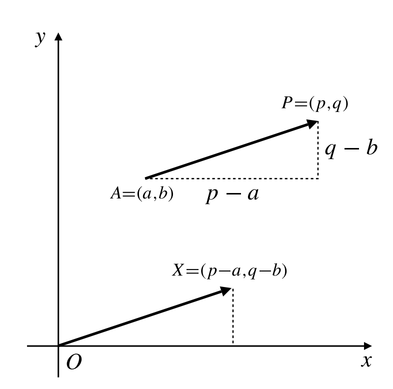


Figura 10.13 Componentes de un vector.

Hay dos importantes operaciones básicas definidas para vectores: suma y multiplicación por un escalar.

DEFINICIÓN 1 Suma de vectores

Dados dos vectores **u** y **v**, su suma **u** + **v** se define como sigue. Si se sitúa una flecha que representa al vector **v** con su origen en el extremo de una flecha que representa al vector **u**, entonces la flecha que va desde el origen de **u** hasta el extremo de **v** representa al vector **u** + **v**. En otras palabras, si **u** y **v** tienen su origen en el mismo punto, entonces **u** + **v** se representa por una flecha con su origen en ese punto y su extremo en el vértice opuesto del paralelogramo generado por **u** y **v**. Esto se muestra en la Figura 10.14(a).

DEFINICIÓN 2 Multiplicación por un escalar

Si **v** es un vector y t es un número real (denominado también **escalar**), entonces la **multiplicación por un escalar** t**v** es un vector de módulo $|t|$ veces el módulo de **v** y cuya dirección coincide con la de **v** si $t > 0$ o es contraria a la de **v** si $t < 0$. *Véase* la Figura 10.14(b). Si $t = 0$, entonces t**v** tiene longitud cero y, por tanto, no tiene ninguna dirección en particular. Es el **vector cero**, que se representa por **0**.

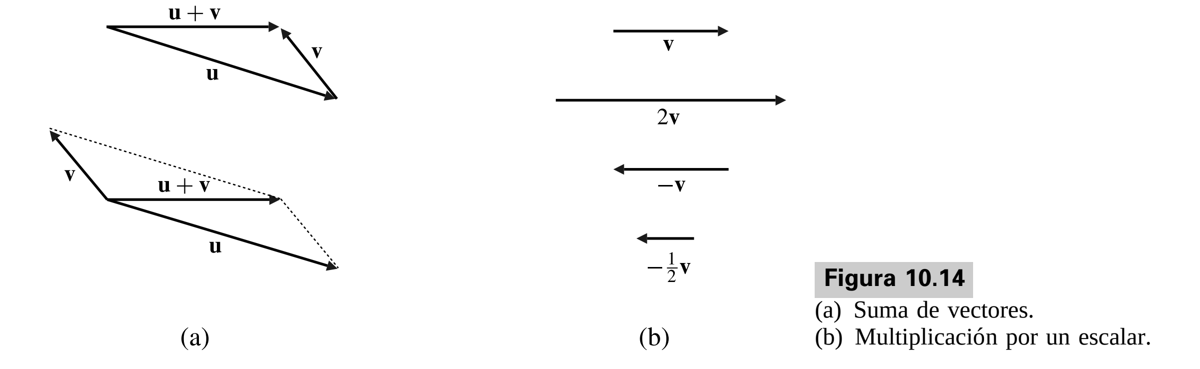


Figura 10.14
(a) Suma de vectores.
(b) Multiplicación por un escalar.

Supongamos que **u** tiene componentes a y b y que **v** tiene componentes x e y. Entonces las componentes de **u** + **v** son $a + x$ y $b + y$, y las de t**v** son tx y ty. *Véase* la Figura 10.15.

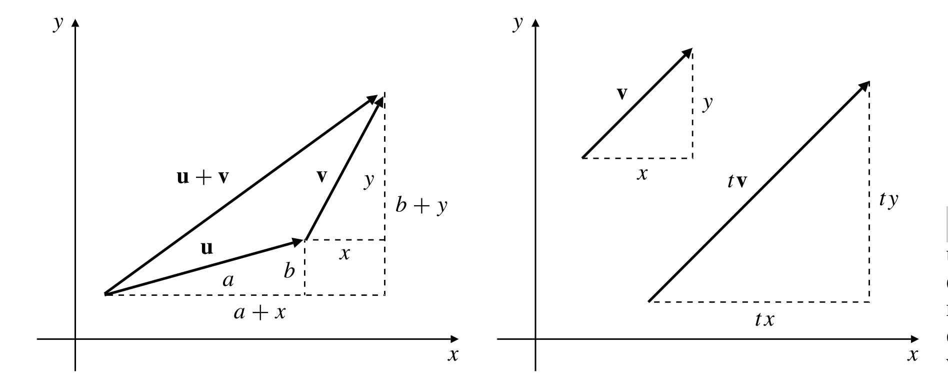


Figura 10.15 Las componentes de una suma de vectores o del producto de un escalar por un vector son la misma suma o multiplicación de las correspondientes componentes de los vectores.

En $\mathbb{R}^2$ consideraremos dos vectores particulares con especial atención. Son los siguientes:

(i) El vector **i** desde el origen al punto (1, 0).
(ii) El vector **j** desde el origen al punto (0, 1).

Es decir, las componentes de $\mathbf{i}$ son 1 y 0 y las componentes de $\mathbf{j}$ son 0 y 1. Estos vectores se denominan **vectores de la base estándar** del plano. Un vector $\mathbf{r}$ desde el origen hasta el punto (x, y) tiene componentes x e y, y se puede expresar de la forma

$$\mathbf{r} = \langle x, y \rangle = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

En la primera forma se especifica el vector indicando sus componentes entre paréntesis angulares; en la segunda forma $\mathbf{r}$ se escribe como una **combinación lineal** de los vectores de la base estándar $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ (*véase* la Figura 10.16). El vector $\mathbf{r}$ se denomina **vector de posición** del punto (x, y). Un vector de posición tiene su origen en el origen de coordenadas y su extremo en el punto cuya posición se especifica. La longitud de $\mathbf{r}$ es $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

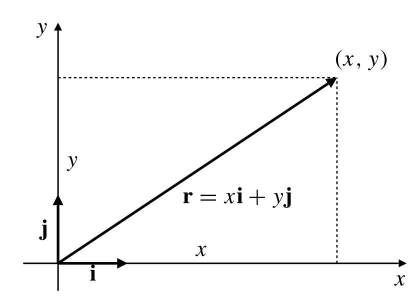


Figura 10.16 Todo vector se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base.

De forma más general, el vector $\overrightarrow{AP}$, desde $A = (a, b)$ hasta $P = (p, q)$, en la Figura 10.13, se puede escribir también en forma de una lista de componentes o una combinación lineal de los vectores de la base estándar:

$$\overrightarrow{AP} = \langle p - a, q - b \rangle = (p - a)\,\mathbf{i} + (q - b)\,\mathbf{j}$$

Las sumas y las multiplicaciones de vectores por un escalar se expresan fácilmente en términos de componentes. Si $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j}$, y si t es un escalar (es decir, un número real), entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1)\,\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\,\mathbf{j}$$
$$t\mathbf{u} = (tu_1)\,\mathbf{i} + (tu_2)\,\mathbf{j}$$

El vector cero es $\mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$. Su longitud es cero y no tiene dirección específica. Para todo vector $\mathbf{u}$ se cumple que $0\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Un **vector unitario** es un vector de longitud 1. Los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ de la base estándar son vectores unitarios. Dado un vector $\mathbf{v}$ distinto de cero, se puede formar un vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$ de la misma dirección que $\mathbf{v}$ multiplicándolo por el inverso de su longitud (un escalar):

$$\hat{\mathbf{v}} = \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|}\right)\mathbf{v}$$

Ejemplo 1 Si $A = (2, -1)$, $B = (-1, 3)$ y $C = (0, 1)$, exprese los siguientes vectores como una combinación lineal de los vectores de la base estándar:

(a) $\overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{BC}$ (c) $\overrightarrow{AC}$ (d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (e) $2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{CB}$

(f) Un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AB}$.

Solución

(a) $\overrightarrow{AB} = (-1 - 2)\,\mathbf{i} + (3 - (-1))\,\mathbf{j} = -3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$

(b) $\overrightarrow{BC} = (0 - (-1))\,\mathbf{i} + (1 - 3)\,\mathbf{j} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$

(c) $\overrightarrow{AC} = (0 - 2)\,\mathbf{i} + (1 - (-1))\,\mathbf{j} = -2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$

(d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = -2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$

(e) $2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{CB} = 2(-2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}) - 3(-\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}) = -\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$

(f) Un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AB}$ es $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = -\dfrac{3}{5}\mathbf{i} + \dfrac{4}{5}\mathbf{j}$

En el ejemplo anterior está implícito el hecho de que las operaciones de suma y multiplicación por un escalar siguen las reglas algebraicas apropiadas, tales como

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\,\mathbf{v}$$

$$t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

Vectores en el espacio tridimensional

El álgebra y la geometría de vectores descritas aquí se pueden extender a espacios de cualquier número de dimensiones. Podemos pensar todavía en vectores representados por flechas, y las sumas y los productos escalares se realizan igual que para vectores del plano.

Dado un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional, se definen tres **vectores de la base estándar**, **i**, **j** y **k**, representados por flechas desde el origen a los puntos (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), respectivamente (*véase* la Figura 10.17). Todo vector en el espacio tridimensional se puede expresar como una *combinación lineal* de esos vectores de la base; por ejemplo, el vector de posición del punto (x, y, z) se expresa como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

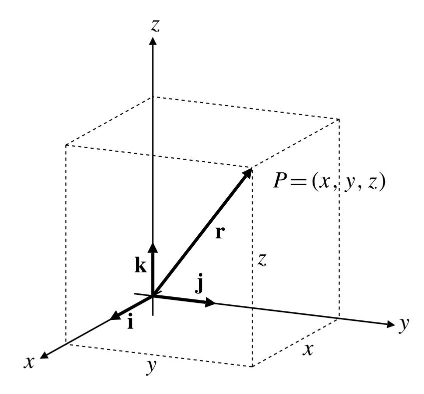


Figura 10.17 Los vectores de la base estándar **i**, **j** y **k**.

Se dice que las **componentes** de **r** son x, y y z. La longitud de **r** es

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Si $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos del espacio tridimensional, entonces las componentes del vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$, desde P_1 hasta P_2, son $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ y $z_2 - z_1$ y, por tanto, se representan en función de los vectores de la base estándar de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

Ejemplo 2 Si $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ y un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ en la dirección de $\mathbf{u}$.

Solución

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2+3)\mathbf{i} + (1-2)\mathbf{j} + (-2-1)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (2-3)\mathbf{i} + (1+2)\mathbf{j} + (-2+1)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = (6-6)\mathbf{i} + (3+4)\mathbf{j} + (-6+2)\mathbf{k} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4+1+4} = 3, \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{1}{|\mathbf{u}|}\right)\mathbf{u} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

El siguiente ejemplo ilustra la forma en la que se pueden utilizar los vectores para resolver problemas sobre velocidades relativas. Si A se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}\,B}$ relativa a B, y B se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{B\,\text{rel}\,C}$ relativa a C, entonces A se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}\,C}$ relativa a C, siendo

$$\mathbf{v}_{A\,\text{rel}\,C} = \mathbf{v}_{A\,\text{rel}\,B} + \mathbf{v}_{B\,\text{rel}\,C}$$

Ejemplo 3 Una aeronave se mueve con una velocidad de 300 km/h. Si la velocidad del viento procedente del este es de 100 km/h, ¿en qué dirección debe moverse la aeronave para volar en línea recta desde la ciudad P hasta la ciudad Q, que está a 400 km al nornoreste de P? ¿Cuánto durará el viaje?

Solución El problema es bidimensional, por lo que utilizaremos vectores en el plano. Escogeremos nuestro sistema de coordenadas de forma que los ejes x e y apunten al este y al norte, respectivamente. La Figura 10.18 ilustra las tres velocidades que se deben considerar. La velocidad del aire relativa a la tierra es

$$\mathbf{v}_{\text{aire rel tierra}} = -100\mathbf{i}$$

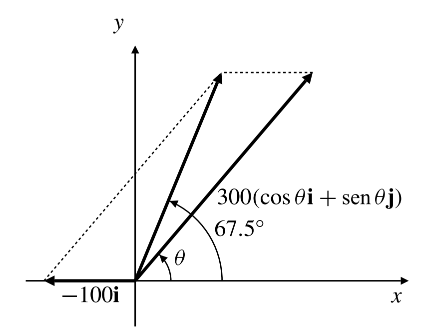


Figura 10.18 Diagrama de velocidades de la aeronave del Ejemplo 3.

Si la aeronave se dirige en una dirección que forma un ángulo θ con la dirección positiva del eje x, entonces la velocidad de la aeronave relativa al aire es

$$\mathbf{v}_{\text{aeronave rel aire}} = 300\cos\theta\,\mathbf{i} + 300\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$$

Por tanto, la velocidad de la aeronave relativa a la tierra es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\text{aeronave rel tierra}} &= \mathbf{v}_{\text{aeronave rel aire}} + \mathbf{v}_{\text{aire rel tierra}}\\ &= (300\cos\theta - 100)\,\mathbf{i} + 300\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}\end{aligned}$$

Deseamos que esta última velocidad esté en la dirección nornoreste, es decir, en una dirección que forme un ángulo de $3\pi/8 = 67.5^{\text{o}}$ con la dirección positiva del eje x. Por tanto, tenemos que

$$\mathbf{v}_{\text{aeronave rel tierra}} = v\,[(\cos 67.5^{\text{o}})\,\mathbf{i} + (\text{sen}\,67.5^{\text{o}})\,\mathbf{j}]$$

siendo v la velocidad real de la aeronave. Comparando las dos expresiones de $\mathbf{v}_{\text{aeronave rel tierra}}$ se obtiene

$$300\cos\theta - 100 = v\cos 67.5^{\text{o}}$$
$$300\,\text{sen}\,\theta = v\,\text{sen}\,67.5^{\text{o}}$$

Eliminando v en esas dos ecuaciones se obtiene

$$300\cos\theta\,\text{sen}\,67.5^{\text{o}} - 300\,\text{sen}\,\theta\cos 67.5^{\text{o}} = 100\,\text{sen}\,67.5^{\text{o}}$$

o

$$3\,\text{sen}\,(67.5^{\text{o}} - \theta) = \text{sen}\,67.5^{\text{o}}$$

Por tanto, la aeronave debe dirigirse en una dirección θ dada por

$$\theta = 67.5^{\text{o}} - \text{arcsen}\left(\frac{1}{3}\text{sen}\,67.5^{\text{o}}\right) \approx 49.56^{\text{o}}$$

es decir, 49.56^{o} al norte del este. Su velocidad es

$$v = 300\,\text{sen}\,\theta\,/\,\text{sen}\,67.5^{\text{o}} \approx 247.15\ \text{km/h}$$

Por consiguiente, el viaje de 400 km durará aproximadamente $400/247.15 \approx 1.618$ horas, o aproximadamente 1 hora y 37 minutos.

Cables y cadenas que cuelgan

Cuando se suspende de sus extremos y cuelga bajo el efecto de la gravedad, un cable pesado o una cadena toma la forma de la curva denominada **catenaria**, que se corresponde con la gráfica de la función coseno hiperbólico. Vamos a demostrarlo utilizando vectores para representar las diferentes fuerzas que actúan sobre el cable.

Supongamos que el cable tiene una densidad lineal δ (unidades de masa por unidad de longitud) y cuelga tal como se muestra en la Figura 10.19. Escogeremos un sistema de coordenadas de forma que el punto más bajo L del cable esté en $(0, y_0)$; el valor de y_0 se especificará posteriormente. Si $P = (x, y)$ es otro punto del cable, hay tres fuerzas que actúan sobre el arco LP del cable entre L y P. Todas esas fuerzas se pueden representar utilizando componentes horizontales y verticales.

(i) La tensión horizontal $\mathbf{H} = -H\mathbf{i}$ en L. Es la fuerza que ejerce la parte del cable que está a la izquierda de L sobre el arco LP en L.
(ii) La tensión tangencial $\mathbf{T} = T_h\mathbf{i} + T_v\mathbf{j}$. Es la fuerza que ejerce la parte del cable que está a la derecha de P sobre el arco LP en P.
(iii) El peso $\mathbf{W} = -\delta gs\mathbf{j}$ del arco LP, siendo g la aceleración de la gravedad y s la longitud del arco LP.

Como el cable no se mueve, estas tres fuerzas deben equilibrarse; su vector suma debe ser cero:

$$\mathbf{T} + \mathbf{H} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$
$$(T_h - H)\mathbf{i} + (T_v - \delta gs)\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Por tanto, $T_h = H$ y $T_v = \delta gs$. Como $\mathbf{T}$ es tangente al cable en P, la pendiente del cable en ese punto es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_v}{T_h} = \frac{\delta gs}{H} = as$$

siendo $a = \delta g/H$ una constante del cable dado. Diferenciando con respecto a x y utilizando el hecho, procedente de nuestro estudio de la longitud de arco, de que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

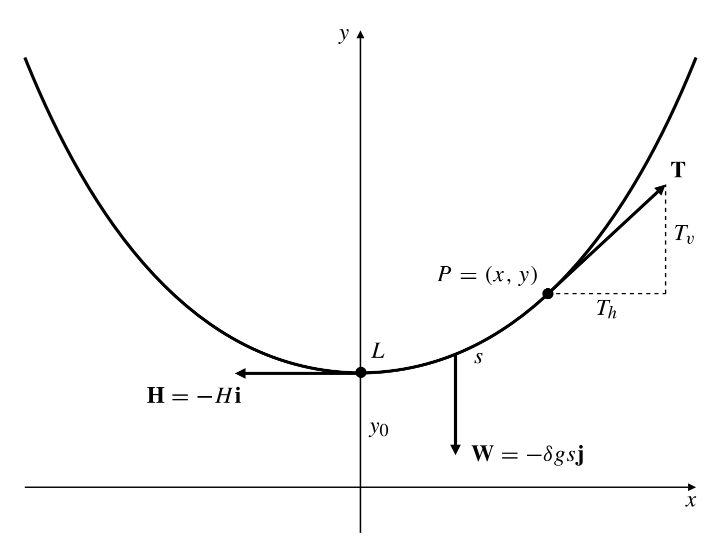


Figura 10.19 Un cable que cuelga y las fuerzas que actúan sobre el arco LP.

se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\,\frac{ds}{dx} = a\,\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

que debe resolverse para obtener la ecuación de la curva que representa al cable que cuelga. Las condiciones iniciales apropiadas son $y = y_0$ y $dy/dx = 0$ en $x = 0$.

Como la ecuación diferencial depende de dy/dx, en vez de y, sustituimos $m(x) = dy/dx$ para obtener una ecuación de primer orden en m:

$$\frac{dm}{dx} = a\sqrt{1 + m^2}$$

Esta ecuación es separable; se integra utilizando el cambio $m = \operatorname{senh} u$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}\,dm = \int a\,dx$$

$$\int du = \int \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 u}}\,du = ax + C_1$$

$$\operatorname{senh}^{-1} m = u = ax + C_1$$

$$m = \operatorname{senh}(ax + C_1)$$

Como $m = dy/dx = 0$ en $x = 0$, tenemos que $0 = \operatorname{senh} C_1$, por lo que $C_1 = 0$ y

$$\frac{dy}{dx} = m = \operatorname{senh}(ax)$$

Esta ecuación se integra fácilmente para obtener y (si hubiéramos utilizado para m un cambio por la tangente en vez de un cambio por el coseno hiperbólico hubiéramos encontrado más problemas).

$$y = \frac{1}{a}\cosh(ax) + C_2$$

Si se escoge $y_0 = y(0) = 1/a$, entonces, sustituyendo $x = 0$, se tiene $C_2 = 0$. Con esta selección de y_0, encontramos por tanto que la ecuación de la curva que representa al cable que cuelga es la catenaria

$$y = \frac{1}{a}\cosh(ax)$$

Observación Si un cable que cuelga soporta cargas adicionales a su propio peso, tomará una forma diferente. Por ejemplo, un cable que da soporte a un puente suspendido cuyo peso por unidad de longitud es mucho mayor que el del cable tomará la forma de una parábola. *Véase* el Ejercicio 34 posterior.

Producto escalar y proyecciones

Existe otra operación entre vectores de cualquier dimensión mediante la cual se combinan dos vectores para producir un número denominado *producto escalar*.

DEFINICIÓN 3 Producto escalar de dos vectores

Dados dos vectores $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ en $\mathbb{R}^2$, se define su **producto escalar** $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ como la suma de los productos de sus correspondientes componentes:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

A veces utiliza la expresión **producto interno** en vez de producto escalar. De forma similar, dados los vectores $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + ui_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ en $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

El producto escalar tiene las siguientes propiedades algebraicas, que se pueden comprobar fácilmente utilizando la definición anterior:

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$	(propiedad conmutativa)
$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$	(propiedad distributiva)
$(t\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$	(para t real)
$\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$	

El significado real del producto escalar se demuestra mediante el siguiente resultado, que se podría haber utilizado para definir el producto escalar:



Si θ es el ángulo que forman las direcciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, entonces

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert\cos\theta$$

En particular, $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares (por supuesto, el vector cero es perpendicular a todo vector).

DEMOSTRACIÓN Obsérvese la Figura 10.20 y aplíquese el Teorema del Coseno al triángulo formado por las flechas $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}
\lvert\mathbf{u}\rvert^2 + \lvert\mathbf{v}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert\cos\theta &= \lvert\mathbf{u} - \mathbf{v}\rvert^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\
&= \mathbf{u} \bullet (\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \mathbf{v} \bullet (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\
&= \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} - \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} - \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} \\
&= \lvert\mathbf{u}\rvert^2 + \lvert\mathbf{v}\rvert^2 - 2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}
\end{aligned}$$

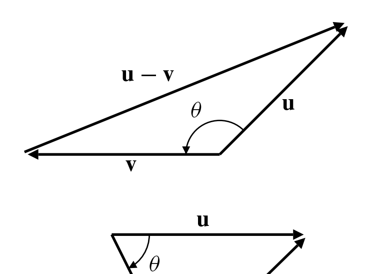


Figura 10.20

Por tanto, $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$, como se quería demostrar.

Ejemplo 4 Calcule el ángulo θ que forman los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución Despejando θ de la fórmula $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$ se obtiene

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \cos^{-1}\left(\frac{(2)(3) + (1)(-2) + (-2)(-1)}{3\sqrt{14}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{14}} \approx 57.69^{\circ}$$

A veces resulta de utilidad proyectar un vector sobre otro. Definiremos la proyección escalar y el vector proyección de **u** en la dirección de **v**:

DEFINICIÓN 4 Proyección escalar y vector proyección

La **proyección escalar** s de un vector **u** en la dirección de un vector **v** distinto de cero es el producto escalar de **u** por un vector unitario en la dirección de **v**. Por tanto, es el *número*

$$s = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = |\mathbf{u}|\cos\theta$$

siendo θ el ángulo formado por **u** y **v**.

El **vector proyección** $\mathbf{u}_{\mathbf{v}}$ de **u** en la dirección de **v** (*véase* la Figura 10.21) es la multiplicación por la proyección escalar de **u** en la dirección de **v** de un vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$ en la dirección de **v**, es decir,

$$\text{vector proyección de } \mathbf{u} \text{ sobre } \mathbf{v} = \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\,\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}$$

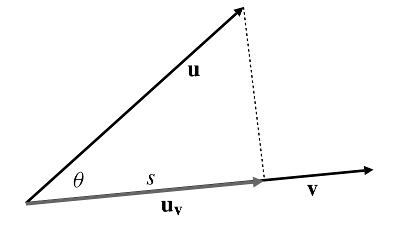


Figura 10.21 Proyección escalar s y vector proyección $\mathbf{u}_{\mathbf{v}}$ de un vector **u** sobre el vector **v**.

Nótese que $|s|$ es la longitud del segmento sobre la recta definida por el vector **v** que resulta de trazar perpendiculares a esa recta desde el origen y el extremo de **u**. Además, s es negativo si $\theta > 90^{\circ}$.

Muchas veces es necesario expresar un vector como una suma de otros dos vectores, uno de ellos paralelo y el otro perpendicular a una dirección dada.

Ejemplo 5 Exprese el vector $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ como suma de vectores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, siendo **u** vector paralelo a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y **v** perpendicular a **u**.

Solución

MÉTODO I (Uso del vector proyección) Nótese que **u** debe ser el vector proyección de $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Por tanto,

$$\mathbf{u} = \frac{(3\mathbf{i} + \mathbf{j}) \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j})}{|\mathbf{i} + \mathbf{j}|^2} (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \frac{4}{2} (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$

MÉTODO II (Partiendo de principios básicos) Como **u** es paralelo a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y **v** es perpendicular a **u**, tenemos que

$$\mathbf{u} = t(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 0$$

para algún escalar t. Queremos que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Realizando el producto escalar de esta ecuación por $\mathbf{i} + \mathbf{j}$:

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \mathbf{v} \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = (3\mathbf{i} + \mathbf{j}) \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$t(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j}) + 0 = 4$$

Por tanto, $2t = 4$ y $t = 2$. Entonces,

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$

■

Vectores en el espacio *n*-dimensional

Todas las ideas anteriores son aplicables a vectores en espacios de cualquier dimensión. Los vectores en $\mathbb{R}^n$ se pueden expresar como combinaciones lineales de los n vectores unitarios

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e_1} & \text{desde el origen al punto} & (1, 0, 0, ..., 0) \\ \mathbf{e_2} & \text{desde el origen al punto} & (0, 1, 0, ..., 0) \\ & \vdots & \\ \mathbf{e_n} & \text{desde el origen al punto} & (0, 0, 0, ..., 1) \end{array}$$

Esos vectores forman una *base estándar* en $\mathbb{R}^n$. Un vector **x** n-dimensional con componentes x_1, x_2, ..., x_n se puede expresar de la forma

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}$$

La longitud de **x** es $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$. El ángulo entre dos vectores **x** e **y** es

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$$

siendo

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

No haremos mucho uso de vectores n-dimensionales para $n > 3$, pero todo lo que se ha dicho hasta ahora para vectores en dos o tres dimensiones se puede aplicar a vectores n-dimensionales.

Ejercicios 10.2

1. Sea $A = (-1, 2)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, -3)$, $D = (0, 4)$. Exprese los siguientes vectores como combinación lineal de los vectores de la base estándar **i** y **j** en $\mathbb{R}^2$.

(a) $\overrightarrow{AB}$, (b) $\overrightarrow{BA}$, (c) $\overrightarrow{AC}$, (d) $\overrightarrow{BD}$, (e) $\overrightarrow{DA}$,
(f) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$, (g) $\overrightarrow{AC} \to 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$,
(h) $\dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{3}$.

En los ejercicios 2 y 3, calcule lo siguiente para los vectores dados **u** y **v**:

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$
(b) Las longitudes $|\mathbf{u}|$ y $|\mathbf{v}|$.
(c) Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$ en las direcciones de **u** y **v**, respectivamente.
(d) El producto escalar $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$.
(e) El ángulo que forman **u** y **v**.
(f) La proyección escalar de **u** en la dirección de **v**.
(g) El vector proyección de **v** sobre **u**.

2. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

3. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

4. Utilice vectores para demostrar que el triángulo de vértices $(-1, 1)$, $(2, 5)$ y $(10, -1)$ es rectángulo.

En los Ejercicios 5-8, demuestre los resultados geométricos que se plantean utilizando vectores.

5. El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

6. Si P, Q, R y S son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, del cuadrilátero $ABCD$, entonces $PQRS$ es un paralelogramo.

∗ **7.** Las diagonales de todo paralelogramo se cortan en la mitad unas a otras.

∗ **8.** Las medianas de un triángulo se cortan en un punto común (la mediana es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. El punto común se denomina *centroide* del triángulo).

9. Una veleta montada en el techo de un coche que se mueve al norte con una velocidad de 50 km/h indica que el viento viene del oeste. Cuando el coche duplica su velocidad, la veleta indica que el viento proviene del noroeste. ¿De qué dirección procede el viento y cuál es su velocidad?

10. Un río recto de 500 m de ancho fluye hacia el este con una velocidad constante de 3 km/h. Si un bote se puede desplazar en el agua con una velocidad de 5 km/h, ¿en qué dirección habrá que dirigirlo si se desea remar del punto A en la orilla sur hasta el punto B en la orilla norte situado exactamente al norte de A? ¿Cuánto tiempo durará el viaje?

∗**11.** ¿En qué dirección habrá que dirigirse para cruzar el río del Ejercicio 10 si sólo se puede remar a 2 km/h, y se desea cruzar desde el punto A hasta un punto C en la orilla norte, situado a k km aguas abajo de B? ¿Para qué valores de k no es posible el viaje?

12. Cierta aeronave vuela con una velocidad de 750 km/h. ¿En qué dirección deberá dirigirse para progresar hacia el este verdadero si el viento es del noreste y tiene una velocidad de 100 km/h? ¿Cuánto tiempo tardará en viajar a una ciudad situada a 1500 km de su punto de partida?

13. ¿Para qué valor de t es el vector $2t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - (10 + t)\mathbf{k}$ perpendicular al vector $\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}$?

14. Calcule el ángulo que forman la diagonal del cubo y uno de sus lados.

15. Calcule el ángulo que forman una diagonal del cubo y una diagonal de una de las caras del cubo. Obtenga todas las posibles respuestas.

16. **(Cosenos directores)** Si un vector **u** de $\mathbb{R}^3$ forma ángulos α, β y γ con los ejes coordenados, demuestre que

$$\hat{\mathbf{u}} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

es un vector unitario en la dirección de **u**, de forma que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Los números $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ se denominan *cosenos directores* de **u**.

17. Calcule un vector unitario que forme ángulos iguales con los tres ejes coordenados.

18. Calcule los tres ángulos de un triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$.

19. Si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son los vectores de posición de P_1 y P_2, y λ es un número real, demuestre que

$$\mathbf{r} = (1 - \lambda)\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2$$

es el vector de posición de un punto P situado en la recta que une P_1 y P_2. ¿Dónde está P si $\lambda = 1/2$? ¿Y si $\lambda = 2/3$? ¿Y si $\lambda = -1$? ¿Y si $\lambda = 2$?

20. Sea **a** un vector distinto de cero. Describa el conjunto de todos los puntos del espacio tridimensional cuyos vectores de posición **r** cumplen que $\mathbf{a} \bullet \mathbf{r} = 0$.

21. Sea **a** un vector distinto de cero, y sea b un número real cualquiera. Describa el conjunto de puntos en el espacio tridimensional cuyos vectores de posición **r** cumplen que $\mathbf{a} \bullet \mathbf{r} = b$.

En los Ejercicios 22-24, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = \mathbf{k}$.

22. Obtenga dos vectores unitarios tales que los dos sean perpendiculares simultáneamente a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

23. Obtenga un vector $\mathbf{x}$ que cumpla el sistema de ecuaciones $\mathbf{x} \bullet \mathbf{u} = 9$, $\mathbf{x} \bullet \mathbf{v} = 4$, $\mathbf{x} \bullet \mathbf{w} = 6$.

24. Obtenga dos vectores unitarios tales que cada uno forme ángulos iguales con $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

25. Obtenga un vector unitario que sea la bisectriz del ángulo entre dos vectores cualesquiera distintos de cero, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

26. Dados dos vectores no paralelos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, describa el conjunto de puntos tales que sus vectores de posición $\mathbf{r}$ sean de la forma $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$, siendo λ y μ números reales arbitrarios.

27. **(Desigualdad del triángulo)** Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores.

(a) Demuestre que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$.
(b) Demuestre que $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \leqslant |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.
(c) Deduzca a partir de (a) y (b) que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

28. (a) ¿Por qué se denomina la desigualdad del Ejercicio 27(c) desigualdad del triángulo?
(b) ¿Qué condiciones sobre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ implican que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$?

29. **(Bases ortonormales)** Sean $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{k}$.

(a) Demuestre que $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = |\mathbf{w}| = 1$ y $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares y, como tales, se dice que forman una **base ortonormal** de $\mathbb{R}^3$.
(b) Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, demuestre por cálculo directo que
$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \bullet \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{r} \bullet \mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{r} \bullet \mathbf{w})\mathbf{w}$$

30. Demuestre que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{r} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$, entonces $a = \mathbf{r} \bullet \mathbf{u}$, $b = \mathbf{r} \bullet \mathbf{v}$ y $c = \mathbf{r} \bullet \mathbf{w}$.

31. **(Resolución de un vector en direcciones perpendiculares)** Si $\mathbf{a}$ es un vector distinto de cero y $\mathbf{w}$ es un vector cualquiera, obtenga dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tales que $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ sea paralelo a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$ sea perpendicular a $\mathbf{a}$.

32. **(Expresión de un vector como combinación lineal de otros dos vectores coplanares con él)** Suponga que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$ son los vectores de posición de los puntos U, V y P, respectivamente, que $\mathbf{u}$ no es paralelo a $\mathbf{v}$ y que P está en el mismo plano que contiene al origen, a U y a V. Demuestre que existen números λ y μ tales que $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$. *Sugerencia*: Exprese $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$ como suma de vectores paralelos y perpendiculares a $\mathbf{u}$, como se sugiere en el Ejercicio 31.

*__33.__ Dadas las constantes r, s y t, con $r \neq 0$ y $s \neq 0$, y dado un vector $\mathbf{a}$ que cumple que $|\mathbf{a}|^2 > 4rst$, resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} r\mathbf{x} + s\mathbf{y} = \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = t \end{cases}$$

obteniendo los vectores desconocidos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Cables que cuelgan

34. **(Un puente en suspensión)** Si un cable que cuelga soporta un peso con densidad lineal horizontal constante (de forma que el peso que soporta el arco LP en la Figura 10.19 es δgx en vez de δgs), demuestre que el cable toma la forma de una parábola en vez de una catenaria. Éste es probablemente el caso de los cables de un puente en suspensión.

35. En un punto P, separado 10 m horizontalmente de su punto más bajo L, un cable forma un ángulo de 55° con la horizontal. Calcule la longitud del cable entre L y P.

36. Calcule la longitud s del arco LP del cable colgante de la Figura 10.19, utilizando la ecuación $y = (1/a)\cosh(ax)$ calculada para dicho cable. A partir de aquí, verifique que el módulo $T = |\mathbf{T}|$ de la tensión del cable en cualquier punto $P = (x, y)$ es $T = \delta gy$.

37. Un cable de 100 m de longitud cuelga entre dos torres separadas 90 m de forma que sus extremos están sujetos a la misma altura en las dos torres. ¿A qué distancia de esa altura está el punto más bajo del cable?

10.3 Producto vectorial en el espacio tridimensional

Se define, *únicamente en el espacio tridimensional*, otra clase de producto entre dos vectores denominado *producto vectorial*, que se expresa como $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

DEFINICIÓN 5

Dados dos vectores **u** y **v** en $\mathbb{R}^3$, el **producto vectorial u × v** es un único vector que cumple las tres condiciones siguientes:

(i) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{u} = 0$ y $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{v} = 0$
(ii) $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta$, siendo θ el ángulo que forman **u** y **v**.
(iii) **u**, **v** y **u × v** forman un triedro orientado según la mano derecha.

Si **u** y **v** son paralelos, la condición (ii) dice que $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$, el vector cero. En otro caso, en cualquier punto de $\mathbb{R}^3$, existe una única recta que es perpendicular a **u** y **v**. La condición (i) dice que **u × v** es paralelo a esta recta. La condición (iii) determina cuál de las dos direcciones de esta recta es la dirección de **u × v**; un tornillo orientado a la derecha avanza en la dirección de **u × v** si se rota en la dirección que va de **u** a **v** (esto equivale a decir que el pulgar, el índice y el dedo medio de la mano derecha apuntan en las direcciones de **u**, **v** y **u × v**, respectivamente).

Si **u** y **v** tienen su origen en el punto P, entonces **u × v** es normal (es decir, perpendicular) al plano que pasa por P y contiene a los vectores **u y v** y, por la condición (ii), **u × v** tiene una longitud igual al área del paralelogramo generado por **u** y **v** (*véase* la Figura 10.22). Estas propiedades hacen del producto vectorial una herramienta muy útil para la descripción de planos tangentes y rectas normales a superficies en $\mathbb{R}^3$.

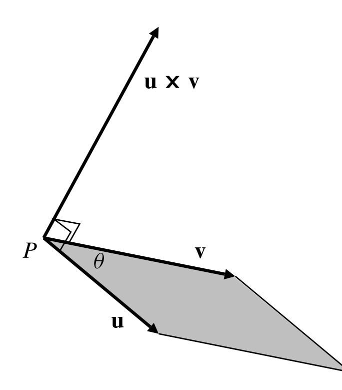


Figura 10.22 **u × v** es perpendicular a **u** y **v** y su longitud es igual al área del paralelogramo sombreado.

La definición de producto vectorial dada anteriormente no requiere ningún sistema de coordenadas y, por tanto, no muestra directamente las tres componentes del producto vectorial con respecto a una base estándar. Estas componentes las proporciona el siguiente teorema:

TEOREMA 2 **Componentes del producto vectorial**

Si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

DEMOSTRACIÓN Observemos en primer lugar que el vector

$$\mathbf{w} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

es perpendicular a **u** y **v**, ya que

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0$$

y de forma similar $\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = 0$. Por tanto, **u × v** es paralelo a **w**. A continuación, demostraremos que **w** y **u × v** tienen la misma longitud. De hecho,

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{w}|^2 &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\
&= u_2^2v_3^2 + u_3^2v_2^2 - 2u_2v_3u_3v_2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_3^2 \\
&\quad -2u_3v_1u_1v_3 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1v_2u_2v_1
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 \operatorname{sen}^2\theta \\
&= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\,(1-\cos^2\theta) \\
&= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})^2 \\
&= (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 \\
&= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 \\
&\quad - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2 - u_3^2v_3^2 - 2u_1v_1u_2v_2 - 2u_1v_1u_3v_3 - 2u_2v_2u_3v_3 \\
&\quad |\mathbf{w}|^2
\end{aligned}
$$

Puesto que $\mathbf{w}$ es paralelo a $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, y tiene su misma longitud, tenemos que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{w}$ o $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{w}$. Queda demostrar que la elección correcta es la primera. Para ver que esto es así, supongamos que el triedro que forman los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se rota rígidamente en el espacio tridimensional de forma que $\mathbf{u}$ apunte en la dirección del eje x positivo y $\mathbf{v}$ esté en la mitad superior del plano xy. Entonces $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}$ y $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}$, siendo $u_1>0$ y $v_2>0$. Por la «regla de la mano derecha», $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ debe apuntar en la dirección del eje z positivo. Pero $\mathbf{w}=u_1v_2\mathbf{k}$ apunta en esa dirección, por lo que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{w}$ es la elección correcta.

La fórmula del producto vectorial expresada en función de las componentes puede parecer complicada y asimétrica. Sin embargo, como veremos posteriormente, se puede expresar más fácilmente utilizando un determinante. Más adelante en esta sección estudiaremos los determinantes.

Ejemplo 1 **(Cálculo de productos vectoriales)**

(a) $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{0}$, $\quad\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\quad\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$,

$\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{0}$, $\quad\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\quad\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$,

$\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}$, $\quad\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$, $\quad\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$.

(b) $(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})\times(-2\mathbf{j}+5\mathbf{k})$

$$
\begin{aligned}
&= ((1)(5)-(-2)(-3))\mathbf{i} + ((-3)(0)-(2)(5))\mathbf{j} + ((2)(-2)-(1)(0))\mathbf{k} \\
&= -\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 4\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

El producto vectorial tiene algunas de las propiedades de los productos, pero no todas. Resumiremos sus propiedades algebraicas como sigue:

Propiedades del producto vectorial

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ y t es un número real (un escalar), entonces

(i) $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$

(ii) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ (El producto vectorial es **anticonmutativo**)

(iii) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}$

(iv) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$

(v) $(t\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\mathbf{u}\times(t\mathbf{v})=t(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

(vi) $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$

Todas estas igualdades se pueden verificar fácilmente utilizando las componentes, la definición de producto vectorial o las propiedades de los determinantes que se presentan posteriormente. Se dejan como ejercicios para el lector. Nótese la ausencia de la propiedad asociativa. El producto vectorial no es asociativo (*véase* el Ejercicio 21 al final de esta sección). En general,

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$$

Determinantes

Para simplificar ciertas fórmulas, como las de la representación en componentes del producto vectorial, presentaremos los **determinantes** 2×2 y 3×3. Los determinantes generales $n \times n$ se estudian normalmente en cursos de álgebra lineal. Aparecerán en la Sección 10.6. En esta sección simplemente consideraremos las propiedades de los determinantes, necesarias para utilizarlas como ayuda en la expresión de fórmulas que de otra forma serían complicadas.

Un determinante es una expresión en la que intervienen los elementos de una matriz cuadrada de números. El determinante de una matriz de números 2×2

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

se expresa encerrando la matriz entre barras verticales y su valor es el número $ad - bc$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Es el producto de los elementos de la *diagonal principal* de la matriz menos el producto de los elementos de la *diagonal secundaria*, como se muestra en la Figura 10.23. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = -2$$

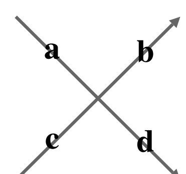


Figura 10.23

De forma similar, el determinante de una matriz de números 3×3 se define como

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Obsérvese que en cada uno de los seis productos del valor del determinante interviene un elemento de cada fila y un elemento de cada columna. Teniendo esto en cuenta, cada uno de los términos podría verse como el producto de los elementos de la *diagonal* de una matriz *ampliada*, obtenida repitiendo las dos primeras columnas de la matriz a la derecha de la tercera columna, como se muestra en la Figura 10.24. El valor del determinante es la suma de los productos correspondientes a las tres diagonales *principales* completas menos la suma de los correspondientes a las tres diagonales *secundarias*. Con la práctica, podemos formar esos productos de las diagonales sin necesidad de escribir explícitamente la matriz ampliada.

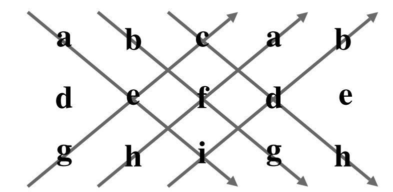


Figura 10.24 ATENCIÓN: Este método no funciona para determinantes de orden 4 × 4 o superior.

Si se agrupan los elementos de la expresión del determinante sacando factor común los elementos de la primera fila, se obtiene

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Los determinantes 2 × 2 que aparecen aquí (denominados *menores* del determinante 3 × 3 dado) se obtienen eliminando la fila y la columna que contienen al elemento correspondiente del determinante 3 × 3 original. Este proceso se denomina *desarrollo* en *menores* respecto a la primera fila del determinante 3 × 3.

Este desarrollo en menores se puede realizar con respecto a cualquier fila o columna. Nótese que aparece un signo menos en cualquier término cuyo menor se obtenga borrando la fila i-ésima y la columna j-ésima, siendo $i + j$ un número *impar*. Por ejemplo, podemos desarrollar el determinante anterior en menores respecto a la segunda columna como sigue:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= -b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ &= -bdi + bfg + eai - ecg - haf + hcd\end{aligned}$$

Por supuesto, se obtiene el mismo valor que antes.

Ejemplo 2

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 3(-8) + 1 = -23\end{aligned}$$

Hemos desarrollado respecto a la segunda fila; la tercera columna también habría sido una buena elección (¿por qué?).

■

Cualquier fila (o columna) de un determinante puede verse como las componentes de un vector. Entonces el determinante es una *función lineal* de ese vector. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ sx + tl & sy + tm & sz + tn \end{vmatrix} = s\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ l & m & n \end{vmatrix}$$

ya que el determinante es una función lineal de su tercera fila. Esta propiedad y otras de los determinantes se desprenden directamente de la definición. A continuación se resumen algunas

otras de sus propiedades. Se definen por filas y para determinantes 3×3, pero se pueden plantear definiciones similares por columnas y para determinantes de cualquier orden.

Propiedades de los determinantes

(i) Si se intercambian dos filas de un determinante, entonces el determinante cambia de signo:

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

(ii) Si dos filas de un determinante son iguales, el valor del determinante es 0:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

(iii) Si se suma un múltiplo de una fila de un determinante a otra fila, el valor del determinante no cambia:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d + ta & e + tb & f + tc \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

El producto vectorial como un determinante

Los elementos de un determinante son en general números que se multiplican para obtener el valor del determinante. Sin embargo, es posible utilizar vectores como elementos de *una fila* (o columna) de un determinante. Cuando se desarrolla en menores respecto a esa fila (o columna), el menor de cada elemento vector es un número que determina el múltiplo escalar de dicho vector. La fórmula para el producto vectorial de

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

presentada en el Teorema 2 se puede expresar simbólicamente como un determinante en el que los vectores de la base estándar forman la primera fila:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

La fórmula del producto escalar dada en ese teorema coincide con el desarrollo de este determinante en menores respecto a la primera fila.

Ejemplo 3 Calcule el área de un triángulo cuyos vértices están en los puntos $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 0, 2)$ y $C = (0, -1, 1)$.

Solución Dos lados del triángulo (Figura 10.25) están dados por los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{AC} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

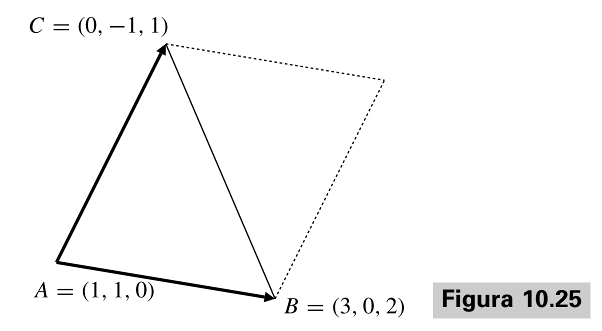


Figura 10.25

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Por definición de producto vectorial, el área del triángulo debe ser, por tanto,

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 16 + 25} = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ unidades al cuadrado}$$

Un **paralelepípedo** es el análogo tridimensional de un paralelogramo. Es un sólido con tres parejas de caras planas paralelas. Cada una de las caras tiene la forma de un paralelogramo. Un ladrillo rectangular es un caso especial de paralelepípedo en el cual las caras que no son paralelas se cortan formando ángulos rectos. Se dice que un paralelepípedo está **generado** por tres vectores que coinciden con tres de sus ejes que se cruzan en un vértice (*véase* la Figura 10.26).

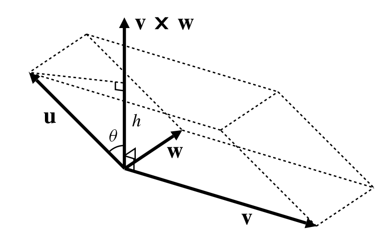


Figura 10.26

Ejemplo 4 Calcule el volumen del paralelepípedo generado por **u**, **v** y **w**.

Solución El volumen del paralelepípedo es igual al área de una de sus caras, por ejemplo, la cara generada por **v** y **w**, multiplicada por la altura del paralelepípedo medida en la dirección perpendicular a esa cara. El área de la cara es $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$. Como $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es perpendicular a esa cara, la altura h del paralelepípedo será el valor absoluto de la proyección escalar de **u** sobre $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Si θ es el ángulo que forman **u** y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, entonces el volumen del paralelepípedo se expresa como

$$\text{Volumen} = |\mathbf{u}||\mathbf{v} \times \mathbf{w}||\cos\theta| = |\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \text{ unidades al cubo}$$

DEFINICIÓN 6

La expresión $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ se denomina **producto escalar triple** de los vectores **u**, **v** y **w**.

El producto escalar triple se expresa fácilmente mediante un determinante. Si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, y se utilizan representaciones similares para $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, entonces

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

El volumen del paralelepípedo generado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el valor absoluto de este determinante.

Utilizando las propiedades de los determinantes, se verifica fácilmente que (*véase* el Ejercicio 18 posterior)

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \bullet (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

Nótese que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ permanecen en el mismo *orden cíclico* en esas tres expresiones. Si se invirtiera el orden se introduciría un factor de -1:

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\mathbf{u} \bullet (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$$

Se dice que tres vectores en el espacio tridimensional son **coplanares** si el paralelepípedo que generan tiene volumen cero; si sus orígenes coinciden, esos tres vectores deben estar en el mismo plano.

$$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \text{ y } \mathbf{w} \text{ son coplanares} \iff \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0 \iff \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Tres vectores son realmente coplanares si cualquiera de ellos es $\mathbf{0}$, o si cualquier pareja de ellos es paralela. Si no se aplica ninguna de esas dos condiciones degeneradas, sólo pueden ser coplanares si uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros dos (*véase* el Ejercicio 20 posterior).

Aplicaciones del producto vectorial

Los productos vectoriales son de considerable importancia en mecánica y en teoría electromagnética, así como en el estudio del movimiento en general. Por ejemplo:

(a) La velocidad lineal $\mathbf{v}$ de una partícula de un cuerpo en rotación situada en la posición $\mathbf{r}$ con elocidad angular $\mathbf{\Omega}$ respecto al origen, se expresa como $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ (para más detalles, *véase* la Sección 11.2).

(b) El momento angular de un planeta de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en órbita alrededor del sol, se expresa como $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, siendo $\mathbf{r}$ el vector de posición del planeta respecto al origen situado en el sol (*véase* la Sección 11.6).

(c) Si una partícula con carga eléctrica q se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un campo magnético cuya fuerza y dirección están dados por un vector $\mathbf{B}$, entonces la fuerza que el campo ejerce en la partícula se expresa como $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. El rayo de electrones del tubo de una televisión está controlado por campos magnéticos que utilizan este principio.

(d) El torque $\mathbf{T}$ de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en el punto P con vector de posición $\mathbf{r}$ con respecto a otro punto P_0 con vector de posición $\mathbf{r}_0$ se define como

$$\mathbf{T} = \overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}$$

Este torque mide la efectividad de la fuerza $\mathbf{F}$ para causar la rotación alrededor del punto P_0. La dirección de $\mathbf{T}$ es la del eje que pasa por P_0 respecto al que actúa $\mathbf{F}$ para rotar P.

Ejemplo 5 Una rueda de automóvil tiene su centro en el origen y gira alrededor del eje y. Una de sus tuercas de retención está situada en la posición $P_0 = (0, 0, 10)$ (las distancias se miden en centímetros). Una llave de neumáticos de 25 cm de longitud e inclinada un ángulo de 60° con respecto a la dirección de su empuñadura, se ajusta a la tuerca como se indica en la Figura 10.27. Si se aplica a la empuñadura de la llave una fuerza horizontal $\mathbf{F} = 500\mathbf{i}$ newtons (N), ¿cuál es el torque sobre la tuerca? ¿Qué parte (componente) de este torque es efectiva para girar la tuerca sobre su eje horizontal? ¿Cuál es el torque efectivo que intenta girar la rueda?

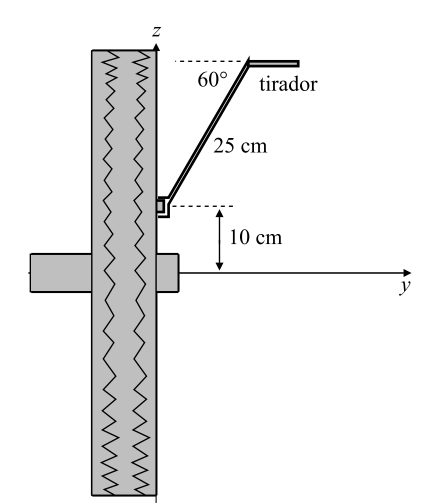


Figura 10.27 La fuerza sobre la empuñadura es de 500 N directamente en nuestra dirección.

Solución La tuerca está en la posición $\mathbf{r}_0 = 10\mathbf{k}$ y la empuñadura de la llave está en la posición

$$\mathbf{r} = 25\cos 60^{\text{o}}\mathbf{j} + (10 + 25\,\text{sen}\,60^{\text{o}})\mathbf{k} \approx 12.5\mathbf{j} + 31.65\mathbf{k}$$

El torque de la fuerza $\mathbf{F}$ sobre la llave es

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F} \\ &\approx (12.5\mathbf{j} + 21.65\mathbf{k}) \times 500\mathbf{i} \approx 10\,825\mathbf{j} - 6250\mathbf{k}\end{aligned}$$

que forma ángulos rectos con $\mathbf{F}$ y con el brazo de la llave. Sólo la componente horizontal de este torque es efectiva para girar la tuerca. El módulo de esta componente es de 10 825 N·cm, o 108.25 N·m. Para calcular el torque efectivo sobre la propia rueda, tenemos que sustituir $\mathbf{r}_0$ por $\mathbf{0}$, la posición del centro de la rueda. En este caso el torque horizontal es

$$31.65\mathbf{k} \times 500\mathbf{i} \approx 15\,825\mathbf{j}$$

es decir, aproximadamente 158.25 N·m. ■

Ejercicios 10.3

1. Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

2. Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

3. Calcule el área del triángulo cuyos vértices son (1, 2, 0), (1, 0, 2) y (0, 3, 1).

4. Obtenga un vector unitario perpendicular al plano que contiene a los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$. ¿Cuál es el área del triángulo que tiene esos vértices?

5. Obtenga un vector unitario perpendicular a los vectores $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

6. Obtenga un vector unitario con componente $\mathbf{k}$ positiva que sea perpendicular a los vectores $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Verifique las igualdades de los Ejercicios 7-11, utilizando la definición de producto vectorial o las propiedades de los determinantes.

7. $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$ **8.** $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$

9. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}$

10. $(t\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\mathbf{u}\times(t\mathbf{v})=t(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

11. $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{0}$

12. Obtenga la fórmula de suma

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

examinando el producto vectorial de los dos vectores unitarios $\mathbf{u}=\cos\beta\mathbf{i}+\operatorname{sen}\beta\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}=\cos\alpha\mathbf{i}+\operatorname{sen}\alpha\mathbf{j}$. Suponga $0\leqslant\alpha-\beta\leqslant\pi$. *Sugerencia*: Considere $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como vectores de posición. ¿Cuál es el área del paralelogramo que generan?

13. Si $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0}$, demuestre que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{w}\times\mathbf{u}$.

14. **(Volumen de un tetraedro)** Un **tetraedro** es una pirámide con base triangular y sus otras tres caras triangulares. Tiene cuatro vértices y seis aristas. Como toda pirámide o cono, su volumen es igual a $\frac{1}{3}Ah$, siendo A el área de la base y h la altura medida perpendicularmente a la base. Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores que coinciden con las tres aristas de un tetraedro que se cruzan en un vértice, demuestre que el volumen del tetraedro se puede expresar como

$$\text{Volumen}=\frac{1}{6}\,|\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}\right|$$

Es decir, el volumen de un tetraedro generado por tres vectores es 1/6 del volumen del paralelepípedo generado por los mismos vectores.

15. Calcule el volumen del tetraedro cuyos vértices son (1, 0, 0), (1, 2, 0), (2, 2, 2) y (0, 3, 2).

16. Calcule el volumen del paralelepípedo generado por las diagonales de las tres caras de un cubo de lado a que se cruzan en un vértice del cubo.

17. ¿Para qué valor de k los cuatro puntos $(1, 1, -1)$, $(0, 3, -2)$, $(-2, 1, 0)$ y $(k, 0, 2)$ están en un mismo plano?

18. **(Producto escalar triple)** Verifique las igualdades

$$\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\mathbf{v}\bullet(\mathbf{w}\times\mathbf{u})=\mathbf{w}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$$

19. Si $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\neq 0$ y $\mathbf{x}$ es un vector tridimensional arbitrario, calcule los números λ, μ y ν tales que

$$\mathbf{x}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}+\nu\mathbf{w}$$

20. Si $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=0$ pero $\mathbf{v}\times\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$, demuestre que existen constantes λ y μ tales que

$$\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}$$

Sugerencia: Utilice el resultado del Ejercicio 19 empleando $\mathbf{u}$ en vez de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ en vez de $\mathbf{u}$.

21. Calcule $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ y $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$, sabiendo que $\mathbf{u}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ y $\mathbf{w}=\mathbf{j}-\mathbf{k}$. ¿Por qué no se puede esperar que sean iguales?

22. ¿Tiene sentido la notación $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\times\mathbf{w}$? ¿Por qué? ¿Y la notación $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\times\mathbf{w}$?

23. **(Producto vectorial triple)** El producto $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ se denomina **producto vectorial triple**. Como es perpendicular a $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$, debe estar en el plano de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Demuestre que

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\bullet\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})\mathbf{w}$$

Sugerencia: Esto se puede hacer por cálculo directo de las componentes de los dos miembros de la ecuación, pero es mucho más fácil si se escogen ejes de coordenadas tales que $\mathbf{v}$ esté en el eje x y $\mathbf{w}$ esté en el plano xy.

24. Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores mutuamente perpendiculares, demuestre que $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\mathbf{0}$. ¿Qué es $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ en este caso?

25. Demuestre que $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})+\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{0}$.

26. Calcule todos los vectores $\mathbf{x}$ que cumplen la ecuación

$$(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\times\mathbf{x}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$$

27. Demuestre que la ecuación

$$(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\times\mathbf{x}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}$$

no tiene solución en el vector desconocido $\mathbf{x}$.

28. ¿Qué condiciones deben cumplir los vectores distintos de cero $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ para garantizar que la ecuación $\mathbf{a}\times\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tiene solución en $\mathbf{x}$? ¿Es única la solución?

10.4 Planos y rectas

Una única ecuación en las tres variables x, y y z constituye una única restricción en la libertad del punto $P=(x, y, z)$ para situarse en cualquier parte del espacio tridimensional. Esa restricción produce en general la pérdida de un *grado de libertad* y, por tanto, fuerza a P a estar en una superficie bidimensional. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2+y^2+z^2=4$$

indica que el punto (x, y, z) está a una distancia 2 del origen. Todos los puntos que cumplen esta condición están en una **esfera** (es decir, la superficie de una bola) de radio 2 centrada en el ori-

gen. La ecuación anterior representa por tanto a dicha esfera, y dicha esfera es la gráfica de la ecuación. En esta sección investigaremos las gráficas de ecuaciones lineales en tres variables.

Planos en el espacio tridimensional

Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto en $\mathbb{R}^3$ con vector de posición

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

Si $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es un vector *distinto de cero*, entonces existe exactamente un **plano** (superficie plana) que pasa por el punto P_0 y es perpendicular a $\mathbf{n}$. Se dice que $\mathbf{n}$ es el **vector normal** al plano. El plano está formado por el conjunto de todos los puntos P que cumplen que $\overrightarrow{P_0P}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$ (*véase* la Figura 10.28).

Si $P = (x, y, z)$ tiene como vector de posición $\mathbf{r}$, entonces $\overrightarrow{P_0P} = (r - r_0)$. Este vector es perpendicular a $\mathbf{n}$ si y sólo si $\mathbf{n} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Ésta es la ecuación del plano en forma vectorial. Podemos escribirla utilizando coordenadas, con lo que obtenemos la correspondiente ecuación escalar.

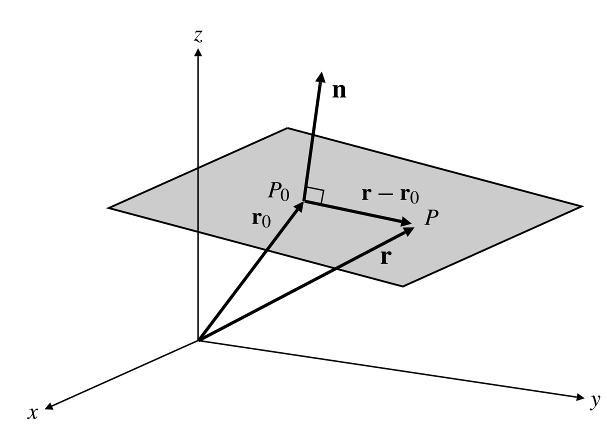


Figura 10.28 El plano que pasa por P_0 con vector normal $\mathbf{n}$ contiene a todos los puntos P tales que $\overrightarrow{P_0P}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$.

La ecuación punto-normal de un plano

La ecuación del plano que tiene un vector normal distinto de cero $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ y que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, cuyo vector de posición es $\mathbf{r}_0$, es

$$\mathbf{n} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

en forma vectorial o, en otros términos,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

en forma escalar.

La forma escalar se puede expresar de manera más simple en la denominada **forma estándar** $Ax + By + Cz = D$, siendo $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.

Si al menos una de las constantes A, B y C es distinta de cero, entonces la *ecuación lineal* $Ax + By + Cz = D$ representa siempre un plano en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, si $A \neq 0$, representa el plano que pasa por el punto $(D/A, 0, 0)$ y cuyo vector normal es $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$. El vector normal a un plano se puede determinar siempre a partir de los coeficientes de x, y y z. Si el término constante $D = 0$, entonces el plano debe pasar por origen.

Ejemplo 1 **(Reconocer y escribir ecuaciones de planos)**

(a) La ecuación $2x - 3y - 4z = 0$ representa un plano que pasa por el origen y es normal (perpendicular) al vector $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

(b) El plano que pasa por el punto (2, 0, 1) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (1, 1, 0) y (4, −1, −2), tiene como vector normal $\mathbf{n} = (4-1)\mathbf{i} + (-1-1)\mathbf{j} + (-2-0)\mathbf{k} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Por consiguiente su ecuación es $3(x-2) - 2(y-0) - 2(z-1) = 0$ o, de forma más sencilla, $3x - 2y - 2z = 4$.

(c) El plano cuya ecuación es $2x - y = 1$ tiene un vector normal $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ que es perpendicular al eje z. Por tanto, el plano es paralelo al eje z. Nótese que la ecuación es independiente de z. En el plano xy, la ecuación $2x - y = 1$ presenta una recta; en el espacio tridimensional representa un plano que contiene a esa recta y es paralelo al eje z. ¿Qué representa la ecuación $y = z$ en $\mathbb{R}^3$? ¿Y la ecuación $y = -2$?

(d) La ecuación $2x + y + 3z = 6$ representa un plano con vector normal $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. En este caso las coordenadas de un punto particular del plano no se pueden leer directamente de su ecuación, pero no es difícil descubrir algunos puntos. Por ejemplo, si se pone en la ecuación $y = z = 0$, se obtiene $x = 3$, por lo que (3, 0, 0) es un punto de este plano. Se dice que la **coordenada *x* en el origen** del plano es 3, ya que (3, 0, 0) es el punto donde el plano corta al eje x. De forma similar, la coordenada y en el origen es 6 y la coordenada z en el origen es 2, ya que el plano corta a los ejes y y z en (0, 6, 0) y (0, 0, 2), respectivamente.

(e) En general, si a, b y c son distintos de cero, la ecuación de un plano con coordenadas en el origen a, b y c es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

que se denomina **forma en coordenadas en el origen** de la ecuación del plano (*véase* la Figura 10.29).

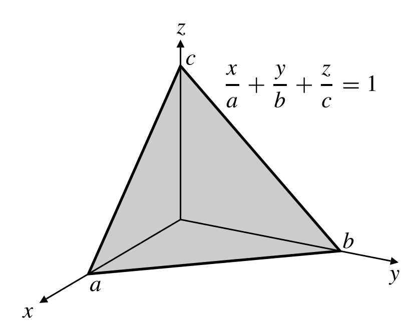


Figura 10.29 El plano cuyas coordenadas en el origen son a, b y c.

■

Ejemplo 2 Calcule la ecuación del plano que pasa por los puntos $P = (1, 1, 0)$, $Q = (0, 2, 1)$ y $R = (3, 2, -1)$.

Solución Necesitamos obtener un vector $\mathbf{n}$, normal al plano. Ese vector será perpendicular a los vectores $\overrightarrow{PQ} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\overrightarrow{PR} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Por tanto, podemos usar

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

Ahora podemos utilizar este vector normal junto con las coordenadas de cualquiera de los tres puntos dados para expresar la ecuación del plano. Utilizando el punto P se llega a la ecuación $-2(x-1) + 1(y-1) - 3(z-0) = 0$ o

$$2x - y + 3z = 1$$

Se puede comprobar que utilizando los puntos Q o R se llega la misma ecuación (si el producto vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ hubiera sido el vector cero, ¿qué se podría haber dicho sobre los puntos P, Q y R? ¿Podrían haber determinado un único plano?).

■

Ejemplo 3 Demuestre que los dos planos

$$x - y = 3 \quad \text{y} \quad x + y + z = 0$$

se cortan y obtenga un vector $\mathbf{v}$ que sea paralelo a su recta de intersección.

Solución Los vectores normales de los dos planos son

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

respectivamente. Como estos vectores no son paralelos, los planos no son paralelos y, por tanto, se cortan formando una línea recta que es perpendicular a $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$. Esta recta debe ser entonces paralela a

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Una familia de planos que se cortan en una recta se denomina **haz de planos** (*véase* la Figura 10.30). Un haz de planos queda determinado por dos planos cualesquiera no paralelos de ese haz, ya que tienen una única recta de intersección. Si las ecuaciones de los dos planos paralelos son

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

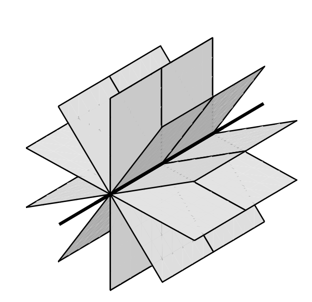


Figura 10.30 Un haz de planos.

entonces, para cualquier valor del número real λ, la ecuación

$$A_1x + B_1y + C_1z - D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z - D_2) = 0$$

representa un plano del haz. Para ver que esto es así, obsérvese que la ecuación es lineal, que representa un plano, y que cualquier punto (x, y, z) que cumpla las ecuaciones de ambos planos cumple también esta ecuación para todo valor de λ. Todo plano del haz excepto el segundo plano de su definición, $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$, se puede obtener mediante una selección adecuada del valor de λ.

Ejemplo 4 Obtenga la ecuación de un plano que pase por la recta de intersección de los planos

$$x + y - 2z = 6 \quad \text{y} \quad 2x - y + z = 2$$

y que pase también por el punto $(-2, 0, 1)$.

Solución Para toda constante λ, la ecuación

$$x + y - 2z - 6 + \lambda(2x - y + z - 2) = 0$$

representa un plano, y por tanto es satisfecha por las coordenadas de todos los puntos de la recta de intersección de los planos dados. Este plano pasa por el punto $(-2, 0, 1)$ si $-2 - 2 - 6 + \lambda(-4 + 1 - 2) = 0$, es decir, si $\lambda = -2$. La ecuación del plano requerido se puede simplificar, por tanto, como $3x - 3y + 4z + 2 = 0$ (esta solución no habría funcionado si el punto hubiera estado en un segundo plano, $2x - y + z = 2$. ¿Por qué?).

Rectas en el espacio tridimensional

Como se ha observado anteriormente, dos planos cualesquiera no paralelos en $\mathbb{R}^3$ determinan una única recta de intersección, y se puede obtener un vector paralelo a dicha recta calculando el producto vectorial de los vectores normales a los dos planos.

Supongamos que $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ es el vector de posición de un punto P_0 y que $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es un vector distinto de cero. Existe una única recta que pasa por el punto P_0 y es paralela a $\mathbf{v}$. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es el vector de posición de cualquier otro punto P de la recta, entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ está en dicha recta y, por tanto, es paralelo a $\mathbf{v}$ (*véase* la Figura 10.31). Así, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$ para algún número real t. Esta ecuación generalmente se escribe de la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

que se denomina **ecuación paramétrica vectorial de la recta**. Se pueden obtener todos los puntos de la recta variando el parámetro t desde $-\infty$ hasta ∞. El vector $\mathbf{v}$ se denomina **vector de dirección** de la recta.

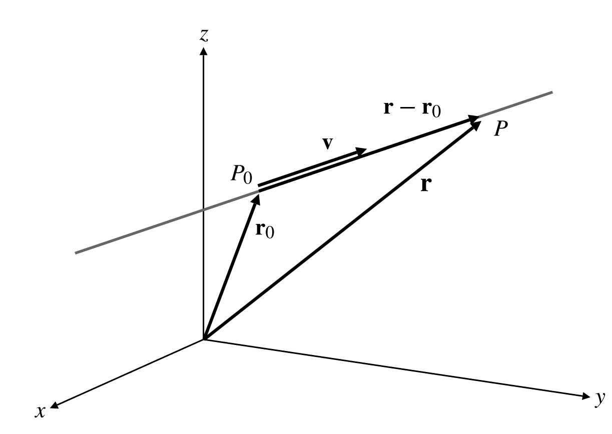


Figura 10.31 La recta que pasa por el punto P_0 y es paralela a $\mathbf{v}$.

Descomponiendo la ecuación paramétrica vectorial en sus componentes se obtienen las **ecuaciones paramétricas escalares** de la recta:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

Parece que se trata de *tres* ecuaciones lineales, pero el parámetro t se puede eliminar para obtener *dos* ecuaciones lineales en x, y y z. Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces se puede despejar t de las tres ecuaciones escalares y así obtener

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

que se denomina **forma estándar** de las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y es paralela al vector $\mathbf{v}$. La forma estándar se debe modificar si cualquiera de las componentes de $\mathbf{v}$ se anula. Por ejemplo, si $c = 0$, las ecuaciones son

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \qquad z = z_0$$

Nótese que ninguna de las ecuaciones anteriores de la recta es única; todas dependen de la selección particular del punto (x_0, y_0, z_0) de la recta. En general, siempre se pueden utilizar las ecuaciones de dos planos no paralelos para representar su recta de intersección.

Ejemplo 5 **(Ecuaciones de rectas)**

(a) Las ecuaciones

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 \\ z = -4t \end{cases}$$

representan la recta que pasa por el punto (2, 3, 0) y es paralela al vector $\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$.

(b) La recta que pasa por el punto (1, −2, 3) y es perpendicular al plano $x - 2y + 4z = 5$ es paralela al vector normal $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ de dicho plano. Por tanto, la ecuación paramétrica vectorial de la recta es

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + t(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

y sus ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Sus ecuaciones en forma estándar son

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{4}$$

Ejemplo 6 Obtenga un vector de dirección de la recta de intersección de los planos

$$x + y - z = 0 \quad \text{y} \quad y + 2z = 6$$

y exprese las ecuaciones en forma estándar de dicha recta.

Solución Los vectores normales a los dos planos son, respectivamente, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{n}_2 = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Por consiguiente, la expresión de un vector de dirección de su recta de intersección es

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Necesitamos saber un punto de la recta para escribir sus ecuaciones en forma estándar. Podemos encontrar dicho punto asignando un valor a una coordenada y calculando las otras dos a partir de las ecuaciones dadas. Por ejemplo, tomando $z = 0$ en las dos ecuaciones, se llega a $y = 6$ y $x = -6$, por lo que $(-6, 6, 0)$ es un punto de la recta. Entonces, las ecuaciones en forma estándar de la recta son

$$\frac{x+6}{3} = \frac{y-6}{-2} = z$$

Este resultado no es único; en vez de $(-6, 6, 0)$ se podría haber utilizado cualquier otro punto de la recta. También se podría haber obtenido un vector de dirección $\mathbf{v}$ restando los vectores de posición de dos puntos diferentes de la recta.

Distancias

La **distancia** entre dos objetos geométricos siempre se refiere a la mínima distancia entre dos puntos, cada uno de ellos perteneciente a uno de los objetos. En el caso de objetos planos, como rectas y planos definidos por ecuaciones lineales, esas distancias mínimas se pueden determinar en general utilizando argumentos geométricos, sin necesidad de utilizar cálculo.

Ejemplo 7 **(Distancia de un punto a un plano)**

(a) Calcule la distancia del punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ al plano $\mathcal{P}$ cuya ecuación es $Ax + By + Cz = D$.

(b) ¿Cuál es la distancia del punto (2, −1, 3) al plano $2x - 2y - z = 9$?

Solución

(a) Sea $\mathbf{r}_0$ el vector de posición de P_0, y sea $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ el vector normal al plano $\mathcal{P}$. Sea P_1 el punto del plano $\mathcal{P}$ más cercano a P_0. Entonces, $\overrightarrow{P_1P_0}$ es perpendicular a $\mathcal{P}$ y, por tanto, paralelo a $\mathbf{n}$. La distancia desde P_0 a $\mathcal{P}$ es $s = |\overrightarrow{P_1P_0}|$. Si P, cuyo vector de posición es $\mathbf{r}$, es un punto cualquiera de $\mathcal{P}$, entonces s es la longitud de la proyección de $\overrightarrow{PP_0} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$ en la dirección de $\mathbf{n}$ (*véase* la Figura 10.32). Por tanto,

$$s = \left|\frac{\overrightarrow{PP_0} \bullet \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right| = \frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \bullet \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{r}_0 \bullet \mathbf{n} - \mathbf{r} \bullet \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

Como $P = (x, y, z)$ está en $\mathcal{P}$, tenemos que $\mathbf{r} \bullet \mathbf{n} = Ax + By + Cz = D$. En términos de las coordenadas (x_0, y_0, z_0) de P_0 podemos representar, por tanto, la distancia desde P_0 hasta $\mathcal{P}$ como

$$s = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(b) La distancia de $(2, -1, 3)$ al plano $2x - 2y - z = 9$ es

$$s = \frac{|2(2) - 2(-1) - 1(3) - 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-6|}{3} = 2 \text{ unidades}$$

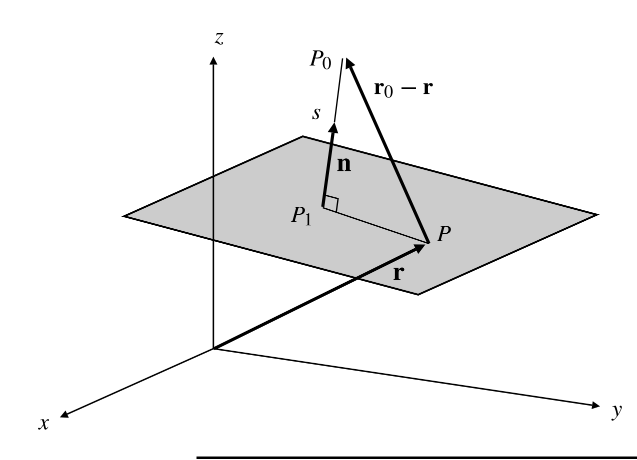


Figura 10.32 La distancia de P_0 al plano $\mathcal{P}$ es la longitud del vector proyección de PP_0 sobre el vector normal $\mathbf{n}$ al plano $\mathcal{P}$, siendo P un punto cualquiera de $\mathcal{P}$. ■

Ejemplo 8 **(Distancia de un punto a una recta)**

(a) Calcule la distancia del punto P_0 a la recta a $\mathcal{L}$ que pasa por el punto P_1 y es paralela al vector $\mathbf{v}$ distinto de cero.
(b) ¿Cuál es la distancia del punto $(2, 0, -3)$ a la recta $\mathbf{r} = \mathbf{i} + (1 + 3t)\mathbf{j} - (3 - 4t)\mathbf{k}$?

Solución

(a) Sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}_1$ los vectores de posición de P_0 y P_1, respectivamente. El punto P_2 en $\mathcal{L}$ más cercano P_0 debe cumplir que P_2P_0 es perpendicular a $\mathcal{L}$. La distancia de P_0 a $\mathcal{L}$ es

$$s = |P_2P_0| = |P_1P_0| \operatorname{sen}\theta = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1| \operatorname{sen}\theta$$

siendo θ el ángulo que forman $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$ y $\mathbf{v}$ (*véase* la Figura 10.33(a)). Como

$$|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{v}| = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1||\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$$

tenemos que

$$s = \frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

(b) La recta $\mathbf{r} = \mathbf{i} + (1 + 3t)\mathbf{j} - (3 - 4t)\mathbf{k}$ pasa por $P_1 = (1, 1, -3)$ y es paralela a $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. La distancia de $P_0 = (2, 0, -3)$ a esta recta es

$$\begin{aligned} s &= \frac{|((2-1)\mathbf{i} + (0-1)\mathbf{j} + (-3+3)\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{|(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})|}{5} = \frac{|-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}|}{5} = \frac{\sqrt{41}}{5} \text{ unidades} \end{aligned}$$

Ejemplo 9 **(Distancia entre dos rectas)** Calcule la distancia entre las rectas $\mathcal{L}_1$ que pasa por el punto P_1 y es paralela al vector $\mathbf{v}_1$ y $\mathcal{L}_2$ que pasa por el punto P_2 y es paralela al vector $\mathbf{v}_2$.

Solución Sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ los vectores de posición de los puntos P_1 y P_2, respectivamente. Si P_3 y P_4 (cuyos vectores de posición son $\mathbf{r}_3$ y $\mathbf{r}_4$) son los puntos de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente, más cercanos entre sí, entonces $\overrightarrow{P_3P_4}$ es perpendicular a ambas rectas y, por tanto, es paralelo a $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ (*véase* la Figura 10.33(b)). $\overrightarrow{P_3P_4}$ es el vector proyección de $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ sobre $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Por consiguiente, la distancia $s = |\overrightarrow{P_3P_4}|$ entre las dos rectas se expresa como

$$s = |\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3| = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \bullet (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}$$

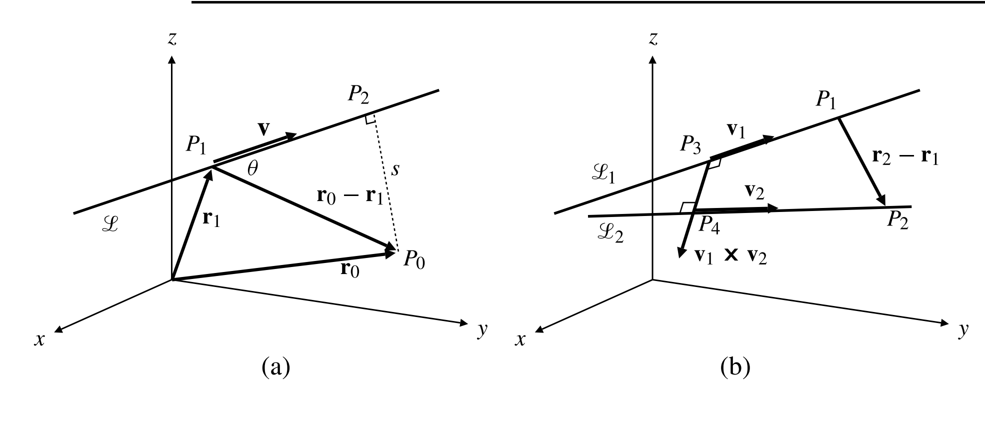


Figura 10.33
(a) La distancia de P_0 a la recta $\mathcal{L}$ es $s = |P_0P_1|\,\text{sen}\,\theta$.
(b) La distancia entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es la longitud de la proyección de P_1P_2 sobre el vector $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.

Ejercicios 10.4

1. Una única ecuación en las coordenadas (x, y, z) no necesita representar siempre una «superficie» bidimensional en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ representa un solo punto, el $(0, 0, 0)$, cuya dimensión es cero. Proporcione ejemplos de una única ecuación en x, y y z que represente:

(a) Una recta unidimensional.
(b) El espacio $\mathbb{R}^3$ completo.
(c) Ningún punto en absoluto (es decir, el conjunto vacío).

En los Ejercicios 2-9, obtenga las ecuaciones de los planos que cumplen las condiciones dadas.

2. Pasa por el punto $(0, 2, -3)$ y es normal al vector $4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

3. Pasa por el origen y es normal al vector $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

4. Pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano $3x + y - 2z = 15$.

5. Pasa por los tres puntos $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 2)$ y $(0, 3, 3)$.

6. Pasa por los tres puntos $(-2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 4)$.

7. Pasa por los puntos $(1, 1, 1)$ y $(2, 0, 3)$ y es perpendicular al plano $x + 2y - 3z = 0$.

8. Pasa por la recta de intersección de los planos $2x + 3y - z = 0$ y $x - 4y + 2z = -5$ y también por el punto $(-2, 0, -1)$.

9. Pasa por la recta $x + y = 2$, $y - z = 3$ y es perpendicular al plano $2x + 3y + 4z = 5$.

10. ¿Con qué condición geométrica tres puntos distintos en $\mathbb{R}^3$ no determinan un plano único que pasa por ellos? ¿Cómo se puede expresar correctamente esta condición

en función de los vectores de posición $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ de los tres puntos?

11. Obtenga una condición sobre los vectores de posición de cuatro puntos que garantice que dichos puntos son *coplanares*, es decir, que están en el mismo plano.

Describa geométricamente las familias de planos dependientes de un parámetro de los Ejercicios 12-14 (λ es un parámetro real).

12. $x + y + z = \lambda$

*****13.** $x + \lambda y + \lambda z = \lambda$

*****14.** $\lambda x + \sqrt{1-\lambda^2}\,y = 1$

En los Ejercicios 15-19, obtenga las ecuaciones de la recta especificada en forma paramétrica vectorial y escalar, y también en forma estándar.

15. Pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralela al vector $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

16. Pasa por el punto $(-1, 0, 1)$ es perpendicular al plano $2x - y + 7z = 12$.

17. Pasa por origen y es paralela a la recta de intersección de los planos $x + 2y - z = 2$ y $2x - y + 4z = 5$.

18. Pasa por el punto $(2, -1, -1)$ y es paralela a los planos $x + y = 0$ y $x - y + 2z = 0$.

19. Pasa por el punto $(1, 2, -1)$ y forma ángulos iguales con las direcciones positivas de los ejes coordenados.

En los Ejercicios 20-22, calcule las ecuaciones de la recta dada en forma estándar.

20. $\mathbf{r} = (1 - 2t)\mathbf{i} + (4 + 3t)\mathbf{j} + (9 - 4t)\mathbf{k}$

21. $\begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = 3t \\ z = 7 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 4 \end{cases}$

23. Si $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, demuestre que las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

representan una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.

24. ¿Qué puntos de la recta del Ejercicio 23 corresponden a los valores del parámetro $t = -1$, $t = 1/2$ y $t = 2$? Describa sus posiciones.

25. ¿En qué condiciones sobre los vectores de posición de cuatro puntos diferentes P_1, P_2, P_3 y P_4, la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 cortará en un único punto a la recta que pasa por los puntos P_3 y P_4?

En los Ejercicios 26-29, calcule las distancias requeridas.

26. Desde el origen al plano $x + 2y + 3z = 4$.

27. Desde el punto (1, 2, 0) al plano $3x - 4y - 5z = 2$.

28. Desde el origen a la recta $x + y + z = 0$, $2x - y - 5z = 1$.

29. Entre las rectas

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + 2z = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2z = -5 \end{cases}$$

30. Demuestre que la recta $x - 2 = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ es paralela al plano $2y - z = 1$. ¿Cuál es la distancia entre la recta y el plano?

En los Ejercicios 31 y 32, describa la familia de rectas dependientes de un parámetro representada por las ecuaciones dadas (λ es un parámetro real).

*****31.** $(1 - \lambda)(x - x_0) = \lambda(y - y_0)$, $z = z_0$.

*****32.** $\dfrac{x - x_0}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \dfrac{y - y_0}{\lambda} = z - z_0$.

33. ¿Por qué la ecuación de segundo grado factorizada

$$(A_1x + B_1y + C_1z - D_1)(A_2x + B_2y + C_2z - D_2) = 0$$

representa una pareja de planos en vez de una línea recta?

10.5 Superficies cuadráticas

La forma más general de una ecuación de segundo grado en tres variables es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = J$$

No intentaremos realizar la tarea (bastante difícil) de clasificar todas las superficies que dicha ecuación puede representar, pero sí examinaremos algunos casos especiales de interés. Observemos en primer lugar que si la ecuación anterior se puede factorizar de la forma

$$(A_1x + B_1y + C_1z - D_1)(A_2x + B_2y + C_2z - D_2) = 0$$

entonces la gráfica es, en realidad, una pareja de planos,

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

o bien uno solo si las dos ecuaciones lineales representan el mismo plano. Esto se considera un caso degenerado. Cuando esa factorización no es posible, la superficie (denominada **superficie cuadrática**) no será plana, aunque, no obstante, todavía puede contener rectas. Las superficies cuadráticas no degeneradas se pueden dividir en las siguientes seis categorías.

Esferas. La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ representa una esfera de radio a centrada en el origen. De forma más general,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

representa una esfera de radio a centrada en el punto (x_0, y_0, z_0). Si una ecuación cuadrática en x, y y z tiene los mismos coeficientes de x^2, y^2 y z^2 y no tiene otros términos de segundo grado, entonces, de representar una superficie, será una esfera. El centro se puede obtener completando los cuadrados, de la misma forma que en el caso de circunferencias en el plano.

Cilindros. La ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, independiente de z, representa un **cilindro circular recto** de radio a y cuyo eje es el eje z (*véase* la Figura 10.34(a)). La intersección del cilindro con el plano horizontal $z = k$ es la circunferencia cuyas ecuaciones son

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = k \end{cases}$$

Los cilindros definidos por ecuaciones cuadráticas pueden aparecer con otras formas: elípticos, parabólicos e hiperbólicos. Por ejemplo, $z = x^2$ representa un cilindro parabólico con vértice en el eje y (*véase* la Figura 10.34(b)). En general, una ecuación en dos variables representará un cilindro en el espacio tridimensional.

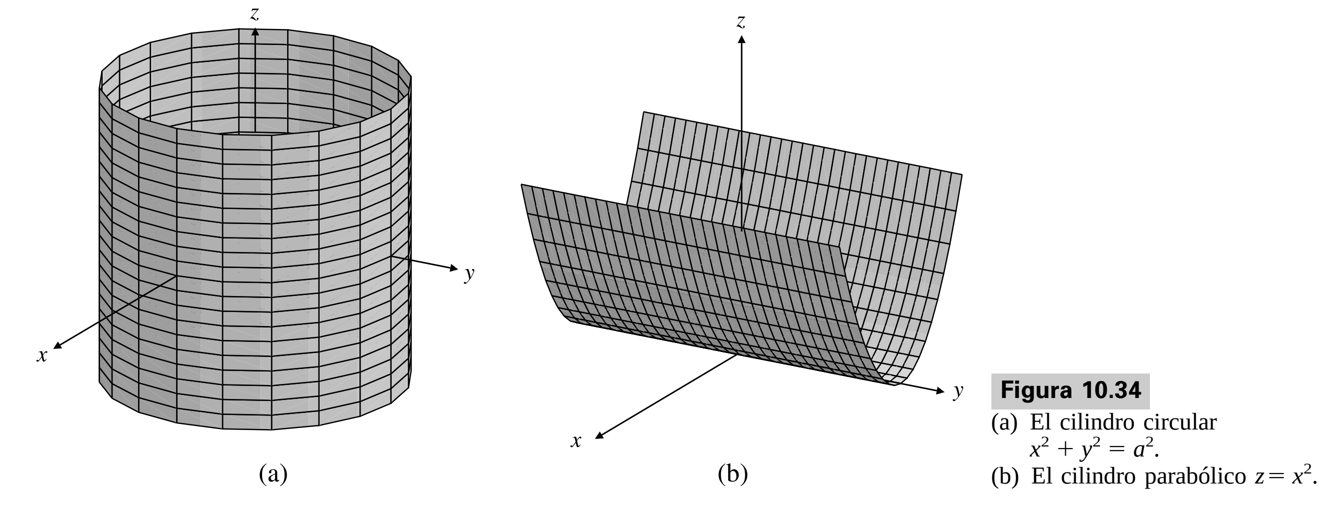


Figura 10.34
(a) El cilindro circular $x^2 + y^2 = a^2$.
(b) El cilindro parabólico $z = x^2$.

Conos. La ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ representa un **cono circular recto** cuyo eje coincide con el eje z. Su superficie se genera rotando alrededor del eje z la recta $z = y$ en el plano yz. Esta *generatriz* forma un ángulo de 45º con el eje del cono. Las secciones cruzadas del cono en planos paralelos al plano xy son circunferencias (*véase* la Figura 10.35(a)). La ecuación $x^2 + y^2 = a^2z^2$ representa también un cono circular recto con vértice en el origen y eje coincidente con el eje z, pero cuyo semiángulo con la vertical es $\alpha = \tan^{-1} a$. Un cono circular tiene secciones planas que pueden ser elípticas, parabólicas e hiperbólicas. A la inversa, cualquier cono cuadrático no degenerado tiene una dirección tal que las secciones planas perpendiculares a dicha dirección son cir-

culares. En ese sentido, todo cono cuadrático es un cono circular, aunque puede ser *oblicuo* en vez de circular recto, en el sentido de que la recta que une el centro de las secciones cruzadas circulares no tiene por qué ser perpendicular a dichas secciones circulares (*véase* el Ejercicio 24).

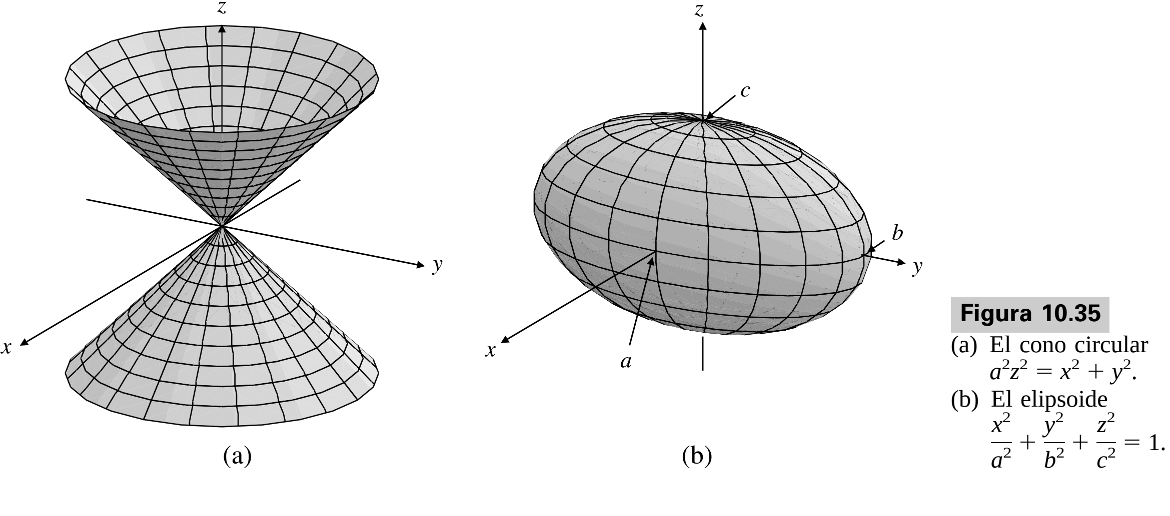


Figura 10.35
(a) El cono circular $a^2z^2 = x^2 + y^2$.
(b) El elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Elipsoides. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

representa un **elipsoide** de *semiejes* a, b y c (*véase* la Figura 10.35(b)). La superficie es oval y está encerrada dentro del paralelepípedo rectangular $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-c \leqslant z \leqslant c$. Si $a = b = c$, el elipsoide se convierte en una esfera. En general, todas las secciones planas de los elipsoides son elipses. Esto es fácil de ver en el caso de secciones cruzadas paralelas a los ejes coordenados, pero es más difícil de ver para otros planos.

Paraboloides. Las ecuaciones

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{y} \quad z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

representan, respectivamente, a un **paraboloide elíptico** y a un **paraboloide hiperbólico** (*véase* la Figura 10.36(a) y (b)). Las secciones cruzadas en planos $z = k$ (siendo k una constante positi-

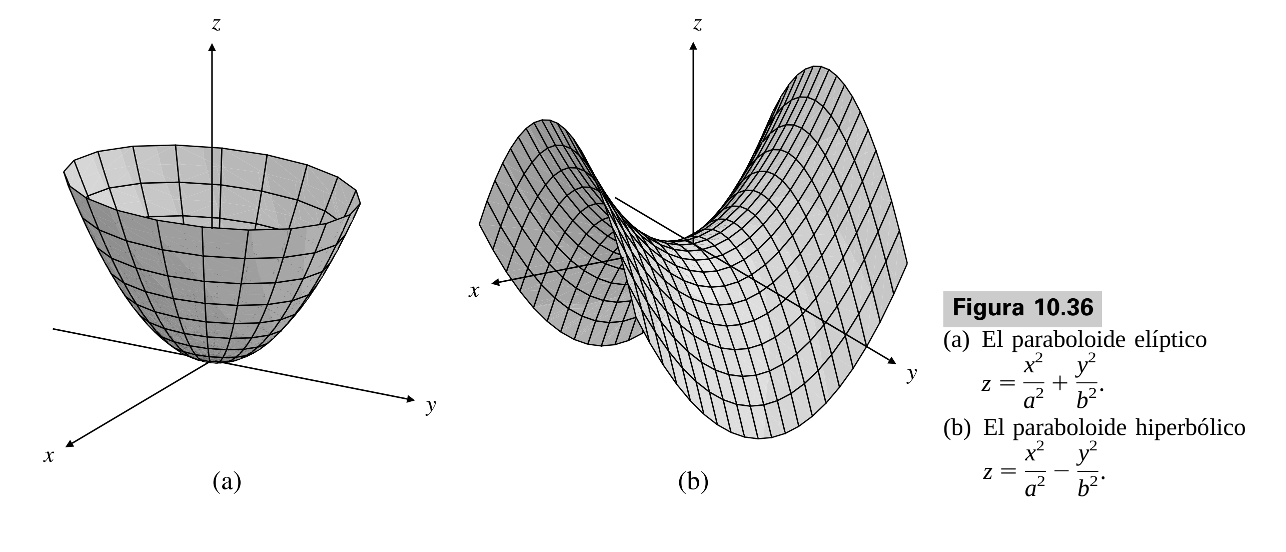


Figura 10.36
(a) El paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.
(b) El paraboloide hiperbólico $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

va) son elipses (circunferencias si $a = b$) e hipérbolas, respectivamente. Las antenas parabólicas tienen la forma de un paraboloide circular. El paraboloide hiperbólico es una **superficie reglada**. Una superficie reglada es aquella tal que por cada punto de la misma pasa una recta contenida completamente en la superficie. Los conos y los cilindros son también ejemplos de superficies regladas. Hay dos familias de rectas dependientes de un parámetro contenidas en un paraboloide hiperbólico:

$$\begin{cases} \lambda z = \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} \\ \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \mu z = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \\ \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

siendo λ y μ parámetros reales. Todo punto del paraboloide hiperbólico pertenece a una recta de cada familia.

Hiperboloides. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

representa una superficie denominada **hiperboloide de una hoja** (*véase* la Figura 10.37(a)). La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

representa un **hiperboloide de dos hojas** (*véase* la Figura 10.37(b)). Ambas superficies tienen secciones cruzadas elípticas en planos horizontales, y secciones cruzadas hiperbólicas en planos verticales. Ambas son *asintóticas* con el cono elíptico cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

ya que se aproximan arbitrariamente a ese cono cuando se alejan arbitrariamente del origen. Como el paraboloide hiperbólico, el hiperboloide de una hoja es una superficie reglada.

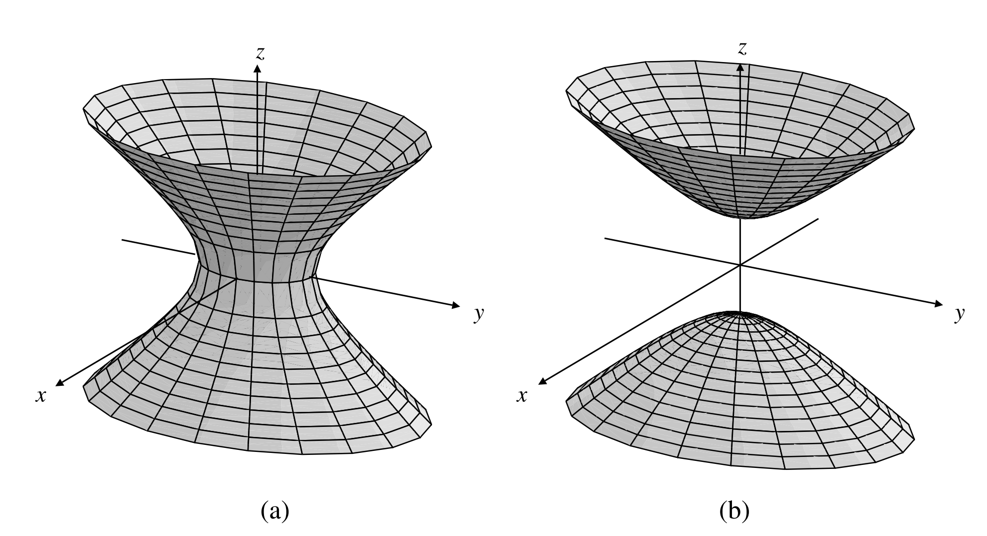


Figura 10.37

(a) El hiperboloide de una hoja $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

(b) El hiperboloide de dos hojas $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$.

Ejercicios 10.5

Identifique las superficies representadas por las ecuaciones de los Ejercicios 1-16 y dibuje sus gráficas.

1. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

2. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$

3. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 12z + 27 = 0$

4. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4x - 8y = 8$

5. $z = x^2 + 2y^2$

6. $z = x^2 - 2y^2$

7. $x^2 - y^2 - z^2 = 4$

8. $-x^2 + y^2 + z^2 = 4$

9. $z = xy$

10. $x^2 + 4z^2 = 4$

11. $x^2 - 4z^2 = 4$

12. $y = z^2$

13. $x = z^2 + z$

14. $x^2 = y^2 + 2z^2$

15. $(z - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$

16. $(z - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 4$

Describa y dibuje los objetos geométricos representados por los sistemas de ecuaciones de los Ejercicios 17-20.

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x + y \end{cases}$

19. $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 1 + x \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \\ y = 1 \end{cases}$

21. Obtenga dos familias de rectas dependientes de un parámetro que estén contenidas en el hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

22. Obtenga dos familias de rectas dependientes de un parámetro que estén contenidas en el paraboloide hiperbólico $z = xy$.

23. La ecuación $2x^2 + y^2 = 1$ representa un cilindro con secciones cruzadas elípticas en planos perpendiculares al eje z. Obtenga un vector **a** tal que las secciones cruzadas del cilindro perpendiculares a él sean circulares.

∗**24.** La ecuación $z^2 = 2x^2 + y^2$ representa un cono con secciones cruzadas elípticas en planos perpendiculares al eje z. Obtenga un vector **a** tal que las secciones cruzadas del cono perpendiculares a él sean circulares. *Sugerencia*: Haga primero el Ejercicio 23 y utilice el resultado.

10.6 Un poco de álgebra lineal

El cálculo diferencial es esencialmente el estudio de las aproximaciones lineales a funciones. La recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en $x = x_0$ proporciona la «mejor aproximación lineal» a la función $f(x)$ en las proximidades de x_0. La diferenciación de funciones de varias variables también se puede ver como un proceso de obtener *las mejores aproximaciones lineales*. Por tanto, el lenguaje del álgebra lineal puede ser muy útil para expresar ciertos conceptos en el cálculo de varias variables.

El álgebra lineal es una materia muy amplia y generalmente se estudia de forma independiente del cálculo. Esto es desafortunado, porque la comprensión de las relaciones entre las dos materias puede mejorar grandemente el entendimiento y la apreciación de cada una de ellas. El conocimiento del álgebra lineal, y por tanto la familiaridad con el material considerado en esta sección, *no es esencial* para un estudio fructífero del resto de este libro. Sin embargo, comentaremos de vez en cuando el significado de algún aspecto del cálculo desde el punto de vista del álgebra lineal. Con este fin, necesitamos conocer al menos un poco la terminología y los contenidos de esta materia, especialmente los aspectos relacionados con el manejo de matrices y de sistemas de ecuaciones lineales. En el resto de esta sección presentaremos un resumen de este material. Algunos estudiantes ya estarán familiarizados con este tema y otros lo estudiarán posteriormente. La presentación no intenta ser completa y, por tanto, referimos a los estudiantes interesados a los textos estándar de álgebra lineal, donde pueden encontrar las demostraciones de algunas afirmaciones. Los estudiantes que vayan más allá de este libro y estudien cálculo avanzado y ecuaciones diferenciales necesitarán seguro un conocimiento mucho más amplio del álgebra lineal.

Matrices

Una **matriz** $\mathscr{A}$ de dimensiones $m \times n$ es una disposición rectangular de mn números formando m filas y n columnas. Si a_{ij} es el elemento de la fila i y la columna j, entonces

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En algunas ocasiones, como notación abreviada, se escribe $\mathscr{A} = (a_{ij})$. En este caso se supone que i varía desde 1 hasta m y j desde 1 hasta n. Si $m = n$, se dice que $\mathscr{A}$ es una matriz cuadrada. Los elementos a_{ij} de las matrices que utilizaremos en este libro serán siempre números reales.

La **traspuesta** de una matriz $\mathscr{A}$ $m \times n$ es la matriz $\mathscr{A}^T$ $n \times m$, cuyas filas son las columnas de $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matriz $\mathscr{A}$ se dice que es **simétrica** si $\mathscr{A}^T = \mathscr{A}$. Las matrices simétricas son necesariamente cuadradas. Obsérvese que $(\mathscr{A}^T)^T = \mathscr{A}$ para *toda* matriz $\mathscr{A}$. Muchas veces será conveniente considerar un vector de n componentes como una matriz $n \times 1$ con n filas y una columna:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En ese caso, $\mathbf{x}$ se denomina **vector columna**. $\mathbf{x}^T$ tiene entonces una fila y n columnas, y se denomina **vector fila**:

$$\mathbf{x}^T = (x_1\, x_2 \cdots x_n)$$

Nótese que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}^T$ tienen las mismas componentes, por lo que son idénticos como vectores, aunque parezcan diferentes como matrices.

La mayor parte de la utilidad de las matrices se basa en la siguiente definición de producto de matrices, que permite que las matrices se combinen en una sola, de forma que se mantengan las relaciones lineales.

DEFINICIÓN 7 Producto de matrices

Si $\mathscr{A} = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$ y $\mathscr{B} = (b_{ij})$ es una matriz $n \times p$, entonces el producto $\mathscr{A}\mathscr{B}$ es la matriz $m \times p$ $\mathscr{C} = (c_{ij})$, cuyos elementos son

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, ..., m, \qquad j = 1, ..., p$$

Es decir, c_{ij} es el *producto escalar* de la fila i de $\mathscr{A}$ y la columna j de $\mathscr{B}$ (que son ambas vectores de n componentes).

Nótese que sólo se pueden multiplicar *algunas* parejas de matrices. El producto $\mathscr{A}\mathscr{B}$ sólo está definido si el número de columnas de $\mathscr{A}$ es igual al número de filas de $\mathscr{B}$.

Ejemplo 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 13 & 15 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

El factor de la izquierda tiene 2 filas y 3 columnas, y el factor de la derecha tiene 3 filas y 4 columnas. Por lo tanto, el producto tiene 2 filas y 4 columnas. El elemento de la primera fila y la tercera columna del producto, 13, es el producto escalar de la primera fila, (1, 0, 3), del factor de la izquierda y la tercera columna, (1, 3, 4), del segundo factor:

$$1 \times 1 + 0 \times 3 + 3 \times 4 = 13$$

Con un poco de práctica podemos calcular fácilmente los elementos de un producto de matrices moviendo el dedo índice izquierdo por las filas del factor izquierdo y el dedo índice derecho por las columnas del factor derecho y realizando a la vez los productos escalares.

Ejemplo 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ y - z \\ -2x + 3y \end{pmatrix}$$

El producto de una matriz 3×3 con un vector columna de 3 componentes es un vector columna de 3 componentes.

La multiplicación de matrices es *asociativa*. Esto significa que

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$$

suponiendo que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tienen dimensiones compatibles con la formación de los diversos productos. Por tanto, tiene sentido escribir $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$. Sin embargo, la multiplicación de matrices *no es conmutativa*. De hecho, si $\mathcal{A}$ es una matriz $m \times n$ y $\mathcal{B}$ es una matriz $n \times p$, entonces el producto $\mathcal{A}\mathcal{B}$ está definido, pero el producto $\mathcal{B}\mathcal{A}$ no está definido a menos que $m = p$. Incluso si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son matrices cuadradas del mismo tamaño, no es necesariamente cierto que $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

Ejemplo 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{pero} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Se deja como tarea al lector verificar que si el producto $\mathcal{A}\mathcal{B}$ está definido, entonces la traspuesta del producto es el producto de las traspuestas *en orden inverso*:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^T = \mathcal{B}^T\mathcal{A}^T$$

Determinantes e inversos de matrices

En la Sección 10.3 presentamos los determinantes 2×2 y 3×3 como ciertas expresiones algebraicas asociadas con matrices cuadradas de dimensiones 2×2 y 3×3. En general, es posible definir el determinante $\det(\mathcal{A})$ de cualquier matriz cuadrada. Dada una matriz $\mathcal{A}$ $n \times n$, definimos

$$\det(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

No intentaremos aquí dar una definición formal de determinante, pero sí diremos que las propiedades de los determinantes que se establecieron para el caso 3×3 en la Sección 10.3 continúan siendo válidas. En particular, un determinante $n \times n$ se puede desarrollar en menores sobre cualquier fila o columna y, por tanto, se puede expresar como una suma de productos de determinantes $(n - 1) \times (n - 1)$. Continuando con este proceso, siempre se puede reducir el cálculo de cualquier determinante $n \times n$ al cálculo de (quizá muchos) determinantes 2×2 o 3×3. Es importante darse cuenta de que el método de la «diagonal» para calcular determinantes 2×2 y 3×3 no se puede aplicar a determinantes 4×4 o de orden mayor.

Ejemplo 4

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(-3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) - \left(-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 3(0 - 1) + 2(2 + 1) + 1(2 - 3) = 2$$

Se desarrolla el determinante 4×4 en menores sobre la tercera columna para obtener dos determinantes 3×3. El primero de ellos se desarrolla sobre la segunda fila y el otro sobre la segunda columna.

Además de las propiedades indicadas en la Sección 10.3, los determinantes tienen otras dos propiedades muy importantes, objeto del siguiente teorema.

TEOREMA 3 Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son matrices $n \times n$, entonces

(a) $\det(\mathscr{A}^T) = \det(\mathscr{A})$ y

(b) $\det(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \det(\mathscr{A})\det(\mathscr{B})$.

En esta sección no demostraremos ningún teorema. Se remite al lector a los textos de álgebra lineal. El apartado (a) no es muy difícil de demostrar, incluso en el caso de n general. El apartado (b) no se puede demostrar en general sin dar una definición formal de determinante. Sin embargo, se recomienda que el lector verifique (b) para el caso de matrices 2×2 por cálculo directo.

Se dice que la matriz cuadrada $\mathscr{A}$ es **singular** si $\det(\mathscr{A}) = 0$. Si $\det(\mathscr{A}) \neq 0$ se dice que $\mathscr{A}$ es **no singular** o **invertible**.

Observación Si $\mathscr{A}$ es una matriz 3×3, entonces $\det(\mathscr{A})$ es el producto escalar triple de las filas de $\mathscr{A}$ y su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo generado por dichas filas. Por tanto, $\mathscr{A}$ es no singular si y sólo si sus filas generan un paralelepípedo de volumen positivo; los vectores de las filas no pueden estar todos en el mismo plano. Lo mismo se puede decir de las columnas de $\mathscr{A}$.

En general, una matriz $n \times n$ es singular si sus filas (o columnas), consideradas como vectores, cumplen una o más ecuaciones lineales de la forma

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

donde al menos hay un coeficiente c_i distinto de cero. Un conjunto de vectores que cumplen la ecuación lineal anterior se denomina **linealmente dependiente** porque uno de dichos vectores se puede expresar siempre como combinación lineal de los otros; si $c_1 \neq 0$, entonces

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{x}_2 - \frac{c_3}{c_1}\mathbf{x}_3 - \cdots - \frac{c_n}{c_1}\mathbf{x}_n$$

Todas las combinaciones lineales de los vectores de un conjunto linealmente dependiente de n vectores en $\mathbb{R}^n$ debe estar en un **subespacio** de dimensión menor que n.

La **matriz identidad** $n \times n$ se define como

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

con un valor de 1 en todas las posiciones de su **diagonal principal** y un valor de 0 en todas las otras posiciones. Evidentemente, $\boldsymbol{I}$ conmuta con toda matriz $n \times n$: $\boldsymbol{I}\mathcal{A} = \mathcal{A}\boldsymbol{I} = \mathcal{A}$. Además $\det(\boldsymbol{I}) = 1$. La matriz identidad tiene el mismo papel en álgebra de matrices que el número 1 en aritmética.

Todo número x distinto de cero tiene un inverso x^{-1} tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. En el caso de matrices cuadradas se puede plantear una situación similar. La **inversa** de una matriz cuadrada *no singular* $\mathcal{A}$ es una matriz cuadrada no singular $\mathcal{A}^{-1}$ que cumple

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \boldsymbol{I}$$

TEOREMA 4 Toda matriz cuadrada no singular $\mathcal{A}$ tiene una inversa *única* $\mathcal{A}^{-1}$. Además, la inversa cumple

(a) $\det(\mathcal{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathcal{A})}$,

(b) $(\mathcal{A}^{-1})^T = (\mathcal{A}^T)^{-1}$.

No necesitaremos calcular inversas muchas veces, pero hay que indicar que se puede hacer resolviendo sistemas de ecuaciones lineales, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 Demuestre que la matriz $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es no singular y calcule su inversa.

Solución $\det(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$. Por consiguiente, $\mathcal{A}$ es no singular e invertible. Sea $\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

por lo que a, b y c deben cumplir el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ a + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

Evidentemente $a = b = d = 1/2$, $c = -1/2$, y

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En general, la inversión de matrices no se realiza mediante el método del ejemplo anterior, sino mediante un proceso de ordenamiento de ciertas operaciones sobre las filas de la matriz para transformarla en la matriz identidad. Cuando se realizan las mismas operaciones en las filas de la

matriz identidad, se obtiene la inversa de la matriz original. Una descripción más detallada del método se puede encontrar en los textos de álgebra lineal. Una matriz singular no tiene inversa.

Transformaciones lineales

Una función **F** cuyo dominio sea el espacio m-dimensional $\mathbb{R}^m$ y cuyo rango esté contenido en el espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$ se denomina **transformación lineal de** $\mathbb{R}^m$ **en** $\mathbb{R}^n$ si cumple

$$\mathbf{F}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mu\mathbf{F}(\mathbf{y})$$

para todos los puntos **x** e **y** de $\mathbb{R}^m$ y todos los números reales λ y μ. A esa transformación lineal **F** le corresponde una matriz $\mathcal{F}$ $n \times m$ tal que para todo **x** de $\mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}\mathbf{x}$$

o, expresado en función de los componentes de **x**,

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, ..., x_m) = \mathcal{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Se dice que $\mathcal{F}$ es la **representación matricial** de la transformación lineal **F**. Si $m = n$, de modo que **F** transforma $\mathbb{R}^m$ en sí mismo, entonces $\mathcal{F}$ es una matriz cuadrada. En este caso $\mathcal{F}$ es no singular si y sólo si **F** es uno a uno y su rango es el espacio $\mathbb{R}^m$ completo.

Una composición de transformaciones lineales sigue siendo una transformación lineal, y por tanto tendrá una representación matricial. La motivación real que subyace en la definición del producto de matrices es que la representación matricial de una *composición* de transformaciones lineales es el *producto* de las representaciones matriciales individuales de cada una de las transformaciones que se componen.

TEOREMA 5 Si **F** es una transformación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ representada por la matriz $\mathcal{F}$ de dimensiones $n \times m$ y si **G** es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ representada por la matriz $\mathcal{G}$ de dimensiones $p \times n$, entonces la composición $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ definida como

$$\mathbf{G} \circ \mathbf{F}(x_1, x_2, ..., x_m) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(x_1, x_2, ..., x_m))$$

es asimismo una transformación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^p$ representada por la matriz $\mathcal{G}\mathcal{F}$ de dimensiones $p \times m$. Es decir,

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) = \mathcal{G}\mathcal{F}\mathbf{x}$$

Ecuaciones lineales

Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

se puede escribir en forma compacta como una única ecuación matricial,

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

siendo

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Compárese la ecuación $\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con la ecuación $ax = b$ para una sola incógnita x. La ecuación $ax = b$ tiene solución única $x = a^{-1}b$ siempre que $a \neq 0$. Por analogía, el sistema lineal $\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única dada por

$$\mathbf{x} = \mathscr{A}^{-1}\mathbf{b}$$

siempre que $\mathscr{A}$ sea no singular. Para ver que esto es así, basta con multiplicar por la izquierda los dos miembros de la ecuación $\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por $\mathscr{A}^{-1}$; $\mathbf{x} = \boldsymbol{I}\mathbf{x} = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathscr{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Si $\mathscr{A}$ es singular, entonces el sistema $\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede tener o no tener solución, y si existe solución no será única. Considérese el caso $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (el vector cero). Entonces, cualquier vector $\mathbf{x}$ perpendicular a todas las filas de $\mathscr{A}$ cumplirá el sistema. Como las filas de $\mathscr{A}$ están en un subespacio de dimensión menor que n (porque $\det(\mathscr{A}) = 0$), habrá al menos una recta de tales vectores $\mathbf{x}$. Por tanto, el sistema $\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no tendrá solución única si $\mathscr{A}$ es singular. Lo mismo se puede decir del sistema $\mathscr{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$; existirán vectores distintos de cero $\mathbf{y}$ que lo cumplirán si $\mathscr{A}$ es singular. Pero entonces, si el sistema $\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución $\mathbf{x}$, debe cumplirse

$$(\mathbf{y} \bullet \mathbf{b}) = \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{y}^T\mathscr{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T\mathscr{A}^T\mathbf{y})^T = (\mathbf{x}^T\mathbf{0})^T = (0)$$

Por consiguiente, $\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sólo puede tener soluciones para aquellos vectores $\mathbf{b}$ que sean perpendiculares a *toda* solución $\mathbf{y}$ de $\mathscr{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede tener o no tener soluciones si $n < m$. Tendrá soluciones si algún número $m - n$ de las ecuaciones del sistema son *combinaciones lineales* (sumas de múltiplos) de las otras n ecuaciones. Si $n > m$, entonces podemos intentar despejar m variables de las m ecuaciones, con lo que obtenemos una solución que dependerá de las otras $n - m$ variables. Esta solución existirá si el determinante de los coeficientes de las m variables que despejamos no es cero. Éste es un caso especial del **Teorema de la Función Implícita**, que presentaremos en la Sección 12.8.

Ejemplo 6 Resuelva $\begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ x + 2y + 6z = 5 \end{cases}$ expresando x e y en función de z.

Solución El sistema se puede expresar de la forma

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 3z \\ 5 - 6z \end{pmatrix}, \qquad \text{siendo} \qquad \mathscr{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de $\mathscr{A}$ es 3 y su inversa $\mathscr{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathscr{A}^{-1}\begin{pmatrix} 4 + 3z \\ 5 - 6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 + 3z \\ 5 - 6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4z \\ 2 - 5z \end{pmatrix}$$

La solución es $x = 1 + 4z$, $y = 2 - 5z$ (por supuesto, esta solución se podría haber obtenido eliminando la variable x o la variable y de las ecuaciones dadas, sin necesidad de utilizar métodos matriciales). ■

El siguiente teorema establece un resultado de cierta importancia teórica, que expresa en función de determinantes la solución del sistema $\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ cuando $\mathscr{A}$ es no singular.

TEOREMA 6 **Regla de Cramer**

Sea $\mathscr{A}$ una matriz $n \times n$ no singular. Entonces, las componentes del vector solución **x** del sistema

$$\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

son

$$x_1 = \frac{\det(\mathscr{A}_1)}{\det(\mathscr{A})}, \qquad x_2 = \frac{\det(\mathscr{A}_2)}{\det(\mathscr{A})}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(\mathscr{A}_n)}{\det(\mathscr{A})}$$

siendo $\mathscr{A}_j$ la matriz $\mathscr{A}$ donde se ha sustituido su columna j por el vector columna **b**. Es decir,

$$\det(\mathscr{A}_j) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El siguiente ejemplo ilustra de forma concreta el uso de la Regla de Cramer para resolver un sistema lineal específico. Sin embargo, la Regla de Cramer se usa principalmente en un contexto más general (teórico); no es eficiente utilizar determinantes para calcular soluciones de sistemas lineales.

Ejemplo 7 Calcule el punto de intersección de los planos

$$x + y + 2z = 1$$
$$3x + 6y - z = 0$$
$$x - y - 4z = 3$$

Solución La solución del sistema lineal anterior proporcionará las coordenadas del punto de intersección. El determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es

$$\det(\mathscr{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -32$$

por lo que el sistema tiene solución única. Tenemos que

$$x = \frac{1}{-32}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{-64}{-32} = 2$$

$$y = \frac{1}{-32}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \frac{32}{-32} = -1$$

$$z = \frac{1}{-32}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{0}{-32} = 0$$

El punto de intersección es $(2, -1, 0)$. ■

Formas cuadráticas, autovalores y autovectores

Si $\mathbf{x}$ es un vector columna en $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{A} = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$, real y simétrica (es decir, $a_{ij} = a_{ji}$ para $1 \leqslant i, j \leqslant n$), entonces la expresión

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathcal{A} \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

se denomina **forma cuadrática** en $\mathbb{R}^n$ correspondiente a la matriz $\mathcal{A}$. Obsérvese que $Q(\mathbf{x})$ es un número real para todo vector $\mathbf{x}$ de n componentes.

Se dice que $\mathcal{A}$ es **definida positiva** si $Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ distinto de cero. De forma similar, se dice que $\mathcal{A}$ es **definida negativa** si $Q(\mathbf{x}) < 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ distinto de cero. Se dice que $\mathcal{A}$ es **semidefinida positiva** (o **semidefinida negativa**) si $Q(\mathbf{x}) \geqslant 0$ o $Q(\mathbf{x}) \leqslant 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ distinto de cero.

Si $Q(\mathbf{x}) > 0$ para algunos vectores $\mathbf{x}$ distintos de cero y $Q(\mathbf{x}) < 0$ para otros vectores $\mathbf{x}$ (es decir, si $\mathcal{A}$ no es ni semidefinida positiva ni semidefinida negativa), se dice que $\mathcal{A}$ es **indefinida**.

Ejemplo 8 La expresión $Q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ correspondiente a la matriz simétrica

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Obsérvese cómo se obtienen los elementos de la matriz a partir de los coeficientes de Q. Los coeficientes de x^2, y^2 y z^2 forman los elementos de la diagonal principal, y los coeficientes de los términos producto se sitúan divididos por dos en los términos simétricos correspondientes de las otras posiciones de la matriz.

La matriz $\mathcal{A}$ es definida positiva ya que $Q(x, y, z)$ se puede escribir de la forma

$$Q(x, y, z) = x^2 + (x - y)^2 + (x + 2z)^2 + (y + z)^2$$

de donde se puede ver que $Q(x, y, z) \geqslant 0$ para todo (x, y, z) y $Q(x, y, z) = 0$ sólo si $x = y = z = 0$. ■

En la Sección 13.1 utilizaremos la definición positiva o negativa de ciertas matrices para clasificar como máximos y mínimos locales los puntos críticos de funciones de varias variables. Existen criterios útiles para encontrar la definición de una matriz $\mathcal{A}$ que se pueden expresar en función de los *autovalores* de dicha matriz.

Se dice que λ es un **autovalor** de la matriz cuadrada $n \times n$ $\mathcal{A} = (a_{ij})$ si existe un vector columna $\mathbf{x}$ *distinto de cero* tal que $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ o, en otros términos,

$$(\mathcal{A} - \lambda \boldsymbol{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

siendo $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad $n \times n$. El vector $\mathbf{x}$ distinto de cero se denomina **autovector** de $\mathcal{A}$ correspondiente al autovalor λ y sólo puede existir si $\mathcal{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ es una matriz singular, es decir, si

$$\det(\mathcal{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Los autovalores de $\mathcal{A}$ deben satisfacer esta ecuación polinómica de grado n, por lo que pueden ser reales o complejos. Los siguientes teoremas se demuestran en textos estándar de álgebra lineal.

TEOREMA 7 Si $\mathscr{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ es una matriz real y simétrica, entonces

(a) Todos los autovalores de $\mathscr{A}$ son reales.
(b) Todos los autovalores de $\mathscr{A}$ son distintos de cero si $\det(\mathscr{A}) \neq 0$.
(c) $\mathscr{A}$ es definida positiva si todos sus autovalores son positivos.
(d) $\mathscr{A}$ es definida negativa si todos sus autovalores son negativos.
(e) $\mathscr{A}$ es semidefinida positiva si todos sus autovalores son no negativos.
(f) $\mathscr{A}$ es semidefinida negativa si todos sus autovalores son no positivos.
(g) $\mathscr{A}$ es indefinida si tiene al menos un autovalor positivo y al menos un autovalor negativo.

TEOREMA 8 Sea $\mathscr{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ una matriz real simétrica y considérense los determinantes

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \qquad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant n$$

Así, $D_1 = a_{11}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, etc.

(a) Si $D_i > 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces $\mathscr{A}$ es definida positiva.
(b) Si $D_i > 0$ para los números pares i de $\{1, 2, ..., n\}$ y $D_i < 0$ para los números impares i de $\{1, 2, ..., n\}$, entonces $\mathscr{A}$ es definida negativa.
(c) Si $\det(\mathscr{A}) = D_n \neq 0$ pero no se cumple ninguna de las condiciones anteriores, entonces $Q(\mathbf{x})$ es indefinida.
(d) Si $\det(\mathscr{A}) = 0$, entonces $\mathscr{A}$ no es definida positiva ni definida negativa y puede ser semidefinida o indefinida.

Ejemplo 9 Dada la matriz $\mathscr{A}$ del Ejemplo 8, tenemos que

$$D_1 = 3 > 0, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 > 0$$

lo que vuelve a confirmar que la forma cuadrática de ese ejercicio es definida positiva. ∎

Ejercicios 10.6

Calcule los productos de matrices en los Ejercicios 1-4.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

5. Calcule $\mathscr{A}\mathscr{A}^T$ y $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}\mathscr{A}$, siendo

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Calcule $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$, $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}^T\mathscr{A}\mathbf{x}$, siendo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathscr{A} = \begin{pmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{pmatrix}$$

En los Ejercicios 7 y 8, calcule los determinantes.

7. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

9. Demuestre que si $\mathscr{A} = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$ para la que $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$, entonces $\det(\mathscr{A}) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$, el producto de los elementos de la diagonal principal de $\mathscr{A}$.

10. Demuestre que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x$, y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

Intente generalizar este resultado al caso $n \times n$.

11. Verifique la propiedad asociativa $(\mathscr{A}\mathscr{B})\mathscr{C} = \mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{C})$ mediante cálculo directo para el caso de tres matrices 2×2 arbitrarias.

12. Demuestre que $\det(\mathscr{A}^T) = \det(\mathscr{A})$ para matrices $n \times n$ mediante inducción en n. Comience con el caso 2×2.

13. Verifique por cálculo directo que $\det(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \det(\mathscr{A})\det(\mathscr{B})$ se cumple para dos matrices arbitrarias 2×2.

14. Sea $\mathscr{A}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Demuestre que

$$(\mathscr{A}_\theta)^T = (\mathscr{A}_\theta)^{-1} = \mathscr{A}_{-\theta}$$

Calcule las inversas de las matrices de los Ejercicios 15 y 16.

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

17. Utilice el resultado del Ejercicio 16 para resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} x - z = -2 \\ -x + y = 1 \\ 2x + y + 3z = 13 \end{cases}$$

18. Resuelva el sistema del Ejercicio 17 utilizando la Regla de Cramer.

19. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

20. Verifique el Teorema 5 para el caso especial en el que **F** y **G** son transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

En los Ejercicios 21-26, clasifique las matrices simétricas dadas como definidas positivas o negativas, semidefinidas positivas o negativas o indefinidas.

21. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **22.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10.7 Uso de Maple para cálculos con vectores y matrices

El uso de un sistema de álgebra por computador puede facilitar muchas tareas tediosas necesarias en el cálculo. Esto es especialmente cierto en el caso del cálculo multivariable y vectorial, ya que las operaciones pueden volverse rápidamente inmanejables cuando el número de variables crece. El Doctor Robert Israel, colega del autor de este libro, ha escrito un libro excelente, *Calculus, the Maple Way*, que muestra cómo utilizar Maple de forma efectiva en la realización de operaciones de cálculo con una variable y con varias variables.

En este libro presentamos algunas veces la potencia de Maple para realizar cálculos con funciones de varias variables y funciones vectoriales de una o más variables. Esta sección ilustra algunas características básicas del cálculo con vectores y matrices. Los ejemplos se han realizado utilizando Maple 9, pero Maple 6 o posterior producirá un resultado similar.

Las capacidades de operación de Maple con vectores y matrices no están en su núcleo, sino que se encuentran incluidas en un paquete de procedimientos denominado **LinearAlgebra**.

Por tanto, es imprescindible cargar este paquete al comienzo de la sesión donde se va a necesitar:

```
> with(LinearAlgebra) :
```

Los comandos de Maple se finalizan en general con un punto y coma, en vez de con dos puntos. Al utilizar los dos puntos se suprime la salida. Si hubiéramos usado un punto y coma para finalizar el comando anterior, se hubiera producido una lista de todos los procedimientos definidos en el paquete LinearAlgebra.

Maple incluye también un segundo paquete de álgebra lineal denominado **linalg**, pero es inferior a LinearAlgebra, especialmente para la realización de cálculos numéricos de alto coste computacional, utilizando matrices grandes; además es algo más difícil de usar. Sin embargo, el paquete linalg ya estaba presente en versiones de Maple anteriores a la 6, y todavía está presente en la versión 9. No utilizaremos aquí linalg, pero se utilizó en vez de LinearAlgebra en la quinta edición de este libro.

Vectores

Hay varias formas de definir vectores en Maple; la más fácil es utilizar las construcciones `Vector([,])` o `<,>`, donde se incluye una lista de los componentes del vector separadas por comas dentro de los corchetes o de los paréntesis angulares. Ambas construcciones producen vectores columna:

```
> Uc := Vector([1, 2, 3]) ; Vc := <a, b, c> ;
```

$$Uc := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Vc := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Para producir un vector fila se puede utilizar `Vector[row]([,])`; también se puede definir un vector fila utilizando «|» para separar sus componentes:

```
> Ur := Vector[row] ([1, 2, 3]) ; Vr := <a|b|c> ;
```

$$Ur := [1, 2, 3]$$

$$Vr := [a, b, c]$$

Los vectores pueden tener cualquier dimensión; basta con incluir el número apropiado de comas o de componentes separadas por |. También se puede usar la construcción `Vector()` con dos argumentos, el primero de ellos un entero positivo que indica la dimensión del vector y el segundo, o bien una lista de componentes encerradas entre corchetes, o bien una regla de asignación que permita obtener el valor de la componente *i*-ésima:

```
> <5|-2|3|x>; W := Vector[row] (5, i -> i^2) ;
```

$$[5, \ -2, \ 3, \ x]$$

$$W := [1, 4, 9, 16, 25]$$

También es posible construir un vector con componentes arbitrarias como éste:

```
> X := Vector(2, symbol=x) ;
  Y := Vector[row] (4, symbol=y) ;
```

$$X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Y := [y_1, y_2, y_3, y_4]$$

Las componentes de un vector se pueden referenciar añadiendo el índice de la componente, encerrado entre corchetes, al nombre o constructor del vector. La cuarta componente del vector `W` anterior es `W[4]`:

```
> W[4] ; Vector(16, i -> 3*i - 1) [10] ; X[2]+Y[3] ;
```

$$16$$

$$29$$

$$x_2 + y_3$$

Los vectores de la misma dimensión y tipo (fila o columna) se pueden sumar, restar y multiplicarse por escalares utilizando los operadores ordinarios `+`, `–` y `*`:

```
> Uc + Vc; Vc – 3*Uc ;
```

$$\begin{bmatrix} 1 + a \\ 2 + b \\ 3 + c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a - 3 \\ b - 6 \\ c - 9 \end{bmatrix}$$

En la mayoría de los cálculos con vectores no importa si consideramos los vectores como fila o como columna, pero en algunos operadores de LinearAlgebra hay que considerar la diferencia; si se intenta sumar un vector fila con un vector columna, o dos vectores de diferentes dimensiones, obtendremos un mensaje de error.

El paquete LinearAlgebra define también las funciones producto escalar `DotProduct` y producto vectorial `CrossProduct`, cuyos argumentos de entrada son dos vectores. En el caso de DotProduct los argumentos de entrada deben ser de la misma dimensión. En el caso de CrossProduct, ambos argumentos deben ser de dimensión 3. Sin embargo, ninguna de las dos funciones exige que los argumentos sean del mismo tipo (fila o columna). El producto vectorial dará como resultado un vector columna a menos que ambos argumentos sean vectores fila.

Tal como está definido en el paquete LinearAlgebra, DotProduct puede producir algunos resultados extraños. Consideremos, por ejemplo:

```
> DotProduct(Uc, Vc) ; DotProduct(Vc, Uc) ;
  DotProduct(Ur, Vr) ;
```

$$a + 2b + 3c$$

$$\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c}$$

$$\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c}$$

¿Qué está pasando aquí? Las barras sobre las cantidades desconocidas *a*, *b* y *c* indican los complejos conjugados de esas cantidades; el paquete LinearAlgebra está diseñado para satisfacer las

necesidades de un gran número de usuarios del álgebra lineal, no sólo los estudiantes de cálculo para los que todos los vectores se supone que tienen componentes reales. En realidad, `DotProduct(U, V)` suma los productos de los complejos conjugados de las componentes de `U` con los componentes de `V` sin conjugar si ambos vectores son vectores columna, y viceversa si ambos vectores son fila. En el primer ejemplo anterior, las componentes de `Uc` son números reales, por lo que no aparece la barra que indica conjugado sobre ellos; en los otros casos las componentes de `Vc` o `Vr` requieren conjugación, y como Maple no sabe si son reales, pone las barras. Para evitar esta dificultad cuando se utilizan vectores reales, se incluye el argumento `"conjugate=false"` como tercera entrada de la función DotProduct en el paquete LinearAlgebra:

```
> DotProduct(Ur, Vr, conjugate=false) ;
```

$$a + 2b + 3c$$

También es posible utilizar el punto ‘‘.’’ como operador binario para calcular un producto escalar. Sin embargo, el punto también representa multiplicación de matrices, por lo que hay que usar un vector fila a la izquierda del punto y un vector columna a la derecha para asegurarse de obtener un producto escalar.

```
> <a|b|c>.<x, y, z>; <a, b, c>.<x|y|z> ;
```

$$a + 2b + 3c$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{bmatrix}$$

LinearAlgebra tiene también una función CrossProduct, que sólo se aplica a vectores tridimensionales. No importa si sus argumentos son vectores fila o columna. La forma de llamar esta función es `CrossProduct(U, V)` o `U &x V`.

```
> CrossProduct(Uc, Vc) ; Ur &x Vr;
```

$$\begin{bmatrix} 2c - 3b \\ 3a - c \\ b - 2a \end{bmatrix}$$

$$[2c - 3b, 3a - c, b - 2a]$$

LinearAlgebra tiene una función denominada `Norm()` para calcular la longitud de un vector. Desafortunadamente, Maple conoce muchas definiciones diferentes de longitud de un vector. La que utilizaremos es la longitud euclídea. La longitud euclídea de un vector `V` se obtiene como `Norm(V,Euclidean)` o `Norm (V,2)` (en el último caso el 2 indica el hecho de que para calcular la longitud se utiliza la *raíz cuadrada* de la suma de los *cuadrados* de las componentes).

```
> Norm(Ur, Euclidean) ; Norm(<1, –1, 2, –3, 1>, 2) ;
```

$$\sqrt{14}$$

$$4$$

Las funciones `Normalize(U,Euclidean)` o `Normalize(U,2)` se pueden utilizar para obtener un vector unitario en la misma dirección que `U`. Por supuesto, siempre se puede multiplicar `U` por un escalar que sea el inverso de su longitud:

```
> Normalize(<2|-2|1>, 2) ; (1/Norm(Uc, 2))*Uc;
```

$$\left[\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{14}\sqrt{14} \\ \frac{1}{7}\sqrt{14} \\ \frac{3}{14}\sqrt{14} \end{bmatrix}$$

LinearAlgebra tiene una función denominada `VectorAngle` que devuelve el ángulo entre dos vectores. No importa si los vectores son fila o columna. El resultado está en radianes, por lo que tendremos que multiplicarlo por $180/\pi$ para obtener el ángulo en grados.

```
> VectorAngle(<2, 2, 1>, <1, -2, 2>) ;
```

$$\frac{1}{2}\pi$$

Para ilustrar algo más estas ideas, hagamos que Maple calcule una ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 1, -1)$ y es perpendicular a la recta de intersección de los planos $2x + 3y + z = 5$ y $3x - 2y - 4z = 1$.

```
> (<2|3|1> &x <3|-2|-4>) . (<x, y, z>-<2, 1, −1>) = 0 ;
```

$$-10x - 4 + 11y - 13z = 0$$

que también podríamos haber escrito como $10x - 11y + 13z = -4$. Nótese cómo, para calcular el producto escalar, hemos utilizado el producto vectorial de dos vectores fila (que es, por tanto, otro vector fila) a la izquierda del ‘‘.’’ y una diferencia de dos vectores columna (que es, por tanto, un vector columna) a la derecha del ‘‘.’’.

Finalmente, utilicemos Maple para verificar la identidad

$$(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \times \mathbf{W} = (\mathbf{W} \bullet \mathbf{U})\mathbf{V} - (\mathbf{W} \bullet \mathbf{V})\mathbf{U}$$

En primer lugar, definimos **U**, **V** y **W** como vectores con componentes arbitrarias. En vista de los dos productos escalares del miembro derecho de la identidad, haremos que **W** sea un vector fila y los otros dos, vectores columna:

```
> U := Vector(3, symbol=u) ;
  V := Vector(3, symbol=v) ;
  W := Vector[row] (3, symbol=w) ;
```

$$U := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$V := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$W := [w_1, w_2, w_3]$$

Ahora sólo necesitamos restar el miembro derecho de la identidad del miembro izquierdo y simplificar el resultado:

```
> simplify((U &x V) &x W – (W . U) *V + (W . V) *U) ;
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El resultado es el vector cero, lo que confirma la identidad.

Observación Maple 8 y versiones posteriores disponen de un nuevo paquete denominado VectorCalculus, que dispone de más funcionalidades que el paquete LinearAlgebra para operar con funciones vectoriales y funciones de variables vectoriales. Ilustraremos el uso de este paquete en capítulos posteriores, pero nótese aquí que también define las operaciones sobre vectores consideradas anteriormente, pero no todas las funciones matriciales consideradas más adelante. VectorCalculus devuelve vectores en forma de combinaciones lineales de vectores de una base, en vez de como matrices fila o columna. Las bases por defecto que utiliza están formadas por los vectores e_x, e_y, e_z (en vez de **i**, **j**, **k**) para vectores de dimensión menor o igual que 3, pero e_{x1}, e_{x2}, ... para dimensiones superiores a 3. No obstante, aunque no sea claro por la forma en la que VectorCalculus muestra los vectores, mantiene todavía la distinción entre vectores fila y columna, y por tanto no nos dejará sumar un vector fila con un vector columna. Una gran ventaja del paquete VectorCalculus sobre LinearAlgebra es que VectorCalculus utiliza la definición habitual de producto escalar (incluso cuando utiliza la notación ‘‘.’’), por lo que el orden de los factores en un producto escalar es irrelevante y no se utiliza la conjugación compleja. Si se desea utilizar el paquete VectorCalculus y tener todavía acceso a todas las operaciones sobre matrices que proporciona el paquete LinearAlgebra, basta con cargar el paquete VectorCalculus *después* de cargar el paquete LinearAlgebra, con lo que se sustituirán las definiciones de operaciones sobre vectores del paquete LinearAlgebra con las nuevas definiciones del paquete VectorCalculus.

```
> with(LinearAlgebra) :
  with(VectorCalculus) :
```

Incluso con la salida suprimida, el segundo `with` anterior producirá unas cuantas líneas de avisos debidas principalmente al cambio en las definiciones de algunas operaciones sobre vectores.

```
> V1 := <2, –3, 4>; V2 := <a|b|c>; V3 := <2, –3, 4, –5, 6>;
```

$$V1 := 2e_x - 3e_y + 4e_z$$

$$V2 := ae_x + be_y + ce_z$$

$$V_3 := 2e_{x1} - 3e_{x2} + 4e_{x3} - 5e_{x4} + 6e_{x5}$$

```
> V1.V2; V2.V1;
```

$$2a - 3b + 4c$$
$$2a - 3b + 4c$$

Como `V1` es un vector columna y `V2` es un vector fila, cualquier intento de calcular una combinación lineal de estos vectores generará un error, como también los intentos de calcular `M.V2` o `V1.M` siendo `M` una matriz 3×3. Por supuesto, `M.V1` funcionará bien, como `V2.M`, aunque el resultado será una matriz de una fila en vez de un vector. En capítulos posteriores volveremos a utilizar VectorCalculus.

Matrices

El paquete LinearAlgebra proporciona también diversas formas de definir y manejar matrices. Una matriz se puede definir como un vector columna cuyos elementos son vectores fila, o como un vector fila cuyos elementos son vectores columna:

```
> <<1|1|1>, <2|1|3>>; <<1, 2>|<1, 1>|<1, 3>>;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Las matrices también se pueden definir utilizando la función `Matrix`. Esta función puede aceptar una lista de datos que especifican las filas de la matriz, o bien dos enteros positivos (el número de filas y de columnas, respectivamente), junto con una regla para calcular los elementos de la fila i y la columna j.

```
> L := Matrix([[1, 1, 1], [2, 1, 3]]) ;
  M := Matrix(3, 3, (i, j) -> i-j) ;
```

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz P con 2 filas y 4 columnas con elementos arbitrarios $p_{i,j}$ se puede construir de la siguiente forma:

```
> P := Matrix(2, 4, symbol=p) ;
```

$$P := \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \end{bmatrix}$$

Como en el caso de vectores, se accede a los elementos de una matriz encerrando los índices de fila y columna entre corchetes, precedidos por el nombre de la matriz.

```
> P[1, 2] := Pi; P[1, 4]+P[2, 4] ; P ;
```

$$P_{1,2} := \pi$$

$$p_{1,4} + p_{2,4}$$

$$\begin{bmatrix} p_{1,1} & \pi & p_{1,3} & p_{1,4} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \end{bmatrix}$$

Existen también construcciones abreviadas para tipos especiales de matrices, como las matrices todo unos o todo ceros, las matrices identidad (cuadradas) y las matrices diagonales:

```
> Matrix(2, 3) ; IdentityMatrix(3) ;
  DiagonalMatrix([a, b, c]) ;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

La traspuesta T de una matriz se obtiene utilizando la función `Transpose`.

```
> T := Transpose(L) ;
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El producto AB de dos matrices A y B se calcula utilizando el operador binario .; es decir, se calcula `A.B`. Por supuesto, el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B.

```
> L.T; T.L;
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

El determinante y la inversa de una matriz cuadrada se calculan mediante las funciones `Determinant` y `MatrixInverse`.

```
> A := <<1|1|1>>, <2|1|3>, <1|1|2>>;
  DetA :=Determinant(A) ; Ainv := MatrixInverse(A) ;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$DetA := -1$$

$$Ainv := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> A.Ainv = Ainv.A;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones lineales

Un sistema de n ecuaciones en n variables se puede expresar de la forma $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$, siendo A una matriz $n \times n$, y $\mathbf{X}$ y $\mathbf{B}$ vectores columna de n componentes. Por tanto, la solución se expresa como $\mathbf{X} = A^{-1}\mathbf{B}$. Por ejemplo, el sistema

$$x + y + z = 2, \qquad 2x + y + 3z = 9, \qquad x + y + 2z = 1$$

tiene como matriz de coeficientes la matriz A definida anteriormente, y $\mathbf{B}$ es el vector columna `<2, 9, 1>`. La solución del sistema es:

```
> X : = Ainv.<2, 9, 1>;
```

$$X := \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es decir, $x = 9$, $y = -6$, $z = -1$. LinearAlgebra proporciona una forma sencilla de resolver el sistema $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$; sólo necesitamos utilizar la función `LinearSolve(A,B)`:

```
> X := linsolve(A, [2, 9, 1]);
```

$$X := \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales es mejor usar `LinearSolve` que inversión de matrices, ya que LinearSolve puede resolver algunos sistemas en los que la matriz es singular o no es cuadrada. Consideremos los sistemas

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

El primer sistema tiene una familia de soluciones dependientes de un parámetro, $x = 1 - t$, $y = t$, para valores de t arbitrarios. El segundo sistema es incoherente y no tiene soluciones.

```
> L := Matrix([[1, 1], [2, 2]]) ; B1 := <1, 2>; B2 := <1, 1>;
```

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> X := LinearSolve(L, B1, freee=t) ;
```

$$X := \begin{bmatrix} 1 - t_2 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Se ha incluido el argumento extra `free=t` para obligar a LinearSolve a utilizar la variable t con subíndices para indicar los parámetros. Es más seguro utilizar siempre un argumento de entrada de este tipo, ya que omitirlo puede hacer que la salida tenga un aspecto extraño (pruébelo para verlo). Si el sistema tiene solución única, el argumento `free=t` simplemente se ignora.

```
> X := LinearSolve(L, B2, free=t);
```

```
Error, (in LinearSolve) inconsistent system
```

Autovectores y autofunciones

El paquete LinearAlgebra tiene procedimientos para calcular los autovectores y autovalores de matrices. En el caso de una matriz real y simétrica, los autovalores son siempre reales.

```
> K := Matrix([[3, 1, -1], [1, 4, 1], [-1, 1, 3]]) ;
```

$$K := \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvalues (K) ;
```

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

La función `Eigenvalues` produce un vector columna con los autovalores de la matriz cuadrada que se introduce como argumento. En este ejemplo, los tres autovalores son positivos, por lo que K es una matriz definida positiva. La principal utilidad que tendrán para nosotros los autovalores será la de clasificar los puntos críticos de funciones de varias variables. Para este uso, no es necesario conocer los correspondientes autovectores, pero si necesitáramos conocerlos, se puede utilizar la función `Eigenvectors(K)`. La salida habría consistido entonces en dos elementos separados por una coma. El primer elemento es un vector columna que contiene los autovalores de K; el segundo elemento es una matriz cuadrada cuyas columnas son los autovectores correspondientes a dichos autovalores (si un autovalor tuviera multiplicidad m, habría m columnas linealmente independientes en la matriz).

```
> Eigenvectors (K) ;
```

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -\dfrac{(-2+\sqrt{3})\sqrt{3}}{-3+2\sqrt{3}} & -\dfrac{(-2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{-3-2\sqrt{3}} \\ 0 & -\dfrac{-3+\sqrt{3}}{-3+2\sqrt{3}} & -\dfrac{-3-\sqrt{3}}{-3-2\sqrt{3}} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple no siempre realiza perfectamente las simplificaciones. Si utilizamos el comando `simplify(%[2])` sobre la salida anterior, veremos que la fila superior de la matriz de autovectores es, en realidad, más simple de lo que parece.

Observación Todas las matrices y vectores utilizados en los ejemplos de esta sección son de dimensiones muy pequeñas. El paquete LinearAlgebra es capaz de manejar matrices grandes con cientos de filas y columnas, pero en ese caso es mejor evitar las expresiones simples como `2*M-3*N` o `M.N` para realizar combinaciones lineales o productos escalares, y utilizar en cambio `MatrixAdd(M,N,2,-3)` y `MatrixMatrixMultiply(M,N)`, que realizan los cálculos de forma mucho más eficiente. De forma similar, es conveniente utilizar `MatrixVectorMultiply(M,X)` en vez de `M.X` si `X` es un vector columna y `ScalarMutiply(M,c)` en vez de `c*M` si `c` es un número.

Ejercicios 10.7

Utilice Maple para calcular las magnitudes de los Ejercicios 1 y 2.

1. La distancia entre la recta paralela al vector (3, 0, 2) que pasa por $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y la recta paralela al vector (1, 2, 4) que pasa por el punto $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

2. El ángulo (en grados) entre el vector $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y el plano que pasa por el origen y contiene a los vectores $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Utilice Maple para verificar las identidades de los Ejercicios 3 y 4.

3. $\mathbf{U} \bullet (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \mathbf{V} \bullet (\mathbf{W} \times \mathbf{U}) = \mathbf{W} \bullet (\mathbf{U} \times \mathbf{V})$

4. $(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \times (\mathbf{U} \times \mathbf{W}) = (\mathbf{U} \bullet (\mathbf{V} \times \mathbf{W}))\mathbf{U}$

En los Ejercicios 5-10, defina funciones de Maple que permitan obtener los resultados indicados. Puede utilizar funciones ya definidas en **LinearAlgebra**.

5. Una función `sp(U, V)` que produzca la proyección escalar del vector **U** sobre el vector distinto de cero **V**.

6. Una función `vp(U, V)` que produzca el vector proyección del vector **U** sobre el vector distinto de cero **V**.

7. Una función `ang(U, V)` que produzca el ángulo que forman los vectores distintos de cero **U** y **V**, en grados y como número decimal.

8. Una función `unitn(U, V)` que produzca un vector unitario normal a los dos vectores no paralelos **U** y **V** en el espacio tridimensional.

9. Una función `VolT(U, V, W)` que produzca el volumen del tetraedro del espacio tridimensional generado por los vectores **U**, **V** y **W**.

10. Una función `dist(A, B)` que produzca la distancia entre dos puntos cuyos vectores de posición son **A** y **B**.

Utilice esta función para calcular la distancia entre [1, 1, 1, 1] y [3, −1, 2, 5].

En los Ejercicios 11 y 12, utilice `LinearSolve` para resolver los sistemas dados.

11. $$\begin{cases} u + 2v + 3x + 4y + 5z = 20 \\ 6u - v + 6x + 2y - 3z = 0 \\ 2u + 8v - 8x - 2y + z = 6 \\ u + v + x + y + z = 5 \\ 10u - 3v + 3x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} u + v + x + y = 10 \\ u + y + z = 10 \\ u + x + y = 8 \\ u + v + x + z = 11 \\ v + y - z = 1 \end{cases}$$

13. Calcule el determinante de la matriz de coeficientes del sistema del Ejercicio 11.

14. Calcule los autovalores de la matriz de coeficientes del sistema del Ejercicio 12. Exprese sus respuestas en forma decimal, con cinco decimales de precisión (utilice `evalf`). ¿Piensa que algunos de ellos son realmente complejos?

15. Calcule la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

16. Calcule, en forma decimal (utilizando `evalf(Eigenvals(A))`), los autovalores de la matriz A del Ejercicio 15 y los autovalores de su inversa. Utilice `Digits := 10`. ¿Cómo explica el hecho de que algunos autovalores parecen ser complejos? ¿Qué relación parece haber entre los autovalores de A y los autovalores de su inversa?

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significa lo siguiente?**
  - ◇ Entorno
  - ◇ Conjunto abierto
  - ◇ Conjunto cerrado
  - ◇ Frontera de un conjunto
  - ◇ Interior de un conjunto
  - ◇ Vector en el espacio tridimensional
  - ◇ Producto escalar de dos vectores
  - ◇ Producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$
  - ◇ Producto escalar triple
  - ◇ Producto vectorial triple
  - ◇ Matriz
  - ◇ Determinante

◇ Plano

◇ Recta

◇ Cono

◇ Cilindro

◇ Elipsoide

◇ Paraboloide

◇ Hiperboloide de una hoja

◇ Hiperboloide de dos hojas

◇ Traspuesta de una matriz

◇ Inversa de una matriz

◇ Transformación lineal

◇ Autovalor de una matriz

- **¿Qué es el ángulo que forman los vectores u y v?**
- **¿Cómo se calcula u × v dadas los componentes de u y v?**
- **¿Cuál es la ecuación del plano que pasa por P_0 y es normal al vector N?**
- **¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por P_0 y es paralela al vector a?**
- **Dadas dos matrices A y B de 3 × 3, ¿cómo se calcula AB?**
- **¿Qué es la distancia desde P_0 al plano $Ax + By + Cz + D = 0$?**
- **¿Qué es la Regla de Cramer, y cómo se usa?**

Ejercicios de repaso

Describa los conjuntos de puntos en el espacio tridimensional que cumplen las ecuaciones o inecuaciones dadas en los Ejercicios 1-18.

1. $x + 3z = 3$ **2.** $y - z \geqslant 1$

3. $x + y + z \geqslant 0$ **4.** $x - 2y - 4z = 8$

5. $y = 1 + x^2 + z^2$ **6.** $y = z^2$

7. $x = y^2 - z^2$ **8.** $z = xy$

9. $x^2 + y^2 + 4z^2 < 4$ **10.** $x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$

11. $x^2 - y^2 - 4z^2 = 0$ **12.** $x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$

*__13.__ $(x - z)^2 + y^2 = 1$ *__14.__ $(x - z)^2 + y^2 = z^2$

15. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x^2 + z^2 \leqslant 1 \\ x - y \geqslant 0 \end{cases}$

Calcule las ecuaciones de los planos y rectas especificados en los Ejercicios 19-28.

19. El plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

20. El plano que pasa por el punto $(2, -1, 1)$ y $(1, 0, -1)$ y es paralelo a la recta del Ejercicio 19.

21. El plano que pasa por el punto $(2, -1, 1)$ y es perpendicular a los planos $x - y + z = 0$ y $2x + y - 3z = 2$.

22. El plano que pasa por los puntos $(-1, 1, 0)$, $(0, 4, -1)$ y $(2, 0, 0)$.

23. El plano que contiene a la recta intersección de los planos $x + y + z = 0$ y $2x + y - 3z = 2$ y pasa por el punto $(2, 0, 1)$.

24. El plano que contiene a la recta intersección de los planos $x + y + z = 0$ y $2x + y - 3z = 2$ y es perpendicular al plano $x - 2y - 5z = 17$.

25. La ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por el punto $(2, 1, -1)$ y $(-1, 0, 1)$.

26. La ecuación en forma estándar de la recta que pasa por el punto $(1, 0, -1)$ y es paralela a los planos $x - y = 3$ y $x + 2y + z = 1$.

27. La ecuación paramétrica escalar de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $3x - 2y + 4z = 5$.

28. La ecuación paramétrica vectorial de la recta que une puntos de las dos rectas

$$\mathbf{r} = (1 + t)\mathbf{i} - t\mathbf{j} - (2 + 2t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (t - 2)\mathbf{j} - (1 + 3t)\mathbf{k}$$

y es perpendicular a ambas rectas.

Exprese las condiciones o cantidades dadas en los Ejercicios 29 y 30 en función de productos escalares y vectoriales.

29. Los tres puntos cuyos vectores de posición son $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ están en la misma recta.

30. Los cuatro puntos cuyos vectores de posición son $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ y $\mathbf{r}_4$ no están en el mismo plano.

31. Calcule el área del triángulo cuyos vértices son $(1, 2, 1)$, $(4, -1, 1)$ y $(3, 4, -2)$.

32. Calcule el volumen del tetraedro cuyos vértices son $(1, 2, 1)$, $(4, -1, 1)$, $(3, 4, -2)$ y $(2, 2, 2)$.

33. Demuestre que la matriz

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa, y calcule su inversa $\mathscr{A}^{-1}$.

34. Sea $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ¿Qué condición debe cumplir el vector $\mathbf{b}$ para que la ecuación $\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenga soluciones $\mathbf{x}$? ¿Cuáles son las soluciones $\mathbf{x}$ si $\mathbf{b}$ cumple la condición?

35. ¿Es la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ definida positiva, negativa o ninguna de las dos cosas?

Problemas avanzados

1. Demuestre que la distancia d desde el punto P hasta la recta AB se puede expresar en términos de los vectores de posición de P, A y B mediante la expresión

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P) \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_P)|}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|}$$

2. Dados vectores cualesquiera $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{x}$, demuestre que

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) &= ((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{x})\mathbf{w} - ((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w})\mathbf{x} \\ &= ((\mathbf{w} \times \mathbf{x}) \bullet \mathbf{u})\mathbf{v} - ((\mathbf{w} \times \mathbf{x}) \bullet \mathbf{v})\mathbf{u}\end{aligned}$$

En particular, demuestre que

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = ((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w})\mathbf{u}$$

3. Demuestre que el área A del triángulo cuyos vértices son $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$ y $(x_3, y_3, 0)$ en el plano xy se expresa como

$$A = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

4. (a) Si L_1 y L_2 son dos rectas que no son paralelas ni se cruzan, demuestre que existe una pareja de planos paralelos P_1 y P_2 tales que L_1 está en P_1 y L_2 está en P_2.

(b) Obtenga planos paralelos que contengan las siguientes rectas: L_1 que pasa por los puntos (1, 1, 0) y (2, 0, 1) y L_2 que pasa por los puntos (0, 1, 1) y (1, 2, 2).

5. ¿Qué condición deben cumplir los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ para asegurar que la ecuación $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene soluciones? Si se cumple esa condición, calcule todas las soluciones de la ecuación. Describa el conjunto de soluciones.

CAPÍTULO 11

Funciones vectoriales y curvas

La filosofía está escrita en este gran libro, el universo, que está continuamente abierto a nuestra observación, pero que no se puede entender a menos que uno aprenda primero a comprender el lenguaje e interprete los caracteres en los que está escrito. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las que es humanamente imposible entender una sola palabra de ese libro; sin ellos, uno simplemente está vagando por un laberinto oscuro.

Galileo Galilei (1564-1642)

Introducción Este capítulo trata de funciones de una sola variable real cuyo valor es un *vector*. Estas funciones se pueden ver como representaciones paramétricas de curvas, y las examinaremos desde un punto de vista *cinemático* (considerando la posición, velocidad y aceleración de una partícula en movimiento) y desde un punto de vista *geométrico* (considerando tangentes, normales, curvatura y torsión). Finalmente presentaremos un desarrollo simple de las leyes de Kepler del movimiento planetario.

11.1 Funciones vectoriales de una variable

En esta sección vamos a examinar varios aspectos de cálculo diferencial e integral aplicado a **funciones vectoriales** de una sola variable real. Estas funciones se utilizarán para representar curvas paramétricamente. Es natural interpretar una función vectorial de la variable real t como una posición, en el instante t, de un punto o «partícula» que se mueve en el espacio. Las derivadas de este *vector de posición* serán entonces otra función vectorial que dará la velocidad y la aceleración de la partícula. Para motivar el estudio de funciones vectoriales, las consideraremos una descripción vectorial del movimiento en el espacio tridimensional. Algunos de los ejemplos que presentaremos serán de movimiento en el plano; en este caso la tercera componente de los vectores será 0 y se omitirá.

Si una partícula se mueve en el espacio tridimensional, su movimiento se puede describir dando las tres coordenadas de su posición en función del tiempo t:

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad \text{y} \qquad z = z(t)$$

Sin embargo, es más conveniente sustituir estas tres ecuaciones por una única ecuación vectorial,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

que expresa el vector de posición de la partícula en movimiento en función de t (recuérdese que el vector de posición de un punto es el vector que va desde el origen hasta dicho punto). En función de los vectores de la base estándar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, el vector de posición de la partícula en el instante t es

$$\text{posición:} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

A medida que t aumenta, la partícula se mueve por un *camino*, una curva $\mathcal{C}$ en el espacio tridimensional. Si $z(t) = 0$, entonces $\mathcal{C}$ es una curva plana en el plano xy. Supondremos que $\mathcal{C}$ es una *curva continua*; la partícula no puede saltar instantáneamente de un punto a otro punto distante. Esto equivale a requerir que las funciones de las componentes $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ sean funciones continuas de t, y diremos, por tanto, que $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial continua de t.

En el intervalo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$, la partícula se mueve desde la posición $\mathbf{r}(t)$ hasta la posición $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Por tanto, su **velocidad media** es

$$\frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

que es un vector paralelo al vector secante que va desde $\mathbf{r}(t)$ hasta $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Si la velocidad media tiene límite cuando $\Delta t \to 0$, se dice que $\mathbf{r}$ es **diferenciable** en t, y denominaremos al límite **vector velocidad** (instantánea) de la partícula en el instante t. Llamaremos $\mathbf{v}(t)$ al vector velocidad:

$$\text{vector velocidad:} \quad \mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dr}\mathbf{r}(t)$$

El vector velocidad tiene una dirección tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\mathbf{r}(t)$ (*véase* la Figura 11.1), y apunta en la dirección del movimiento. La longitud del vector velocidad $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ se denomina **velocidad** de la partícula:

$$\text{velocidad:} \quad v(t) = |\mathbf{v}(t)|$$

Siempre que exista el vector velocidad, sea continuo y no se anule, la curva $\mathcal{C}$ es una curva **suave**, es decir, tiene tangentes que varían de forma continua. La curva puede no ser suave en puntos donde la velocidad sea cero, aunque las componentes del vector velocidad sean funciones suaves de t.

Figura 11.1 El vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ es la derivada de la posición $\mathbf{r}(t)$ y es tangente a la curva del movimiento en el punto cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t)$.

Ejemplo 1 Considere la curva plana $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$. Sus funciones componentes t^3 y t^2 tienen derivadas continuas de todos los órdenes. Sin embargo, la curva no es suave en el origen ($t = 0$), donde su velocidad $\mathbf{v} = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} = \mathbf{0}$ (*véase* la Figura 11.2). La curva sí es suave en todos los demás puntos donde $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$.

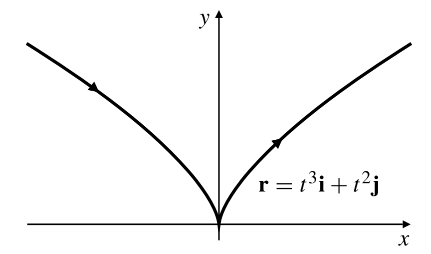


Figura 11.2 Las componentes de $\mathbf{r}(t)$ son funciones suaves de t, pero la curva no es suave en el origen, donde $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Las reglas de la suma y la multiplicación por escalares de vectores implican que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{dr}{dt} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\,\mathbf{i} + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}\,\mathbf{j} + \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}\,\mathbf{k} \right) \\
&= \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Por tanto, la función vectorial $\mathbf{r}$ es diferenciable en t si y sólo si sus tres componentes escalares, x, y y z, son diferenciables en t. En general, las funciones vectoriales se pueden diferenciar (o integrar) diferenciando (integrando) sus funciones componentes, suponiendo que los vectores de la base con respecto a los que se expresan dichas componentes son fijos en el espacio y no cambian con el tiempo.

Continuando con nuestro análisis de la partícula móvil, se define la **aceleración** de dicha partícula como la derivada con respecto al tiempo del vector velocidad:

$$\text{aceleración:} \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

La Segunda Ley del Movimiento de Newton establece que esta aceleración es proporcional a la fuerza $\mathbf{F}$ que produce el movimiento y *en su misma dirección*: si la masa de la partícula es m, entonces dicha ley se expresa mediante la *ecuación vectorial* $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Ejemplo 2 Describa la curva $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$. Calcule los vectores velocidad y aceleración de esta curva en (1, 1, 1).

Solución Como las ecuaciones paramétricas escalares de la curva son

$$x = t, \qquad y = t^2 \qquad \text{y} \qquad z = t^3$$

que cumplen $y = x^2$ y $z = x^3$, la curva es la intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$. En cualquier instante t los vectores velocidad y aceleración se expresan como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

El punto (1, 1, 1) de la curva corresponde a $t = 1$, por lo que la velocidad y la aceleración en ese punto son $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, respectivamente. ■

Ejemplo 3 Calcule el vector velocidad, la velocidad y la aceleración, y describa el movimiento de una partícula cuya posición en el instante t es

$$\mathbf{r} = 3\cos\omega t\mathbf{i} + 4\cos\omega t\mathbf{j} + 5\,\text{sen}\,\omega t\mathbf{k}$$

Solución El vector velocidad, la velocidad y la aceleración se pueden calcular inmediatamente:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -3\omega\,\text{sen}\,\omega t\mathbf{i} - 4\omega\,\text{sen}\,\omega t\mathbf{j} + 5\omega\cos\omega t\mathbf{k}$$

$$v = |\mathbf{v}| = 5\omega$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -3\omega^2\cos\omega t\mathbf{i} - 4\omega^2\cos\omega\mathbf{j} - 5\omega^2\,\text{sen}\,\omega t\mathbf{k} = -\omega^2\mathbf{r}$$

Obsérvese que $|\mathbf{r}| = 5$. Por tanto, la curva que describe la partícula está en una esfera cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Como $x = 3\cos\omega t$ e $y = 4\cos\omega t$, dicha curva también está en el plano vertical $4x = 3y$. Es decir, la partícula se mueve siguiendo una circunferencia de radio 5 centrada en el origen y que está en el plano $4x = 3y$. Obsérvese también que $\mathbf{r}$ es periódico, con periodo $2\pi/\omega$. Por consiguiente, la partícula tarda un tiempo $2\pi/\omega$ en realizar una revolución sobre dicha circunferencia. La aceleración está siempre en la dirección de $-\mathbf{r}$, es decir, hacia el origen. Para describir esa aceleración «que busca el centro» se utiliza la expresión **aceleración centrípeta**. ■

Ejemplo 4 **(El problema del proyectil)** Describa el camino que sigue una partícula que experimenta una aceleración constante hacia abajo, $-g\mathbf{k}$, debida a la gravedad. Suponga que en el instante $t = 0$ la posición de la partícula es $\mathbf{r}_0$ y su velocidad es $\mathbf{v}_0$.

Solución Si la posición de la partícula en el instante t es $\mathbf{r}(t)$, entonces su aceleración es $d^2\mathbf{r}/dt^2$. La posición de la partícula se puede obtener resolviendo el *problema de valor inicial*

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{k}, \qquad \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \qquad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$$

Se integra la ecuación diferencial dos veces. Esta integración introduce un vector constante de integración que se puede determinar a partir de los datos proporcionados, evaluando en $t = 0$:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -gt\mathbf{k} + \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r} = -\frac{gt^2}{2}\mathbf{k} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

Esta última ecuación representa una parábola en el plano vertical que pasa por el punto cuyo vector de posición es $\mathbf{r}_0$ y contiene al vector $\mathbf{v}_0$ (*véase* la Figura 11.3). Las ecuaciones paramétricas escalares de la parábola son

$$x = u_0 t + x_0$$

$$y = v_0 t + y_0$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + w_0 t + z_0$$

siendo $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_0 = u_0\mathbf{i} + v_0\mathbf{j} + w_0\mathbf{k}$.

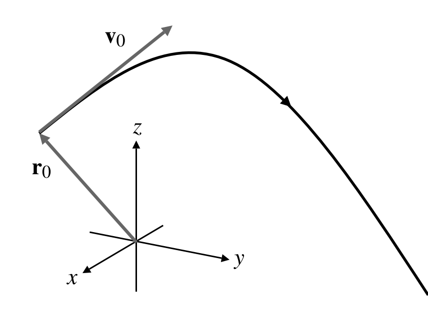


Figura 11.3 La curva que sigue un proyectil disparado desde la posición $\mathbf{r}_0$ con velocidad $\mathbf{v}_0$.

Ejemplo 5 Un objeto se mueve a la derecha siguiendo la curva plana $y = x^2$, con velocidad constante $v = 5$. Calcule el vector velocidad y la aceleración de dicho objeto cuando está en el punto (1, 1).

Solución La posición del objeto en el instante t es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$$

siendo x la coordenada x de la posición del objeto en función de t. El vector velocidad, la velocidad y la aceleración en el instante t se expresan como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + 2x\,\frac{dx}{dt}\,\mathbf{j} = \frac{dx}{dt}\,(\mathbf{i} + 2x\mathbf{j})$$

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\frac{dx}{dt}\right|\sqrt{1 + (2x)^2} = \frac{dx}{dt}\,\sqrt{1 + 4x^2}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,(\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}) + 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\mathbf{j}$$

En el cálculo de la velocidad se ha utilizado $|dx/dt| = dx/dt$, ya que el objeto se mueve hacia la derecha. Tenemos el dato de que la velocidad es constante: $v = 5$. Por tanto,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

Cuando $x = 1$, tenemos que $dx/dt = 5/\sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$, por lo que la velocidad del objeto en ese punto es $\mathbf{v} = \sqrt{5}\mathbf{i} + 2\sqrt{5}\mathbf{j}$. Ahora podemos calcular

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\,\frac{5}{\sqrt{1 + 4x^2}} = \left(\frac{d}{dx}\,\frac{5}{\sqrt{1 + 4x^2}}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$= -\,\frac{5}{2(1 + 4x^2)^{3/2}}\,(8x)\,\frac{5}{\sqrt{1 + 4x^2}} = -\,\frac{100x}{(1 + 4x^2)^2}$$

En $x = 1$, tenemos que $d^2x/dt^2 = -4$. Así, la aceleración en ese punto es $\mathbf{a} = -4(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + 10\mathbf{j} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Observación Nótese que en el ejemplo anterior hemos usado x como parámetro de la curva, por lo que podríamos haber utilizado t para el tiempo. Si se desea analizar el movimiento por una curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, siendo t un parámetro, no necesariamente tiempo, entonces habrá que utilizar un símbolo diferente, por ejemplo τ (letra griega «tau»), para indicar el tiempo. En ese caso, la *velocidad* y la *aceleración* físicas de una partícula que se mueve por la curva son

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\,\frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \frac{d^2t}{d\tau^2}\,\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Hay que tener cuidado con la forma de interpretar t en problemas donde el tiempo sea relevante.

Diferenciación de combinaciones de vectores

Los vectores y los escalares se pueden combinar de varias formas para formar otros vectores o escalares. Los vectores se pueden sumar y multiplicar por escalares, y también pueden ser factores en productos escalares y vectoriales. Se pueden aplicar las reglas de diferenciación apropiadas a todas esas combinaciones de funciones vectoriales y escalares; se resumen en el siguiente teorema.

TEOREMA 1 **Reglas de diferenciación de funciones vectoriales**

Sean $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ funciones vectoriales diferenciables, y sea $\lambda(t)$ una función escalar diferenciable. Entonces $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$, $\lambda(t)\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{u}(\lambda(t))$ son diferenciables, y

(a) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

(b) $\dfrac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(\mathrm{t})) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$

(c) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \bullet \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{v}'(t)$

(d) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$

(e) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t))$

Además, en todo punto donde $\mathbf{u}(t) \neq 0$,

(f) $\dfrac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)| = \dfrac{\mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|}$

Observación Las fórmulas (b), (c) y (d) son versiones de la Regla del Producto. La fórmula (e) es una versión de la Regla de la Cadena. La fórmula (f) es también un caso de la Regla de la Cadena aplicada a $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}$. Todas ellas tienen la forma obvia. Nótese que el orden de

los factores es el mismo en los términos de los dos miembros de la fórmula del producto vectorial (d). Es esencial conservar el orden ya que, a diferencia del producto escalar o del producto de un vector por un escalar, el producto vectorial *no es conmutativo*.

Observación La fórmula de la derivada de un producto vectorial es un caso especial del de la derivada de un determinante 3×3 (*véase* la Sección 10.3). Como todos los términos del desarrollo de un determinante de cualquier orden son un producto en el que interviene un elemento de cada fila (o columna), la Regla del Producto general implica que la derivada de un determinante $n \times n$ cuyos elementos sean funciones será una suma de n determinantes $n \times n$, y en cada uno de ellos los elementos de una de las filas (o columnas) estarán diferenciados. Para el caso 3×3 tenemos que

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

Ejemplo 6 Demuestre que la velocidad de una partícula móvil permanece constante durante un intervalo de tiempo si y sólo si la aceleración es perpendicular al vector velocidad durante dicho intervalo.

Solución Como $(v(t))^2 = \mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{v}(t)$, tenemos que

$$2v(t)\,\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\,(v(t))^2 = \frac{d}{dt}\,(\mathbf{v}(t) \bullet v(t))$$

$$= \mathbf{a}(t) \bullet \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{a}(t) = 2\mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{a}(t)$$

Si suponemos que $v(t) \neq 0$, se deduce que $dv/dt = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} \bullet \mathbf{a} = 0$. La velocidad es constante si y sólo si el vector velocidad es perpendicular a la aceleración.

Ejemplo 7 Si $\mathbf{u}$ es tres veces diferenciable, calcule y simplifique la derivada del producto triple

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u} \bullet \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right)\right)$$

Solución Utilizando varias versiones de la Regla del Producto, se calcula

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u} \bullet \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right)\right)$$

$$= \frac{d\mathbf{u}}{dt} \bullet \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right) + \mathbf{u} \bullet \left(\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right) + \mathbf{u} \bullet \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3}\right)$$

$$= 0 + 0 + \mathbf{u} \bullet \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3}\right) = \mathbf{u} \bullet \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3}\right)$$

El primer término se anula porque $d\mathbf{u}/dt$ es perpendicular a su producto vectorial con otro vector; el segundo término se anula porque es el producto vectorial de vectores idénticos.

Ejercicios 11.1

En los Ejercicios 1-14, calcule el vector velocidad, la velocidad y la aceleración en el instante t de la partícula cuya posición es $\mathbf{r}(t)$. Describa la curva que sigue la partícula.

1. $\mathbf{r} = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$

2. $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + \mathbf{k}$

3. $\mathbf{r} = t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r} = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

5. $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

6. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

7. $\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$

8. $\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\mathbf{j} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{k}$

9. $\mathbf{r} = 3\cos t\,\mathbf{i} + 4\cos t\,\mathbf{j} + 5\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r} = 3\cos t\,\mathbf{i} + 4\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

11. $\mathbf{r} = ae^t\mathbf{i} + be^t\mathbf{j} + ce^t\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r} = at\cos\omega t\,\mathbf{i} + at\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j} + b\ln t\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r} = e^{-1}\cos(e^t)\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathrm{sen}\,(e^t)\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r} = a\cos t\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}^2\,t\,\mathbf{j} + a\cos t\,\mathbf{k}$

15. Una partícula se mueve por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ a velocidad constante, realizando una revolución en 2 s. Calcule su aceleración cuando está en el punto (3, 4).

16. Una partícula se mueve hacia la derecha por la curva $y = 3/x$. Si su velocidad es 10 cuando pasa por el punto $(2, \frac{3}{2})$, ¿cuál es su velocidad en ese instante?

17. Un punto P se mueve por la curva de intersección del cilindro $z = x^2$ y el plano $x + y = 2$ en la dirección de valores de y crecientes, con velocidad constante $v = 3$. Calcule la velocidad de P cuando está en el punto (1, 1, 1).

18. Un objeto se mueve por la curva $y = x^2$, $z = x^3$ con velocidad vertical constante $dz/dt = 3$. Calcule el vector velocidad y la aceleración del objeto cuando está en el punto (2, 4, 8).

19. Una partícula se mueve por la curva $\mathbf{r} = 3u\mathbf{i} + 3u^2\mathbf{j} + 2u^3\mathbf{k}$ en la dirección correspondiente a valores de u crecientes, con una velocidad constante de 6. Calcule el vector velocidad y la aceleración de la partícula cuando está en el punto (3, 3, 2).

20. Una partícula se mueve por la curva intersección de los cilindros $y = -x^2$ y $z = x^2$ en la dirección en la que x crece (todas las distancias están en centímetros). En el instante en el que la partícula está en el punto $(1, -1, 1)$, su velocidad es de 9 cm/s, y está creciendo a razón de 3 cm/s^2. Calcule el vector velocidad y la aceleración de la partícula en ese instante.

21. Demuestre que si el producto escalar de la velocidad y la aceleración de una partícula móvil es positivo (negativo), entonces la velocidad de la partícula es creciente (o decreciente).

22. Verifique la fórmula de la derivada del producto escalar dada en el Teorema 1(c).

23. Verifique la fórmula de la derivada de un determinante 3×3, que se presenta en la segunda observación que sigue al Teorema 1. Utilice esta fórmula para verificar la fórmula de la derivada del producto vectorial del Teorema 1.

24. Si los vectores de posición y de velocidad de una partícula móvil son siempre perpendiculares, demuestre que la curva que sigue la partícula está en una esfera.

25. Generalice el Ejercicio 24 al caso en el que el vector velocidad de la partícula es siempre perpendicular a la recta que une la partícula con un punto fijo P_0.

26. ¿Qué se puede decir sobre el movimiento de una partícula en un determinado instante cuando sus vectores de posición y de velocidad cumplen $\mathbf{r}\bullet\mathbf{v} > 0$? ¿Qué se puede decir cuando $\mathbf{r}\bullet\mathbf{v} < 0$?

En los Ejercicios 27-32, suponga que las funciones vectoriales que aparecen tienen derivadas continuas de todos los órdenes necesarios.

27. Demuestre que $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\times\dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right) = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\times\dfrac{d^3\mathbf{u}}{dt^3}$.

28. Exprese la Regla del Producto para $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w}))$.

29. Exprese la Regla del Producto para $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}))$.

30. Desarrolle y simplifique: $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{u}\times\left(\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\times\dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right)\right)$.

31. Desarrolle y simplifique: $\dfrac{d}{dt}((\mathbf{u} + \mathbf{u}'')\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{u}'))$.

32. Desarrolle y simplifique: $\dfrac{d}{dt}((\mathbf{u}\times\mathbf{u}')\bullet(\mathbf{u}'\times\mathbf{u}''))$.

33. Si en todos los instantes t los vectores de posición y velocidad de una partícula móvil cumplen $\mathbf{v}(t) = 2\mathbf{r}(t)$, y si $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, calcule $\mathbf{r}(t)$ y la aceleración $\mathbf{a}(t)$. ¿Cuál es la curva del movimiento?

❖**34.** Verifique que $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0\cos(\omega t) + (\mathbf{v}_0/\omega)\mathrm{sen}\,(\omega t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\omega^2\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{v}_0, \qquad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$$

Es la única solución. Describa la curva $\mathbf{r}(t)$. ¿Cuál es la curva si $\mathbf{r}_0$ es perpendicular a $\mathbf{v}_0$?

❖**35.** **(Caída libre con resistencia del aire)** La posición de un proyectil que cae bajo la acción de la gravedad y es frenado por la resistencia del aire, que es proporcional a su velocidad, cumple

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{k} - c\,\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

siendo c una constante positiva. Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ y $d\mathbf{r}/dt = v_0$ en el instante $t = 0$, calcule $\mathbf{r}(t)$ (*Sugerencia*: Sea $\mathbf{w} = e^{ct}(d\mathbf{r}/dt)$. Demuestre que la solución tiende a la del problema del proyectil presentado en esta sección cuando $c \to 0$.

11.2 Algunas aplicaciones de la diferenciación vectorial

En muchos problemas interesantes de mecánica interviene la diferenciación de funciones vectoriales. En esta sección se realiza una breve presentación de algunos de ellos.

Movimiento de una masa variable

El **momento p** de un objeto en movimiento es el producto de su masa m (un escalar) y su velocidad (un vector) $\mathbf{v}$: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. La Segunda Ley del Movimiento de Newton establece que la velocidad de cambio del *momento* es igual a la fuerza externa que actúa sobre el objeto:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(m\mathbf{v})$$

Sólo en el caso de que la masa del objeto permanezca constante esta ley se reduce a su forma más familiar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Cuando la masa cambia debe considerarse el momento en vez de la aceleración.

Ejemplo 1 **(Cambio en la velocidad de un cohete)** Un cohete acelera quemando el combustible que transporta. Si los gases de la combustión se expulsan del cohete con una velocidad constante $\mathbf{v}_e$ *relativa al cohete*, y si el cohete expulsa p% de su masa inicial mientras sus motores están funcionando, ¿cuánto cambiará la velocidad del cohete? Suponga que el cohete está en el espacio profundo, de forma que se puede despreciar la fuerza gravitatoria y cualquier otra fuerza externa que pudiera actuar sobre él.

Solución Como no actúan fuerzas externas sobre el cohete (es decir, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$), la ley de Newton implica que el momento total del cohete y de los gases que expulsa permanecerá constante. En el instante t, la masa del cohete es $m(t)$ y su velocidad es $\mathbf{v}(t)$. En el instante $t + \Delta t$ la masa del cohete es $m + \Delta m$ (siendo $\Delta m < 0$), su velocidad es $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$, y la masa $-\Delta m$ de los gases expulsados ha escapado con velocidad $\mathbf{v} + \mathbf{v}_e$ (relativa a un sistema de coordenadas fijo en el espacio). Igualando los momentos totales en t y en $t + \Delta t$ se obtiene

$$(m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (-\Delta m)(\mathbf{v} + \mathbf{v}_e) = m\mathbf{v}$$

Simplificando esta ecuación y dividiendo por Δt resulta

$$(m + \Delta m)\,\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\,\mathbf{v}_e$$

y, tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$,

$$m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\,\mathbf{v}_e$$

Supongamos que el motor se enciende desde $t = 0$ hasta $t = T$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, la variación de la velocidad del cohete será

$$\mathbf{v}(T) - \mathbf{v}(0) = \int_0^T \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dt = \left(\int_0^T \frac{1}{m}\,\frac{dm}{dt}\,dt\right)\mathbf{v}_e$$

$$= (\ln m(T) - \ln m(0))\mathbf{v}_e = -\ln\left(\frac{m(0)}{m(T)}\right)\mathbf{v}_e$$

Como $m(0) > m(T)$, tenemos que $\ln(m(0)/m(T)) > 0$ y, tal como se esperaba, la variación de la velocidad del cohete se producirá en la dirección opuesta a la velocidad de expulsión $\mathbf{v}_e$. Si p% de la masa del cohete se expulsa durante la ignición, entonces su velocidad cambiará en la cantidad $-\mathbf{v}_e \ln(100/(100 - p))$.

Observación Es interesante advertir que este modelo no impone restricciones en la magnitud que puede alcanzar la velocidad del cohete, suponiendo que un porcentaje suficientemente grande de su masa inicial es de combustible. *Véase* el Ejercicio 1 al final de la sección.

Movimiento circular

La velocidad angular Ω de un cuerpo en rotación es su velocidad de rotación medida en radianes por unidad de tiempo. Por ejemplo, la lámpara de un faro que gira con una velocidad de 3 revoluciones por minuto tiene una velocidad angular de $\Omega = 6\pi$ radianes por minuto. Es útil representar la velocidad de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje en función de un vector **velocidad angular** en vez de representarla simplemente respecto a la velocidad angular escalar. El vector velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ tiene un módulo igual a la velocidad angular Ω y su dirección coincide con el eje de rotación, de forma que si el pulgar extendido apunta en la dirección de $\mathbf{\Omega}$, entonces los demás dedos rodean al eje en la dirección de la rotación.

Si el origen del sistema de coordenadas está en el eje de rotación, y si $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es el vector de posición en el instante t de un punto P del cuerpo en rotación, entonces dicho punto se mueve siguiendo una circunferencia de radio $D = |\mathbf{r}(t)| \operatorname{sen}\theta$, siendo θ el ángulo (constante) entre $\mathbf{\Omega}$ y $\mathbf{r}(t)$ (*véase* la Figura 11.4). Por tanto, P recorre una distancia $2\pi D$ en un tiempo $2\pi/\Omega$ y su velocidad lineal es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{2\pi/D}{2\pi/\Omega} = \Omega D = |\mathbf{\Omega}|\,|\mathbf{r}(t)| \operatorname{sen}\theta = |\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}(t)|$$

Como la dirección de $\mathbf{\Omega}$ se define de forma que $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}(t)$ apunte en la dirección del movimiento de P, la velocidad lineal de P en el instante t se expresa como

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}(t)$$

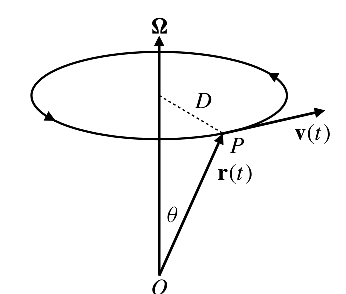


Figura 11.4 Rotación con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$: $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$.

Ejemplo 2 El vector de posición $\mathbf{r}(t)$ de una partícula P en movimiento satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{i} \times \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} \end{cases}$$

Calcule $\mathbf{r}(t)$ y describa el movimiento de P.

Solución Hay dos formas de resolver este problema. Lo haremos de ambas.

MÉTODO I. Teniendo en cuenta la presentación anterior, la ecuación diferencial dada es compatible con una rotación alrededor del eje x con un vector de velocidad angular $2\mathbf{i}$, de forma que la velocidad angular es 2, y el movimiento se produce en sentido contrario al de las agujas del reloj visto de lejos desde el eje x positivo. Por tanto, la partícula P se mueve siguiendo una circunferencia en un plano $x =$ constante y centrada en el eje x. Como P está en (1, 3, 0) en el instante $t = 0$, el plano de movimiento es $x = 1$, y el radio de la circunferencia es 3. Por consiguiente, la ecuación paramétrica de la circunferencia es de la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + 3\cos(\lambda t)\mathbf{j} + 3\,\mathrm{sen}\,(\lambda t)\mathbf{k}$$

P recorre una vez la circunferencia (2π radianes) en un tiempo $t = 2\pi/\lambda$, por lo que la velocidad angular es λ. Por consiguiente, $\lambda = 2$ y el movimiento de la partícula se expresa como

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + 3\cos(2t)\mathbf{j} + 3\,\mathrm{sen}(2t)\mathbf{k}$$

MÉTODO II. Se descompone la ecuación diferencial vectorial dada en sus componentes:

$$\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = 2\mathbf{i}\times(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -2z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = -2z, \qquad \frac{dz}{dt} = 2y$$

La primera ecuación implica que $x =$ constante. Como $x(0) = 1$, tenemos que $x(t) = 1$ para todo t. Diferenciando la segunda ecuación con respecto a t y sustituyendo en la tercera ecuación, se llega a la ecuación del movimiento armónico simple en y:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\,\frac{dz}{dt} = -4y$$

Una solución general de esta ecuación es

$$y = A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}\,(2t)$$

Entonces, $z = -\frac{1}{2}(dy/dt) = A\,\mathrm{sen}\,(2t) - B\cos(2t)$. Como $y(0) = 3$ y $z(0) = 0$, tenemos que $A = 3$ y $B = 0$. Por consiguiente, la partícula P se mueve en sentido contrario al de las agujas del reloj siguiendo el camino circular

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + 3\cos(2t)\mathbf{j} + 3\,\mathrm{sen}\,(2t)\mathbf{k}$$

en el plano $x = 1$ con velocidad angular 2. ■

Observación La Segunda Ley de Newton establece que $\mathbf{F} = (d/dt)(m\mathbf{v}) = d\mathbf{p}/dt$, siendo $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ el momento (lineal) de una partícula de masa m que se mueve bajo la influencia de una fuerza $\mathbf{F}$. Esta ley se puede reformular de forma apropiada para describir el movimiento rotacional. Si $\mathbf{r}(t)$ es la posición de la partícula en el instante t, entonces, como $\mathbf{v}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times(m\mathbf{v})) = \mathbf{v}\times(m\mathbf{v}) + \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

Las magnitudes $\mathbf{H} = \mathbf{r}\times(m\mathbf{v})$ y $\mathbf{T} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ son, respectivamente, el **momento angular** de la partícula respecto al origen y el **torque** de $\mathbf{F}$ respecto al origen. Hemos demostrado que

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{H}}{dt}$$

El torque de las fuerzas externas es igual a la velocidad de cambio del momento angular de una partícula. Esta expresión es la análoga de $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ para el caso de movimiento rotacional.

Sistemas en rotación y el efecto de Coriolis

El procedimiento de diferenciar una función vectorial diferenciando sus componentes sólo es válido si los actores de la base no dependen de las variables de diferenciación. Éste no es el caso en algunas situaciones en mecánica. Por ejemplo, al modelar fenómenos meteorológicos a gran escala, el análisis está afectado por el hecho de que un sistema de coordenadas fijo con respecto a la tierra es de hecho un sistema en rotación (con la tierra) con respecto a direcciones fijas en el espacio.

Para entender el efecto que tiene la rotación del sistema de coordenadas en la representación de la velocidad y de la aceleración, consideremos dos sistemas de coordenadas cartesianas (es decir, sistemas de ejes con los correspondientes vectores unitarios de la base), un sistema (fijo) cuya base es $\{\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\}$, que no rota con la tierra, y un sistema en rotación cuya base es $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, unido a la tierra y, por lo tanto, en rotación con su misma velocidad angular, concretamente, $\pi/12$ radianes/hora. Supongamos que el origen del sistema de coordenadas fijo es el centro de la tierra, y que $\mathbf{K}$ apunta al norte. Entonces la velocidad angular de la tierra es $\mathbf{\Omega} = (\pi/12)\mathbf{K}$. El sistema fijo se mueve con la tierra en su órbita alrededor del Sol, pero no rota con la tierra y, como la rotación orbital de la tierra alrededor del Sol tiene una velocidad angular de $1/365$ de la velocidad angular de rotación alrededor de su eje, podemos despreciar este efecto, mucho menor de la rotación de la tierra debido a su órbita alrededor del Sol.

Tomemos el origen del sistema de coordenadas que rota en la posición del observador en la superficie de la tierra, por ejemplo, en un punto P_0 cuyo vector de posición es $\mathbf{R}_0$ con respecto al sistema de coordenadas fijo[1]. Supongamos que P_0 tiene una colatitud de ϕ (ángulo entre $\mathbf{R}_0$ y $\mathbf{K}$), que cumple $0 < \phi < \pi$, de forma que P_0 no está en el polo norte ni en el polo sur. Supongamos que $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ apuntan, respectivamente, al este y al norte de P_0. Entonces, $\mathbf{k}$ debe apuntar directamente hacia arriba (*véase* la Figura 11.5).

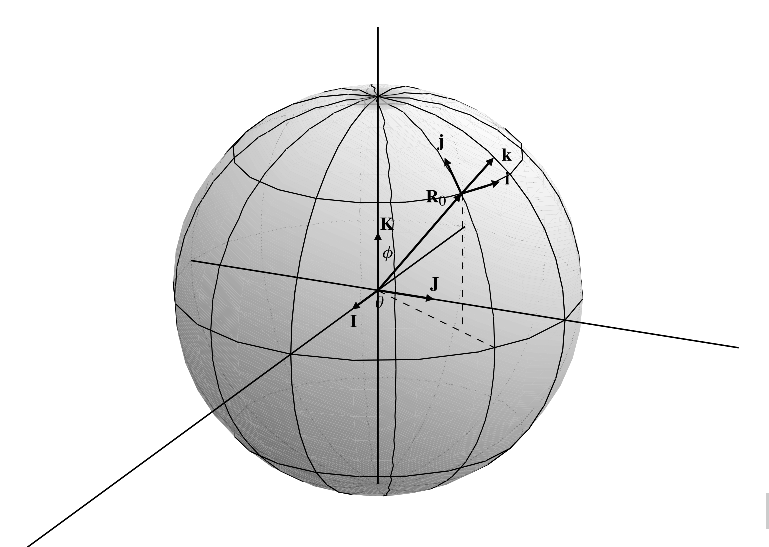


Figura 11.5 Los sistemas de coordenadas fijo y local.

Como los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ y $\mathbf{R}_0$ están rotando con la tierra (con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$), tenemos, como se ha demostrado anteriormente en esta sección,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}_0$$

[1] El autor desea agradecer a su colega, el Profesor Lon Rosen, la sugerencia de este enfoque en el análisis de un sistema de coordenadas en rotación.

Toda función vectorial se puede expresar en función de cualquier base. Sean $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ y $\mathbf{A}(t)$ la posición, velocidad y aceleración de un objeto en movimiento con respecto al sistema de coordenadas fijo, y $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ las mismas magnitudes con respecto al sistema de coordenadas en rotación. Entonces,

$$\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K} \qquad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{V} = \frac{dX}{dt}\mathbf{I} + \frac{dY}{dt}\mathbf{J} + \frac{dZ}{dt}\mathbf{K} \qquad \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} = \frac{d^2X}{dt^2}\mathbf{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\mathbf{J} + \frac{d^2Z}{dt^2}\mathbf{K} \qquad \mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

¿Qué relación guardan los valores de estos vectores en el sistema de coordenadas en rotación con los valores en el sistema de coordenadas fijo? Como el origen del sistema de coordenadas en rotación es $\mathbf{R}_0$, tenemos que (*véase* la Figura 11.6)

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$$

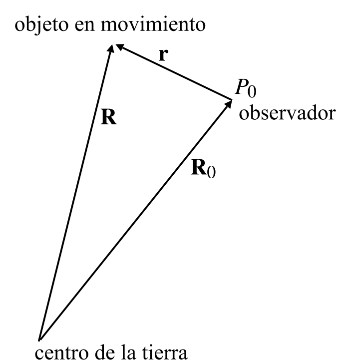


Figura 11.6 Vectores de posición respecto a los sistemas de coordenadas fijo y en rotación.

Cuando se diferencia con respecto al tiempo, hay que recordar que $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ dependen del tiempo. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\\ &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}_0 + x\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{i} + y\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{j} + z\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{k}\\ &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}\\ &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}\end{aligned}$$

De forma similar,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R})\\ &= \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{dx}{dt}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{dy}{dt}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} + \frac{dz}{dt}\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}\times\frac{d\mathbf{R}}{dt}\\ &= \mathbf{a} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times(\mathbf{V})\\ &= \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R})\end{aligned}$$

El término $2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}$ se denomina **aceleración de Coriolis**, y el término $\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R})$ se denomina **aceleración centrípeta**.

Supongamos que nuestro objeto móvil tiene una masa m y que actúa sobre él una fuerza externa $\mathbf{F}$. Por la Segunda Ley de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A} = m\mathbf{a} + 2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$$

o, en otros términos,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$$

Para un observador situado en la superficie de la tierra, el objeto parece estar sujeto a $\mathbf{F}$ y a dos fuerzas adicionales, la **fuerza de Coriolis**, cuyo valor por unidad de masa es $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$, y la **fuerza centrífuga**, cuyo valor por unidad de masa es $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$. Las fuerzas centrífuga y de Coriolis no son fuerzas «reales» actuando sobre el objeto. Son fuerzas ficticias que compensan el hecho de que estamos midiendo la aceleración con respecto a un sistema que estamos considerando fijo, aunque en realidad está en rotación y, por tanto, tiene aceleración.

Obsérvese que la fuerza centrífuga apunta directamente hacia el exterior del eje polar de la tierra. Representa el efecto correspondiente a que el objeto móvil desea continuar moviéndose en línea recta y «despegar» de la tierra, en vez de continuar su rotación con el observador. Esta fuerza tiene su máximo en el ecuador (donde $\boldsymbol{\Omega}$ es perpendicular a $\mathbf{R}$), pero su magnitud es muy pequeña: $|\boldsymbol{\Omega}|^2|\mathbf{R}_0| \approx 0.003g$.

La fuerza de Coriolis es de una naturaleza muy diferente a la fuerza centrífuga. En particular, es cero si el observador percibe que el objeto está en reposo. Es perpendicular a la velocidad del objeto y al eje polar de la tierra, y su magnitud puede alcanzar un valor de $2|\boldsymbol{\Omega}|\,|\mathbf{v}|$ y, en particular, puede ser mayor que la de la fuerza centrífuga si $|\mathbf{v}|$ es suficientemente grande.

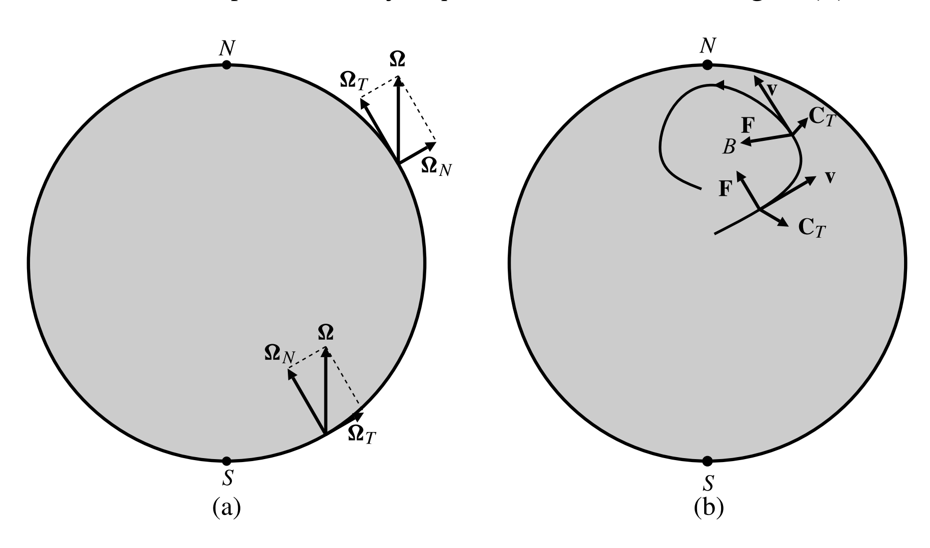


Figura 11.7
(a) Componentes tangencial y normal de la velocidad angular de la tierra en los hemisferios norte y sur.
(b) En el hemisferio norte, la fuerza tangencial de Coriolis modifica la dirección de los vientos hacia la derecha cuando se dirigen hacia el área de bajas presiones B, por lo que los vientos se mueven en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del centro de B.

Ejemplo 3 **(Vientos que giran alrededor del ojo de una tormenta)** La circulación de los vientos alrededor del centro de una tormenta es un ejemplo del efecto de Coriolis. El ojo de una tormenta es un área de bajas presiones que absorbe aire hacia ella. La dirección de rotación de la tierra es tal que la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ apunta al norte y es paralela a su eje de rotación. En cualquier punto P de la superficie de la tierra, podemos expresar $\boldsymbol{\Omega}$ como una suma de una componente tangencial (a la superficie de la tierra) y una componente normal (*véase* la Figura 11.7(a)),

$$\boldsymbol{\Omega}(P) = \boldsymbol{\Omega}_T(P) + \boldsymbol{\Omega}_N(P)$$

Si P está en el hemisferio norte, $\boldsymbol{\Omega}_N(P)$ apunta hacia arriba (en sentido contrario al centro de la tierra). En ese punto la «fuerza» de Coriolis $\mathbf{C} = -2\boldsymbol{\Omega}(P) \times \mathbf{v}$ que actúa sobre una partícula de aire moviéndose con la velocidad horizontal $\mathbf{v}$ tiene componentes horizontal y normal

$$\mathbf{C} = -2\boldsymbol{\Omega}_T \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega}_N \times \mathbf{v} = \mathbf{C}_N + \mathbf{C}_T$$

El efecto de la componente normal de la fuerza de Coriolis se puede despreciar, ya que el aire no es libre de viajar grandes distancias en sentido vertical. Sin embargo, la componente tangencial de la fuerza de Coriolis, $\mathbf{C}_T = -2\mathbf{\Omega}_N \times \mathbf{v}$, está orientada a 90º a la derecha de **v** (en el sentido de las agujas del reloj respecto a **v**). Por tanto, las partículas de aire que están siendo absorbidas hacia el ojo de la tormenta experimentan una desviación de Coriolis hacia la derecha y realmente recorren una espiral hacia el ojo en sentido contrario al de las agujas del reloj. En el hemisferio sur, donde la componente normal $\mathbf{\Omega}_N$ está dirigida hacia el centro de la tierra, ocurre lo contrario. La fuerza de succión **F**, la velocidad **v** y la componente tangencial a la superficie de la tierra de la fuerza de Coriolis, $\mathbf{C}_T$, de una partícula de aire en dos posiciones de su camino alrededor de un área de bajas presiones en el hemisferio norte se muestran en la Figura 11.7(b). ■

Observación Los fuertes vientos que se mueven en espiral hacia dentro alrededor de un área de bajas presiones se denominan **ciclones**. Los fuertes vientos que se mueven en espiral hacia fuera alrededor de un área de altas presiones se denominan **anticiclones**. Estos últimos se mueven en espiral en sentido contrario al de las agujas del reloj en el hemisferio sur y en el sentido de las agujas del reloj en el hemisferio norte. El efecto de Coriolis es también la causa de la alta velocidad del flujo hacia el este de las corrientes en chorro de las capas altas de la atmósfera en latitudes medias en ambos hemisferios, cuya energía es suministrada por la subida de aire tropical caliente y su posterior movimiento hacia los polos.

Las relaciones entre los vectores de la base en los sistemas de coordenadas fijo y móvil se pueden utilizar para analizar muchos fenómenos. Recuérdese que $\mathbf{R}_0$ forma un ángulo ϕ con **K**. Supongamos que la proyección de $\mathbf{R}_0$ en el plano ecuatorial (que contiene a **I** y a **J**) forma un ángulo θ con **I** como se muestra en la Figura 11.5. Una observación cuidadosa de dicha figura debería convencernos de que

$$\mathbf{i} = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{I} + \cos\theta\,\mathbf{J}$$

$$\mathbf{j} = -\cos\phi\cos\theta\,\mathbf{I} - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{J} + \operatorname{sen}\phi\mathbf{K}$$

$$\mathbf{k} = \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathbf{I} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{J} + \cos\phi\mathbf{K}$$

De forma similar, o despejando **I**, **J** y **K** de las ecuaciones anteriores,

$$\mathbf{I} = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - \cos\phi\cos\theta\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{J} = \cos\theta\,\mathbf{i} - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{K} = \operatorname{sen}\phi\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k}$$

Nótese que cuando la tierra rota alrededor de su eje, ϕ permanece constante, pero θ se incrementa a razón de $(\pi/12)$ radianes/hora.

Ejemplo 4 Suponga que la dirección al sol está en el plano de **I** y **K**, y que forma un ángulo σ con **I**. Por tanto, el sol está en la dirección del vector

$$\mathbf{S} = \cos\sigma\,\mathbf{I} + \operatorname{sen}\sigma\mathbf{K}$$

$\sigma = 0$ en los equinoccios de marzo y septiembre, y $\sigma \approx 23.5^\circ$ y -23.5° en los solsticios de junio y diciembre. Calcule la longitud del día (el tiempo que transcurre entre la salida y la puesta del sol) para un observador situado en una colatitud de ϕ.

Solución El sol será visible para el observador si el ángulo entre **S** y **K** no es superior a $\pi/2$, es decir, si $\mathbf{S} \bullet \mathbf{k} \geqslant 0$. Por tanto, el tiempo que dura el día corresponde a

$$\cos\sigma\operatorname{sen}\phi\cos\theta + \operatorname{sen}\sigma\cos\phi \geqslant 0$$

o, en otros términos, $\cos\theta \geqslant -\dfrac{\tan\sigma}{\tan\phi}$. La salida y la puesta del sol se producen cuando se alcanza la igualdad. Concretamente, cuando

$$\theta = \theta_0 = \pm\cos^{-1}\left(-\frac{\tan\sigma}{\tan\phi}\right)$$

si tal valor existe (existirá si $\phi \geqslant \sigma \geqslant 0$ o si $\pi - \phi \geqslant -\sigma \geqslant 0$). En este caso, el tiempo que dura el día para el observador es

$$\frac{2\theta_0}{2\pi} \times 24 = \frac{24}{\pi}\cos^{-1}\left(-\frac{\tan\sigma}{\tan\phi}\right) \text{ horas}$$

Por ejemplo, el 21 de junio en el círculo polar ártico (donde $\phi = \sigma$) el día tendrá una duración de $(24/\pi)\cos^{-1}(-1) =$ 24 horas.

■

Ejercicios 11.2

1. ¿Qué fracción de su masa total inicial deberá quemar como combustible el cohete considerado en el Ejemplo 1 para acelerar en línea recta desde el reposo hasta la velocidad de expulsión de sus propios gases? ¿Y hasta el doble de esa velocidad?

*2. Cuando actúa con su máxima potencia, el motor de un vehículo autopropulsado puede acelerar dicho vehículo (cuya masa es de M kg) en una pista horizontal a razón de a m/s^2. El tanque de combustible está lleno en el instante cero, pero su contenido se pierde por un agujero en su fondo con una velocidad de k kg/s desde el instante inicial. Si el coche está en reposo en el instante cero y se aplica toda la potencia a partir de ese instante, ¿con qué velocidad se estará moviendo en un instante t antes de que el tanque se vacíe?

❖3. Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{k}\times\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}\times\mathbf{k}$$

Describa la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

❖4. Un objeto se mueve de forma que su vector de posición $\mathbf{r}(t)$ satisface

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}\times(\mathbf{r}(t) - \mathbf{b})$$

y $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{r}_0$ son vectores constantes dados, con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Describa la curva que sigue el objeto en su movimiento.

El efecto Coriolis

*5. Un satélite describe una órbita baja, circular y polar alrededor de la tierra (es decir, pasa sobre los polos norte y sur). Realiza una revolución cada dos horas. Un observador situado sobre la tierra en el ecuador ve pasar al satélite directamente por encima de él. ¿En qué dirección le parece al observador que se mueve? Desde el punto de vista del observador, ¿cuál es el valor aproximado de la fuerza de Coriolis que actúa sobre el satélite?

* 6. Repita el Ejercicio 5 para un observador situado a una latitud de 45$^{\rm o}$ en el hemisferio norte.

* 7. Describa las componentes tangencial y normal de la fuerza de Coriolis que actúa sobre una partícula que se mueve con velocidad horizontal $\mathbf{v}$ en (a) el polo norte, (b) el polo sur, (c) el ecuador. En general, ¿cuál es el efecto de la componente normal de la fuerza de Coriolis en las proximidades del ojo de una tormenta?

* 8. **(Localización de la salida y puesta del sol)** Amplíe el argumento del Ejemplo 4 para determinar dónde saldrá y se pondrá el sol en el horizonte de un observador situado en P_0. Concretamente, si μ es el ángulo que forman $\mathbf{j}$ y $\mathbf{S}$ (la dirección al sol) en la salida o en la puesta del sol, demuestre que

$$\cos\mu = \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\phi}$$

Por ejemplo, si $\sigma = 0$ (los equinoccios), entonces $\mu = \pi/2$ en todas las colatitudes ϕ: el sol se levanta exactamente por el este y se pone exactamente por el oeste en esos días.

9. Vancouver, Canadá, está a una latitud de 49.2$^{\rm o}$ N, por lo que su colatitud es de 40.8$^{\rm o}$. ¿Cuánto tiempo estará el sol visible en Vancouver el 21 de junio? O, de otra manera, ¿cuánto tiempo sería visible si no estuviera lloviendo y no hubiera montañas alrededor? ¿A qué ángulos respecto al norte sale y se pone el sol?

10. Repita el Ejercicio 9 para Umeå, Suecia (latitud 63.5$^{\rm o}$ N).

11.3 Curvas y parametrizaciones

En esta sección consideraremos las curvas como objetos geométricos en vez de como caminos que siguen partículas en movimiento. Todo el mundo tiene una idea intuitiva de lo que es una curva, pero es difícil dar una definición formal de ella como objeto geométrico (es decir, como una cierta clase de conjunto de puntos) sin utilizar el concepto de representación paramétrica. Para evitar esta dificultad continuaremos considerando las curvas en el espacio tridimensional como el conjunto de puntos cuyas posiciones están dadas por la función vectorial de posición

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Sin embargo, el parámetro t ya no tiene que representar el tiempo o ninguna otra magnitud física concreta.

Las curvas pueden ser muy extrañas. Por ejemplo, existen curvas continuas que pasan por todos los puntos de un cubo. Es difícil imaginar una curva de ese tipo como un objeto unidimensional. Para evitar estos objetos extraños *supondremos* a partir de ahora que la función $\mathbf{r}(t)$ que define la curva tiene primera derivada, $d\mathbf{r}/dt$, *continua*, y la seguiremos llamando «vector velocidad» y expresándola como $\mathbf{v}(t)$, por analogía con el caso físico en el que t es el tiempo (también continuaremos llamando a $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ «velocidad»). Como veremos posteriormente, esto implica que se puede definir una *longitud de arco* de la curva entre dos puntos cualesquiera correspondientes a valores del parámetro t_1 y t_2; si $t_1 < t_2$, dicha longitud de arco es

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$$

Desearemos frecuentemente que $\mathbf{r}(t)$ tenga derivadas de orden superior que también sean continuas. Siempre que sea necesario, supondremos que la «aceleración», $\mathbf{a}(t) = d^2\mathbf{r}/dt^2$, e incluso la tercera derivada, $d^3\mathbf{r}dt^3$, son continuas. Por supuesto, la mayoría de las curvas que aparecerán en la práctica tendrán parametrizaciones con derivadas de todos los órdenes que serán continuas.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que ninguna suposición sobre la continuidad de las derivadas de la función $\mathbf{r}(t)$ es suficiente para garantizar que la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es una curva «suave». Puede no serlo en un punto donde $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (*véase* el Ejemplo 1 de la Sección 11.1). En la sección siguiente demostraremos que si, además de ser continuo, el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ *nunca se anula*, entonces la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es **suave** en el sentido de tener una tangente que varía de forma continua.

Aunque hemos dicho que una curva es un conjunto de puntos que cumplen una ecuación paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, no existe una forma *única* de representar paramétricamente una curva. De la misma forma que los coches pueden viajar por la misma autopista a diferentes velocidades, y parar y arrancar en diferentes sitios, la misma curva puede ser definida mediante diferentes parametrizaciones; de hecho, una curva puede tener infinitas.

Ejemplo 1 Demuestre que todas las funciones vectoriales

$$\mathbf{r}_1(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}, \qquad (-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2),$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (t-1)\mathbf{i} + \sqrt{2t - t^2}\,\mathbf{j}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2), \quad \text{y}$$

$$\mathbf{r}_3(t) = t\sqrt{2 - t^2}\,\mathbf{i} + (1 - t^2)\mathbf{j}, \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1)$$

representan la misma curva. Describa dicha curva.

Solución Todas las funciones representan puntos en el plano xy. La función $\mathbf{r}_1(t)$ empieza en el punto $(-1, 0)$, cuyo vector de posición es $\mathbf{r}_1(-\pi/2) = -\mathbf{i}$ y termina en el punto $(1, 0)$, cuyo vector de posición

es $\mathbf{i}$. Está contenida en la mitad del plano xy donde $y \geqslant 0$ (porque $\cos t \geqslant 0$ para $(-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2)$). Finalmente, todos los puntos de la curva están a distancia 1 del origen:

$$|\mathbf{r}_1(t)| = \sqrt{(\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

Por tanto, $\mathbf{r}_1(t)$ representa la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$ en el plano xy, recorrida de izquierda a derecha.

Las otras dos funciones tienen las mismas propiedades: ambas gráficas están en $y \geqslant 0$,

$$\mathbf{r}_2(0) = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{r}_2(2) = \mathbf{i}, \qquad |\mathbf{r}_2(t)| = \sqrt{(t-1)^2 + 2t - t^2} = 1$$

$$\mathbf{r}_3(-1) = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{r}_3(1) = \mathbf{i}, \qquad |\mathbf{r}_3(t)| = \sqrt{t^2(2 - t^2) + (1 - t^2)^2} = 1$$

Por tanto, las tres funciones representan la misma semicircunferencia (*véase* la Figura 11.8). Por supuesto, las tres parametrizaciones recorren la curva a diferentes velocidades.

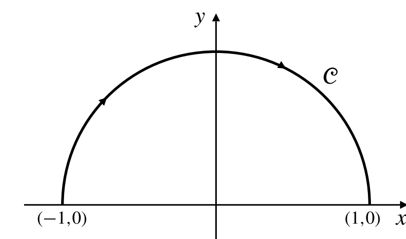


Figura 11.8 En el Ejemplo 1 se muestran tres parametrizaciones de la semicircunferencia $\mathcal{C}$.

■

La curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$ se denomina **curva cerrada** si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, es decir, si la curva empieza y termina en el mismo punto. La curva $\mathcal{C}$ **no se cruza consigo misma** si existe alguna parametrización $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$, de $\mathcal{C}$ que sea uno a uno excepto porque los extremos podrían ser el mismo punto:

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) \quad a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b \quad \Rightarrow \quad t_1 = a \quad \text{y} \quad t_2 = b$$

Si una curva es cerrada, pero no se cruza consigo misma, se denomina **curva cerrada simple**. Las circunferencias y las elipses son ejemplos de curvas cerradas simples. Toda parametrización de una curva concreta determina una de dos posibles **orientaciones**, correspondientes a la dirección de la curva en la que el parámetro crece. La Figura 11.9 ilustra estos conceptos. Las tres parametrizaciones de la semicircunferencia del Ejemplo 1 la orientan en el sentido de las agujas del reloj, vista desde un punto por encima del plano xy. Esta orientación se indica mediante las flechas que hay sobre la curva en la Figura 11.8. Esa misma semicircunferencia podría tener la orientación opuesta si se parametrizara, por ejemplo, como

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

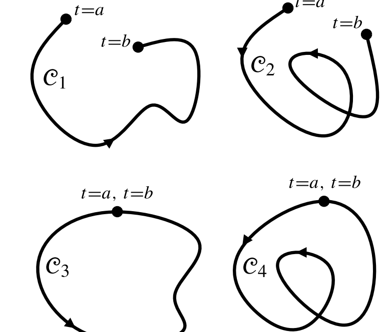


Figura 11.9 Las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_3$ no se cruzan consigo mismas.
Las curvas $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_4$ se cruzan consigo mismas.
Las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ no son cerradas.
Las curvas $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ son cerradas.
La curva $\mathcal{C}_3$ es una curva cerrada simple.

Parametrización de la curva de intersección de dos superficies

Frecuentemente, una curva se especifica como intersección de dos superficies con ecuaciones cartesianas dadas. Puede ser necesario representar dicha curva mediante ecuaciones paramétricas. No hay una única forma de hacerlo, pero si una de las superficies dadas es un cilindro paralelo a un eje de coordenadas (de modo que su ecuación sea independiente de una de las variables), podemos comenzar parametrizando esa superficie. Los siguientes ejemplos clarifican el método.

Ejemplo 2 Parametrice la curva de intersección del plano $x + 2y + 4z = 4$ con el cilindro elíptico $x^2 + 4y^2 = 4$.

Solución Empezaremos con la ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$, que es independiente de z. Se puede parametrizar de muchas formas; una manera cómoda es

$$x = 2\cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

En la ecuación del plano se puede despejar z, por lo que z se puede expresar en función de t:

$$z = \frac{1}{4}(4 - x - 2y) = 1 - \frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{sen} t)$$

Entonces, las superficies dadas se cruzan formando la curva (*véase* la Figura 11.10)

$$\mathbf{r} = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \left(1 - \frac{\cos t + \operatorname{sen} t}{2}\right)\mathbf{k}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

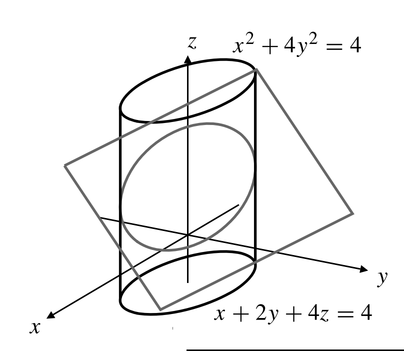


Figura 11.10 La curva de intersección de un plano oblicuo con un cilindro elíptico.

Ejemplo 3 Calcule una representación paramétrica de la curva de intersección de las superficies

$$x^2 + y + z = 2 \qquad \text{y} \qquad xy + z = 1$$

Solución En este caso ninguna de las ecuaciones es independiente de una variable, pero podemos obtener una tercera ecuación que represente a una superficie que contenga a la curva de intersección de las dos superficies dadas, restando las dos ecuaciones para eliminar la variable z:

$$x^2 + y - xy = 1$$

Esta ecuación se puede parametrizar rápidamente. Si, por ejemplo, hacemos $x = t$, entonces

$$t^2 + y(1 - t) = 1, \qquad \text{de forma que} \quad y = \frac{1 - t^2}{1 - t} = 1 + t$$

Cualquiera de las ecuaciones dadas se puede utilizar para expresar z en función de t:

$$z = 1 - xy = 1 - t(1 + t) = 1 - t - t^2$$

Por tanto, una posible parametrización de la curva es

$$\mathbf{r} = t\,\mathbf{i} + (1 + t)\,\mathbf{j} + (1 - t - t^2)\,\mathbf{k}$$

Por supuesto, esta respuesta no es única. Se pueden encontrar muchas otras parametrizaciones de la curva, con orientaciones en cualquier dirección.

Longitud de arco

Consideraremos ahora la forma de definir y calcular la longitud de una curva. Sea $\mathcal{C}$ una curva continua y acotada, especificada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Subdividamos el intervalo cerrado $[a, b]$ en n subintervalos por los puntos

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

Los puntos $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i)$, $(0 \leqslant i \leqslant n)$ subdividen $\mathcal{C}$ en n arcos. Si se utiliza la longitud de la cuerda $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|$ como aproximación a la longitud del arco entre $\mathbf{r}_{i-1}$ y $\mathbf{r}_i$, entonces la suma

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|$$

es una aproximación a la longitud de $\mathcal{C}$ mediante la longitud de una línea poligonal (*véase* la Figura 11.11). Evidentemente, la longitud de esa aproximación será menor o igual que la longitud real de $\mathcal{C}$. Se dice que $\mathcal{C}$ es **rectificable** si existe una constante K tal que $s_n \leqslant K$ para todo n y toda selección de los puntos t_i. En este caso, el axioma de completitud de los números reales asegura que existirá un valor de K mínimo. Denominaremos a este valor de K **longitud** de $\mathcal{C}$ y la representaremos por s.

Sea $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ y $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$. Entonces, s_n se puede expresar de la forma

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i$$

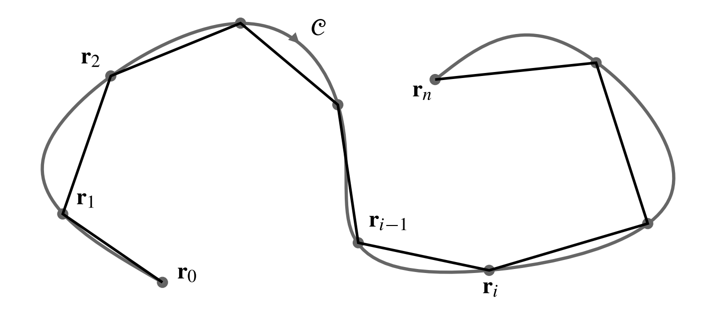


Figura 11.11 Aproximación poligonal a una curva $\mathcal{C}$. La longitud de la línea poligonal no puede superar a la longitud de la curva. En esta figura los puntos de la curva se designan mediante sus vectores de posición, pero el origen y los propios vectores no se muestran.

Si $\mathbf{r}(t)$ tiene derivada continua $\mathbf{v}(t)$, entonces

$$s = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \text{máx}\, \Delta t_i \to 0}} s_n = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b |\mathbf{v}(t)|\, dt = \int_a^b v(t)\, dt$$

En términos cinemáticos, esta fórmula indica que la distancia recorrida por una partícula en movimiento es la integral de su velocidad.

Observación Aunque la fórmula anterior se expresa en función del parámetro t, la longitud de arco, tal como se ha definido anteriormente, es una propiedad estrictamente geométrica de la curva $\mathcal{C}$. Es independiente de la parametrización concreta utilizada para representar a $\mathcal{C}$. *Véase* el Ejercicio 27 posterior.

Si $s(t)$ es la longitud de arco de la parte de $\mathcal{C}$ correspondiente a los valores del parámetro contenidos en $[a, t]$, entonces

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^t v(\tau)\, d\tau = v(t)$$

de forma que el **elemento longitud de arco** de $\mathcal{C}$ se expresa como

$$ds = v(t)\,dt = \left|\frac{d}{dt}\,\mathbf{r}(t)\right| dt$$

La longitud de $\mathcal{C}$ es la integral de esos elementos longitud de arco; expresamos

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \text{longitud de } \mathcal{C} = \int_a^b v(t)\,dt$$

Varias fórmulas familiares de la longitud de arco se deducen de la fórmula anterior utilizando parametrizaciones específicas de curvas. Por ejemplo, el elemento longitud de arco ds de la curva plana cartesiana $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se obtiene utilizando x como parámetro; en este caso, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$, por lo que $\mathbf{v} = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}$ y

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

De forma similar, el elemento longitud de arco ds de una curva plana en polares $r = g(\theta)$ se puede calcular mediante la parametrización

$$\mathbf{r}(\theta) = g(\theta)\cos\theta\,\mathbf{i} + g(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$$

Y vale

$$ds = \sqrt{(g(\theta))^2 + (g'(\theta))^2}\,d\theta$$

Ejemplo 4 Calcule la longitud de la parte de la **hélice circular**

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$$

que está entre los puntos $(a, 0, 0)$ y $(a, 0, 2\pi b)$.

Solución Esta curva realiza un movimiento en espiral alrededor del eje z, elevándose mientras gira (*véase* la Figura 11.12). Está contenida en la superficie del cilindro circular $x^2 + y^2 = a^2$. Tenemos que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + b\mathbf{k}$$

$$v = \sqrt{a^2 + b^2}$$

por lo que en función del parámetro t la hélice se recorre a velocidad constante. La longitud pedida s corresponde al intervalo del parámetro $[0, 2\pi]$. Entonces,

$$s = \int_0^{2\pi} v(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

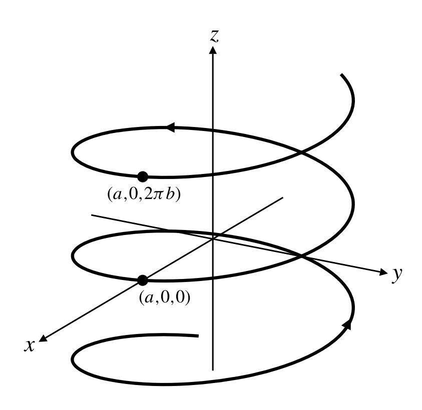


Figura 11.12 La hélice
$x = a\cos t$
$y = a\,\mathrm{sen}\,t$
$z = bt$

■

Curvas suaves por tramos

Como se observó anteriormente, una curva paramétrica $\mathcal{C}$ dada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ puede no ser suave en los puntos donde $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{0}$. Si hay un número finito de puntos de ese tipo, se dice que la curva es suave por tramos.

En general, una **curva suave por tramos** $\mathcal{C}$ está formada por un número finito de arcos suaves, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_k$, como se muestra en la Figura 11.13.

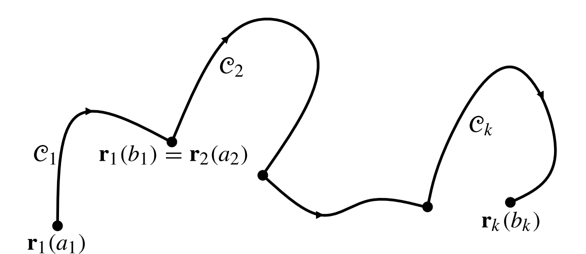


Figura 11.13 Una curva suave por tramos.

En este caso se expresa $\mathcal{C}$ como suma de los arcos individuales:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \cdots + \mathcal{C}_k$$

Cada arco $\mathcal{C}_i$ posee su propia parametrización

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i(t), \qquad (a_i \leqslant t \leqslant b_i)$$

siendo $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt \neq \mathbf{0}$ para $a_i < t < b_i$. El hecho de que $\mathcal{C}_{i+1}$ debe comenzar en el punto donde termina $\mathcal{C}_i$ impone las condiciones

$$\mathbf{r}_{i+1}(a_{i+1}) = \mathbf{r}_i(b_i) \qquad \text{para} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1$$

Si además $\mathbf{r}_k(b_k) = \mathbf{r}_1(a_1)$, entonces $\mathcal{C}$ es una curva suave por tramos cerrada.

La longitud de una curva suave por tramos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \cdots + \mathcal{C}_k$ es la suma de las longitudes de los arcos que la componen:

$$\text{longitud de } \mathcal{C} = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} \left| \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right| dt$$

Parametrización mediante la longitud de arco

La selección de un parámetro particular para especificar una curva dada dependerá generalmente del problema en el que surge la curva: no hay una «forma correcta» de parametrizar una curva. Sin embargo, existe un parámetro que es «natural», en el sentido de que surge de la geometría (forma y tamaño) de la propia curva y no del sistema de coordenadas en el que se exprese la ecuación de dicha curva. Este parámetro es la *longitud de arco* medida desde algún punto particular (el *punto inicial*) de la curva. El vector de posición de un punto arbitrario P sobre la curva se puede especificar en función de la longitud del arco s de dicha curva desde el punto inicial P_0 hasta P,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

Esta ecuación se denomina **parametrización mediante la longitud de arco** o **parametrización intrínseca** de la curva. Como $ds = v(t)\,dt$ para cualquier parametrización $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, en el caso de parametrización mediante la longitud de arco tenemos que $ds = v(s)\,ds$. Por tanto, $v(s) = 1$; *una curva parametrizada en función de la longitud de arco se recorre con velocidad unidad*. Aunque raramente es fácil (y en general es imposible) obtener explícitamente $\mathbf{r}(s)$ cuando la curva se expresa en función de algún otro parámetro, las curvas suaves siempre admiten esta parametrización (*véase* el Ejercicio 28 posterior), que será de utilidad cuando desarrollemos en la sección

siguiente los fundamentos de la *geometría diferencial* de las curvas en el espacio tridimensional.

Supongamos que una curva se especifica en función de un parámetro arbitrario t. Si la longitud del arco en el intervalo de valores del parámetro $[t_0, t]$,

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d}{d\tau} \mathbf{r}(\tau) \right| d\tau$$

se puede calcular explícitamente, y si se puede despejar t explícitamente en la ecuación $s = s(t)$ como función de s ($t = t(s)$), entonces la curva se puede volver a parametrizar mediante la longitud de arco sustituyendo t en la parametrización original:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$$

Ejemplo 5 Parametrice la hélice circular

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$$

en función de la longitud de arco medida desde el punto $(a, 0, 0)$ en la dirección de t creciente (*véase* la Figura 11.12).

Solución El punto inicial corresponde a $t = 0$. Como se muestra en el Ejemplo 4, tenemos que $ds/dt =$ $= \sqrt{a^2 + b^2}$, por lo que

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\, d\tau = \sqrt{a^2 + b^2}\, t$$

Por tanto, $t = s/\sqrt{a^2 + b^2}$ y la parametrización mediante la longitud de arco es

$$\mathbf{r}(s) = a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\mathbf{j} + \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\mathbf{k}$$

■

Ejercicios 11.3

En los Ejercicios 1-4, calcule la parametrización requerida de la parte que está en el primer cuadrante del arco de circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

1. En función de la coordenada y, con orientación en sentido contrario al de las agujas del reloj.

2. En función de la coordenada x, con orientación en el sentido de las agujas del reloj.

3. En función del ángulo que forma la tangente y el eje x positivo, con orientación en sentido contrario al de las agujas del reloj.

4. En función de la longitud medida desde $(0, a)$, con orientación en el sentido de las agujas del reloj.

5. Los cilindros $z = x^2$ y $z = 4y^2$ se cortan en dos curvas, una de las cuales pasa por el punto $(2, -1, 4)$. Obtenga una parametrización de dicha curva utilizando $t = y$ como parámetro.

6. El plano $x + y + z = 1$ corta al cilindro $z = x^2$ formando una parábola. Parametrice dicha parábola utilizando $t = x$ como parámetro.

En los Ejercicios 7-10, parametrice las curvas de intersección de las superficies dadas. *Nota*: Las respuestas no son únicas.

7. $x^2 + y^2 = 9$ y $z = x + y$

8. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $x + y = 1$

9. $z = x^2 + y^2$ y $2x - 4y - z - 1 = 0$

10. $yz + x = 1$ y $xz - x = 1$

11. El plano $z = 1 + x$ corta al cono $z^2 = x^2 + y^2$ formando una parábola. Intente parametrizar dicha parábola utilizando como parámetro: (a) $t = x$, (b) $t = y$ y (c) $t = z$.
¿Cuál de estas posibilidades de selección de t produce una parametrización que representa toda la parábola? ¿Qué es dicha parametrización? ¿Qué sucede con las otras dos posibilidades?

***12.** El plano $x + y + z = 1$ corta a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ formando una circunferencia $\mathcal{C}$. Calcule el centro $\mathbf{r}_0$ y el radio r de $\mathcal{C}$. Calcule

también dos vectores unitarios perpendiculares $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{v}}_2$ paralelos al plano de $\mathcal{C}$. (*Sugerencia*: Para concretar, demuestre que $\hat{\mathbf{v}}_1 = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$ es uno de esos vectores; obtenga después un segundo vector que sea perpendicular a $\hat{\mathbf{v}}_1$). Utilice sus resultados para construir una parametrización de $\mathcal{C}$.

13. Calcule la longitud de la curva $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

14. ¿Para qué valores del parámetro λ la longitud $s(T)$ de la curva $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \lambda t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $(0 \leqslant t \leqslant T)$ se expresa como $s(T) = T + T^3$?

15. Exprese la longitud de la curva $\mathbf{r} = at^2\mathbf{i} + bt\mathbf{j} + c\ln t\mathbf{k}$, $(1 \leqslant t \leqslant T)$, en forma de integral definida. Evalúe la integral si $b^2 = 4ac$.

16. Describa la curva paramétrica $\mathcal{C}$ dada por

$$x = a\cos t \operatorname{sen} t, \qquad y = a\operatorname{sen}^2 t, \qquad z = bt$$

¿Cuál es la longitud de $\mathcal{C}$ entre $t = 0$ y $t = T > 0$?

17. Calcule la longitud de la hélice cónica $\mathbf{r} = t\cos t\mathbf{i} + t\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. ¿Por qué se denomina a esta curva hélice cónica?

18. Describa la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el cilindro elíptico $x^2 + 2z^2 = 1$. Calcule la longitud total de la curva de intersección.

19. Sea $\mathcal{C}$ la curva $x = e^t\cos t$, $y = e^t\operatorname{sen} t$, $z = t$ entre $t = 0$ y $t = 2\pi$. Calcule la longitud de $\mathcal{C}$.

20. Calcule la longitud de la curva suave por tramos $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $(-1 \leqslant t \leqslant 2)$.

21. Describa la curva suave por tramos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$, siendo $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ y $\mathbf{r}_2(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j}$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

***22.** Un cable de longitud L y sección cruzada circular de radio a se enrolla sin solapamiento alrededor de un carrete cilíndrico de radio b, de forma que las vueltas contiguas se tocan entre sí. ¿Qué longitud del cilindro es cubierta por el cable?

En los Ejercicios 23-26, vuelva a parametrizar la curva dada, en la misma orientación, en función de su longitud de arco medida desde el punto donde $t = 0$.

23. $\mathbf{r} = At\mathbf{i} + Bt\mathbf{j} + Ct\mathbf{k}, \qquad (A^2 + B^2 + C^2 > 0)$

24. $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$

***25.** $\mathbf{r} = a\cos^3 t\mathbf{i} + a\operatorname{sen}^3 t\mathbf{j} + b\cos 2t\mathbf{k}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$

***26.** $\mathbf{r} = 3t\cos t\mathbf{i} + 3t\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2\sqrt{2}t^{3/2}\mathbf{k}$

27. Sean $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$, y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(u)$, $(c \leqslant u \leqslant d)$, dos parametrizaciones de la misma curva $\mathcal{C}$, siendo cada una de ellas uno a uno en su dominio y con la misma orientación (de forma que $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(c)$ y $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(d)$. Entonces, para todo t en el intervalo $[a, b]$ existe un único $u = u(t)$ tal que $\mathbf{r}_2(u(t)) = \mathbf{r}_1(t)$. Demuestre que

$$\int_a^b \left|\frac{d}{dt}\mathbf{r}_1(t)\right| dt = \int_c^d \left|\frac{d}{du}\mathbf{r}_2(u)\right| du$$

y, por tanto, que la longitud de $\mathcal{C}$ es independiente de la parametrización.

***28.** Si la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ tiene una velocidad $\mathbf{v}(t)$ continua que no se anula en el intervalo $[a, b]$, y si t_0 es un punto del intervalo $[a, b]$, demuestre que la función

$$s = g(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(u)|\, du$$

es creciente en el intervalo $[a, b]$ y, por tanto, tiene inversa:

$$t = g^{-1}(s) \quad \Leftrightarrow \quad s = g(t)$$

A partir de aquí, demuestre que la curva se puede parametrizar en función de su longitud de arco medida desde $\mathbf{r}(t_0)$.

11.4 Curvatura, torsión y sistema de referencia de Frenet

En esta sección presentaremos algunas nuevas funciones escalares y vectoriales asociadas a una curva $\mathcal{C}$. Las más importantes son la curvatura y la torsión de la curva, y un trío de vectores mutuamente perpendiculares, con orientación derecha, que forman una base que se denomina sistema de referencia de Frenet. La curvatura mide la velocidad con la que cambia una curva (alejándose de su tangente) en cualquier punto. La torsión mide la velocidad con que la curva se tuerce (fuera del plano en el que está evolucionando) en cualquier punto.

El vector tangente unitario

El vector velocidad $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt$ es tangente a la curva paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ en el punto $\mathbf{r}(t)$, y apunta en la dirección de la orientación de la curva en dicho punto. Como estamos suponiendo

que $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$, se puede obtener un **vector tangente unitario**, $\hat{\mathbf{T}}(t)$, en $\mathbf{r}(t)$ dividiendo $\mathbf{v}(t)$ por su longitud:

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \bigg/ \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$$

Recuérdese que una curva parametrizada en función de su longitud de arco, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, se recorre con velocidad unidad, $v(s) = 1$. En función de la parametrización de la longitud de arco, el vector tangente unitario es

$$\hat{\mathbf{T}}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Ejemplo 1 Calcule el vector tangente unitario, $\hat{\mathbf{T}}$, de la hélice circular del Ejemplo 4 de la Sección 11.3, en función de t y del parámetro de longitud de arco s.

Solución En función de t tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + bt\mathbf{k} \\
\mathbf{v}(t) &= -a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + b\mathbf{k} \\
v(t) &= \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \\
\hat{\mathbf{T}}(t) &= -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\,\mathbf{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

En función del parámetro de longitud de arco (*véase* el Ejemplo 5 de la Sección 11.3)

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(s) &= a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\mathbf{j} + \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{k} \\
\hat{\mathbf{T}}(s) &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\mathbf{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

■

Observación Si la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ tiene una velocidad continua y distinta de cero $\mathbf{v}(t)$, entonces el vector tangente unitario $\hat{\mathbf{T}}(t)$ es una función continua de t. El ángulo $\theta(t)$ que forman $\hat{\mathbf{T}}(t)$ y cualquier vector unitario fijo $\hat{\mathbf{u}}$ es también continuo en t:

$$\theta(t) = \cos^{-1}(\hat{\mathbf{T}}(t) \bullet \hat{\mathbf{u}})$$

Por tanto, como se dijo anteriormente, la curva es *suave*, en el sentido de que tiene una tangente que varía de forma continua. La velocidad con la que varía esta tangente se cuantifica mediante la curvatura, que presentaremos a continuación.

Curvatura y normal unitaria

En el resto de esta sección consideraremos una curva abstracta $\mathcal{C}$, parametrizada en función de la longitud de arco, medida desde algún punto de la misma:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

En la siguiente sección volveremos a las curvas con parametrizaciones arbitrarias, y aplicaremos los principios desarrollados en esta sección a problemas específicos. Supondremos que las ecuaciones paramétricas de las curvas tienen derivadas continuas hasta tercer orden en los intervalos donde están definidas.

Como tiene longitud unidad, el vector tangente $\hat{\mathbf{T}}(s) = d\mathbf{r}/ds$ cumple $\hat{\mathbf{T}}(s) \bullet \hat{\mathbf{T}}(s) = 1$. Diferenciando esta ecuación con respecto a s se obtiene

$$2\hat{\mathbf{T}}(s) \bullet \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = 0$$

de modo que $\mathbf{d}\hat{\mathbf{T}}/ds$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{T}}(s)$.

DEFINICIÓN 1 Curvatura y radio de curvatura

La **curvatura** de $\mathcal{C}$ en el punto $\mathbf{r}(s)$ es la longitud de $d\hat{\mathbf{T}}/ds$ en dicho punto. Se indica como κ, la letra griega «kappa»:

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right|$$

El **radio de curvatura**, que se indica como ρ, la letra griega «rho», es el inverso de la curvatura:

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

Como veremos posteriormente, la curvatura de $\mathcal{C}$ en $\mathbf{r}(s)$ mide la velocidad de giro de la tangente a la curva en dicho punto. El radio de curvatura es el radio de la circunferencia que mejor aproxima en el punto $\mathbf{r}(s)$ la curva de $\mathcal{C}$ cerca de dicho punto.

De acuerdo con esta definición, $\kappa(s) \geqslant 0$ en toda la curva $\mathcal{C}$. Si $\kappa(s) \neq 0$, se puede dividir $d\hat{\mathbf{T}}/ds$ por su longitud, $\kappa(s)$, y obtener un vector unitario $\hat{\mathbf{N}}(s)$ en la misma dirección. Este vector unitario se denomina **normal principal unitaria** a $\mathcal{C}$ en $\mathbf{r}(s)$ o, más comúnmente, sólo **normal unitaria**:

$$\hat{\mathbf{N}}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\bigg/\left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right|$$

Nótese que $\hat{\mathbf{N}}(s)$ es perpendicular a $\mathcal{C}$ en $\mathbf{r}(s)$, y apunta en la dirección en la que $\hat{\mathbf{T}}$, y por tanto $\mathcal{C}$, está girando. La normal principal no está definida en los puntos donde la curvatura $\kappa(s)$ es cero. Por ejemplo, una recta no tiene normal principal. La Figura 11.14(a) muestra $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$ en un punto de una curva típica.

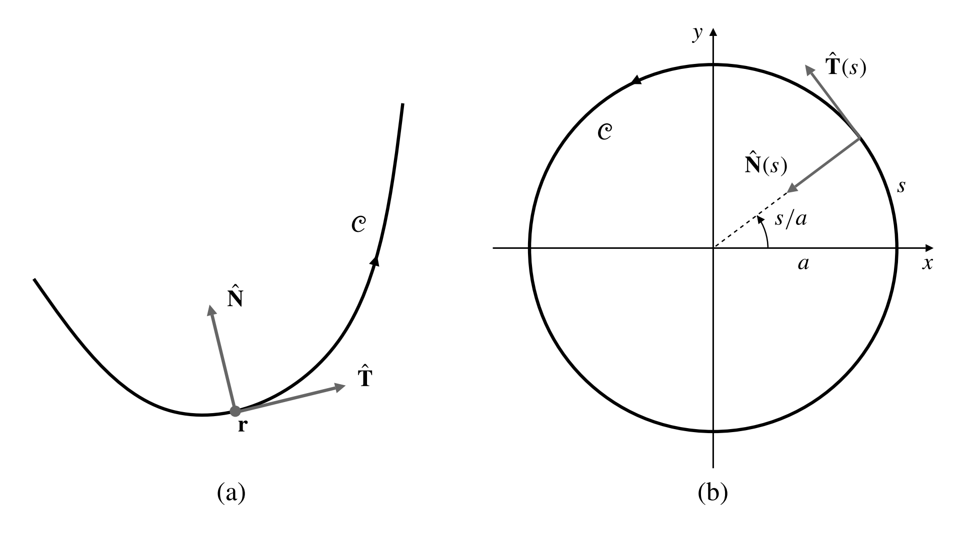


Figura 11.14

(a) Los vectores tangente unitario y normal principal de una curva.

(b) Los vectores tangente unitario y normal principal de una circunferencia.

Ejemplo 2 Sea $a > 0$. Demuestre que la curva $\mathcal{C}$ dada por

$$\mathbf{r} = a\cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

es una circunferencia en el plano xy de radio a y centro el origen, y que está parametrizada en función de la longitud de arco. Calcule la curvatura, el radio de curvatura, y los vectores tangente unitario y normal principal en todo punto de $\mathcal{C}$.

Solución Como

$$|\mathbf{r}(s)| = a\sqrt{\left(\cos\left(\frac{s}{a}\right)\right)^2 + \left(\mathrm{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\right)^2} = a$$

$\mathcal{C}$ es de hecho una circunferencia de radio a centrada en el origen en el plano xy. Como la velocidad es

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \left|-\mathrm{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}\right| = 1$$

el parámetro s debe representar la longitud de arco. Por tanto, el vector tangente unitario es

$$\hat{\mathbf{T}}(s) = -\mathrm{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

Entonces,

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = -\frac{1}{a}\cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} - \frac{1}{a}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

y la curvatura y el radio de curvatura en $\mathbf{r}(s)$ son

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right| = \frac{1}{a}, \qquad \rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)} = a$$

Finalmente, la normal principal unitaria es

$$\hat{\mathbf{N}}(s) = -\cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} - \mathrm{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j} = -\frac{1}{a}\mathbf{r}(s)$$

Nótese que la curvatura y el radio de curvatura son constantes; este último es de hecho el radio de la circunferencia. La circunferencia y sus vectores tangente unitario y normal en una posición típica se muestran en la Figura 11.14(b). Nótese que $\hat{\mathbf{N}}$ apunta hacia el centro de la circunferencia. ■

Observación Se puede hacer otra observación sobre el ejemplo anterior. El vector de posición $\mathbf{r}(s)$ forma un ángulo $\theta = s/a$ con el eje x positivo. Por tanto, $\hat{\mathbf{T}}(s)$ forma el mismo ángulo con el eje x positivo. Por esta razón, la velocidad de rotación de $\hat{\mathbf{T}}$ con respecto a s es

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{a} = \kappa$$

Es decir, κ es la velocidad con la que $\hat{\mathbf{T}}$ gira (medida con respecto a la longitud de arco). Esta observación se puede aplicar a cualquier curva general suave.

TEOREMA 2 **La curvatura es la velocidad de giro del vector tangente unitario**

Sea $\kappa > 0$ en un intervalo que contiene a s, y sea $\Delta\theta$ el ángulo que forman $\hat{\mathbf{T}}(s + \Delta s)$ y $\hat{\mathbf{T}}(s)$, los vectores tangentes unitarios en dos puntos cercanos de la curva. Entonces,

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

DEMOSTRACIÓN Sea $\Delta\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(s + \Delta s) - \hat{\mathbf{T}}(s)$. Como $\hat{\mathbf{T}}(s)$ y $\hat{\mathbf{T}}(s + \Delta s)$ son vectores unitarios, $|\Delta\hat{\mathbf{T}}/\Delta\theta|$ es la razón entre la longitud de una cuerda y la longitud del arco correspondiente en una circunferencia de radio 1 (*véase* la Figura 11.15). Entonces,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\hat{\mathbf{T}}}{\Delta\theta} \right| = 1 \qquad \text{y}$$

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\hat{\mathbf{T}}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\hat{\mathbf{T}}}{\Delta\theta} \right| \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|$$

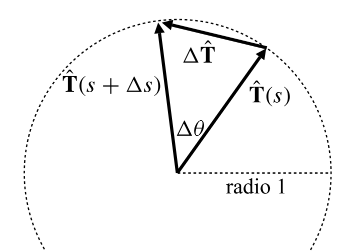


Figura 11.15 $|\Delta\hat{\mathbf{T}}| \approx |\Delta\theta|$ para valores pequeños de $|\Delta s|$.

La tangente unitaria $\hat{\mathbf{T}}$ y la normal unitaria $\hat{\mathbf{N}}$ en un punto $\mathbf{r}(s)$ de una curva $\mathcal{C}$ pueden considerarse con su origen en ese punto. Son perpendiculares, y $\hat{\mathbf{N}}$ apunta en la dirección en la que gira $\hat{\mathbf{T}}(s)$ cuando s aumenta. El plano que pasa por $\mathbf{r}(s)$ y contiene los vectores $\hat{\mathbf{T}}(s)$ y $\hat{\mathbf{N}}(s)$ se denomina **plano osculante** de $\mathcal{C}$ en $\mathbf{r}(s)$ (del latín *osculum*, que significa *beso*). En una *curva plana*, como la circunferencia del Ejemplo 2, el plano osculante es el plano que contiene a la curva. En el caso más general de curvas tridimensionales, el plano osculante varía de un punto a otro; en un punto cualquiera es el plano más cercano que contiene a la parte de la curva que está alrededor de dicho punto. El plano osculante no está definido en los puntos donde $\kappa(s) = 0$, aunque si esos puntos están aislados, algunas veces se puede definir como el límite de los planos osculantes en los puntos vecinos.

Suponiendo todavía que $\kappa(s) \neq 0$, sea

$$\mathbf{r}_c(s) = \mathbf{r}(s) + \rho(s)\hat{\mathbf{N}}(s)$$

Para cada valor de s, el punto cuyo vector de posición es $\mathbf{r}_c(s)$ está en el plano osculante de $\mathcal{C}$ en $\mathbf{r}(s)$, en la parte cóncava de $\mathcal{C}$, y a una distancia $\rho(s)$ de $\mathbf{r}(s)$. Se denomina **centro de curvatura** de $\mathcal{C}$ en el punto $\mathbf{r}(s)$. La circunferencia en el plano osculante cuyo centro es el centro de curvatura y su radio es igual al radio de curvatura $\rho(s)$ se denomina **circunferencia osculante** de $\mathcal{C}$ en $\mathbf{r}(s)$. De todas las circunferencias que pasan por el punto $\mathbf{r}(s)$, la circunferencia osculante es aquella que mejor describe el comportamiento de $\mathcal{C}$ cerca de dicho punto. Por supuesto, la circunferencia osculante de una circunferencia en cualquier punto es la misma circunferencia. La Figura 11.16 muestra un ejemplo típico de circunferencia osculante.

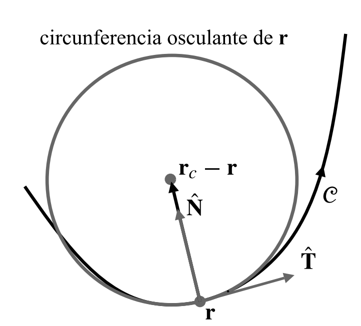


Figura 11.16 Circunferencia osculante.

Torsión y binormal, fórmulas de Frenet-Serret

En todo punto $\mathbf{r}(s)$ de la curva $\mathcal{C}$ donde $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$ estén definidos, se define un tercer vector unitario, denominado **binormal unitario** $\hat{\mathbf{B}}$, mediante la fórmula

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}$$

Nótese que $\hat{\mathbf{B}}(s)$ es normal al plano osculante de $\mathcal{C}$ en $\mathbf{r}(s)$; si $\mathcal{C}$ es una curva plana, entonces $\hat{\mathbf{B}}$ es un vector constante, independiente de s en cualquier intervalo donde $\kappa(s) \neq 0$. En todo punto $\mathbf{r}(s)$ de $\mathcal{C}$, los tres vectores $\{\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{B}}\}$ constituyen una base de vectores unitarios mutuamente perpendiculares orientada a la derecha, como la base estándar $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (*véase* la Figura 11.17). Esta base se denomina **sistema de referencia de Frenet** de $\mathcal{C}$ en el punto $\mathbf{r}(s)$. Nótese que

$$\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{N}} \text{ y } \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}}$$

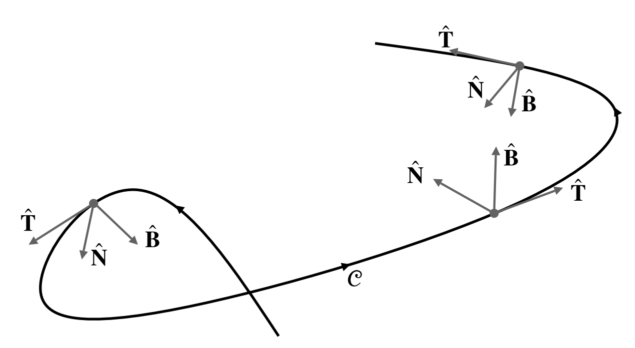


Figura 11.17 El sistema de referencia de Frenet $\{\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{B}}\}$ en algunos puntos de $\mathcal{C}$.

Como $1 = \hat{\mathbf{B}}(s) \bullet \hat{\mathbf{B}}(s)$, entonces $\hat{\mathbf{B}}(s) \bullet (d\hat{\mathbf{B}}/ds) = 0$ y $d\hat{\mathbf{B}}/ds$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{B}}(s)$. Además, diferenciando $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}$ se obtiene

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \times \hat{\mathbf{N}} + \hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{N}} + \hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = \hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds}$$

Por tanto, $d\hat{\mathbf{B}}/ds$ es también perpendicular a $\hat{\mathbf{T}}$. Como es perpendicular a $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$, $d\hat{\mathbf{B}}/ds$ debe ser paralelo a $\hat{\mathbf{N}}$. Este hecho es la base de nuestra definición de torsión.

DEFINICIÓN 2 **Torsión**

En cualquier intervalo donde $\kappa(s) \neq 0$, existe una función $\tau(s)$ tal que

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau(s)\hat{\mathbf{N}}(s)$$

El número $\tau(s)$ se denomina **torsión** de $\mathcal{C}$ en $\mathbf{r}(s)$.

La torsión mide el grado de retorcimiento que tiene una curva en las proximidades de un punto, es decir, mide cuánto se aleja la curva de ser plana. Puede ser positiva o negativa, en función de su orientación a la izquierda o la derecha. Presentaremos un ejemplo posteriormente en esta sección.

El Teorema 2 tiene un análogo para la torsión, y la demostración es similar. Establece que el valor absoluto de la torsión, $|\tau(s)|$, en un punto $\mathbf{r}(s)$ de la curva $\mathcal{C}$ es la velocidad de giro de la binormal unitaria:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\psi}{\Delta s} \right| = |\tau(s)|$$

siendo $\Delta\psi$ el ángulo que forman $\hat{\mathbf{B}}(s + \Delta s)$ y $\hat{\mathbf{B}}(s)$.

Ejemplo 3 **(La hélice circular.)** Como se indicó en el Ejemplo 5 de la Sección 11.3, la ecuación paramétrica

$$\mathbf{r}(s) = a\cos(cs)\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,(cs)\mathbf{j} + bcs\mathbf{k}, \qquad \text{siendo } c = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

representa una hélice circular sobre la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, y parametrizada en función de la longitud de arco. Supongamos que $a > 0$. Calcule las funciones de curvatura y de torsión $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ de esta hélice y también los vectores unitarios que forman el sistema de referencia de Frenet en todo punto $\mathbf{r}(s)$ ante dicha hélice.

Solución En el Ejemplo 1 calculamos el vector tangente unitario, cuyo valor era

$$\hat{\mathbf{T}}(s) = -ac\,\mathrm{sen}\,(cs)\mathbf{i} + ac\cos(cs)\mathbf{j} + bc\mathbf{k}$$

Diferenciando de nuevo se llega a

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = -ac^2\cos(cs)\mathbf{i} - ac^2\,\mathrm{sen}\,(cs)\mathbf{j}$$

de forma que la curvatura de la hélice es

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right| = ac^2 = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

y el vector normal unitario es

$$\hat{\mathbf{N}}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = -\cos(cs)\mathbf{i} - \mathrm{sen}\,(cs)\mathbf{j}$$

Ahora tenemos

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}}(s) = \hat{\mathbf{T}}(s)\times\hat{\mathbf{N}}(s) &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -ac\,\mathrm{sen}\,(cs) & ac\cos(cs) & bc\\ -\cos(cs) & -\mathrm{sen}\,(cs) & 0\end{vmatrix}\\ &= bc\,\mathrm{sen}\,(cs)\mathbf{i} - bc\cos(cs)\mathbf{j} + ac\mathbf{k}\end{aligned}$$

Diferenciando esta fórmula se llega a

$$\frac{\mathbf{d}\hat{\mathbf{B}}}{ds} = bc^2\cos(cs)\mathbf{i} + bc^2\,\mathrm{sen}\,(cs)\mathbf{j} = -bc^2\hat{\mathbf{N}}(s)$$

Por tanto, la torsión es

$$\tau(\mathbf{s}) = -(-bc^2) = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

■

Observación Obsérvese que la curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ son constantes (es decir, independientes de s) para el caso de la hélice circular. En el ejemplo anterior, $\tau > 0$ (suponiendo que $b > 0$). Esto corresponde al hecho de que la hélice está orientada a la derecha (*véase* la Figura 11.12). Si rodeamos la hélice con la mano derecha de forma que los dedos apunten en la dirección de s creciente (en sentido contrario al de las agujas del reloj, mirando hacia abajo desde el eje z positivo), entonces el pulgar apuntará también en la dirección axial correspondiente a s creciente (en dirección hacia arriba). Si hubiéramos partido de una hélice orientada a la izquierda, tal como

$$\mathbf{r} = a\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \qquad (a, b > 0)$$

habríamos obtenido $\tau = -b/(a^2 + b^2)$.

Utilizando las fórmulas $d\hat{\mathbf{T}}/ds = \kappa\hat{\mathbf{N}}$ y $d\hat{\mathbf{B}}/ds = -\tau\hat{\mathbf{N}}$, se puede calcular también $d\hat{\mathbf{N}}/ds$:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = \frac{d}{ds}(\hat{\mathbf{B}}\times\hat{\mathbf{T}}) &= \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}\times\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{B}}\times\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\\ &= -\tau\hat{\mathbf{N}}\times\hat{\mathbf{T}} + \kappa\hat{\mathbf{B}}\times\hat{\mathbf{N}} = -\kappa\hat{\mathbf{T}} + \tau\hat{\mathbf{B}}\end{aligned}$$

Juntas, las tres fórmulas

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{N}}$$

$$\frac{\mathbf{d}\hat{\mathbf{N}}}{ds} = -\kappa\hat{\mathbf{T}} + \kappa\hat{\mathbf{B}}$$

$$\frac{\mathbf{d}\hat{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{N}}$$

se conocen con el nombre de **fórmulas de Frenet-Serret** (*véase* la Figura 11.18). Son de importancia fundamental en la teoría de curvas. Estas fórmulas se pueden expresar en forma matricial de la siguiente forma:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{T}}\\ \hat{\mathbf{N}}\\ \hat{\mathbf{B}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\kappa & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{T}}\\ \hat{\mathbf{N}}\\ \hat{\mathbf{B}}\end{pmatrix}$$

Utilizando las fórmulas de Frenet-Serret se puede demostrar que la forma de una curva con curvatura distinta de cero queda completamente determinada por sus funciones de curvatura y de torsión $\kappa(s)$ y $\tau(s)$.

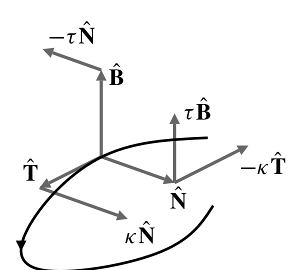


Figura 11.18 $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{N}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$, y sus direcciones de cambio.

TEOREMA 3 **Teorema fundamental de las curvas en el espacio**

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos curvas, ambas con la misma función de curvatura distinta de cero $\kappa(s)$ y con la misma función de torsión $\tau(s)$. Entonces las curvas son congruentes. Esto quiere decir que una de ellas se puede mover rígidamente (mediante traslaciones y rotaciones) de forma que sea haga coincidir exactamente con la otra.

DEMOSTRACIÓN Es necesario que $\kappa \neq 0$ porque $\hat{\mathbf{N}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ no están definidas donde $\kappa = 0$. Movamos rígidamente $\mathcal{C}_2$ de forma que su punto inicial coincida con el punto inicial de $\mathcal{C}_1$, y de forma que los sistemas de referencia de Frenet de ambas curvas coincidan en ese punto. Sean $\hat{\mathbf{T}}_1$, $\hat{\mathbf{T}}_2$, $\hat{\mathbf{N}}_1$, $\hat{\mathbf{N}}_2$, $\hat{\mathbf{B}}_1$ y $\hat{\mathbf{B}}_2$ las tangentes unitarias, las normales y las binormales de las dos curvas.

$$f(s) = \hat{\mathbf{T}}_1(s) \bullet \hat{\mathbf{T}}_2(s) + \hat{\mathbf{N}}_1(s) \bullet \hat{\mathbf{N}}_2(s) + \hat{\mathbf{B}}_1(s) \bullet \hat{\mathbf{B}}_2(s)$$

Calculamos la derivada de $f(s)$ utilizando la Regla del Producto y las fórmulas de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} f'(s) &= \hat{\mathbf{T}}_1' \bullet \hat{\mathbf{T}}_2 + \hat{\mathbf{T}}_1 \bullet \hat{\mathbf{T}}_2' + \hat{\mathbf{N}}_1' \bullet \hat{\mathbf{N}}_2 + \hat{\mathbf{N}}_1 \bullet \hat{\mathbf{N}}_2' + \hat{\mathbf{B}}_1' \bullet \hat{\mathbf{B}}_2 + \hat{\mathbf{B}}_1 \bullet \hat{\mathbf{B}}_2 \\ &= \kappa\hat{\mathbf{N}}_1 \bullet \hat{\mathbf{T}}_2 + \kappa\hat{\mathbf{T}}_1 \bullet \hat{\mathbf{N}}_2 - \kappa\hat{\mathbf{T}}_1 \bullet \hat{\mathbf{N}}_2 + \tau\hat{\mathbf{B}}_1 \bullet \hat{\mathbf{N}}_2 - \kappa\hat{\mathbf{N}}_1 \bullet \hat{\mathbf{T}}_2 \\ &\quad + \tau\hat{\mathbf{N}}_1 \bullet \hat{\mathbf{B}}_2 - \tau\hat{\mathbf{N}}_1 \bullet \hat{\mathbf{B}}_2 - \tau\hat{\mathbf{B}}_1 \bullet \hat{\mathbf{N}}_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $f(s)$ es constante. Como los sistemas de referencia coinciden en $s = 0$, la constante debe ser concretamente 3:

$$\hat{\mathbf{T}}_1(s) \bullet \hat{\mathbf{T}}_2(s) + \hat{\mathbf{N}}_1(s) \bullet \hat{\mathbf{N}}_2(s) + \hat{\mathbf{B}}_1(s) \bullet \hat{\mathbf{B}}_2(s) = 3$$

Sin embargo, ninguno de los productos escalares puede ser mayor que 1 porque los factores son vectores unitarios. Por tanto, todos los productos escalares deben ser iguales a 1. En particular, $\hat{\mathbf{T}}_1(s) \bullet \hat{\mathbf{T}}_2(s) = 1$ para todo s; entonces,

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds} = \hat{\mathbf{T}}_1(s) = \hat{\mathbf{T}}_2(s) = \frac{d\mathbf{r}_2}{ds}$$

Integrando con respecto a s y utilizando el hecho de que las dos curvas empiezan en el mismo punto cuando $s = 0$, se obtiene $\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}_2(s)$ para todo s, como queríamos demostrar.

Observación Una consecuencia del teorema anterior es que toda curva con curvatura constante distinta de cero y con torsión constante debe, de hecho, ser una circunferencia (si la torsión es cero) o una hélice circular (si la torsión es distinta de cero). *Véanse* los Ejercicios 7 y 8 posteriores.

Ejercicios 11.4

Calcule el vector tangente $\hat{\mathbf{T}}(t)$ en las curvas de los Ejercicios 1-4.

1. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} - 2t^2\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}$

2. $\mathbf{r} = a \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + a \cos \omega t\,\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r} = \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r} = a \cos t\,\mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

5. Demuestre que si $\kappa(s) = 0$ para todo s, entonces la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es una recta.

6. Demuestre que si $\tau(s) = 0$ para todo s, entonces la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es una curva plana. *Sugerencia*: Demuestre que $\mathbf{r}(s)$ está en el plano que pasa por $\mathbf{r}(0)$ y su vector normal es $\hat{\mathbf{B}}(0)$.

7. Demuestre que si $\kappa(s) = C$ es una constante positiva y $\tau(s) = 0$ para todo s, entonces la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es una circunferencia. *Sugerencia*: Obtenga una circunferencia que tenga la curvatura constante dada. Utilice entonces el Teorema 3.

8. Demuestre que si la curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ son ambas constantes distintas de cero, entonces la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es una hélice circular. *Sugerencia*: Obtenga una hélice que tenga la curvatura y torsión dadas.

11.5 Curvatura y torsión para parametrizaciones generales

Las fórmulas de la curvatura y la torsión desarrolladas anteriormente, así como las de los vectores normal unitario y binormal, no son de mucha utilidad si la curva que se desea analizar no se expresa en función del parámetro de longitud de arco. Consideraremos a continuación la forma de obtener esas cantidades en función de una parametrización general $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Las expresaremos en función del vector velocidad, $\mathbf{v}(t)$, la velocidad, $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ y la aceleración, $\mathbf{a}(t)$. Observemos en primer lugar que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\hat{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\hat{\mathbf{T}} + v\,\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}\,\hat{\mathbf{T}} + v\,\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\hat{\mathbf{T}} + v^2\kappa\hat{\mathbf{N}}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = v\,\frac{dv}{dt}\,\hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{T}} + v^3\kappa\hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}} = v^3\kappa\hat{\mathbf{B}}$$

Nótese que a $\hat{\mathbf{B}}$ está en la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$. A partir de estas fórmulas se pueden obtener fórmulas útiles para $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ y κ:

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \qquad \hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}, \qquad \kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3}$$

Hay varias formas de calcular $\hat{\mathbf{N}}$. Quizá la más sencilla es

$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}}$$

Algunas veces puede ser más fácil utilizar $\dfrac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \dfrac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = v\dfrac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = v\kappa\hat{\mathbf{N}}$ para calcular

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{1}}{v\kappa}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{\rho}{v}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \bigg/ \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\right|$$

Queda por calcular la torsión. Obsérvese que

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{T}} = v^2\kappa\hat{\mathbf{N}}\right)$$

Esta diferenciación producirá varios términos. El único en el que interviene $\hat{\mathbf{B}}$ es el que procede de evaluar $v^2\kappa(d\hat{\mathbf{N}}/dt) = v^3\kappa(d\hat{\mathbf{N}}/ds) = v^3\kappa(\tau\hat{\mathbf{B}} - \kappa\hat{\mathbf{T}})$. Por tanto,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lambda\hat{\mathbf{T}} + \mu\hat{\mathbf{N}} + v^3\kappa\tau\hat{\mathbf{B}}$$

para ciertos valores de los escalares λ y μ. Como $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = v^3\kappa\hat{\mathbf{B}}$, se deduce que

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \bullet \frac{d\mathbf{a}}{dt} = (v^3\kappa)^2\tau = |\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2\tau$$

Por consiguiente,

$$\tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \bullet (d\mathbf{a}/dt)}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}$$

Ejemplo 1 Calcule la curvatura, la torsión y el sistema de referencia de Frenet en un punto general de la curva

$$\mathbf{r} = (t + \cos t)\mathbf{i} + (t - \cos t)\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{k}$$

Describa esta curva.

Solución Calcularemos lo que se pide utilizando el procedimiento descrito anteriormente. En primer lugar,

$$\mathbf{v} = (1 - \mathrm{sen}\, t)\mathbf{i} + (1 + \mathrm{sen}\, t)\mathbf{j} + \sqrt{2}\cos t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = -\cos t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathrm{sen}\, t\mathbf{i} - \mathrm{sen}\, t\mathbf{j} - \sqrt{2}\cos t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 - \mathrm{sen}\, t & 1 + \mathrm{sen}\, t & \sqrt{2}\cos t \\ -\cos t & \cos t & -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t \end{vmatrix}$$

$$= -\sqrt{2}(1 + \mathrm{sen}\, t)\mathbf{i} - \sqrt{2}(1 - \mathrm{sen}\, t)\mathbf{j} + 2\cos t\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \bullet \frac{d\mathbf{a}}{dt} &= -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t(1 + \mathrm{sen}\,t) + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t(1 - \mathrm{sen}\,t) - 2\sqrt{2}\cos^2 t \\
&= -2\sqrt{2} \\
v = |\mathbf{v}| &= \sqrt{2 + 2\,\mathrm{sen}^2 t + 2\cos^2 t} = 2 \\
|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| &= \sqrt{2(2 + 2\mathrm{sen}^2 t) + 4\cos^2 t} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \bullet (d\mathbf{a}/dt)}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2} = \frac{-2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{1 - \mathrm{sen}\,t}{2}\,\mathbf{i} + \frac{1 + \mathrm{sen}\,t}{2}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\mathbf{k}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} = -\frac{1 + \mathrm{sen}\,t}{2}\,\mathbf{i} - \frac{1 - \mathrm{sen}\,t}{2}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\mathbf{k}$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\mathbf{j} - \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{k}$$

Como la curvatura y la torsión son ambas constantes (y, por tanto, son constantes cuando se expresan en función de cualquier parametrización), la curva debe ser una hélice circular por el Teorema 3. Está orientada a la izquierda, ya que $\tau < 0$. Por el Ejemplo 3 de la Sección 11.4, es congruente con la hélice

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$$

suponiendo que $a/(a^2 + b^2) = 1/(2\sqrt{2}) = -b/(a^2 + b^2)$. Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $a = \sqrt{2}$ y $b = -\sqrt{2}$, por lo que la hélice está enrollada sobre un cilindro de radio $\sqrt{2}$. El eje de este cilindro es la recta $x = y$, $z = 0$, como se puede ver examinando las componentes de $\mathbf{r}(t)$. ■

Ejemplo 2 **(Curvatura de la gráfica de una función de una variable)** Calcule la curvatura de la curva plana cuya ecuación es $y = f(x)$ en un punto arbitrario $(x, f(x))$ de aquélla.

Solución La gráfica se puede parametrizar: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + \mathbf{f}(x)\mathbf{j}$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j} \\
\mathbf{a} &= f''(x)\mathbf{j} \\
\mathbf{v} \times \mathbf{a} &= f''(x)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Por tanto, la curvatura es

$$\kappa(x) = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$$

■

Aceleración tangencial y normal

En la fórmula de la aceleración obtenida anteriormente en función de la tangente y la normal unitarias,

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{\mathbf{T}} + v^2\kappa\hat{\mathbf{N}}$$

el término $(dv/dt)\hat{\mathbf{T}}$ se denominó aceleración **tangencial**, y el término $v^2\kappa\hat{\mathbf{N}}$, aceleración **normal** o **centrípeta**. Esta última componente está dirigida hacia el centro de curvatura y su módulo es $v^2\kappa = v^2/\rho$. Los diseñadores de autopistas, ferrocarriles y montañas rusas peraltan las curvas de forma que la resultante de la fuerza centrífuga, $-m(v^2/\rho)\hat{\mathbf{N}}$, y el peso, $-mg\mathbf{k}$, del vehículo sea normal a la superficie a una velocidad deseada.

Ejemplo 3 **(Peralte de una curva)** Una carretera nivelada sigue la curva $y = x^2$ en el plano horizontal xy. Calcule, en función de x, el ángulo de peralte que hay que aplicar a la carretera (es decir, el ángulo entre la vertical y la normal a la superficie de la carretera) de forma que la resultante de las fuerzas centrífuga y gravitatoria $(-mg\mathbf{k})$ que actúan sobre el vehículo que viaja una velocidad constante v_0 sea siempre normal a la superficie de la carretera.

Solución Por el Ejemplo 2, la ruta que sigue la carretera, $y = x^2$, tiene curvatura

$$\kappa = \frac{|d^2y/dx^2|}{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

La componente normal de la aceleración de un vehículo que viaja a velocidad v_0 por la carretera es

$$a_N = v_0^2\kappa = \frac{2v_0^2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

Si la carretera está peraltada un ángulo θ (*véase* la Figura 11.19), entonces la resultante de la fuerza centrífuga $-ma_N\hat{\mathbf{N}}$ y la fuerza gravitatoria $-mg\mathbf{k}$ será normal a la superficie de la carretera si se cumple

$$\tan\theta \frac{ma_N}{mg}, \qquad \text{es decir,} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{2v_0^2}{g(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

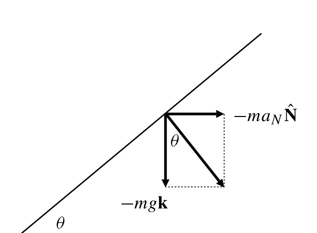


Figura 11.19 Peralte de una curva de una carretera.

Observación La definición de aceleración centrípeta dada anteriormente es coherente con la que se deduce de la presentación de los sistemas de referencia en rotación que se hizo en la Sección 11.2. Si $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula móvil en el instante t, podemos ver el movimiento en cualquier instante como una rotación alrededor del centro de curvatura, de forma que la velocidad angular debe ser $\mathbf{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{B}}$. El vector velocidad lineal es $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) = v\hat{\mathbf{T}}$, por lo que la velocidad es $v = \Omega\rho$ y $\mathbf{\Omega} = (v/p)\hat{\mathbf{B}}$. Como se vio en la Sección 11.2, la aceleración centrípeta es

$$\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)) = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{v} = \frac{v^2}{\rho}\,\hat{\mathbf{B}}\times\hat{\mathbf{T}} = \frac{v^2}{\rho}\,\hat{\mathbf{N}}$$

Evolutas

El centro de curvatura $\mathbf{r}_c(t)$ de una curva dada puede trazar a su vez otra curva cuando t varía. Esta curva se denomina **evoluta** de la curva dada $\mathbf{r}(t)$.

Ejemplo 4 Calcule la evoluta de la espiral exponencial

$$\mathbf{r} = ae^{-t}\cos t\,\mathbf{i} + ae^{-t}\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

Solución La curva es una curva plana, por lo que $\tau = 0$. Emplearemos un atajo para calcular la curvatura y la normal unitaria sin calcular $\mathbf{v}\times\mathbf{a}$. Calcularemos primero

$$\mathbf{v} = ae^{-t}((-\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t - \cos t)\mathbf{j})$$

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2}ae^{-t}$$

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-(\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t - \cos t)\mathbf{j})$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{1}{(ds/dt)}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{1}{2ae^{-t}}((\operatorname{sen} t - \cos t)\mathbf{i} - (\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{j})$$

$$\kappa(t) = \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}ae^{-t}}$$

Se deduce entonces que el radio de curvatura es $\rho(t) = \sqrt{2}ae^{-t}$. Como $d\hat{\mathbf{T}}/ds = \kappa\hat{\mathbf{N}}$, tenemos que $\hat{\mathbf{N}} = \rho(d\hat{\mathbf{T}}/ds)$. El centro de curvatura es

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_c(t) &= \mathbf{r}(t) + \rho(t)\hat{\mathbf{N}}(t)\\
&= \mathbf{r}(t) + \rho^2\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\\
&= ae^{-t}(\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j})\\
&\qquad + 2a^2e^{-2t}\frac{1}{2ae^{-t}}((\operatorname{sen} t - \cos t)\mathbf{i} - (\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{j})\\
&= ae^{-t}(\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j})\\
&= ae^{-t}\left(\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, se llega al interesante resultado de que la evoluta de la espiral exponencial es la misma espiral exponencial rotada en el plano 90º en el sentido de las agujas del reloj (*véase* la Figura 11.20(a)). ■

Aplicación al diseño de vías (o carreteras)

Los trenes de juguete vienen frecuentemente con dos tipos de secciones de vías: rectas y curvas. Las secciones curvas son arcos de circunferencia de radio R, y la forma total de la vía es como se muestra en la Figura 11.20(b); AB y CD son rectas, y BC y DA son semicircunferencias. La pista parece suave, pero ¿es suficientemente suave?

La vía se mantiene unida por fricción, y de vez en cuando puede salirse cuando el tren pasa. Esto es especialmente probable en los puntos A, B, C y D. Para ver por qué, supongamos que el tren viaja a velocidad constante v. Entonces la aceleración tangencial, $(dv/dt)\hat{\mathbf{T}}$, es cero y la aceleración total es sólo la aceleración centrípeta, $\mathbf{a} = (v^2/\rho)\hat{\mathbf{N}}$. Por tanto, $|\mathbf{a}| = 0$ a lo largo de las secciones rectas, y $|\mathbf{a}| = v^2\kappa = v^2/R$ en las secciones semicirculares. La aceleración es *discontinua* en los puntos A, B, C y D, y la fuerza de reacción que ejerce el tren sobre la vía es también discontinua en esos puntos. Hay un «choque» o «sacudida» cuando el tren entra o sale de la parte curva de la vía. Para evitar esos puntos de tensión, las vías se diseñan de forma que la curvatura varíe de forma continua punto a punto.

Figura 11.20
(a) La evoluta de una espiral exponencial es otra espiral exponencial.
(b) Forma de la vía de un tren de juguete.

Ejemplo 5 Se desea unir una vía existente en la dirección del eje x negativo con otra que sigue la dirección $y = x - 1$, $x \geqslant 2$. Se desea que la unión sea suave mediante una curva de transición $y = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, siendo $f(x)$ un polinomio de grado tan pequeño como sea posible. Calcule $f(x)$ de forma que un tren que se mueva por la vía no experimente discontinuidades de la aceleración en los puntos de unión.

Solución La situación se muestra en la Figura 11.21. El polinomio $f(x)$ se debe escoger de forma que la vía sea continua, tenga pendiente continua y tenga curvatura continua en $x = 0$ y $x = 2$. Como la curvatura de $y = f(x)$ es

$$\kappa = |f''(x)|(1 + (f'(x))^2)^{-3/2}$$

sólo tenemos que conseguir que f, f' y f'' tomen los mismos valores en $x = 0$ y $x = 2$ que en las secciones rectas:

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 0,$$
$$f(2) = 1, \qquad f'(2) = 1, \qquad f''(2) = 0$$

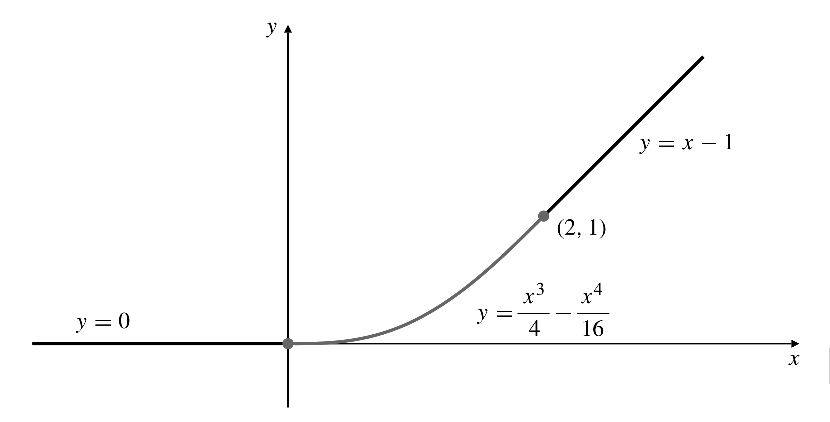


Figura 11.21 Unión de dos vías rectas mediante una vía curva.

Esas seis condiciones independientes sugieren que se debe probar con un polinomio de grado 5 con seis coeficientes arbitrarios:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$$
$$f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4$$
$$f''(x) = 2C + 6Dx + 12Ex^2 + 20Fx^3$$

Las tres condiciones en $x = 0$ implican que $A = B = C = 0$. Las de $x = 2$ implican que

$$\begin{aligned} 8D + 16E + \ \ 32F &= f(2) = 1 \\ 12D + 32E + \ \ 80F &= f'(2) = 1 \\ 12D + 48E + 160F &= f''(2) = 0 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $D = 1/4$, $E = -1/16$ y $F = 0$, por lo que debemos utilizar $f(x) = (x^3/4) - (x^4/16)$.

Observación Los diseñadores de carreteras y de vías de ferrocarril no utilizan en general curvas polinómicas en las transiciones. Se utilizan habitualmente otras clases de curvas denominadas **clotoides** o **lemniscatas** (*véase* el Ejercicio 7 en los Ejercicios de repaso al final de este capítulo).

Cálculos con Maple

El tipo de cálculos realizados en esta sección con curvas bastante simples puede ser muy tedioso con curvas más complicadas. Como es habitual, Maple puede acudir al rescate. Antes de la incorporación del paquete VectorCalculus en Maple 8, que introdujo una verdadera estructura de datos vector, la definición de una función vectorial tenía truco: había que hacer algo como

```
> R := [t -> f(t), t -> g(t), t -> h(t)];
```

en vez de la construcción más obvia

```
> R :=t -> [f(t), g(t), h(t)];
```

porque en este último caso no se consideraba que la función `R` fuera vectorial, aun cuando sus valores fueran vectores.

En lo que sigue supondremos que los paquetes LinearAlgebra y VectorCalculus han sido cargados (en ese orden):

```
> with(LinearAlgebra):  with(VectorCalculus):
```

Así podríamos definir una función vectorial que representara una hélice circular:

```
> R :=t -> <a*cos(t), a*sin(t), b*t>;
```

La salida de esta definición (que omitiremos) puede parecer al principio un poco críptica; dice que `R` está definida como un procedimiento «VectorCalculus-$<\,>$» cuyos argumentos son tres procedimientos «VectorCalculus-*» correspondientes a los productos que representan las tres componentes de `R`. Llamando a la función se generan los resultados esperados.

```
> R(t); R(Pi);
```

$$a\cos(t)e_x + a\,\mathrm{sen}\,(t)e_y + bte_z$$
$$-ae_x + b\pi e_z$$

Las funciones vector velocidad, aceleración y velocidad se pueden definir ahora en la forma obvia, y utilizar los resultados para calcular esas magnitudes en cualquier punto:

```
> V := t -> diff(R(t), t):  A :=t -> diff(V(t),t):
> V := t -> Norm(V(t),2):
> V(t); A(t); v(t);
```

$$-a\,\mathrm{sen}\,(t)\,e_x + a\cos(t)\,e_y + be_z$$
$$-a\cos(t)e_x - a\,\mathrm{sen}\,(t)e_y$$
$$\sqrt{|a\,\mathrm{sen}\,(t)|^2 + |a\cos(t)|^2 + |b|^2}$$

Ningún intento de simplificar la última expresión surtirá mucho efecto a menos que le digamos a Maple que a y b son números reales. De hecho, es útil a efectos de simplificación decir a Maple que a, b y t son reales, con lo que evitamos que Maple nos caliente la cabeza colocando una tilde ($\tilde{}$) detrás de cada una de esas variables en todas las salidas posteriores. Esto lo podemos hacer así:

```
> assume(a::real, b::real, t::real);
> interface(showassumed=0);
> simplify(v(t));
```

$$\sqrt{b^2 + a^2}$$

El paquete VectorCalculus tiene una función denominada TNBFrame, cuya salida es una lista de funciones para generar los vectores tangente unitaria, normal principal y binormal $\hat{\mathbf{T}}(t)$, $\hat{\mathbf{N}}(t)$ y $\hat{\mathbf{B}}(t)$. Podemos utilizar los componentes de esta lista para definir cada vector:

```
> T := TNBFrame(R,t) [1]:  T(t);
```

$$-\frac{a\,\mathrm{sen}\,(t)}{\sqrt{b^2 + a^2}}\,e_x + \frac{a\cos(t)}{\sqrt{b^2 + a^2}}\,e_y + \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}\,e_z$$

```
> N := TNBFrame(R,t) [2]:  N(t);
```

$$-\frac{a\cos(t)}{|a|}\,e_x - \frac{a\,\mathrm{sen}\,(t)}{|a|}\,e_y$$

```
> B := TNBFrame(R,t) [3]:  B(t);
```

$$\frac{ba\,\mathrm{sen}\,(t)}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|}\,e_x - \frac{ba\cos(t)}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|}\,e_y + \left(\frac{a^2\,\mathrm{sen}\,(t)^2}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|} + \frac{a^2\cos(t)^2}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|}\right)e_z$$

```
> simplify (%);
```

$$\frac{ba\,\mathrm{sen}\,(t)}{\sqrt{a^2 + a^2}|a|}\,e_x - \frac{ba\cos(t)}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|}\,e_y + \frac{|a|}{\sqrt{b^2 + a^2}}\,e_z$$

VectorCalculus también define las funciones Curvature y Torsion, que se pueden utilizar como sigue:

```
> simplify(Curvature(R,t) (t);
```

$$\frac{|a|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

```
> simplify(Torsion(R,t) (t));
```

$$\frac{|b|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

La torsión es errónea si $b < 0$; en este caso la torsión debería ser negativa. De hecho, el resultado anterior podría hacer falsa la tercera fórmula de Frenet-Serret, como podemos ver así:

```
> Simplify(diff(B(t),t) + tau*N(t));
```

$$\frac{a\cos(t)(b - \tau\sqrt{b^2 + a^2})}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|}\,e_x + \frac{a\,\mathrm{sen}\,(t)\,(b - \tau\sqrt{b^2 + a^2})}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|}\,e_y$$

que debe ser **0**, pero sólo lo será si $\tau = b/\sqrt{b^2 + a^2}$. Se comunicó este error a MapleSoft, y se ha corregido en Maple 10.

Ejercicios 11.5

En los Ejercicios 1-4, calcule los radios de curvatura de las curvas en los puntos indicados.

1. $y = x^2$ en $x = 0$ y en $x = \sqrt{2}$
2. $y = \cos x$ en $x = 0$ y en $x = \pi/2$
3. $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (1/t)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$ en $(2, 1, -2)$
4. $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ en el punto donde $t = 1$

Calcule los sistemas de referencia de Frenet $\{\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{B}}\}$ para las curvas de los Ejercicios 5 y 6 en los puntos indicados.

5. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ en $(1, 1, 2)$
6. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ en $(1, 1, 1)$

En los Ejercicios 7 y 8, calcule los vectores tangente unitario, normal y binormal, y la curvatura y la torsión en un punto general de las curvas dadas.

7. $\mathbf{r} = r\mathbf{i} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{j} + \dfrac{t^3}{3}\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r} = e^t(\cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k})$
9. Calcule la curvatura y la torsión de la curva paramétrica
$$x = 2 + \sqrt{2}\cos t, \qquad y = 1 - \operatorname{sen} t, \qquad z = 3 + \operatorname{sen} t$$
en un punto arbitrario t. ¿Qué curva es?
10. Una partícula se mueve siguiendo la curva plana $y = \operatorname{sen} x$, en la dirección de x creciente, con velocidad horizontal constante $dx/dt = k$. Calcule las componentes tangencial y normal de la aceleración de la partícula cuando está en la posición x.
11. Calcule la tangente unitaria, la normal y la binormal, y la curvatura y torsión de la curva
$$\mathbf{r} = \operatorname{sen} t \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2 t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$$
en los puntos (a) $t = 0$ y (b) $t = \pi/4$.
12. Una partícula se mueve siguiendo un camino elíptico en el plano xy, de forma que su posición en el instante t es $\mathbf{r} = a\cos t\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\mathbf{j}$. Calcule las componentes tangencial y normal de su aceleración en el instante t. ¿En qué puntos es cero su aceración tangencial?
13. Calcule los valores máximo y mínimo de la curvatura de la elipse $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$, siendo $a > b > 0$.
14. Una cuenta de masa m se desliza sin rozamiento por un hilo curvo con la forma $y = x^2$, bajo la influencia de la fuerza gravitatoria $-mg\mathbf{j}$. Cuando pasa por el punto $(1, 1)$, la velocidad de la cuenta es v. Calcule, en ese instante, el módulo de su aceleración normal y la tasa de cambio de su velocidad.
15. Calcule la curvatura de la curva plana $y = e^x$ en x. Obtenga la ecuación de la evoluta de esta curva.
16. Demuestre que la curvatura de la gráfica polar plana $r = f(\theta)$ en un punto genérico θ es
$$\kappa(\theta) = \frac{|2(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta)|}{[(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2]^{3/2}}$$
17. Calcule la curvatura de la cardioide $r = a(1 - \cos\theta)$.

*18. Obtenga la curva $\mathbf{r} = r(t)$ para la que $\kappa(t) = 1$ y $\tau(t) = 1$ para todo t, y $\mathbf{r}(0) = \hat{\mathbf{T}}(0) = \mathbf{i}$, $\hat{\mathbf{N}}(0) = \mathbf{j}$ y $\hat{\mathbf{B}}(0) = \mathbf{k}$.

19. Suponga que la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ cumple $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}(t)$, siendo $\mathbf{c}$ un vector constante. Demuestre que esa curva es la circunferencia en la que el plano que pasa por $\mathbf{r}(0)$ y es normal a $\mathbf{c}$ corta a una esfera de radio $|\mathbf{r}(0)|$ centrada en el origen.
20. Calcule la evoluta de la hélice circular
$$\mathbf{r} = a\cos t\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$$
21. Calcule la evoluta de la parábola $y = x^2$.
22. Calcule la evoluta de la elipse $x = 2\cos t$, $y = \operatorname{sen} t$.
23. Calcule el polinomio de grado mínimo $f(x)$, tal que una vía que siga la curva $y = f(x)$, desde $x = -1$ hasta $x = 1$, se una con segmentos rectos existentes $y = -1$, $x \leqslant -1$ e $y = 1$, $x \geqslant 1$ de forma lo suficientemente suave para que un tren que se mueva a velocidad constante no experimente discontinuidades de la aceleración en los puntos de unión.

*24. Ayude a los fabricantes de trenes de juguete. Diseñe un segmento de vía $y = f(x)$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$ para producir una unión libre de tensiones entre una sección de vía recta $y = 1$, $x \leqslant -1$, y una sección en forma de arco semicircular $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$.

*25. Si la posición $\mathbf{r}$, la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ de una partícula en movimiento cumplen $\mathbf{a}(t) = \lambda(t)\mathbf{r}(t) + \mu(t)\mathbf{v}(t)$, siendo $\lambda(t)$ y $\mu(t)$ funciones escalares del tiempo t, y si $\mathbf{v} \times \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, demuestre que el camino que sigue una partícula está contenido en un plano.

En los Ejercicios 26-31 utilice Maple. Asegúrese de cargar los paquetes LinearAlgebra y VectorCalculus.

En los Ejercicios 26-29, determine las funciones de curvatura y de torsión de las curvas dadas. Debido al problema con la función `Torsion` en algunas versiones del paquete VectorCalculus (como se ha indicado al final de esta sección), es preferible utilizar las fórmulas procedentes de las derivadas de la posición para determinar la torsión, y

probablemente también la curvatura. Intente describir las curvas.

26. $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + 2\,\text{sen}(t)\mathbf{j} + \cos(t)\mathbf{k}$. ¿Por qué no debe sorprendernos el valor de la torsión? ¿Cuánto valen las curvaturas máxima y mínima? Describa la curva.

27. $\mathbf{r}(t) = (t - \text{sen}\,t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. ¿Son continuas la curvatura y la torsión para todo t?

28. $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\cos(2t)\mathbf{i} + \cos(t)\,\text{sen}(2t)\mathbf{j} + \text{sen}(t)\mathbf{k}$. Demuestre que la curva está sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. ¿Cuál es el mínimo valor de su curvatura?

29. $\mathbf{r}(t) = (t + \cos t)\mathbf{i} + (t + \text{sen}\,t)\mathbf{j} + (1 + t - \cos t)\mathbf{k}$

En los Ejercicios 30 y 31, defina nuevas funciones de Maple para calcular los valores requeridos. Suponga que se han cargado los paquetes LinearAlgebra y VectorCalculus.

30. La función `evolute(R) (t)`, cuyo valor en `R` es la función cuyo valor en `t` es el vector de posición del centro de curvatura de la curva `R`, en el punto `R(t)`.

31. La función `tanline(R) (t,u)`, cuyo valor en **R** es una función, cuyo valor en `(t,u)` es el vector de posición del punto de la tangente a la curva R, en un valor de `t` situado a una distancia `u` de `R(t)`, en la dirección de `t` creciente.

11.6 Leyes de Kepler del movimiento planetario

El matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) fue estudiante y colega del astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601). Tras una vida de observación de las posiciones de los planetas sin la ayuda del telescopio, Brahe recopiló una gran cantidad de datos, que Kepler analizó. Aunque Nicolás Copérnico (1473-1543) había postulado que la tierra y los otros planetas se movían alrededor del sol, el clima religioso y filosófico de Europa a finales del siglo XVI favorecía todavía la explicación del movimiento de los cuerpos celestes mediante órbitas circulares alrededor de la tierra. Se sabía que planetas como Marte podían no moverse en órbitas circulares centradas en la tierra, pero se habían propuesto modelos en los que su movimiento estaba compuesto por otras circunferencias (epiciclos), cuyos centros se movían sobre circunferencias centradas en la tierra.

Las observaciones de Brahe sobre Marte fueron lo suficientemente detalladas como para que Kepler se diera cuenta de que ningún modelo simple basado en circunferencias podría ajustarse lo suficientemente bien a la órbita real. Sin embargo, él fue capaz de ajustar una curva cuadrática más general, una elipse con uno de sus focos en el sol. Basándose en este éxito y en los datos de Brahe sobre otros planetas, formuló las tres siguientes leyes del movimiento planetario:

Leyes de Kepler

1. Los planetas se mueven siguiendo órbitas elípticas con el sol en uno de sus focos.
2. La recta que une el sol con cada planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas alrededor del sol son proporcionales a los cubos de los ejes mayores de sus órbitas.

La formulación de Kepler de la tercera ley dice realmente que los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al sol. La distancia media de los puntos de una elipse a uno de sus focos es igual al semieje mayor (*véase* el Ejercicio 17 posterior). Por tanto, las dos formulaciones son equivalentes.

La elección de elipses era razonable, una vez verificado que las circunferencias no funcionaban. Las propiedades de las secciones cónicas se entendían bien, desde que habían sido desarrolladas por el matemático griego Apolonio de Perga sobre el año 200 a. C. No obstante, basándose, como hizo, en observaciones en vez de en la teoría, la formulación que hizo Kepler de sus

leyes sin ninguna explicación causal fue algo realmente notable. Los fundamentos teóricos vinieron más tarde, cuando Newton, con la ayuda de su cálculo recién creado, demostró que las leyes de Kepler implicaban una fuerza gravitatoria proporcional al inverso del cuadrado (*véanse* los Ejercicios de repaso 14-16 al final de este capítulo). Newton creía que su ley de la gravitación universal implicaba también las leyes de Kepler, pero no fue capaz en sus escritos de dar una demostración que fuera convincente según los estándares actuales[2].

Más adelante en esta sección, obtendremos las leyes de Kepler a partir de la ley de la gravitación mediante un método ingenioso que explota hasta sus límites la diferenciación vectorial. Sin embargo, primero necesitamos establecer algunos resultados preliminares.

Elipses en coordenadas polares

Las coordenadas polares $[r, \theta]$ de un punto en el plano cuya distancia r al origen sea ε veces su distancia $p - r\cos\theta$ a la recta $x = p$ (*véase* la Figura 11.22), cumple la ecuación $r = \varepsilon(p - r\cos\theta)$, o, despejando r,

$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

siendo $\ell = \varepsilon p$. Como se observó en las Secciones 8.1 y 8.5, para $0 \leqslant \varepsilon < 1$, esta ecuación representa una elipse con **excentricidad** ε (que será una circunferencia si $\varepsilon = 0$). Para ver que esto es así, transformemos la ecuación a coordenadas cartesianas:

$$x^2 + y^2 = r^2 = \varepsilon^2(p - r\cos\theta)^2 = \varepsilon^2(p - x)^2 = \varepsilon^2(p^2 - 2px + x^2)$$

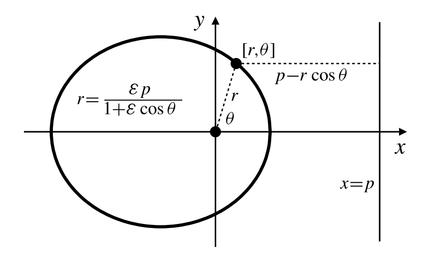


Figura 11.22 Una elipse con foco en el origen, directriz $x = p$ y excentricidad ε.

Realizando algunas transformaciones algebraicas, esta ecuación se puede transformar en

$$\frac{\left(x + \dfrac{\varepsilon\ell}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\dfrac{\ell}{1-\varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{\ell}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2} = 1$$

que puede reconocerse como una elipse **centrada** en el punto $C = (-c, 0)$, siendo $c = \varepsilon\ell/(1 - \varepsilon^2)$, y semiejes a y b dados por

$$a = \frac{\ell}{1-\varepsilon^2} \qquad \textbf{(semieje mayor)}$$

$$b = \frac{\ell}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \qquad \textbf{(semieje menor)}$$

[2] Se pueden encontrar interesantes artículos donde se debate la significación histórica del trabajo de Newton, como los de Robert Weinstock, Curtis Wilson y otros en *The Collage Mathematics Journal*, vol. 25, n.º 3, 1994.

La ecuación cartesiana de la elipse demuestra que la curva es simétrica respecto a las rectas $x = -c$ e $y = 0$ y, por tanto, su segundo foco está en $F = (-2c, 0)$ y tiene una segunda directriz cuya ecuación es $x = -2c - p$ (*véase* la Figura 11.23). Los extremos del eje mayor son $A = (a - c, 0)$ y $A' = (-a - c, 0)$ y los extremos del eje menor son $B = (-c, b)$ y $B' = (-c, -b)$.

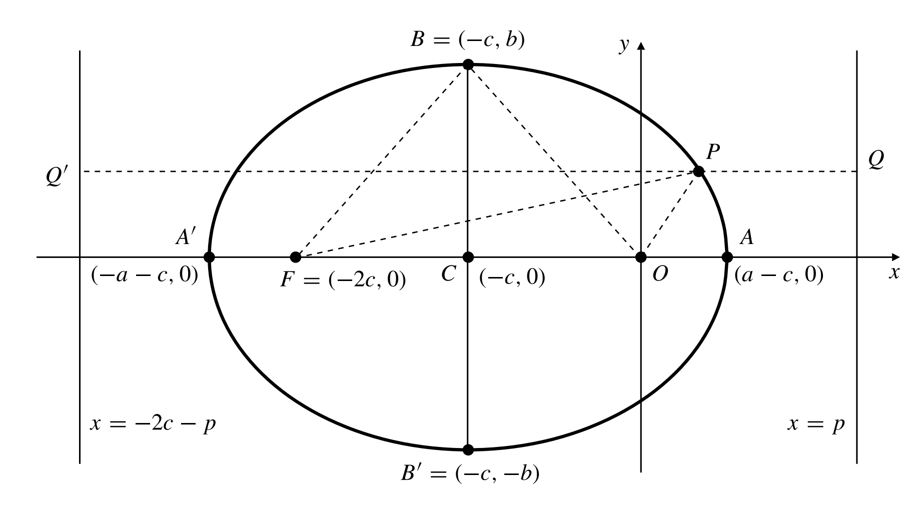


Figura 11.23 La suma de las distancias desde cualquier punto P de la elipse a los dos focos O y F es constante, y vale ε veces la distancia entre las directrices.

Si P es un punto cualquiera de la elipse, entonces la distancia OP es ε veces la distancia PQ desde P a la directriz derecha. Análogamente, la distancia FP es ε veces la distancia $Q'P$ desde P a la directriz izquierda. Por tanto, la suma de los radios focales $OP + FP$ es la constante $\varepsilon Q'Q = \varepsilon(2c + 2p)$, independientemente de la posición del punto P en la elipse. Cuando P es A o B, la suma es

$$2a = (a - c) + (a + c) = OA + FA = OB + FB = 2\sqrt{b^2 + c^2}$$

Se deduce entonces que

$$a^2 = b^2 + c^2, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\ell\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} = \varepsilon a$$

El número ℓ es el **semi-latus rectum** de la elipse; el latus rectum es la anchura de la elipse medida sobre la línea que pasa por un foco, perpendicular al eje mayor (*véase* la Figura 11.24).

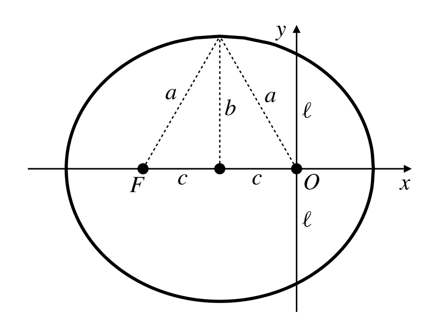


Figura 11.24 Algunos parámetros de una elipse.

Observación La ecuación en polares $r = \ell/(1 + \varepsilon \cos\theta)$ representa una curva *acotada* sólo si $\varepsilon < 1$; en este caso tenemos que $\ell/(1 + \varepsilon) \leqslant r \leqslant \ell/(1 - \varepsilon)$ para todas las direcciones θ. Si $\varepsilon = 1$, la ecuación representa una parábola, y si $\varepsilon > 1$, una hipérbola. Es posible que haya objetos que viajen en órbitas parabólicas o hiperbólicas, pero sólo se aproximarán al sol una vez, sin trazar órbitas a su alrededor. Algunos cometas tienen órbitas hiperbólicas.

Componentes polares de la velocidad y la aceleración

Sea $\mathbf{r}(t)$ el vector de posición en el instante t de una partícula P que se mueve en el plano xy. Se forman dos vectores unitarios en P: el vector $\hat{\mathbf{r}}$, que apunta en la dirección del vector de posición $\mathbf{r}$, y el vector $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, rotado 90º en sentido contrario al de las agujas del reloj desde $\hat{\mathbf{r}}$ (*véase* la Figura 11.25). Si las coordenadas polares de P son $[r, \theta]$, entonces $\hat{\mathbf{r}}$ apunta en la dirección de r creciente en P, y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ apunta en la dirección de θ creciente. Evidentemente,

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$$

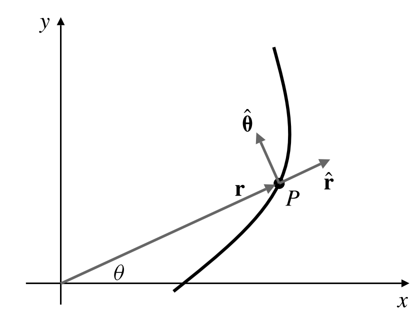


Figura 11.25 Vectores de la base en direcciones crecientes de r y θ.

Nótese que $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ no dependen de r, sino sólo de θ:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}}$$

La pareja $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\}$ forma un sistema de referencia (una base) en P, de forma que los vectores del plano se pueden expresar en función de estos dos vectores unitarios. La componente $\hat{\mathbf{r}}$ de un vector se denomina **componente radial** y la componente $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ se denomina **componente transversal**. El sistema de referencia varía de un punto a otro, por lo que debemos recordar que $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ son funciones de t. En función de este sistema de referencia móvil, la posición $\mathbf{r}(t)$ de P se puede expresar de forma muy sencilla:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

siendo $r = r(t) = |\mathbf{r}(t)|$ la distancia desde P al origen en el instante t.

Vamos a diferenciar esta ecuación con respecto a t para expresar la velocidad y la aceleración de P con respecto a este sistema de referencia móvil. A lo largo del movimiento, $\mathbf{r}$ se puede ver como una función de θ o de t; θ es a su vez función de t. Para evitar confusiones, adoptaremos una notación que se utiliza frecuentemente en mecánica, y que recuerda la notación utilizada originalmente por Newton en sus cálculos.

Un punto sobre una magnitud indica la derivada con respecto al tiempo de dicha magnitud. Dos puntos indican la segunda derivada con respecto al tiempo. Así,

$$\dot{u} = du/dt, \qquad \text{y} \qquad \ddot{u} = d^2u/dt^2$$

Consideremos primero las derivadas con respecto al tiempo de los vectores $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Por la Regla de la Cadena, tenemos que

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}$$

La velocidad de P es

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{r}}) = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Componentes polares de la velocidad:

La **componente radial de la velocidad** es $\dot{r}$.

La **componente transversal de la velocidad** es $r\dot{\theta}$.

Como $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ son vectores unitarios perpendiculares, la velocidad (escalar) de P se expresa como

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$$

De forma similar, la aceleración de P se puede expresar en función de sus componentes radial y transversal:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}} \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}$$

Componentes polares de la aceleración:

La **componente radial de la aceleración** es $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$.

La **componente transversal de la aceleración** es $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$.

Fuerzas centrales y segunda ley de Kepler

Las coordenadas polares son las más apropiadas para analizar el movimiento debido a una **fuerza central**, que se dirige siempre hacia (o en sentido contrario a) un único punto, el origen: $\mathbf{F} = \lambda(\mathbf{r})\mathbf{r}$, donde el escalar $\lambda(\mathbf{r})$ depende de la posición $\mathbf{r}$ del objeto. Si la velocidad y la aceleración del objeto son $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, entonces la Segunda Ley de Newton del Movimiento ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) dice que $\mathbf{a}$ es paralelo a $\mathbf{r}$. Por tanto,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

y $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$, un vector constante que representa el momento angular del objeto por unidad de masa respecto al origen. Esto indica que $\mathbf{r}$ es siempre perpendicular a $\mathbf{h}$, por lo que el movimiento debido una fuerza central tiene siempre lugar en un *plano* que pasa por origen y es normal al vector $\mathbf{h}$.

Si se escoge el eje z en la dirección de $\mathbf{h}$, y siendo $|\mathbf{h}| = h$, entonces $\mathbf{h} = h\mathbf{k}$ y el camino que sigue el objeto está en el plano xy. En este caso la posición y la velocidad del objeto cumplen

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Como $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{k}$, tenemos que

$$h\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r\dot{r}\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} + r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = r^2\dot{\theta}\mathbf{k}$$

Por tanto, para cualquier movimiento debido una fuerza central,

$$r^2\dot{\theta} = h \qquad \text{(constante en el camino de movimiento)}$$

Esta fórmula es equivalente a la Segunda Ley de Kepler; si $A(t)$ es el área en el plano de movimiento limitada por la órbita y las rectas radiales $\theta = \theta_0$ y $\theta = \theta(t)$, entonces

$$A(t) = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta(t)} r^2\, d\theta$$

por lo que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{h}{2}$$

Entonces, el área se barre con una velocidad constante $h/2$, y por tanto se barren áreas iguales en tiempos iguales. Nótese que esta ley no depende del módulo ni de la dirección de la fuerza que actúa sobre el objeto móvil, sino sólo del hecho de que es *central*. También se puede obtener la ecuación $r^2\dot{\theta} = h$ (constante) directamente del hecho de que la aceleración transversal es cero:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

Ejemplo 1 Un objeto se mueve siguiendo la curva en polares $r = 1/\theta$ bajo la influencia de una fuerza que lo atrae hacia el origen. Si la velocidad del objeto es v_0 en el instante en que $\theta = 1$, calcule el módulo de la aceleración del objeto en cualquier punto de su trayectoria en función de su distancia r al origen.

Solución Como la fuerza es central, sabemos que la aceleración transversal es cero y que $r^2\dot{\theta} = h$ es constante. Diferenciando la ecuación de la trayectoria con respecto al tiempo y expresando el resultado en función de r, se obtiene

$$\dot{r} = -\frac{1}{\theta^2}\dot{\theta} = -r^2\frac{h}{r^2} = -h$$

Por tanto, la componente radial de la aceleración es

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = 0 - r\frac{h^2}{r^4} = -\frac{h^2}{r^3}$$

En $\theta = 1$, tenemos que $r = 1$, por lo que $\dot{\theta} = h$. En ese instante el cuadrado de la velocidad es

$$v_0^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$$

Por tanto, $h^2 = v_0^2/2$ y, en cualquier punto de su trayectoria, el módulo de la aceleración del objeto es

$$|a_r| = \frac{v_0^2}{2r^3}$$

Obtención de las leyes de Kepler primera y tercera

Los planetas y el sol se mueven alrededor de su centro de masas común. Como el sol es mucho más masivo que los planetas, el centro de masas está muy cercano al centro del sol. Por ejemplo, el centro de masas conjunto del sol y la tierra está en el interior del sol. En el desarrollo que sigue consideraremos que el sol y los planetas son *masas puntuales* y consideraremos también que el sol está fijo en el origen. Más adelante, cuando sea necesario, especificaremos las direcciones de los ejes de coordenadas.

De acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, la fuerza que ejerce el sol sobre un planeta de masa m cuyo vector de posición es $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{F} = -\frac{km}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{km}{r^3}\mathbf{r}$$

siendo k una constante positiva que depende de la masa del sol, y $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$.

Como se ha observado anteriormente, el hecho de que la fuerza que actúa sobre el planeta esté siempre dirigida hacia el origen implica que $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ es constante. Escogeremos como dirección del eje z la de $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = h\mathbf{k}$, por lo que el movimiento se realizará en el plano xy y $r^2\dot{\theta} = h$. Todavía no hemos especificado las direcciones de los ejes x e y, pero lo haremos en breve. Utilizando coordenadas polares en el plano xy, podemos calcular

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\theta} = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\dot{\theta}} = \frac{-\dfrac{k}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}}{\dfrac{h}{r^2}} = -\frac{k}{h}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Como $d\hat{\boldsymbol{\theta}}/d\theta = -\hat{\mathbf{r}}$, podemos integrar la ecuación diferencial anterior para obtener $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{h}\int \hat{\mathbf{r}}\,d\theta = \frac{k}{h}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}$$

siendo $\mathbf{C}$ un vector correspondiente a la constante de integración. Por tanto, hemos demostrado que

$$|\mathbf{v} - \mathbf{C}| = \frac{k}{h}$$

Este resultado, conocido por el nombre de **Teorema de Hamilton**, indica que cuando un planeta se mueve por su órbita, su vector velocidad (cuando se sitúa con su inicio en el origen) traza una circunferencia cuyo centro es un punto C con vector de posición $\mathbf{C}$. Quizá resulta sorprendente que después de todo haya una circunferencia asociada con la órbita de un planeta. Pero no sólo es el vector de *posición* el que se mueve siguiendo una circunferencia, sino el vector velocidad (*véase* la Figura 11.26).

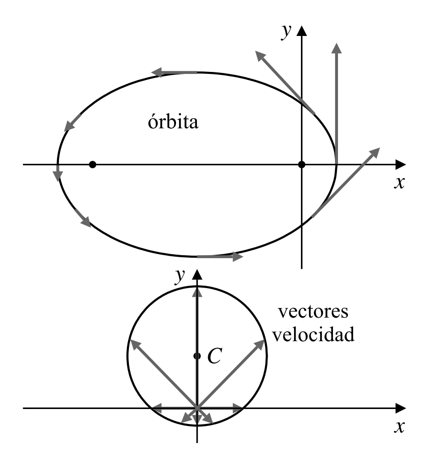


Figura 11.26 Los vectores velocidad definen una circunferencia.

Recuérdese que hasta ahora sólo hemos especificado la posición del origen y la dirección del eje z. Por lo tanto, el plano xy está determinado, pero no lo están las direcciones de los ejes x e y. Escojamos ahora estos ejes en el plano xy de modo que $\mathbf{C}$ esté en la dirección del eje y; será, por ejemplo, $\mathbf{C} = (\varepsilon k/h)\mathbf{j}$, siendo ε una constante positiva. Por consiguiente, tenemos que

$$\mathbf{v} = \frac{k}{h}\,(\hat{\boldsymbol{\theta}} + \varepsilon\mathbf{j})$$

La posición del eje x queda ahora determinada por el hecho de que los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son perpendiculares entre sí y forman una base orientada a la derecha. Calcularemos de nuevo $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Recuérdese que $\mathbf{r} = r\cos\theta\mathbf{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j}$, y también que $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$:

$$h\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{k}{h}\,(r\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} + r\varepsilon\cos\theta\mathbf{i} \times \mathbf{j} + r\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j} \times \mathbf{j})$$

$$= \frac{k}{h}\,r(1 + \varepsilon\cos\theta)\mathbf{k}$$

Por tanto, $h = \dfrac{kr}{h}\,(1 + \varepsilon\cos\theta)$ o, despejando r,

$$r = \frac{h^2/k}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

Ésta es la ecuación en polares de la órbita. Si $\varepsilon < 1$, se trata de una elipse con un foco en el origen (el sol), cuyos parámetros son

Semi-latus rectum:	$\ell = \dfrac{h^2}{k}$
Semieje mayor:	$a = \dfrac{h^2}{k(1 - \varepsilon^2)} = \dfrac{\ell}{1 - \varepsilon^2}$
Semieje menor:	$b = \dfrac{h^2}{k\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \dfrac{\ell}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$
Semidistancia focal:	$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \dfrac{\varepsilon\ell}{1 - \varepsilon^2}$

Hemos deducido la Primera Ley de Kepler. La elección que se ha hecho de los ejes de coordenadas implica que el **perihelio** (el punto de la órbita más cerca del sol) está en el eje x positivo ($\theta = 0$).

Ejemplo 2 La órbita de un planeta tiene excentricidad ε (siendo $0 < \varepsilon < 1$), y su velocidad en el perihelio es v_P. Calcule su velocidad v_A en el **afelio** (el punto de su órbita más lejos del sol).

Solución En el perihelio y en el afelio la velocidad radial del planeta $\dot{r}$ es cero (ya que r es mínimo o máximo), por lo que la velocidad es totalmente transversal. Entonces $v_P = r_P\dot{\theta}_P$ y $v_A = r_A\dot{\theta}_A$. Como $r^2\dot{\theta} = h$ tiene el mismo valor en todos los puntos de la órbita, tenemos que

$$r_P v_P = r_P^2\dot{\theta}_P = h = r_A^2\dot{\theta}_A = r_A v_A$$

La ecuación de la órbita del planeta es

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

por lo que el perihelio corresponde a $\theta = 0$ y el afelio a $\theta = \pi$:

$$r_P = \frac{\ell}{1 + \varepsilon} \qquad \text{y} \qquad r_A = \frac{\ell}{1 - \varepsilon}$$

Por tanto, $v_A = \dfrac{r_P}{r_A}\,v_P = \dfrac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}\,v_P$. ■

Podemos obtener la Tercera Ley de Kepler a partir de las otras dos de la siguiente forma. Como la línea radial que va desde el sol a un planeta barre área con una velocidad constante de $h/2$, el área total A encerrada por la órbita será $A = (h/2)T$, siendo T el periodo de revolución. El área de una elipse cuyos semiejes son a y b es $A = \pi ab$. Como $b^2 = \ell a = h^2 a/k$, tenemos

$$T^2 = \frac{4}{h^2} A^2 = \frac{4}{h^2} \pi^2 a^2 b^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3$$

Nótese que la expresión final de T^2 no depende de h, que es una constante para la órbita de cualquier planeta, pero varía de un planeta a otro. La constante $4\pi^2/k$ no depende de un planeta en particular (k depende de la masa del sol y una constante gravitatoria universal). Por tanto,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3$$

indica que el cuadrado del periodo de un planeta es proporcional al cubo de la longitud, $2a$, del eje mayor de su órbita, y la constante de proporcionalidad es válida para todos los planetas. Esta es la Tercera Ley de Kepler. Los datos astronómicos modernos demuestran que T^2/a^3 varía sólo unas tres centésimas del 1% en los nueve planetas conocidos.

Conservación de la energía

La solución de la ecuación diferencial de segundo orden del movimiento $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ para obtener la órbita de un planeta requiere dos integraciones. En el desarrollo anterior hemos explotado las propiedades del producto vectorial para facilitar dichas integraciones. Existen procedimientos más tradicionales para obtener las leyes de Kepler, que en general comienzan por separar las componentes radial y transversal de la ecuación del movimiento:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{r^2}, \qquad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

Como se ha visto antes, la segunda ecuación anterior implica que $r^2\dot{\theta} = h =$ constante, que es la Segunda Ley de Kepler. Esto se puede utilizar para eliminar θ en la primera ecuación y obtener

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2}\right) = \dot{r}\left(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}\right) = -\frac{k}{r^2}\,\dot{r}$$

Si se integra esta ecuación, se obtiene

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} = E$$

que es una ley de **conservación de la energía**. El primer término de la izquierda es $v^2/2$, la energía cinética (por unidad de masa) del planeta. El término $-k/r$ es la energía potencial por unidad de masa. Es difícil integrar esta ecuación para obtener r en función de t. En todo caso, lo que realmente queremos calcular es r en función de θ, de forma que podamos reconocer que hemos obtenido una elipse. Otra forma de obtener este resultado se sugiere en el Ejercicio 18 posterior.

Observación El procedimiento utilizado anteriormente para demostrar las leyes de Kepler demuestra de hecho que si un objeto se mueve bajo la influencia de una fuerza que lo atrae hacia el origen (o que lo repele desde el origen), cuyo módulo sea proporcional al inverso del cuadrado de su distancia al origen, entonces dicho objeto debe moverse en una órbita plana cuya forma debe ser una sección cónica. Si la energía total E definida anteriormente es negativa, entonces la órbita está *acotada* y, por tanto, debe ser una elipse. Si $E = 0$, la órbita es una parábola. Si $E > 0$, la órbita es una hipérbola. Las órbitas hiperbólicas son típicas de las fuerzas repulsivas que pueden aparecer en el caso de atracciones si el objeto tiene suficiente velocidad (superior a la *velocidad de escape*). Como ejemplo, *véase* el Ejercicio 22 posterior.

Ejercicios 11.6

1. **(Elipses en polares)** Complete los detalles del cálculo sugerido en el texto para transformar la ecuación en polares de una elipse, $r = \ell/(1 + \varepsilon\cos\theta)$, siendo $0 < \varepsilon < 1$, en coordenadas cartesianas, de forma que muestre explícitamente el centro y los semiejes.

Componentes polares de la velocidad y la aceleración

2. Una partícula se mueve siguiendo una circunferencia cuya ecuación en polares es $r = k$, $(k > 0)$. ¿Qué son las componentes radial y transversal de su vector velocidad y de su aceleración? Demuestre que la componente transversal de la aceleración es igual a la velocidad de cambio de la velocidad de la partícula.

3. Calcule las componentes radial y transversal del vector velocidad y de la aceleración de una partícula que se mueve con velocidad unidad siguiendo la espiral exponencial $r = e^{\theta}$. Exprese sus respuestas en función del ángulo θ.

4. Si una partícula se mueve siguiendo la curva en polares $r = \theta$ bajo la influencia de una fuerza central que la atrae hacia el origen, calcule el módulo de la aceleración en función de r y de la velocidad de la partícula.

5. Un objeto se mueve siguiendo la curva en polares $r = \theta^{-2}$ bajo la influencia de una fuerza que lo atrae hacia el origen. Si la velocidad del objeto es v_0 en el instante en el que $\theta = 1$, calcule el módulo de la aceleración del objeto en cualquier punto de su trayectoria en función de su distancia r al origen.

Deducciones de las leyes de Kepler

6. La distancia media de la tierra al sol es aproximadamente 150 millones de kilómetros. El cometa Halley se acerca a su perihelio (punto más cercano al sol) de su órbita elíptica aproximadamente cada 76 años. Estime el eje mayor de la órbita del cometa Halley.

7. La distancia media de la luna a la tierra es aproximadamente 385.000 km, y su periodo de revolución alrededor de la tierra es de aproximadamente 27 días (el mes sideral). ¿A qué distancia aproximada del centro de la tierra, y en qué plano, debería situarse un satélite de comunicaciones en órbita circular si debe estar todo el tiempo exactamente sobre la misma posición de la tierra?

8. Un asteroide sigue una órbita circular alrededor del sol. Si su periodo de revolución es T, calcule el radio de su órbita.

∗ **9.** Si el asteroide del Ejercicio 8 se detiene instantáneamente en su órbita, caerá hacia el sol. ¿Cuánto tardará en llegar? *Sugerencia*: Esta pregunta se puede responder fácilmente si se piensa que el asteroide está *casi* parado, de forma que sigue una órbita con alta excentricidad, cuyo eje mayor es un poco mayor que el radio de la órbita original circular.

10. Calcule la excentricidad de la órbita de un asteroide si la velocidad de dicho asteroide en el perihelio es el doble de su velocidad en el afelio.

11. Demuestre que la velocidad orbital de un planeta es constante si y sólo si su órbita es circular. *Sugerencia*: Utilice la identidad de conservación de la energía.

12. La distancia de un planeta al sol en su perihelio es el 80% de su distancia en el afelio. Calcule la razón de sus velocidades en el perihelio y en el afelio, y la excentricidad de su órbita.

∗**13.** Como resultado de una colisión, un asteroide cuya órbita inicial era circular alrededor del sol pierde instantáneamente la mitad de su velocidad, de forma que cae en una órbita elíptica cuya máxima distancia al sol es igual al radio de la órbita original circular. Calcule la excentricidad de su nueva órbita.

14. Si las velocidades de un planeta en su perihelio y su afelio son, respectivamente, v_P y v_A, ¿cuál es su velocidad cuando está en los extremos del eje menor de su órbita?

15. ¿Qué fracción de su «año» (es decir, del periodo de su órbita) emplea un planeta en viajar por la mitad de su órbita más cercana al sol? Exprese su respuesta en función de la excentricidad ε de la órbita del planeta.

∗16. Suponga que un planeta viaja con una velocidad de v_0 en el momento en que su distancia al sol es r_0. Demuestre que el periodo orbital del planeta es

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}\left(\frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{k}\right)^{-3/2}$$

Sugerencia: La magnitud $\frac{k}{r} - \frac{1}{2}v^2$ es constante en todos los puntos de la órbita, como se demostró en el razonamiento sobre la conservación de la energía. Calcule el valor de esta expresión en el perihelio en función del semieje mayor, a.

∗17. La suma de las distancias de un punto P de una elipse $\mathcal{E}$ a sus focos es la constante $2a$, la longitud del eje mayor de la elipse. Utilice este hecho como parte de un argumento *geométrico* para demostrar que la distancia media de los puntos P a un foco de $\mathcal{E}$ es a. Es decir, demuestre que

$$\frac{1}{c(\mathcal{E})}\int_{\mathcal{E}} r\,ds = a$$

siendo $c(\mathcal{E})$ la circunferencia de $\mathcal{E}$, y r la distancia de un punto de $\mathcal{E}$ a un foco.

∗18. **(Un planteamiento directo de la Primera Ley de Kepler)** El resultado de eliminar θ en las ecuaciones de las componentes radial y transversal de la aceleración de un planeta es

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}$$

Demuestre el cambio de las variables dependiente e independiente:

$$r(t) = \frac{1}{u(\theta)}, \qquad \theta = \theta(t)$$

transforma esta ecuación en una más simple:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{h^2}$$

Demuestre que la solución de esta ecuación es

$$u = \frac{k}{h^2}\,(1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0))$$

siendo ε y θ_0 constantes. A partir de aquí, demuestre que la órbita es elíptica sen $|\varepsilon| < 1$.

∗19. **(¿Qué pasaría si la ley de gravitación dependiera del inverso del cubo?)** Utilice la técnica del Ejercicio 18 para obtener la trayectoria de un objeto de masa unidad atraído hacia el origen por una fuerza de módulo $f(r) = k/r^3$. ¿Existen órbitas que no tiendan a infinito o al origen cuando $t \to \infty$?

20. Utilice la fórmula de conservación de la energía para demostrar que si $E < 0$ la órbita debe estar acotada; es decir, no puede alejarse arbitrariamente del origen.

∗21. **(Hipérbolas en polares)** Si $\varepsilon > 1$, entonces la ecuación

$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

representa una hipérbola en vez de una elipse. Dibuje dicha hipérbola, calcule su centro y las direcciones de sus asíntotas, y determine su semieje transversal, su semieje conjugado y su semidistancia focal, en función de ℓ y ε.

∗22. **(Órbitas hiperbólicas)** Un meteoro que procede del infinito sigue una órbita hiperbólica que pasa cerca del sol. A distancias muy grandes del sol, su velocidad es v_∞. Las asíntotas de su órbita están a una distancia D, medida perpendicularmente desde el sol (*véase* la Figura 11.27). Demuestre que el ángulo δ de deflexión del meteoro debido a la atracción gravitatoria del sol se expresa como

$$\cot\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{Dv_\infty^2}{k}$$

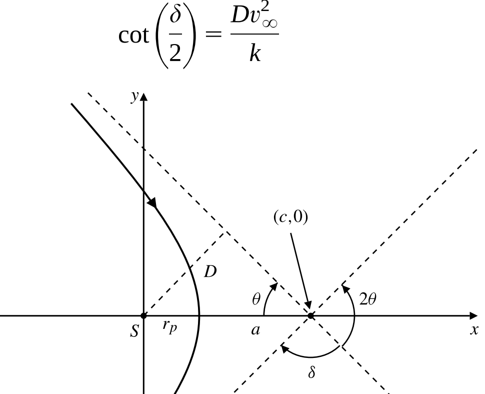


Figura 11.27 Trayectoria de un meteoro.

Sugerencia: Necesitará el resultado del Ejercicio 21. El mismo análisis y, por tanto, los mismos resultados son válidos en el caso de atracción o repulsión electrostática, $f(r) = \pm k/r^2$. La constante k depende de la carga de las dos partículas y r es la distancia entre ellas.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué es una función vectorial de una variable real, y por qué representa una curva?**
- **Enuncie la Regla del Producto para la derivada de $u(t) \bullet (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))$.**
- **¿Qué significan las siguientes expresiones?**
  - ◇ Velocidad angular
  - ◇ Momento angular
  - ◇ Aceleración centrípeta
  - ◇ Aceleración de Coriolis
  - ◇ Parametrización mediante la longitud de arco
  - ◇ Fuerza central
- **Calcule las siguientes magnitudes asociadas con una curva paramétrica $\mathcal{C}$ con parametrización $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$.**
  - ◇ El vector velocidad $\mathbf{v}(t)$
  - ◇ La velocidad $v(t)$
  - ◇ La longitud de arco
  - ◇ La aceleración $\mathbf{a}(t)$
  - ◇ La tangente unitaria $\hat{\mathbf{T}}(t)$
  - ◇ La curvatura $\kappa(t)$
  - ◇ La normal unitaria $\hat{\mathbf{N}}(t)$
  - ◇ El plano osculante
  - ◇ El radio de curvatura $\rho(t)$
  - ◇ La torsión $\tau(t)$
  - ◇ La circunferencia osculante
  - ◇ La evoluta
  - ◇ La binormal unitaria $\hat{\mathbf{B}}(t)$
  - ◇ La aceleración normal
  - ◇ La aceleración tangencial
- **Enuncie las fórmulas de Frenet-Serret.**
- **Enuncie las leyes de Kepler del movimiento planetario.**
- **¿Qué son las componentes radial y transversal del vector velocidad y de la aceleración?**

Ejercicios de repaso

1. Si $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ representan la posición, el vector velocidad y la aceleración en el instante t de una partícula que se mueve en el espacio tridimensional, y si, en todo instante t, $\mathbf{a}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$, demuestre que el vector $\mathbf{r}(t) - t\mathbf{v}(t)$ tiene longitud constante.

2. Describa la curva paramétrica

$$\mathbf{r} = t\cos t\,\mathbf{i} + t\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + (2\pi - t)\mathbf{k}$$

$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, y calcule su longitud.

3. Una partícula se mueve siguiendo la curva de intersección de las superficies $y = x^2$ y $z = 2x^3/3$ con velocidad
constante $v = 6$. Se mueve en la dirección de x creciente. Calcule su vector velocidad y su aceleración cuando está en el punto $(1, 1, 2/3)$.

4. Una partícula se mueve siguiendo la curva $y = x^2$ en el plano xy, de forma que en el instante t su velocidad es $v = t$. Calcule su aceleración en el instante $t = 3$, si en ese momento está en el punto $(\sqrt{2}, 2)$.

5. Calcule la curvatura y la torsión en un punto general de la curva $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$.

6. Una partícula se mueve siguiendo la curva del Ejercicio 5, de forma que en el instante t está en la posición $\mathbf{r}(t)$. Calcule su aceleración normal y su aceleración tangencial en cualquier instante t. ¿Cuál es su velocidad mínima?

7. **(Una curva clotoide)** Las ecuaciones paramétricas de la curva plana $\mathcal{C}$ que se muestra en la Figura 11.28 son

$$x(s) = \int_0^s \cos\frac{kt^2}{2}\,dt \quad \text{e} \quad y(s) = \int_0^s \mathrm{sen}\,\frac{kt^2}{2}\,dt$$

Verifique que s es, de hecho, la longitud de arco en $\mathcal{C}$ medida desde $(0, 0)$, y que la curvatura de $\mathcal{C}$ se expresa como $\kappa(s) = ks$. Como la curvatura cambia realmente con la distancia recorrida sobre la curva, este tipo de curvas, denominadas *clotoides*, resultan de utilidad para unir secciones de pistas o de vías con diferentes curvaturas.

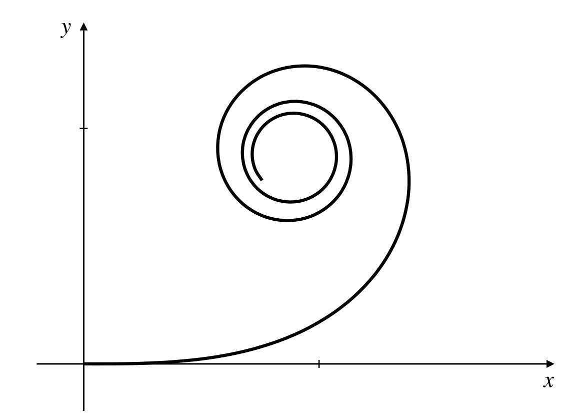


Figura 11.28 Una curva clotoide.

8. Una partícula se mueve siguiendo la curva en polares $r = e^{-\theta}$ con velocidad angular constante en $\dot{\theta} = k$. Exprese su vector velocidad y su aceleración en función de sus componentes radial y transversal, que sólo dependen de la distancia r al origen.

Algunas propiedades de las cicloides

Los Ejercicios 9-12 tratan de la cicloide

$$\mathbf{r} = a(t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$$

Recuérdese que esta curva es el camino que sigue un punto de una circunferencia de radio a cuando dicha circunferencia rueda por el eje x.

9. Calcule la longitud de arco $s = s(T)$ de la parte de la cicloide que va desde $t = 0$ hasta $t = T \leqslant 2\pi$.

10. Calcule la parametrización mediante longitud de arco $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ del arco $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ de la cicloide, siendo s medida desde el punto (0, 0).

11. Calcule la *evoluta* de la cicloide, es decir, calcule las ecuaciones paramétricas del centro de curvatura $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c(t)$ de la cicloide. Demuestre que la evoluta es la misma cicloide trasladada πa unidades hacia la derecha y $2a$ unidades hacia abajo.

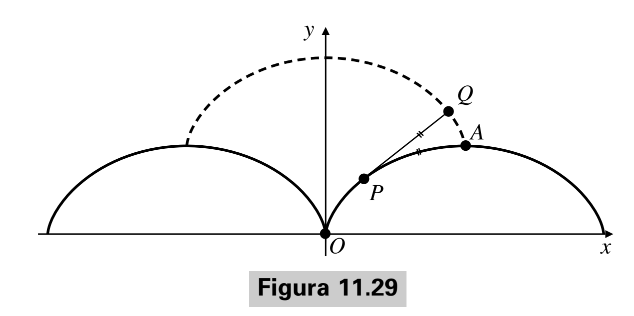


Figura 11.29

12. Una cuerda de longitud $4a$ tiene un extremo fijo en el origen y se enrolla siguiendo el arco de la cicloide a la derecha del origen. Como la longitud total de ese arco es $8a$, el extremo libre de la cuerda queda en el punto más alto A de la cicloide. Calcule el camino que sigue el extremo libre Q de la cuerda cuando se desenrolla de la cicloide y se mantiene tensa mientras tanto (*véase* la Figura 11.29). Si la cuerda deja a la cicloide en el punto P, entonces

$$(\text{arc}\, OP) + PQ = 4a$$

La trayectoria que sigue el punto Q se denomina *involuta* de la cicloide. Demuestre que, como la evoluta, la involuta es también una traslación de la cicloide original. De hecho, la cicloide es la evoluta de su involuta.

13. Sea P un punto en el espacio tridimensional cuyas coordenadas esféricas son (ρ, ϕ, θ). Suponga que P no está en el eje z. Obtenga una tríada de vectores unitarios mutuamente perpendiculares, $\{\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\}$, en P, en las direcciones de ρ, ϕ y θ crecientes, respectivamente. ¿Está la tríada orientada a la derecha o a la izquierda?

Las leyes de Kepler implican la ley de la gravitación de Newton

En los Ejercicios 14-16, se *supone* que un planeta de masa m se mueve siguiendo una órbita elíptica $r = \ell/(1 + \varepsilon\cos\theta)$, con foco en el origen (el sol), bajo la influencia de una fuerza $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ que depende sólo de la posición del planeta.

14. Utilizando la Segunda Ley de Kepler, demuestre que $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$ es constante y, a partir de aquí, que $r^2\dot{\theta}$ es constante.

15. Utilice la Segunda Ley del Movimiento de Newton $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ para demostrar que $\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Por tanto, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es paralela a $\mathbf{r}$: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$ para alguna función escalar $f(\mathbf{r})$, y la componente transversal de $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es cero.

16. Mediante el cálculo directo de la aceleración radial del planeta, demuestre que $f(\mathbf{r}) = mh^2/(\ell r^2)$, siendo $r = |\mathbf{r}|$. Por tanto, $\mathbf{F}$ es una fuerza de atracción hacia el origen que es proporcional a la masa del planeta, e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al sol.

Problemas avanzados

1. Sea P un punto en la superficie de la tierra situado a 45º de latitud norte. Utilice un sistema de coordenadas con origen en P y con vectores de la base $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ apuntando al este y al norte, respectivamente, de forma que $\mathbf{k}$ apunte verticalmente hacia arriba.

(a) Exprese la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de la tierra en función de los vectores de la base en P. ¿Qué es el módulo Ω de $\boldsymbol{\Omega}$ en radianes por segundo?

(b) Calcule la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ de un objeto que cae verticalmente con velocidad v sobre P.

(c) Si el objeto de (b) se suelta desde el reposo a una altura de 100 m sobre P, ¿cuándo llega aproximadamente al suelo? Ignore la resistencia del aire, pero no la aceleración de Coriolis. Como la aceleración de Coriolis es mucho menor en módulo que la aceleración gravitatoria, se puede utilizar la velocidad vertical como una buena aproximación de la velocidad real del objeto en cualquier instante durante su caída.

***2.** **(El espín de una bola de béisbol)** Cuando se lanza una bola con un espín respecto un eje que no es paralelo a su velocidad, experimenta una aceleración lateral debido a las diferencias de rozamiento en sus lados. Esta aceleración de espín se expresa como $\mathbf{a}_s = k\mathbf{S} \times \mathbf{v}$, siendo $\mathbf{v}$ la velocidad de la bola, $\mathbf{S}$ la velocidad angular de su espín y k una constante positiva que depende de la superficie de la bola.

Suponga que una bola para la que $k = 0{,}001$ se lanza horizontalmente según la dirección del eje x, con una velocidad inicial de 70 ft/s y un espín de 1000 rad/s respecto a su eje vertical. Su velocidad $\mathbf{v}$ debe cumplir

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = (0.001)(1000\mathbf{k}) \times \mathbf{v} - 32\mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{v} - 32\mathbf{k} \\ \mathbf{v}(0) = 70\mathbf{i} \end{cases}$$

ya que la aceleración de la gravedad es de 32 pies/s^2.

(a) Demuestre que las componentes de $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ cumplen

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = -v_2 \\ v_1(0) = 70 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{dv_2}{dt} = v_1 \\ v_2(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{dv_3}{dt} = -32 \\ v_3(0) = 0 \end{cases}$$

(b) Resuelva esas ecuaciones y calcule la posición de la bola t s tras su lanzamiento. Suponga que se lanza desde el origen en el instante $t = 0$.

(c) En $t = 1/5$ s, ¿a qué distancia y en qué dirección se habrá desviado la bola de la trayectoria parabólica que habría seguido si se hubiera lanzado sin espín?

*3. **(Partículas cargadas en movimiento en campos magnéticos)** Los campos magnéticos ejercen fuerzas sobre las partículas cargadas en movimiento. Si una partícula de masa m y carga q se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un campo magnético $\mathbf{B}$, entonces experimenta una fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, por lo que su velocidad está gobernada por la ecuación

$$m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

En este ejercicio, suponga que el campo magnético es constante y vertical, es decir, $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ (como, por ejemplo, en un tubo de rayos catódicos). Si la velocidad inicial de la partícula en movimiento es $\mathbf{v}_0$, su velocidad en el instante t se puede expresar como

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega\mathbf{v} \times \mathbf{k}, \qquad \text{siendo } \omega = \dfrac{qB}{m} \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que $\mathbf{v} \bullet \mathbf{k} = \mathbf{v}_0 \bullet \mathbf{k}$ y $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_0|$ para todo t.

(b) Sea $\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}(t) - (\mathbf{v}_0 \bullet \mathbf{k})\mathbf{k}$, de forma que $\mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{k}$ para todo t. Demuestre que $\mathbf{w}$ cumple

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\mathbf{w}}{dt^2} = -\omega^2\mathbf{w} \\ \mathbf{w}(0) = \mathbf{v}_0 - (\mathbf{v}_0 \bullet \mathbf{k})\mathbf{k} \\ \mathbf{w}'(0) = \omega\mathbf{v}_0 \times \mathbf{k} \end{cases}$$

(c) Obtenga $\mathbf{w}(t)$ a partir del problema de valor inicial de (b), y a partir de aquí calcule $\mathbf{v}(t)$.

(d) Calcule el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ de la partícula en el instante t, si en el instante $t = 0$ dicha partícula está en el origen. Verifique que la trayectoria de la partícula es, en general, una hélice circular. ¿En qué circunstancias será dicha trayectoria una recta? ¿Y una circunferencia?

*4. **(La tautócrona)** Las ecuaciones paramétricas

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad y = a(\cos\theta - 1)$$

(para $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) describen un arco de cicloide seguido por un punto sobre una circunferencia de radio a que rueda por el eje x. Suponga que la curva está formada por un alambre por el que se puede deslizar una cuenta sin rozamiento (*véase* la Figura 11.30). Si la cuenta se desliza partiendo del reposo bajo la acción de la gravedad, empezando en un punto cuyo valor del parámetro es θ_0, demuestre que el tiempo que tarda la cuenta en alcanzar el punto más bajo del arco (correspondiente a $\theta = \pi$) es *constante*, independiente de la posición inicial θ_0. Es decir, dos cuentas que se suelten simultáneamente desde puntos diferentes del alambre siempre se encontrarán en el punto más bajo. Por esta razón, la cicloide se denomina a veces *tautócrona*, término procedente del griego que significa «tiempo constante». *Sugerencia*: Cuando la cuenta cae desde la altura $y(\theta_0)$ hasta la altura $y(\theta)$ su velocidad es $v = \sqrt{2g(y(\theta_0) - y(\theta))}$ (¿por qué?). El tiempo que tarda la cuenta en llegar al fondo es

$$T = \int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\pi} \frac{1}{v}\,ds$$

siendo ds la longitud de un elemento de arco sobre la cicloide.

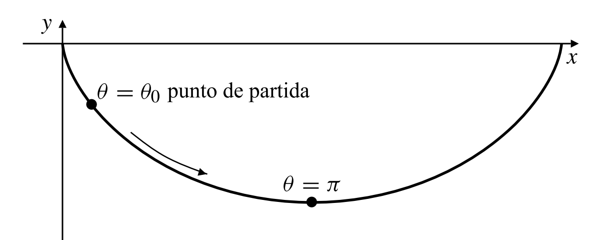


Figura 11.30

*5. **(La caída al abismo)** Un parque de atracciones de West Edmonton Mall en Alberta, Canadá, ofrece a los que buscan emociones fuertes probar la caída libre. Consiste en un coche que se mueve por una pista formada por secciones rectas horizontales y verticales unidas por curvas suaves. El coche se lanza desde la parte superior y cae verticalmente bajo la acción de

la gravedad durante $10 - 2\sqrt{2} \approx 7.2$ m antes de entrar en la sección curva en el punto B (*véase* la Figura 11.31). Cae otros $2\sqrt{2} \approx 2.8$ m mientras traza la curva y entra en la sección horizontal DE a nivel del suelo, donde se aplican los frenos para detener el coche (por tanto, la caída vertical total desde A hasta D o E es de 10 m, cifra, como las otras de este problema, que se ha escogido por conveniencia matemática y no por precisión de ingeniería). A efectos de este problema es útil tomar los ejes coordenados formando un ángulo de 45º con la vertical, de forma que las dos secciones rectas de la pista coincidan con la gráfica de $y = |x|$. En ese caso la sección curva va desde $(-2, 2)$ hasta $(2, 2)$, y se puede considerar simétrica respecto al eje y. Con este sistema de coordenadas, la aceleración gravitatoria está en la dirección de $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

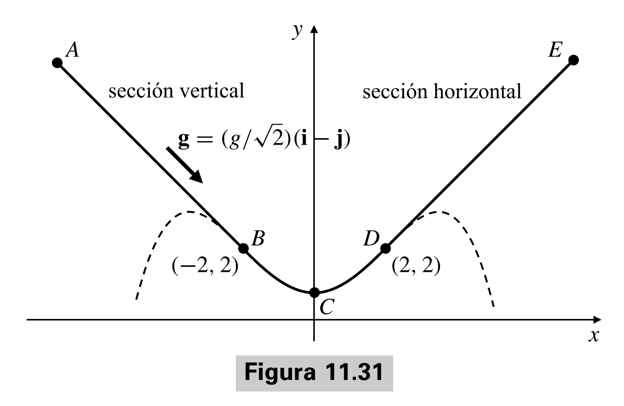


Figura 11.31

(a) Calcule un polinomio de cuarto grado cuya gráfica se pueda usar para enlazar las dos secciones rectas de la pista sin producir aceleraciones discontinuas en el coche que cae (¿por qué es adecuado un polinomio de cuarto grado?).

(b) Ignorando el rozamiento y la resistencia del aire, ¿con qué velocidad se estará moviendo el coche cuando entra a la curva en el punto B? ¿Y cuando deja la curva en el punto D?

(c) Calcule el módulo de la aceleración normal y de la aceleración total del coche cuando pasa por el punto C.

∗**6.** **(Un problema de caza)** Un zorro y una liebre corren por el plano xy. Ambos corren a la misma velocidad v. La liebre corre por el eje y en dirección de y creciente y parte del origen en el instante $t = 0$. El zorro corre siempre directamente hacia la liebre. En el instante $t = 0$ el zorro está en el punto $(a, 0)$, siendo $a > 0$. Sea $(x(t), y(t))$ la posición del zorro en el instante t.

(a) Verifique que la pendiente de la tangente a la trayectoria del zorro en el instante t es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(t) - vt}{x(t)}$$

(b) Demuestre que la ecuación de la trayectoria del zorro cumple

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Sugerencia: Diferencie la ecuación de (a) con respecto a t. Observe que en el miembro izquierdo $(d/dt) = (dx/dt)(d/dx)$.

(c) Resuelva la ecuación de (b) sustituyendo $u(x) = dy/dx$ y separando variables. Observe que $y = 0$ y $u = 0$ cuando $x = a$.

7. Suponga que la tierra es una esfera perfecta de radio a. Suponga que está situado en un punto en el ecuador cuyas coordenadas esféricas son $(\rho, \phi, \theta) = (a, \pi/2, 0)$, y que viaja por la superficie de la tierra con una velocidad constante v, desplazándose hacia el noreste (45º al este del norte).

(a) ¿Conseguirá llegar al polo norte? Si es así, ¿cuánto tardará en llegar?

(b) Calcule las funciones $\phi(t)$ y $\theta(t)$ correspondientes a las coordenadas angulares esféricas de su posición en el instante $t > 0$.

(c) ¿Cuántas veces cortará su trayectoria al meridiano $\theta = 0$?





Diferenciación parcial

Soy un experto en materias matemáticas,
Entiendo ecuaciones simples y cuadráticas,
Reboso de noticias sobre el teorema binomial,
Y de muchas cosas alegres sobre el cuadrado de la hipotenusa.

William Schenck Gilbert (1564-1642)
de *The Pirates of Penzance*

Introducción Este capítulo trata sobre la ampliación de la idea de derivada de funciones reales al caso de variables vector, es decir, a funciones que dependen de varias variables reales. Aunque la diferenciación se realiza sobre una variable cada vez, la relación entre las derivadas con respecto a diferentes variables hace que el análisis de estas funciones sea mucho más complicado y sutil que en el caso de una sola variable.

12.1 Funciones de varias variables

La notación $y = f(x)$ se utiliza para indicar que la variable y depende de la única variable real x, es decir, que y es función de x. El dominio de esa función f es un conjunto de números reales. Existen muchas magnitudes que dependen de más de una variable real y, por tanto, que son funciones de más de una variable. Por ejemplo, el volumen de un cilindro circular de radio r y altura h se expresa como $V = \pi r^2 h$; se dice que V es función de dos variables: r y h. Si denominamos f a esta función, entonces expresaremos $V = f(r, h)$, siendo

$$f(r, h) = \pi r^2 h, \qquad (r \geqslant 0, \quad h \geqslant 0)$$

Así, f es una función de dos variables cuyo *dominio* es el conjunto de puntos del plano rh cuyas coordenadas (r, h) cumplen $r \geqslant 0$ y $h \geqslant 0$. De forma similar, la relación $w = f(x, y, z) = x + 2y - 3z$ define w como función de las variables x, y y z, cuyo dominio es $\mathbb{R}^3$ completo, o, si se indica explícitamente, algún subconjunto particular de $\mathbb{R}^3$.

Por analogía con la correspondiente definición de funciones de una variable, definiremos una función de n variables de la siguiente forma:

DEFINICIÓN 1

Una **función** f de n variables reales es una regla que asigna un *único* número real $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ a cada punto $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de algún subconjunto $\mathcal{D}(f)$ de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}(f)$ se denomina **dominio** de f. El conjunto de números reales $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ obtenido a partir de los puntos del dominio se denomina **rango** de f.

Como en el caso de funciones de una variable, la **convención del dominio** especifica que el dominio de una función de n variables es el máximo conjunto de puntos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ para el que $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ tiene sentido como número real, a menos que el dominio se establezca explícitamente como un conjunto menor.

La mayoría de los ejemplos que consideraremos de aquí en adelante serán funciones de dos o tres variables independientes. Cuando una función f depende de dos variables, en general llamaremos a dichas variables independientes x e y, y utilizaremos z para indicar la variable dependiente que representa el valor de la función; es decir, $z = f(x, y)$. En general utilizaremos x, y y z como variables independientes de una función de tres variables, y en ese caso expresaremos el valor de la función como $w = f(x, y, z)$. Daremos algunas definiciones, y plantearemos (y demostraremos) algunos teoremas sólo en el caso de dos variables, pero su extensión al caso de tres o más variables en general será obvia.

Representaciones gráficas

La gráfica de una *función* f de una variable (es decir, la gráfica de la *ecuación* $y = f(x)$) es el conjunto de puntos del plano xy cuyas coordenadas son $(x, f(x))$, siendo x perteneciente al dominio de f. De forma similar, la gráfica de una *función* f de dos variables (es decir, la gráfica de la *ecuación* $z = f(x, y)$) es el conjunto de puntos del espacio tridimensional cuyas coordenadas son $(x, y, f(x, y))$, donde (x, y) pertenece al dominio de f. Esta gráfica es una superficie en $\mathbb{R}^3$, que está situada por encima (si $f(x, y) > 0$) o por debajo (si $f(x, y) < 0$) del dominio de f en el plano xy (*véase* la Figura 12.1). La gráfica de una función de tres variables es una *hipersuperficie* tridimensional en el espacio tetradimensional $\mathbb{R}^4$. En general, la gráfica de una función de n variables será una *superficie* n-dimensional en $\mathbb{R}^{n+1}$. No intentaremos dibujar gráficas de funciones de más de dos variables.

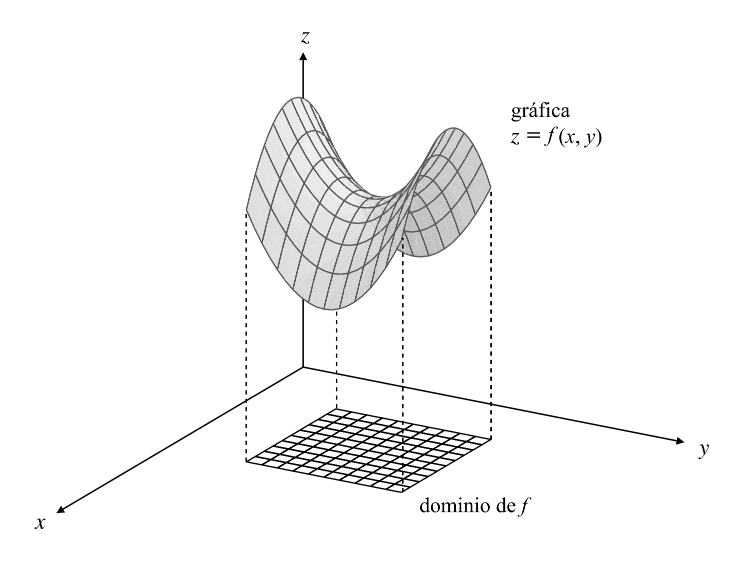


Figura 12.1 La gráfica de $f(x, y)$ es la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ definida en los puntos (x, y) del dominio de f.

Ejemplo 1 Considere la función

$$f(x, y) = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right), \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant 4 - 2x)$$

La gráfica de f es la superficie plana triangular cuyos vértices son (2, 0, 0), (0, 4, 0) y (0, 0, 3) (*véase* la Figura 12.2). Si el dominio de f no se hubiera indicado explícitamente como un conjunto particular del plano xy, la gráfica hubiera sido todo el plano que pasa por esos tres puntos.

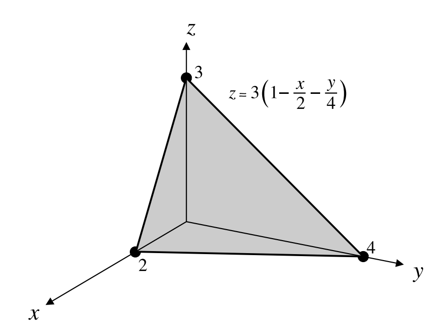


Figura 12.2

Ejemplo 2 Considere $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. La expresión bajo la raíz cuadrada no puede ser negativa, por lo que el dominio es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 9$ en el plano xy.

Si elevamos al cuadrado la ecuación $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, podemos expresar el resultado en la forma $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Esta ecuación representa una esfera de radio 3 centrada en el origen. Sin embargo, la gráfica de f es sólo el hemisferio superior, donde $z \geqslant 0$ (*véase* la Figura 12.3).

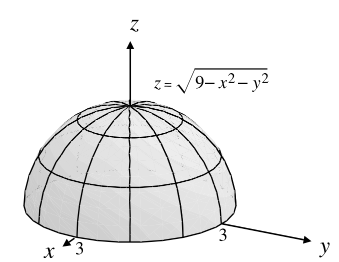


Figura 12.3

Como es necesario proyectar la superficie $z = f(x, y)$ en una hoja bidimensional, la mayoría de esas gráficas son difíciles de dibujar sin un considerable talento artístico y entrenamiento. Sin embargo, siempre es conveniente intentar visualizar estas gráficas y dibujarlas lo mejor posible. Algunas veces es conveniente dibujar sólo parte de una gráfica, por ejemplo, la parte que está en el primer octante. También sirve de ayuda determinar (y dibujar) las intersecciones de la gráfica con diversos planos, especialmente con los planos coordenados, y con planos paralelos a los planos coordenados (*véase* la Figura 12.1).

Existen algunos paquetes de software matemático que producen dibujos de gráficas tridimensionales, y que nos pueden ayudar a adquirir sensibilidad sobre el comportamiento de las correspondientes funciones. La Figura 12.1 es un ejemplo de una gráfica dibujada por computador, como la Figura 12.4. Junto con la mayoría de las otras gráficas matemáticas de este texto, ambas se han realizado utilizando el paquete de software para gráficos matemáticos **MG**. Más adelante en esta sección presentaremos la forma de utilizar Maple para generar gráficas.

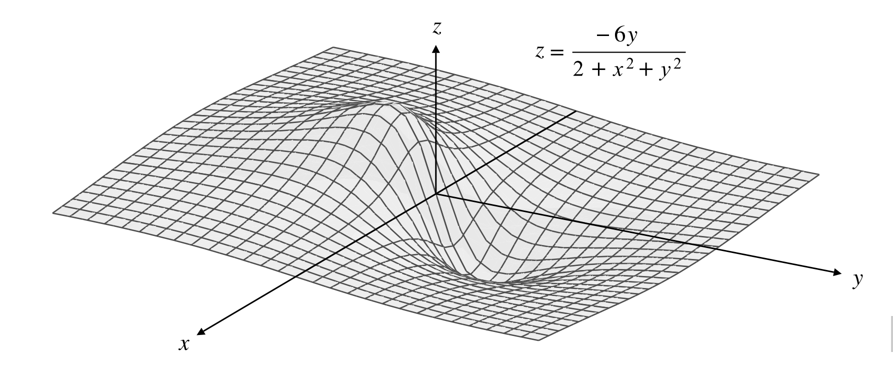


Figura 12.4 La gráfica de $z = \dfrac{-6y}{2 + x^2 + y^2}$.

Otra forma de representar gráficamente la función $f(x, y)$ es elaborar un *mapa topográfico* bidimensional de la superficie $z = f(x, y)$. En el plano xy se dibujan las curvas $f(x, y) = C$ para varios valores de la constante C. Estas curvas se denominan **curvas de nivel** de f porque son las proyecciones verticales en el plano xy de las curvas en las que la gráfica $z = f(x, y)$ corta a los planos horizontales (de nivel) $z = C$. La gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y algunas de sus curvas de nivel se muestran en la Figura 12.5. La gráfica es un paraboloide circular en el espacio tridimensional. Las curvas de nivel son circunferencias centradas en el origen del plano xy.

Las curvas de contorno en el mapa topográfico de la Figura 12.6 muestran las elevaciones, en incrementos de 100 m sobre el nivel del mar, de parte de la isla de Nelson en la costa de la

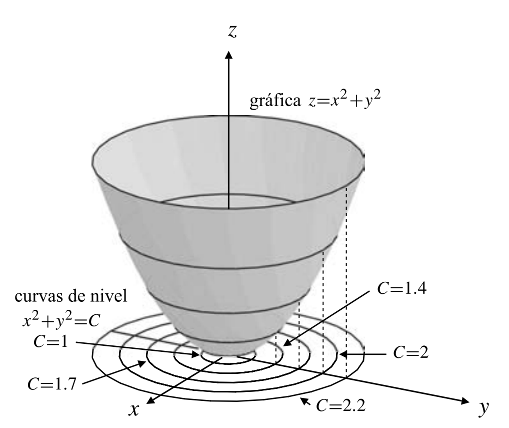


Figura 12.5 La gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$ y algunas curvas de nivel de f.

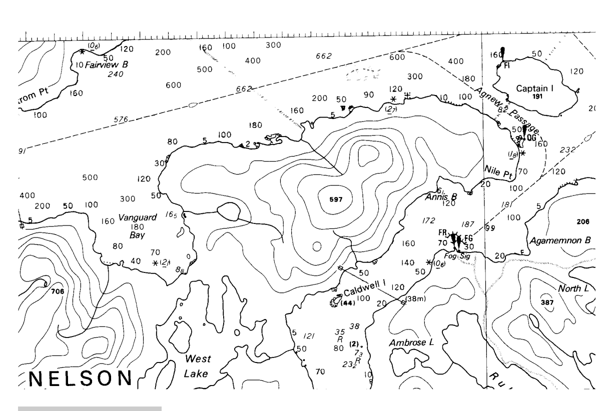


Figura 12.6 Curvas de nivel (contornos) que representan la elevación en un mapa topográfico.

Columbia Británica. Como estos contornos se dibujan para valores equiespaciados de C, el espaciado de los propios contornos lleva información sobre la pendiente en diversos lugares de las montañas; la tierra está más inclinada donde las líneas de contorno están más juntas. Obsérvese también que las corrientes de agua cruzan las líneas de contorno formando ángulos rectos. Indican la ruta de la máxima pendiente. Las isotermas (curvas de temperatura constante) y las isobaras (curvas de presión constante) en los mapas del tiempo son también ejemplos de curvas de nivel.

Ejemplo 3 Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)$ del Ejemplo 1 son los segmentos de las rectas

$$3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right) = C \quad \text{o} \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 - \frac{C}{3}, \qquad (0 \leqslant C \leqslant 3)$$

que está en el primer cuadrante. La Figura 12.7(a) muestra varias curvas de nivel. Corresponden a valores equiespaciados de C, y como tienen igual separación, indican una pendiente uniforme de la gráfica de f de la Figura 12.2.

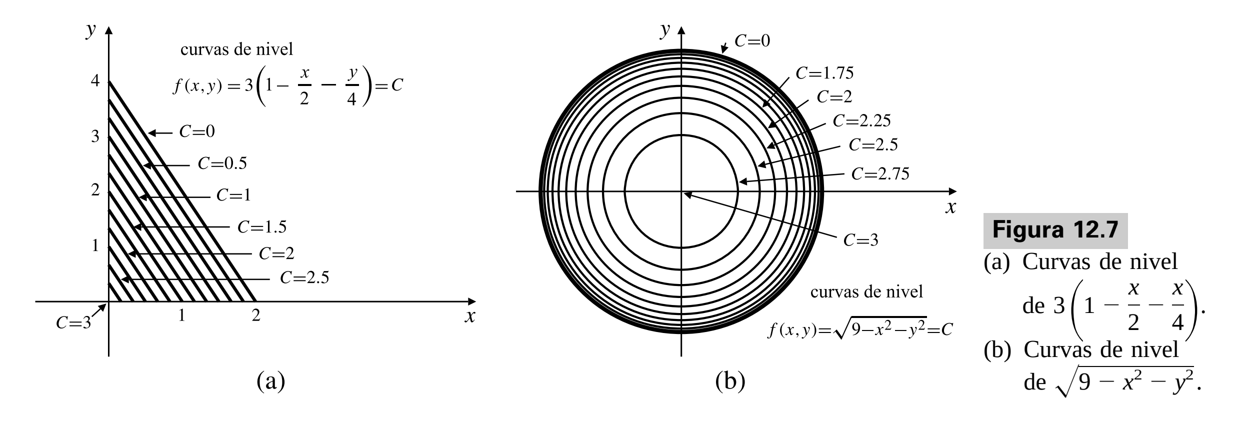


Figura 12.7
(a) Curvas de nivel de $3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{4}\right)$.
(b) Curvas de nivel de $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

■

Ejemplo 4 Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ del Ejemplo 2 son las circunferencias concéntricas

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = C \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 9 - C^2, \qquad (0 \leqslant C \leqslant 3)$$

Obsérvese el espaciado de estas circunferencias en la Figura 12.7(b). Se muestran para varios valores equiespaciados de C. El acercamiento de las circunferencias cuando $C \to 0+$ indica que la superficie hemisférica correspondiente a la gráfica de f se va haciendo cada vez más abrupta (*véase* la Figura 12.3). ■

Una función determina sus curvas de nivel con cualquier espaciado dado entre valores consecutivos de C. Sin embargo, las curvas de nivel sólo determinan la función si *todas ellas* son conocidas.

Ejemplo 5 Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ se corresponden con las curvas $x^2 - y^2 = C$. Para $C = 0$ la «curva» de nivel es la pareja de rectas $x = y$ y $x = -y$. Para otros valores de C, las curvas de nivel son hipérbolas rectangulares cuyas asíntotas son esas rectas (*véase* la Figura 12.8(a)). La gráfica de f es el paraboloide hiperbólico con forma de silla de montar que se muestra en la Figura 12.8(b). ■

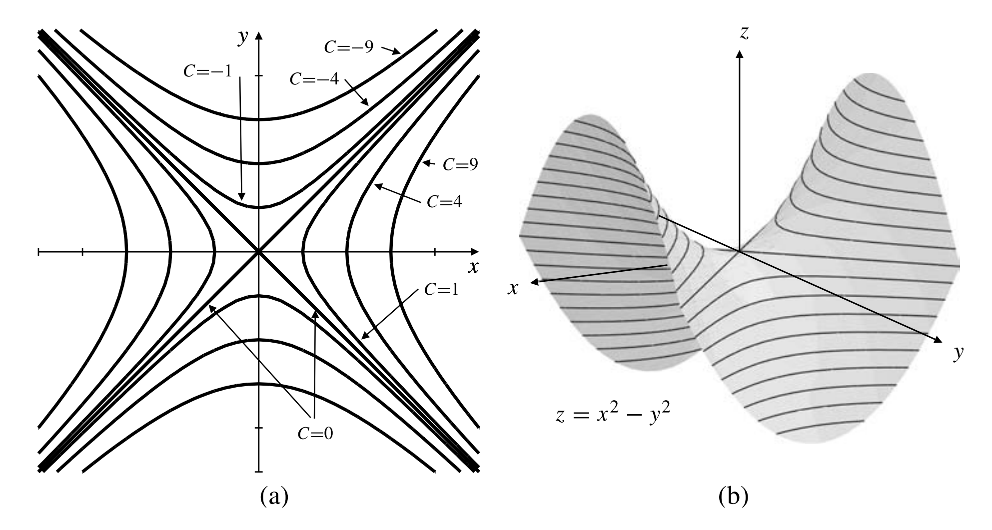


Figura 12.8
(a) Curvas de nivel de $x^2 - y^2$.
(b) Gráfica de $x^2 - y^2$.

Ejemplo 6 Describa y dibuje algunas curvas de nivel de la función $z = g(x, y)$, definida como $z \geqslant 0$, $x^2 + (y - z)^2 = 2z^2$. Dibuje también la gráfica de g.

Solución La ecuación de la curva de nivel $z = g(x, y) = C$ (siendo C una constante positiva) es $x^2 + (y - C)^2 = 2C^2$, que corresponde a una circunferencia de radio $\sqrt{2C}$, centrada en $(0, C)$. La Figura 12.9(a) muestra las curvas de nivel para incrementos de C de 0.1, desde 0 hasta 1. Estas curvas de nivel cortan a rayos que salen del origen con igual espaciado (aunque el espaciado es diferente para diferentes rayos), lo que indica que la superficie $z = g(x, y)$ es un cono oblicuo. *Véase* la Figura 12.9(b).

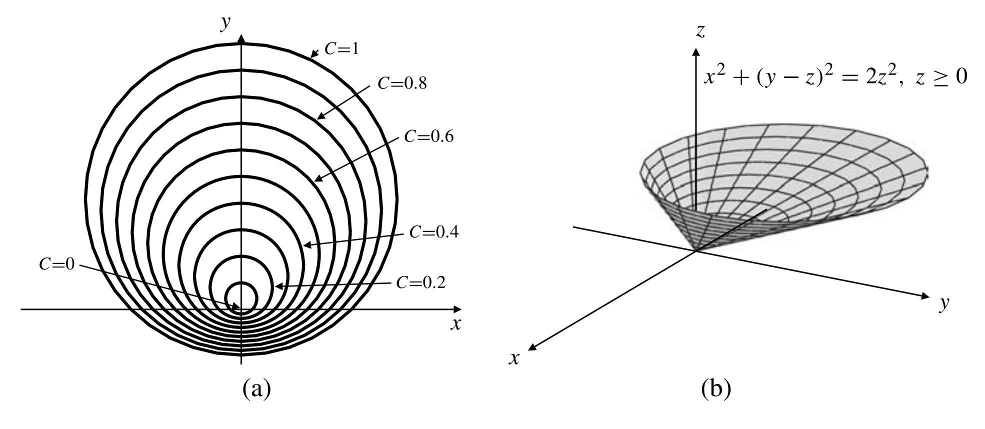


Figura 12.9
(a) Curvas de nivel de $z = g(x, y)$ en el Ejemplo 6.
(b) Gráfica de $z = g(x, y)$.

Aunque la *gráfica* de una función $f(x, y, z)$ de tres variables no se puede dibujar fácilmente (es una *hipersuperficie* tridimensional en un espacio tetradimensional), una función de este tipo tiene **superficies de nivel** en el espacio tridimensional que quizá se pueden dibujar. Estas superficies de nivel corresponden a las ecuaciones $f(x, y, z) = C$ para diversos valores de la constante C. Por ejemplo, las superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ son esferas concéntricas centradas en el origen. La Figura 12.10 muestra algunas superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 - z$. Son cilindros parabólicos.

Uso de gráficos en Maple

Como muchos paquetes de software matemático, Maple dispone de varias rutinas gráficas que nos pueden ayudar a visualizar el comportamiento de funciones de dos y tres variables. Mencio-

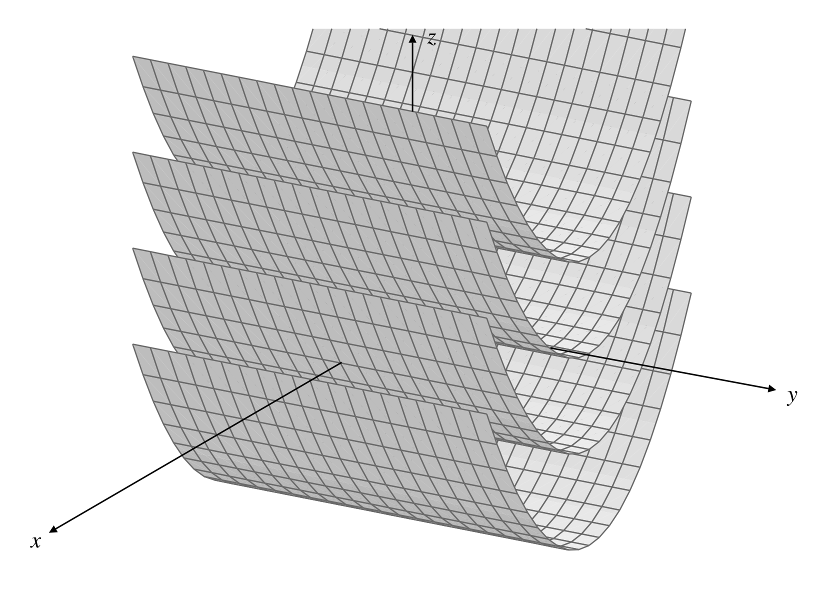


Figura 12.10 Superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 - z$.

naremos aquí sólo unas pocas; hay muchas más. La mayoría de la rutinas gráficas están en el paquete **plots**, por lo que cualquier sesión de Maple donde queramos utilizar dichas rutinas gráficas deberá empezar con la entrada

```
> with(plots) :
```

Para ahorrar espacio, no mostraremos las salidas gráficas. Posiblemente necesitaremos hacer modificaciones a los comandos gráficos para obtener el tipo de gráfica deseada.

La gráfica de una función $f(x, y)$ de dos variables (o de una expresión en x e y) se puede dibujar en un rectángulo del plano xy llamando a la rutina **plot3d**. Por ejemplo,

```
> f := -6*y/ (2+x^2+y^2) ;

> plot3d(f, x=-6..6, y=-6..6) ;
```

dibujará una superficie similar a la de la Figura 12.4, pero sin ejes y vista desde un ángulo más alto. Se pueden añadir muchas opciones al comando para cambiar el aspecto de la salida. Por ejemplo,

```
> plot3d(f, x=-6..6, y=-6..6, axes=boxed,
    orientation=[30, 70]) ;
```

dibujará la misma superficie dentro de una caja rectangular tridimensional con escalas en tres de sus lados, que indican los valores de las coordenadas (si hubiéramos escrito `axes=normal`, habríamos obtenido los ejes de coordenadas habituales en el origen, pero éstos tienden a ser más difíciles de ver contra el fondo de la superficie, por lo que en general es preferible la opción `axes=boxed`). La opción `orientation=[30, 70]` hace que la gráfica se vea desde una dirección que forma un ángulo de 70º con el eje z y que está en un plano que contiene al eje z y forma un ángulo de 30º con el plano xz (si no se especifica esta opción, el valor por defecto de la orientación es [45, 45]). Por defecto, la superficie que dibuja la rutina plot3d está graduada mediante dos familias de curvas, que representan su intersección con planos verticales $x = a$ e $y = b$ para varios valores equiespaciados de a y b, y está coloreada de forma que las partes ocultas no se muestran.

En vez de plot3d se puede usar **contourplot3d**, que muestra la superficie graduada mediante contornos en los que el valor de la función es constante. Si no se obtienen suficientes contornos por defecto, se puede incluir la opción `contours=n` para especificar el número deseado.

```
> contourplot3d(f, x=-6..6, y=-6..6, axes=boxed,
  contours=24) ;
```

Los contornos son las proyecciones de las curvas de nivel sobre la gráfica de la superficie. De forma alternativa, se puede obtener una gráfica bidimensional de las curvas de nivel utilizando la rutina **contourplot**:

```
> contourplot(f, x=-6..6, y=-6..6, axes=normal,
  contours=24) ;
```

Otras opciones que puede ser interesante incluir en las funciones plot3d y contourplot3d son:

(a) `view=zmin..zmax` para especificar el intervalo de valores de la función (es decir, de z) a mostrar en la gráfica.
(b) `grid=[m, n]` para especificar el número de valores de x e y donde evaluar la función. Si la gráfica no es lo suficientemente suave, se puede probar con los valores $m = n = 20$ o 30, o incluso valores más altos.

La gráfica de una ecuación, $f(x, y) = 0$, en el plano xy se puede generar sin necesidad de resolver la ecuación en x o y previamente, utilizando **implicitplot**.

```
> implicitplot(x^3-y^2-5*x*y-x-5, x=-6..7, y=-5..6) ;
```

dibujará la gráfica de $x^3 - y^2 - 5xy - x - 5 = 0$ en el rectángulo $-6 \leqslant x \leqslant 7$, $-5 \leqslant y \leqslant 6$. Existe también una rutina **implicitplot3d** que permite dibujar la superficie en el espacio tridimensional cuya ecuación es de la forma $f(x, y, z) = 0$. En esta rutina se deben especificar los intervalos de las tres variables.

```
> implicitplot3d(x^2+y^2-z^2-1, x=-4..4, y=-4..4,
  z=-3..3, axes=boxed) ;
```

dibuja el hiperboloide $z^2 = x^2 + y^2 - 1$.

Finalmente, hay que observar que Maple no es más capaz que nosotros de dibujar gráficas de funciones de tres o más variables, ya que no dispone de capacidades de dibujo en cuatro dimensiones. Lo mejor que podemos hacer es dibujar una serie de superficies de nivel:

```
> implicitplot3d({z-x^2-2, z-x^2, z-x^2+2}, x=-2..2,
  y=-2..2, z=-2..5, axes=boxed) ;
```

Es posible construir una secuencia de *estructuras gráficas* y asignarlas, por ejemplo, a los elementos de una variable de lista sin dibujarlas realmente. De esa forma se pueden trazar todas las gráficas simultáneamente utilizando la función **display**.

```
> for c from -1 to 1 do
  p[c] := implicitplot3d(z^2-x^2-y^2-2*c, x=-3..3,
  y=-3..3, z=0..2, color=COLOR(RGB, (1+c)/2, (1-c) /2,1))
  od:
> display([seq(p[c], c=-1..1)], axex=boxed,
  orientation=[30, 40]) ;
```

Nótese que el comando que crea las gráficas se termina con dos puntos en vez de con punto y coma habitual. Si no se suprime la salida de esta forma, se obtendrá una gran cantidad de información numérica sin sentido mientras se construyen las gráficas. La opción `color=...` intenta dar a las tres gráficas un color diferente de forma que se puedan distinguir entre sí.

Ejercicios 12.1

En los Ejercicios 1-10, especifique los dominios de las funciones.

1. $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

2. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

3. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

4. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$

5. $f(x, y) = \sqrt{4x^2+9y^2-36}$

6. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

7. $f(x, y) = \ln(1+xy)$

8. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(x+y)$

9. $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

10. $f(x, y, z) = \dfrac{e^{xyz}}{\sqrt{xyz}}$

Dibuje las gráficas de las funciones de los Ejercicios 11-18.

11. $f(x, y) = x, \quad (0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant 3)$

12. $f(x, y) = \operatorname{sen} x, \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1)$

13. $f(x, y) = y^2, \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1)$

14. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2, \quad (x^2+y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0)$

15. $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$

16. $f(x, y) = 4 - x^2$

17. $f(x, y) = |x| + |y|$

18. $f(x, y) = 6 - x - 2y$

En los Ejercicios 19-26, dibuje algunas de las curvas de nivel de las funciones.

19. $f(x, y) = x - y$

20. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

21. $f(x, y) = xy$

22. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$

23. $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

24. $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

25. $f(x, y) = xe^{-y}$

26. $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{1}{y} - x^2}$

Los Ejercicios 27 y 28 se refieren a la Figura 12.11, que muestra los contornos de una región montañosa con las alturas dadas en metros.

27. ¿En cuál de los puntos A o B es más abrupto el paisaje? ¿Cómo lo sabe?

28. Describa la topografía de la región próxima al punto C.

Describa las gráficas de las funciones $f(x, y)$ para las que se muestran las familias de curvas de nivel $f(x, y) = C$ en las figuras a las que se refieren los Ejercicios 29-32. Asuma que cada familia corresponde a valores equiespaciados de C y que el comportamiento de la familia es representativo de todas las posibles familias de la función.

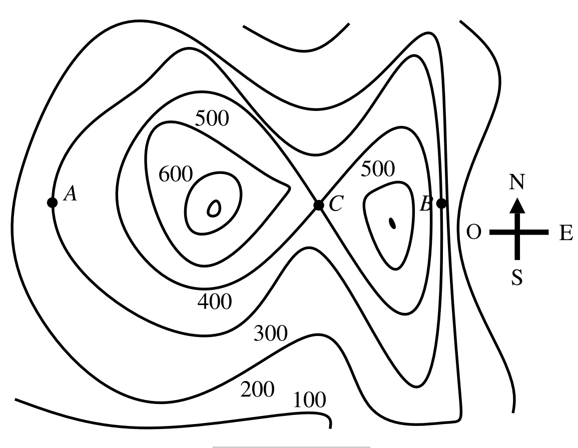


Figura 12.11

29. *Véase* la Figura 12.12(a).

30. *Véase* la Figura 12.12(b).

31. *Véase* la Figura 12.12(c).

32. *Véase* la Figura 12.12(d).

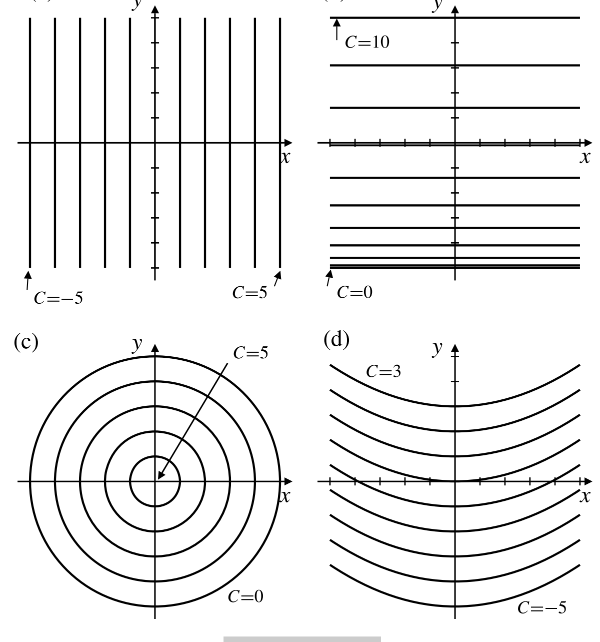


Figura 12.12

33. ¿Son las curvas $y = (x - C)^2$ curvas de nivel de alguna función $f(x, y)$? ¿Qué propiedad debe tener una familia

de curvas de una región del plano xy pará que pueda ser una familia de curvas de nivel de una función definida en dicha región?

34. Si se supone que $z \geqslant 0$, la ecuación $4z^2 = (x - z)^2 + (y - z)^2$ define z como función de x e y. Dibuje algunas curvas de nivel de esta función. Describa su gráfica.

35. Calcule $f(x, y)$ si cada una de sus curvas de nivel $f(x, y) = C$ es una circunferencia centrada en el origen y con radio

(a) C (b) C^2 (c) $\sqrt{C}$ (d) $\ln C$

36. Obtenga $f(x, y, z)$ si para toda constante C la superficie de nivel $f(x, y, z) = C$ es un plano que corta a los ejes x, y y z en los valores C^3, $2C^3$ y $3C^3$, respectivamente.

Describa las superficies de nivel de las funciones especificadas en los Ejercicios 37-41.

37. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

38. $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$

39. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ **40.** $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z^2}$

41. $f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$

42. Describa las «hipersuperficies de nivel» de la función

$$f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

Utilice Maple u otro software de gráficos por computador para dibujar las gráficas y las curvas de nivel de las funciones de los Ejercicios 43-48.

43. $\dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ **44.** $\dfrac{\cos x}{1 + y^2}$

45. $\dfrac{y}{1 + x^2 + y^2}$ **46.** $\dfrac{x}{(x^2 - 1)^2 + y^2}$

47. xy **48.** $\dfrac{1}{xy}$

12.2 Límites y continuidad

Antes de abordar esta sección convendría revisar los conceptos de entorno, conjuntos abiertos y cerrados, y puntos interior y frontera que se presentaron en la Sección 10.1.

El concepto de límite de una función de varias variables es similar al de funciones de una variable. Por claridad presentaremos la definición sólo para el caso de funciones de dos variables; el caso general es similar.

Podríamos decir que $f(x, y)$ se aproxima al límite L cuando el punto (x, y) se aproxima al punto (a, b), y escribiríamos

$$\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} f(x, y) = L$$

si todos los puntos de un entorno de (a, b), excepto posiblemente el propio punto (a, b), pertenecen al dominio de f, y si $f(x, y)$ se aproxima a L cuando (x, y) se aproxima a (a, b). Sin embargo, es más cómodo definir el límite de forma que (a, b) pueda ser también un punto frontera del dominio de f. Por tanto, nuestra definición formal generalizará también la noción unidimensional de límite unilateral.

DEFINICIÓN 2 Definición de límite

Se dice que $\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} f(x, y) = L$, cuando:

(i) Todo entorno de (a, b) contiene puntos del dominio de f diferentes de (a, b).
(ii) Para todo entero positivo ϵ existe un número positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que $|f(x, y) - L| < \epsilon$ se cumple siempre que (x, y) esté en el dominio de f y satisfaga

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

La condición (i) se incluye en la Definición 2 porque no es apropiado considerar límites en puntos *aislados* del dominio de f, es decir, en puntos con entornos que no contengan ningún otro punto del dominio.

Si existe límite es único. En el caso de una función de una sola variable f, la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$ implica que $f(x)$ se acerca al mismo número finito cuando x tiende a a, bien por la izquierda, bien por la derecha. De forma similar, en el caso de una función de dos variables, podemos tener $\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} f(x, y) = L$ sólo si $f(x, y)$ se aproxima al mismo número L sin importar la forma en que (x, y) se acerca a (a, b) en el dominio de f. En particular, (x, y) se puede aproximar a (a, b) siguiendo cualquier curva que esté en $\mathcal{D}(f)$. No es necesario que $L = f(a, b)$, incluso aunque $f(a, b)$ esté definido. Los ejemplos posteriores ilustran estas afirmaciones.

Todas las leyes habituales de los límites se extienden al caso de funciones de varias variables de forma obvia. Por ejemplo, si $\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} f(x, y) = L$, $\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} g(x, y) = M$ y todo entorno de (a, b) contiene puntos de $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ distintos de (a, b), entonces

$$\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} (f(x, y) \pm g(x, y)) = L \pm M$$

$$\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} f(x, y)g(x, y) = LM$$

$$\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} \frac{f(x,\ y)}{g(x,\ y)} = \frac{L}{M}, \qquad \text{suponiendo que } M \neq 0$$

Además, $F(t)$ es continua en $t = L$, entonces

$$\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} F(f(x, y)) = F(L)$$

Ejemplo 1 (a) $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(2,\ 3)} 2x - y^2 = 4 - 9 = -5$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} x^2y = a^2b$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(\pi/3,\ 2)} y \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

Ejemplo 2 La función $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ tiene como límite $f(a, b)$ en todos los puntos (a, b) de su dominio, el disco *cerrado* $x^2 + y^2 \leqslant 1$, y por tanto se considera que es *continua* en su dominio. Por supuesto, (x, y) sólo se puede aproximar a los puntos de la circunferencia frontera $x^2 + y^2 = 1$ desde el interior del disco.

Los siguientes ejemplos muestran que el requisito de que $f(x, y)$ se acerque al mismo límite sin importar cómo (x, y) se acerca a (a, b) puede ser muy restrictivo, y hace que los límites en dos o más variables sean mucho más sutiles que en el caso de una sola variable.

Ejemplo 3 Investigue el comportamiento límite de $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$.

Solución Nótese que $f(x, y)$ está definido para todos los puntos del plano xy excepto el origen $(0, 0)$. Podemos preguntarnos todavía si existe $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x, y)$. Si hacemos que (x, y) tienda a $(0, 0)$ a lo largo del eje x $(y = 0)$, entonces $f(x, y) = f(x, 0) \to 0$ (ya que $f(x, 0) = 0$ idénticamente). Por lo tanto, $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x, y)$ debe ser 0, si es que existe. De forma similar, para todos los puntos del eje y tenemos que $f(x, y) = f(0, y) = 0$. Sin embargo, en los puntos de la recta $x = y$, f tiene un valor constante diferente: $f(x, x) = 1$. Como el límite de $f(x, y)$ es 1 cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ por esta recta, se deduce que $f(x, y)$ no puede tener un límite único en el origen. Es decir,

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \qquad \text{no existe}$$

Obsérvese que $f(x, y)$ tiene un valor constante siguiendo cualquier rayo que salga del origen (por el rayo $y = kx$ el valor es $2k/(1 + k^2)$), pero los valores son diferentes para rayos diferentes. Las curvas de nivel de f son rayos que parten del origen (excluido el propio origen). Es difícil dibujar las gráficas de f cerca del origen. La parte de la gráfica correspondiente al primer octante es la superficie con forma de «capucha» que se muestra en la Figura 12.13(a).

Ejemplo 4 Investigue el comportamiento límite de $f(x, y) = \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$.

Solución Como en el Ejemplo 3, $f(x, y)$ se hace cero en los ejes coordenados, por lo que $\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y)$ debe ser 0, si es que existe. Si examinamos $f(x, y)$ en todos los puntos del rayo $y = kx$, obtenemos

$$f(x, kx) = \frac{2kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \frac{2kx}{x^2 + k^2} \to 0, \qquad \text{cuando } x \to 0 \quad (k \neq 0)$$

Por tanto, $f(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ siguiendo *cualquier* recta que pase por el origen. Podríamos tener la tentación de concluir, por tanto, que $\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y) = 0$, pero esto es incorrecto. Obsérvese el comportamiento de $f(x, y)$ a lo largo de la curva $y = x^2$:

$$f(x, x^2) = \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = 1$$

Es decir, $f(x, y)$ no tiende a 0 cuando (x, y) se acerca al origen siguiendo esta curva, por lo que no existe $\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y)$. Las curvas de nivel de f son parejas de parábolas con la forma $y = kx^2$, $y = x^2/k$, excluido el origen. *Véase* la Figura 12.13(b), donde se muestra la parte del primer octante de la gráfica de f.

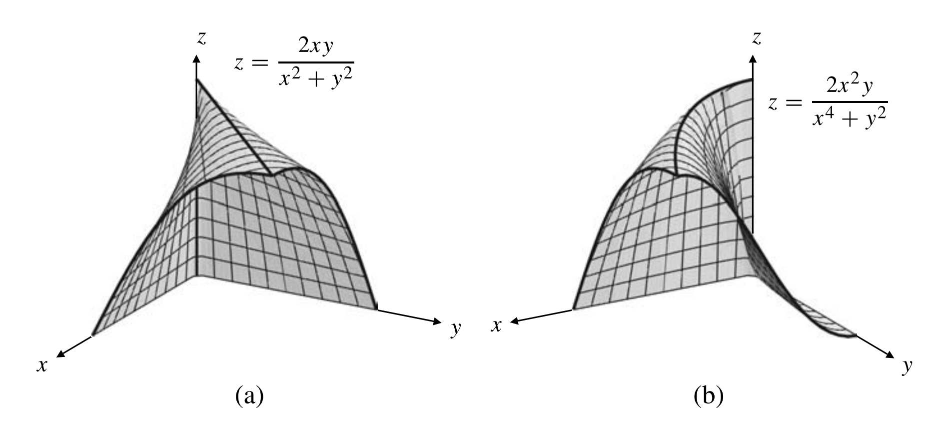


Figura 12.13
(a) $f(x, y)$ tiene límites diferentes cuando $(x, y) \to (0, 0)$ siguiendo diferentes rectas.
(b) $f(x, y)$ tiene el mismo límite 0 cuando $(x, y) \to (0, 0)$ siguiendo cualquier recta, pero tiene límite 1 cuando $(x, y) \to (0, 0)$ siguiendo la curva $y = x^2$.

Ejemplo 5 Demuestre que la función $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}$ tiene límite en el origen; concretamente,

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Solución Esta función está también definida en todo punto excepto el origen. Obsérvese que como $x^2 \leqslant x^2 + y^2$, tenemos que

$$|f(x, y) - 0| = \left|\frac{x^2y}{x^2 + y^2}\right| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$$

que tiende a cero cuando $(x, y) \to (0, 0)$ (*véase* la Figura 12.14). Formalmente, si se da $\epsilon > 0$ y se toma $\delta = \epsilon$, entonces $|f(x, y) - 0| < \epsilon$ siempre que $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, por lo que $f(x, y)$ tiene límite 0 cuando $(x, y) \to (0, 0)$ por la Definición 2.

$z = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

Figura 12.14 $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2} = 0.$

Como en el caso de funciones de una variable, la continuidad de una función f en un punto de su dominio se define directamente en función del límite (*véase*, por ejemplo, el Ejemplo 2).

DEFINICIÓN 3

La función $f(x, y)$ es continua en el punto (a, b) si

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Sigue siendo cierto que las sumas, diferencias, productos, cocientes y composiciones de funciones continuas son continuas. Las funciones de los Ejemplos anteriores 3 y 4 son continuas en todos los puntos donde están definidas, es decir, en todos los puntos excepto el origen. No hay posibilidad de definir $f(0, 0)$ de forma que estas funciones sean continuas en origen. Esto muestra que la continuidad de las funciones de una sola variable $f(x, b)$ en $x = a$ y $f(a, y)$ en $y = b$ *no* implica que $f(x, y)$ sea continua en (a, b). De hecho, incluso si $f(x, y)$ fuera continua siguiendo cualquier recta que pase por (a, b), podría no ser continua en (a, b) (*véanse* los Ejercicios 16-17 posteriores). Nótese, sin embargo, que la función $f(x, y)$ del Ejemplo 5, aunque no está definida en el origen, admite una extensión continua en ese punto. Si extendiéramos el dominio de f en ese caso definiendo $f(0, 0) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$, entonces f sería continua en todo el plano xy.

Como en el caso de funciones de una variable, la existencia del límite de una función en un punto no implica que la función sea continua en ese punto. La función

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

cumple que $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$, que no es igual a $f(0, 0)$, por lo que f no es continua en $(0, 0)$. Por supuesto, podemos *hacer* que f sea continua en $(0, 0)$ redefiniendo su valor a 0 en dicho punto.

Ejercicios 12.2

En los Ejercicios 1-12, calcule los límites indicados o explique por qué no existen.

1. $\lim_{(x, y)\to(2, -1)} xy + x^2$

2. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2}$

3. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2 + y^2}{y}$

4. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

5. $\lim_{(x, y)\to(1, \pi)} \dfrac{\cos(xy)}{1 - x - \cos y}$

6. $\lim_{(x, y)\to(0, 1)} \dfrac{x^2(y - 1)^2}{x^2 + (y - 1)^2}$

7. $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{y^3}{x^2 + y^2}$

8. $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x + y)}$

9. $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2 + y^2}$

10. $\lim_{(x,\ y)\to(1,\ 2)} \dfrac{2x^2 - xy}{4x^2 - y^2}$

11. $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^4}$

12. $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{x^2y^2}{2x^4 + y^4}$

13. ¿Cómo se puede definir la función

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - x^3y^3}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \neq (0, 0)$$

en el origen, de forma que sea continua en todos los puntos del plano xy?

14. ¿Cómo se puede definir la función

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}, \qquad (x \neq y)$$

siguiendo la recta $x = y$, de forma que la función resultante sea continua en todo el plano xy?

15. ¿Cuál es el dominio de

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 - y^2}?$$

¿Tiene $f(x, y)$ límite cuando $(x, y) \to (1, 1)$? ¿Se puede extender el dominio de f de forma que la función resultante sea continua en (1, 1)? ¿Se puede extender el dominio de forma que la función resultante sea continua en todo punto del plano xy?

16. Dada una función $f(x, y)$ y un punto (a, b) de su dominio, defina dos funciones de una sola variable g y h como sigue:

$$g(x) = f(x, b), \qquad h(y) = f(a, y)$$

Si g es continua en $x = a$ y h es continua en $y = b$, ¿se puede decir que f es continua en (a, b)? A la inversa, ¿garantiza la continuidad de f en (a, b) la continuidad de g en a y de h en b? Justifique sus respuestas.

∗**17.** Sea $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ un vector unitario, y sea

$$f_{\mathbf{u}}(t) = f(a + tu, b + tv)$$

la función de una sola variable que se obtiene restringiendo el dominio de $f(x, y)$ a puntos de la recta que pasa por (a, b) y es paralela a $\mathbf{u}$. Si $f_{\mathbf{u}}(t)$ es continua en $t = 0$ para todo vector unitario $\mathbf{u}$, ¿se puede deducir que f es continua en (a, b)? A la inversa, ¿garantiza la continuidad de f en (a, b) la continuidad de $f_{\mathbf{u}}(t)$ en $t = 0$? Justifique sus respuestas.

∗**18.** ¿Qué condición deben cumplir los enteros no negativos m, n y p para garantizar que existe $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} x^my^n/(x^2 + y^2)^p$? Demuestre su respuesta.

∗**19.** ¿Qué condición deben cumplir las constantes a, b y c para garantizar que existe $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} xy/(ax^2 + bxy + cy^2)$? Demuestre su respuesta.

∗**20.** ¿Se puede definir la función $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^3 y}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$ en (0, 0) de forma que sea continua en ese punto? Si es así, ¿cómo?

21. Utilice software de gráficos matemáticos en dos o tres dimensiones para examinar la gráfica y las curvas de nivel de la función $f(x, y)$ del Ejemplo 3 en la región $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $(x, y) \neq (0, 0)$. ¿Cómo describiría el comportamiento de la gráfica cerca de $(x, y) = (0, 0)$?

22. Utilice software de gráficos matemáticos en dos o tres dimensiones para examinar la gráfica y las curvas de nivel de la función $f(x, y)$ del Ejemplo 4 en la región $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $(x, y) \neq (0, 0)$. ¿Cómo describiría el comportamiento de la gráfica cerca de $(x, y) = (0, 0)$?

23. La gráfica de una función de una sola variable $f(x)$ que es continua en un intervalo es una curva sin *interrupciones* en dicho intervalo y que corta sólo una vez a cualquier línea vertical que pasa por un punto en dicho intervalo. ¿Qué afirmación análoga se puede hacer sobre la gráfica de una función de dos variables $f(x, y)$ que es continua en una región del plano xy?

12.3 Derivadas parciales

En esta sección empezaremos el proceso de ampliación de los conceptos y técnicas de cálculo de una variable a funciones de más de una variable. Es conveniente empezar considerando la tasa de cambio de estas funciones con respecto a una variable cada vez.

Así, una función de n variables tiene *n derivadas parciales de primer orden*, una con respecto a cada una de sus variables independientes. En el caso de una función de dos variables, precisaremos esta idea en la siguiente definición:

DEFINICIÓN 4

Las **primeras derivadas parciales** de la función $f(x, y)$ **con respecto a las variables** x e y son las funciones $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ dadas por

$$f_1(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h,\ y) - f(x,\ y)}{h}$$

$$f_2(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,\ y + h) - f(x,\ y)}{k}$$

suponiendo que esos límites existen.

Cada una de las dos derivadas parciales es el límite de un cociente de Newton en una de las variables. Obsérvese que $f_1(x, y)$ es exactamente la primera derivada ordinaria de $f(x, y)$ considerada como si fuera sólo una función de x, e y fuera un parámetro constante. De forma similar, $f_2(x, y)$ es la primera derivada de $f(x, y)$ considerada como una función de y, con x fija.

Ejemplo 1 Si $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$, entonces

$$f_1(x, y) = 2x \operatorname{sen} y \quad \text{y} \quad f_2(x, y) = x^2 \cos y$$

■

Los subíndices 1 y 2 en las notaciones de las derivadas parciales se refieren a la primera y segunda variable de f. En el caso de funciones de una variable, utilizamos la notación f' para indicar la derivada; la *prima* (′) indica diferenciación con respecto a la única variable de la que depende f. En el caso de funciones f de dos variables, utilizamos f_1 o f_2 para indicar la variable de diferenciación. No hay que confundir estos subíndices con los subíndices utilizados para otros propósitos, por ejemplo, para indicar las componentes de vectores.

La derivada parcial $f_1(a, b)$ mide la tasa de cambio de $f(x, y)$ con respecto a x en $x = a$, mientras y permanece fija en b. En términos gráficos, la superficie $z = f(x, y)$ corta al plano vertical $y = b$ en una curva. Si trazamos una recta horizontal y otra vertical por el punto $(0, b, 0)$, como ejes de coordenadas en el plano $y = b$, entonces la ecuación de la curva es $z = f(x, b)$, y su pendiente en $x = a$ es $f_1(a, b)$ (*véase* la Figura 12.15). De forma similar, $f_2(a, b)$ representa la tasa de cambio de f con respecto a y en $y = b$, cuando x permanece fija en a. La superficie $z = f(x, y)$ corta al plano vertical $x = a$ en una curva $z = f(a, y)$, cuya pendiente en $y = b$ es $f_2(a, b)$ (*véase* la Figura 12.16).

Para indicar las derivadas parciales de $z = f(x, y)$, consideradas como funciones de x e y se pueden utilizar varias notaciones:

Notaciones para las primeras derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_1(x, y) = D_1 f(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_2(x, y) = D_2 f(x, y)$$

El símbolo $\partial/\partial x$ debe leerse como «derivada parcial con respecto a x», por lo que $\partial z/\partial x$ debe leerse como «derivada parcial de z con respecto a x». La razón para distinguir ∂ de la d de las derivadas ordinarias de funciones de una sola variable se aclarará más adelante.

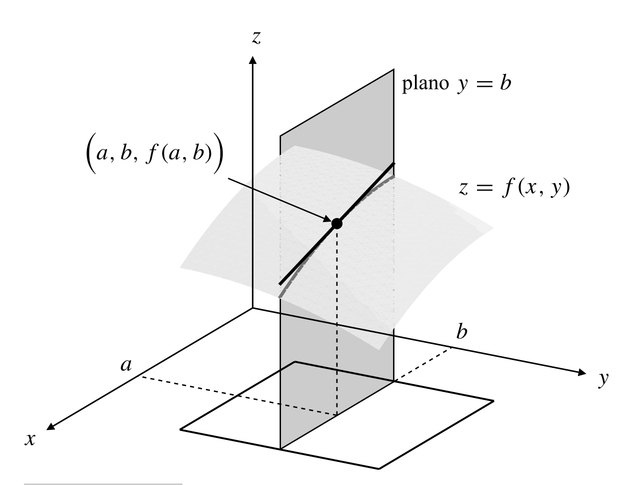


Figura 12.15 $f_1(a, b)$ es la pendiente de la curva de intersección de $z = f(x, y)$ con el plano vertical $y = b$ en $x = a$.

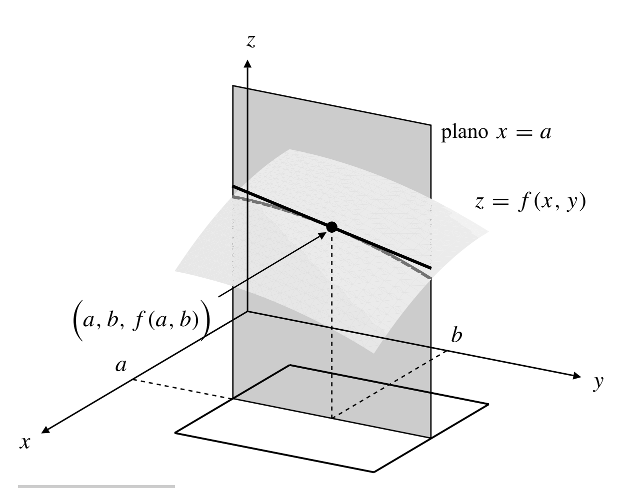


Figura 12.16 $f_2(a, b)$ es la pendiente de la curva de intersección de $z = f(x, y)$ con el plano vertical $x = a$ en $y = b$.

Se pueden utilizar notaciones similares para indicar los valores de las derivadas parciales en un punto concreto (a, b):

Valores de las derivadas parciales

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right)\right|_{(a,b)} = f_1(a, b) = D_1 f(a, b)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)\right|_{(a,b)} = f_2(a, b) = D_2 f(a, b)$$

Algunos autores prefieren utilizar f_x, $D_x f$ o $\partial f/\partial x$, y f_y, $D_y f$ o $\partial f/\partial y$ en vez de f_1 y f_2. Sin embargo, esto puede causar problemas de ambigüedad cuando aparecen composiciones de funciones. Por ejemplo, supongamos que $f(x, y) = x^2 y$. Por $f_1(x^2, xy)$ queremos decir claramente

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial u} f(u, v)\right)\right|_{u=x^2,\, v=xy} = 2uv\Big|_{u=x^2,\, v=xy} = (2)(x^2)(xy) = 2x^3 y$$

¡¡ ATENCIÓN !! El argumento del párrafo anterior es un tanto sutil. Intenta explicar por qué, al menos por el momento, utilizamos los subíndices 1 y 2 en vez de los subíndices x e y para indicar las derivadas parciales de $f(x, y)$. Después, y especialmente cuando hablemos de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales o al hablar de funciones vectoriales en las que los subíndices numéricos representan normalmente a sus componentes, preferiremos utilizar subíndices de letras para indicar las derivadas parciales.

Pero ¿significa $f_x(x^2, xy)$ lo mismo? Se podría argumentar que $f_x(x^2, xy)$ podría significar

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x^2, xy)) = \frac{\partial}{\partial x}((x^2)^2(xy)) = \frac{\partial}{\partial x}(x^5 y) = 5x^4 y$$

Para evitar estas ambigüedades, en general preferiremos utilizar f_1 y f_2 en vez de f_x y f_y (sin embargo, en algunas situaciones en las que no es probable que aparezca confusión utilizaremos todavía las notaciones f_x y f_y, y también $D_x f$, $D_y f$, $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$).

Todas las reglas estándar de la diferenciación de sumas, productos, inversos y cocientes se pueden aplicar a las derivadas parciales.

Ejemplo 2 Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si $z = x^3y^2 + x^4y + y^4$.

Solución $\partial z/\partial x = 3x^2y^2 + 4x^3y$ y $\partial z/\partial y = 2x^3y + x^4 + 4y^3$.

Ejemplo 3 Calcule $f_1(0, \pi)$ si $f(x, y) = e^{xy}\cos(x + y)$.

Solución

$$f_1(x, y) = ye^{xy}\cos(x + y) - e^{xy}\operatorname{sen}(x + y)$$
$$f_1(0, \pi) = \pi e^0\cos(\pi) - e^0\operatorname{sen}(\pi) = -\pi$$

La versión de una variable de la Regla de la Cadena también se puede aplicar en el caso de $f(g(x, y))$, siendo f una función de una sola variable con derivada f':

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x, y)) = f'(g(x, y))g_1(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(g(x, y)) = f'(g(x, y))g_2(x, y)$$

Desarrollaremos versiones de la Regla de la Cadena para composiciones más complejas de funciones de varias variables en la Sección 12.5.

Ejemplo 4 Si f es una función de una variable diferenciable en todas partes, demuestre que $z = f(x/y)$ cumple la *ecuación diferencial en derivadas parciales*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Solución Aplicando la Regla de la Cadena (de una sola variable),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-x}{y^2}\right)$$

Entonces,

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(x \times \frac{1}{y} + y \times \frac{-x}{y^2}\right) = 0$$

La Definición 4 se puede extender en la forma obvia para considerar funciones de más de dos variables. Si f es una función de n variables $x_1, x_2, ..., x_n$, entonces f tiene n derivadas parciales primeras, $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, ..., $f_n(x_1, x_2, ..., x_n)$, una con respecto a cada variable.

Ejemplo 5

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2xy}{1 + xz + yz}\right) = -\frac{2xy}{(1 + xz + yz)^2}(x + y)$$

De nuevo, todas las reglas de la diferenciación estándar se pueden aplicar al cálculo de las derivadas parciales.

Observación Si una función de una sola variable $f(x)$ tiene derivada $f'(a)$ en $x = a$, entonces dicha función es necesariamente continua en $x = a$. Esta propiedad *no* se puede extender al caso de las derivadas parciales. Aunque todas las derivadas parciales primeras de una función de varias variables existieran en un punto, la función puede no ser continua en dicho punto. *Véase* el Ejercicio 36 posterior.

Planos tangentes y rectas normales

Si la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie «suave» cerca del punto P cuyas coordenadas son $(a, b, f(a, b))$, entonces dicha gráfica tendrá un **plano tangente** y una **recta normal** en P. La recta normal es la recta que pasa por P y es perpendicular a la superficie; por ejemplo, una recta que une un punto de una esfera con su centro es normal a dicha esfera. Cualquier vector distinto de cero que sea paralelo a la recta normal en P se denomina vector normal a la superficie en P. El plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en P es aquel que pasa por P y es perpendicular a la recta normal en P.

Supongamos que la superficie $z = f(x, y)$ tiene un plano tangente *no vertical* (y, por tanto, una recta normal *no horizontal*) en el punto P (posteriormente en este capítulo estableceremos condiciones precisas que garantizan que la gráfica de una función tiene un plano tangente no vertical en un punto). El plano tangente corta al plano vertical $y = b$ en una recta que es tangente en P a la curva de intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = b$ (*véanse* las Figuras 12.15 y 12.17). La pendiente de esta recta es $f_1(a, b)$, por lo que es paralela al vector $\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b)\mathbf{k}$. De forma similar, el plano tangente corta al plano vertical $x = a$ en una recta cuya pendiente es $f_2(a, b)$. Por tanto, esta recta es paralela al vector $\mathbf{T}_2 = \mathbf{j} + f_2(a, b)\mathbf{k}$. Se deduce entonces que el plano tangente, y por tanto la propia superficie $z = f(x, y)$, tiene como vector normal

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & f_2(a, b) \\ 1 & 0 & f_1(a, b) \end{vmatrix} = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Un vector normal $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$ es

$$\mathbf{n} = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

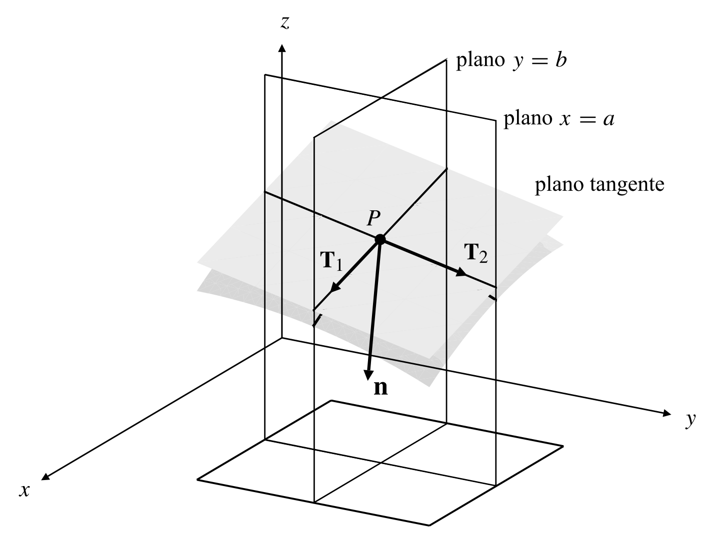


Figura 12.17 El plano tangente y un vector normal $z = f(x, y)$ en $P = (a, b, f(a, b))$.

Como el plano tangente pasa por $P = (a, b, f(a, b))$, su ecuación es

$$f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

o, en otros términos,

Una ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$ es

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

En la Sección 12.7 obtendremos este resultado por un método diferente.

La recta normal a $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$ tiene como vector director $f_1(a, b)\mathbf{i} +$ $+ f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y, por tanto, sus ecuaciones son

$$\frac{x - a}{f_1(a, b)} = \frac{y - b}{f_2(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1}$$

con las modificaciones adecuadas si $f_1(a, b) = 0$ o $f_2(a, b) = 0$.

Ejemplo 6 Obtenga un vector normal y las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la gráfica de $z = \operatorname{sen}(xy)$ en el punto donde $x = \pi/3$ y $y = -1$.

Solución Las coordenadas del punto en la gráfica son $(\pi/3, -1, -\sqrt{3}/2)$. Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos(xy) \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos(xy)$$

En $(\pi/3, -1)$ tenemos que $\partial z/\partial x = -1/2$ y $\partial z/\partial y = \pi/6$. Por tanto, un vector normal a la superficie es $\mathbf{n} = -(1/2)\mathbf{i} + (\pi/6)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y el plano tangente es

$$z = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}(y + 1)$$

o, de forma más sencilla, $3x - \pi y + 6z = 2\pi - 3\sqrt{3}$. La ecuación de la recta normal es

$$\frac{x - \dfrac{\pi}{3}}{\dfrac{-1}{2}} = \frac{y + 1}{\dfrac{\pi}{6}} = \frac{z + \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-1} \quad \text{o} \quad \frac{6x - 2\pi}{-3} = \frac{6y + 6}{\pi} = \frac{6z + 3\sqrt{3}}{-6}$$

Ejemplo 7 ¿Qué plano horizontal es tangente a la superficie

$$z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$$

y cuál es el punto de tangencia?

Solución Un plano es horizontal sólo si su ecuación es de la forma $z = k$, es decir, es independiente de x e y. Por tanto, en el punto de tangencia debe cumplirse $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = 0$. Las ecuaciones

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4y + 12 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4x - 4y - 12 = 0$$

tienen como solución $x = -4$, $y = 1$. Para estos valores tenemos que $z = -31$, por lo que la ecuación del plano tangente pedido es $z = -31$, y el punto de tangencia es $(-4, 1, -31)$.

Distancia de un punto a una superficie: un ejemplo geométrico

Ejemplo 8 Calcule la distancia del punto (3, 0, 0) al paraboloide hiperbólico cuya ecuación es $z = x^2 - y^2$.

Solución Se trata de un problema de optimización del tipo que consideraremos de forma más sistemática en el capítulo siguiente. Sin embargo, los problemas que tratan de la minimización de distancias de puntos a superficies se pueden resolver a menudo utilizando métodos geométricos.

Si $Q = (X, Y, Z)$ es el punto de la superficie $z = x^2 - y^2$ más cercano a $P = (3, 0, 0)$, entonces el vector $\overrightarrow{PQ} = (X - 3)\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ debe ser normal a dicha superficie en Q (*véase* la Figura 12.18(a)). Utilizando las derivadas parciales de $z = x^2 - y^2$, sabemos que el vector $\mathbf{n} = 2X\mathbf{i} - 2Y\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es normal a la superficie en Q. Por tanto, $\overrightarrow{PQ}$ debe ser paralelo a $\mathbf{n}$, y $\overrightarrow{PQ} = t\mathbf{n}$ para algún escalar t. Separando esta ecuación vectorial en sus componentes resulta

$$X - 3 = 2Xt, \qquad Y = -2Yt \quad \text{y} \quad Z = -t$$

La ecuación del centro implica que, o bien $Y = 0$, o bien $t = -\frac{1}{2}$. Debemos considerar ambas posibilidades.

CASO I Si $Y = 0$, entonces

$$X = \frac{3}{1 - 2t} \quad \text{y} \quad Z = -t$$

Pero $Z = X^2 - Y^2$, por lo que debemos tener

$$-t = \frac{9}{(1 - 2t)^2}$$

Se trata de una ecuación cúbica en t, que en principio habría que resolver numéricamente, por ejemplo, utilizando el Método de Newton. Sin embargo, si probamos con valores enteros pequeños de t, descubriremos rápidamente que $t = -1$ es una solución. La Figura 12.18(b) muestra los dos miembros de la ecuación. Puede verse que $t = -1$ es la única solución real. Calculando los correspondientes valores de X y Z, se obtiene el punto (1, 0, 1) como candidato a Q. La distancia de este punto a P es $\sqrt{5}$.

CASO II Si $t = -1/2$, entonces $X = 3/2$, $Z = 1/2$ y $Y = \pm\sqrt{X^2 - Z} = \pm\sqrt{7}/2$, y la distancia desde estos puntos a P es $\sqrt{17}/2$.

Como $\frac{17}{4} < 5$, los puntos $(3/2, \pm\sqrt{7}/2, 1/2)$ son los puntos de la superficie $z = x^2 - y^2$ más cercanos a (3, 0, 0), y la distancia de (3, 0, 0) a la superficie es $\sqrt{17}/2$ unidades.

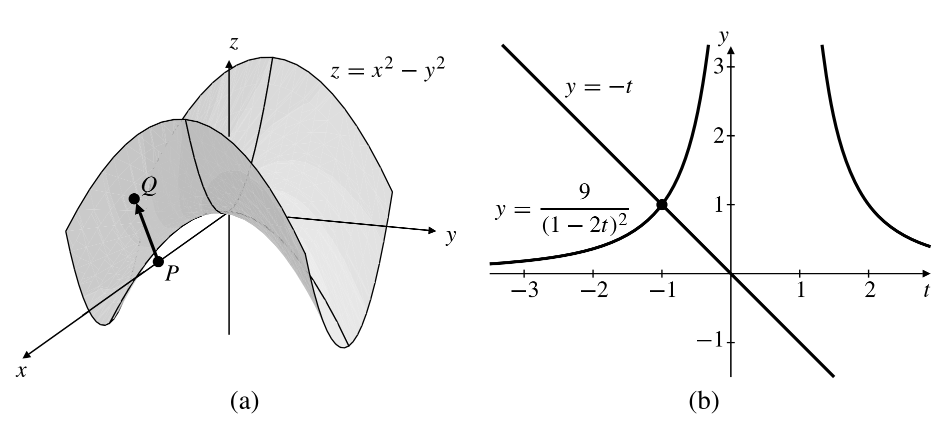


Figura 12.18 (a) Si Q es el punto de la superficie $z = x^2 - y^2$ más cercano a P, entonces $\overrightarrow{PQ}$ es normal a dicha superficie.
(b) La ecuación $-t = \dfrac{9}{(1 - 2t)^2}$ tiene sólo una raíz real, $t = -1$.

Ejercicios 12.3

En los Ejercicios 1-10, calcule todas las derivadas parciales primeras de las funciones especificadas, y evalúelas en los puntos dados.

1. $f(x, y) = x - y + 2, \quad (3, 2)$

2. $f(x, y) = xy + x^2, \quad (2, 0)$

3. $f(x, y, z) = x^3y^4z^5, \quad (0, -1, -1)$

4. $g(x, y, z) = \dfrac{xz}{y + z}, \quad (1, 1, 1)$

5. $z = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad (-1, 1)$

6. $w = \ln(1 + e^{xyz}), \quad (2, 0, -1)$

7. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x\sqrt{y}), \quad \left(\dfrac{\pi}{3}, 4\right)$

8. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (-3, 4)$

9. $w = x^{(y \ln z)}, \quad (e, 2, e)$

10. $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \dfrac{x_1 - x_2^2}{x_3 + x_4^2}, \quad (3, 1, -1, -2)$

En los Ejercicios 11 y 12, calcule las derivadas parciales primeras de las funciones dadas en el punto (0, 0). Tendrá que utilizar la Definición 4.

11. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2 + 3y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

12. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x - y}, & \text{si} \quad x \neq y \\ 0, & \text{si} \quad x = y \end{cases}$

En los Ejercicios 13-22, obtenga ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a las gráficas de las funciones dadas en los puntos con los valores especificados de x e y.

13. $f(x, y) = x^2 - y^2$ en $(-2, 1)$

14. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ en $(1, 1)$

15. $f(x, y) = \cos(x/y)$ en $(\pi, 4)$

16. $f(x, y) = e^{xy}$ en $(2, 0)$

17. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ en $(1, 2)$

18. $f(x, y) = ye^{-x^2}$ en $(0, 1)$

19. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ en $(1, -2)$

20. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ en $(0, 2)$

21. $f(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ en $(1, -1)$

22. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^3y^2}$ en $(2, 1)$

23. Calcule las coordenadas de todos los puntos de la superficie $z = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2$ donde dicha superficie tiene un plano tangente horizontal.

24. Calcule todos los planos horizontales que son tangentes a la superficie cuya ecuación es $z = xye^{-(x^2+y^2)/2}$. ¿En qué puntos son tangentes?

En los Ejercicios 25-31, demuestre que las funciones dadas satisfacen las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

❖25. $z = xe^y, \quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

❖26. $z = \dfrac{x + y}{x - y}, \quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

❖27. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$

❖28. $w = x^2 + yz, \quad x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z} = 2w$

❖29. $w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z} = -2w$

❖30. $z = f(x^2 + y^2)$, siendo f cualquier función diferenciable de una variable,

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

❖31. $z = f(x^2 - y^2)$, siendo f cualquier función diferenciable de una variable,

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

32. Enuncie una definición formal de las tres derivadas parciales primeras de la función $f(x, y, z)$.

33. ¿Cuál es la ecuación del «hiperplano tangente» a la gráfica $w = f(x, y, z)$ en $(a, b, c, f(a, b, c))$?

***34.** Calcule la distancia del punto (1, 1, 0) al paraboloide circular cuya ecuación es $z = x^2 + y^2$.

***35.** Calcule la distancia del punto (0, 0, 1) al paraboloide elíptico cuya ecuación es $z = x^2 + 2y^2$.

***36.** Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

Nótese que f no es continua en (0, 0) (*véase* el Ejemplo 3 de la Sección 12.2). Por tanto, su gráfica no es suave en ese punto. Demuestre, sin embargo, que $f_1(0, 0)$ y $f_2(0, 0)$ existen. A partir de aquí, se puede deducir que la existencia de derivadas parciales no implica que una función de varias variables sea continua. Esto es una diferencia con el caso de una sola variable.

37. Determine $f_1(0, 0)$ y $f_2(0, 0)$ si existen, siendo

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^3 + y)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

38. Calcule $f_1(x, y)$ para la función del Ejercicio 37. ¿Es continua $f_1(x, y)$ en (0, 0)?

*__39.__ Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

Calcule $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ en todos los puntos (x, y) del plano. ¿Es f continua en (0, 0)? ¿Son f_1 y f_2 continuas en (0, 0)?

*__40.__ Sea

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2z}{x^4 + y^4 + z^4}, & \text{si} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}.$$

Calcule $f_1(0, 0, 0)$, $f_2(0, 0, 0)$ y $f_3(0, 0, 0)$. ¿Es f continua en (0, 0, 0)? ¿Son f_1, f_2 y f_3 continuas en (0, 0, 0)?

12.4 Derivadas de orden superior

Las derivadas parciales de orden segundo y superior se calculan tomando las derivadas parciales de otras derivadas parciales ya calculadas previamente. La notación utilizada indica el orden en el que se realizan las diferenciaciones. Si $z = f(x, y)$, se pueden calcular *cuatro* derivadas parciales de segundo orden, concretamente dos derivadas parciales segundas **puras** con respecto a x e y,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x, y) = f_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{22}(x, y) = f_{yy}(x, y)$$

y dos derivadas parciales segundas **mixtas** con respecto a x e y,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{12}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

Recalcamos de nuevo que las notaciones f_{11}, f_{12}, f_{21} y f_{22} son en general preferibles a f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} y f_{yy}, aunque estas últimas se utilizan muy a menudo en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Nótese que f_{12} indica diferenciación de f *primero* con respecto a su primera variable y *después* con respecto a su segunda variable; f_{21} indica el orden de diferenciación inverso. El subíndice más cercano a f indica qué diferenciación se realiza primero.

De forma similar, si $w = f(x, y, z)$, entonces

$$\frac{\partial^5 w}{\partial y \partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} = f_{32212}(x, y, z) = f_{zyyxy}(x, y, z)$$

Ejemplo 1 Calcule las cuatro derivadas parciales segundas de $f(x, y) = x^3y^4$.

Solución

$$f_1(x, y) = 3x^2y^4, \qquad f_2(x, y) = 4x^3y^3,$$

$$f_{11}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^4) = 6xy^4, \qquad f_{21}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3) = 12x^2y^3,$$

$$f_{12}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^4) = 12x^2y^3, \qquad f_{22}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^3) = 12x^3y^2$$

Ejemplo 2 Calcule $f_{223}(x, y, z)$, $f_{232}(x, y, z)$ y $f_{322}(x, y, z)$ para la función $f(x, y, z) = e^{x-2y+3z}$.

Solución

$$\begin{aligned} f_{223}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}e^{x-2y+3z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}(-2e^{x-2y+3z}) \\ &= \frac{\partial}{\partial z}(4e^{x-2y+3z}) = 12e^{x-2y+3z} \\ f_{232}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}e^{x-2y+3z} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}(-2e^{x-2y+3z}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(-6e^{x-2y+3z}) = 12e^{x-2y+3z} \\ f_{322}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}e^{x-2y+3z} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(3e^{x-2y+3z}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(-6e^{x-2y+3z}) = 12e^{x-2y+3z} \end{aligned}$$

Obsérvese en los dos ejemplos anteriores que las derivadas parciales mixtas tomadas con respecto a las mismas variables pero en orden diferente son iguales. Esto no es una coincidencia. Siempre ocurre para funciones suficientemente suaves. En particular, se requiere que las derivadas parciales mixtas que intervienen sean *continuas*. El siguiente teorema presenta de forma más precisa este importante fenómeno.

TEOREMA 1 **Igualdad de las derivadas parciales mixtas**

Supongamos que dos derivadas parciales mixtas de orden n requieren las mismas diferenciaciones pero en órdenes diferentes. Si esas derivadas parciales son continuas en un punto P, y si f y todas las derivadas parciales de f de orden inferior a n son continuas en un entorno de P, entonces las dos derivadas parciales mixtas son iguales en el punto P.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos sólo un caso especial representativo, correspondiente a la igualdad de $f_{12}(a, b)$ y $f_{21}(a, b)$ para una función f de dos variables, suponiendo que f_{12} y f_{21} están definidas, que f_1, f_2 y f son continuas en un disco de radio positivo centrado en (a, b), y que f_{12} y f_{21} son continuas en (a, b). Sean h y k dos números con valor absoluto lo suficientemente pequeño para que el punto $(a + h, b + k)$ esté en dicho disco. Entonces también lo estarán todos los puntos del rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y con vértices diagonalmente opuestos a (a, b) y $(a + h, b + k)$ (*véase* la Figura 12.19).

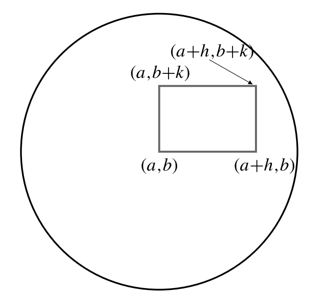


Figura 12.19 Un rectángulo contenido en un disco donde f y ciertas derivadas parciales son continuas.

Sea $Q = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$ y definamos funciones de una variable $u(x)$ y $v(y)$:

$$u(x) = f(x, b + k) - f(x, b) \quad \text{y} \quad v(y) = f(a + h, y) - f(a, y)$$

Evidentemente, $Q = u(a + h) - u(a)$ y además $Q = v(b + k) - v(b)$. Por el Teorema del Valor Medio (de una variable) existe un número θ_1, con $0 < \theta_1 < 1$, tal que $a + \theta_1 h$ está entre a y $a + h$, de forma que

$$Q = u(a + h) - u(a) = hu'(a + \theta_1 h) = h[f_1(a + \theta_1 h, b + k) - f_1(a + \theta_1 h, b)]$$

Aplicaremos ahora el Teorema del Valor Medio de nuevo, esta vez a f_1 considerada como una función de su segunda variable, para obtener otro número θ_2, con $0 < \theta_2 < 1$, tal que

$$f_1(a + \theta_1 h, b + k) - f_1(a + \theta_1 h, b) = kf_{12}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k)$$

Por tanto, $Q = hkf_{12}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k)$. Dos aplicaciones similares del Teorema del Valor Medio a $Q = v(b + k) - v(b)$ conducen a $Q = hkf_{21}(a + \theta_3 h, b + \theta_4 k)$, siendo θ_3 y θ_4 dos números comprendidos entre 0 y 1. Igualando estas dos expresiones de Q y eliminando el factor común hk, se obtiene

$$f_{12}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) = f_{21}(a + \theta_3 h, b + \theta_4 k)$$

Como f_{12} y f_{21} son continuas en (a, b), podemos hacer que h y k tiendan a cero para obtener $f_{12}(a, b) = f_{21}(a, b)$, como se quería demostrar.

¡¡ ATENCIÓN !! El Teorema del Valor Medio se utiliza cuatro veces en esta demostración, cada una de ellas para expresar una diferencia de la forma $g(p + m) - g(p)$ como $g'(c)m$, siendo c algún número entre p y $p + m$. Es conveniente expresar c en la forma $p + \theta m$, siendo θ algún número entre 0 y 1.

El Ejercicio 16 posterior desarrolla un ejemplo de una función en la que f_{12} y f_{21} existen pero no son continuas en (0, 0), y para la que $f_{12}(0, 0) \neq f_{21}(0, 0)$.

Observación **Derivadas parciales en Maple** Cuando se utiliza la función de Maple **diff** para calcular una derivada, debe incluirse el nombre de la variable de diferenciación. Por ejemplo, `diff(x^2+y^3, x)` da como resultado $2x$. No importa que la función que se diferencia dependa de más de una variable, ya que estamos indicando a Maple que hay que diferenciar con respecto a x. Si se deseara la derivada con respecto a y, habría que introducir `diff(x^2+y^3, y)`, y la salida sería $3y^2$. En este contexto, no hay distinción entre derivadas ordinarias y derivadas parciales. Existe, sin embargo, una diferencia cuando se desea aplicar un *operador diferencial* a una función f. Si f es una función de la variable, se puede expresar su derivada f' en Maple como `D(f)`. Por ejemplo,

```
> f := x -> sin(2*x) ; fprime := D(f) ;
```

$$f := x \to \operatorname{sen}(2x)$$

$$fprime := x \to 2\cos(2x)$$

La entrada `fprime(Pi/6)` producirá ahora la salida 1, como cabría esperar.

Si f es una función de dos (o más) variables, entonces `D(f)` no tiene sentido; ¿queremos decir f_1 o f_2? Distinguiremos las dos (o más) derivadas parciales primeras utilizando subíndices con D.

```
> f := (x, y) -> exp(3*y)*sen(2*x) ;
```

$$f := (x, y) \to e^{(3y)} * \operatorname{sen}(2x)$$

```
> fone := D[1](f) ; ftwo := D[2](f) ;
```

$$fone := (x, y) \to 2e^{(3y)} * \cos(2x)$$

$$ftwo := (x, y) \to 3e^{(3y)} * \operatorname{sen}(2x)$$

Las derivadas parciales de orden superior se indican con subíndices múltiples (encerrados entre corchetes).

```
> D[1, 1, 2](f)(Pi/4, 0) ;
```

$$-12$$

No hay que preocuparse por el orden de los subíndices en una derivada parcial mixta. Maple asume que las derivadas parciales son continuas, aun cuando no sepa si la función lo es. Incluso aunque no se hubiera asignado a g ningún significado durante la sesión de Maple actual, la entrada `D[1, 2](g)(x, y)-D[2, 1](g)(x, y);` producirá una salida de 0.

Las ecuaciones de Laplace y de onda

Muchos fenómenos importantes e interesantes se modelan mediante funciones de varias variables que satisfacen ciertas *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*. En los ejemplos que siguen presentaremos dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales concretas que surgen frecuentemente en ciencias físicas y matemáticas. Los Ejercicios 17-19 posteriores presentan otra ecuación con importantes aplicaciones.

Ejemplo 3 Demuestre que para cualquier número real k las funciones

$$z = e^{kx}\cos(ky) \quad \text{y} \quad z = e^{kx}\,\text{sen}\,(ky)$$

satisfacen la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

en todo punto del plano xy.

Solución Para $z = e^{kx}\cos(ky)$ tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ke^{kx}\cos(ky), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -ke^{kx}\,\text{sen}\,(ky)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 e^{kx}\cos(ky), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k^2 e^{kx}\cos(ky)$$

Entonces,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k^2 e^{kx}\cos(ky) - k^2 e^{kx}\cos(ky) = 0$$

El cálculo para $z = e^{kx}\,\text{sen}\,(ky)$ es similar. ■

Observación La ecuación diferencial en derivadas parciales del ejemplo anterior se denomina **ecuación de Laplace** (bidimensional). Se dice que una función de dos variables con derivadas parciales segundas continuas en una región del plano es **armónica** si cumple la ecuación de Laplace. Estas funciones tienen un papel fundamental en la teoría de funciones diferenciables de *variable compleja* (*véase* el Apéndice II), y se utilizan para modelar varias magnitudes físicas como las distribuciones de temperatura en estado estacionario, flujos de fluidos y campos electromagnéticos. Las funciones armónicas tienen muchas propiedades interesantes. Tienen derivadas de todos los órdenes, y son *analíticas*, es decir, son sumas de sus series de Taylor (multivariables). Es más, una función armónica sólo puede alcanzar valores máximo y mínimo en la frontera de su dominio. La ecuación de Laplace, y por tanto las funciones armónicas, se pueden considerar en cualquier número de dimensiones (*véanse* los Ejercicios 13 y 14 posteriores).

Ejemplo 4 Si f y g son funciones de una variable diferenciables dos veces, demuestre que

$$w = f(x - ct) + g(x + ct)$$

satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Solución Utilizando la Regla de la Cadena para funciones de una variable se obtiene

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -cf'(x - ct) + cg'(x + ct), \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = f'(x - ct) + g'(x + ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 f''(x - ct) + c^2 g''(x + ct), \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f''(x - ct) + g''(x + ct)$$

Por tanto, w cumple la ecuación diferencial dada. ■

Observación La ecuación diferencial en derivadas parciales del ejemplo anterior se denomina **función de onda** (unidimensional). Si t representa el tiempo, entonces $f(x - ct)$ representa una onda que viaja hacia la derecha por el eje x con velocidad c (*véase* la Figura 12.20). De

forma similar, $g(x + ct)$ representa una onda que viaja hacia la izquierda con velocidad c. A diferencia de las soluciones de la ecuación de Laplace que deben ser diferenciables infinitas veces, las soluciones de la ecuación de onda sólo necesitan tener suficientes derivadas para satisfacer la ecuación diferencial. Por lo demás, f y g son arbitrarias.

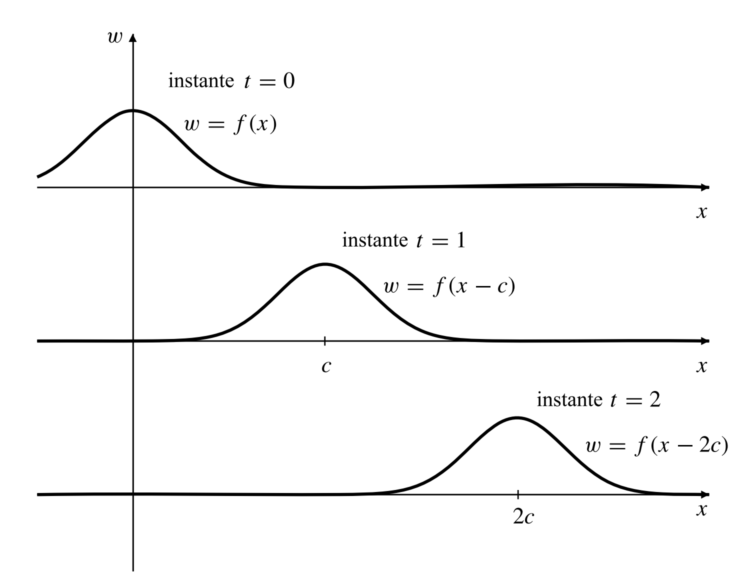


Figura 12.20 $w = f(x - ct)$ representa una onda que se mueve hacia la derecha con velocidad c.

Ejercicios 12.4

En los Ejercicios 1-6, calcule todas las derivadas parciales segundas de las funciones dadas.

1. $z = x^2(1 + y^2)$

2. $f(x, y) = x^2 + y^2$

3. $w = x^3y^3z^3$

4. $z = \sqrt{3x^2 + y^2}$

5. $z = xe^y - ye^x$

6. $f(x, y) = \ln(1 + \operatorname{sen}(xy))$

* **7.** ¿Cuántas derivadas parciales mixtas de orden 3 puede tener una función de tres variables? Si son todas ellas continuas, ¿cuántos valores diferentes pueden tener en un punto? Calcule las derivadas parciales mixtas de orden 3 de $f(x, y, z) = xe^{xy}\cos(xz)$ que requieren dos diferenciaciones con respecto a z y una con respecto a x.

Demuestre que las funciones de los Ejercicios 8-12 son armónicas en las regiones del plano indicadas.

8. $f(x, y) = A(x^2 - y^2) + Bxy$ en todo el plano (A y B son constantes).

9. $f(x, y) = 3x^2y - y^3$ en todo el plano. (¿Puede pensar en otro polinomio de grado 3 en x e y que sea también armónico?).

10. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ en todas partes excepto en el origen.

11. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ en todas partes excepto en el origen.

12. $\tan^{-1}(y/x)$ excepto en puntos del eje y.

13. Demuestre que $w = e^{3x+4y}\operatorname{sen}(5z)$ es armónica en todo $\mathbb{R}^3$, es decir que satisface en todas partes la ecuación de Laplace tridimensional

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

14. Suponga que $f(x, y)$ es armónica en el plano xy. Demuestre que las funciones $zf(x, y)$, $x\,f(y, z)$ e $yf(z, x)$ son armónicas en todo $\mathbb{R}^3$. ¿Qué condición deberían cumplir las constantes a, b y c para asegurar que $f(ax + by, cz)$ es armónica en $\mathbb{R}^3$?

15. Sean las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ con derivadas parciales segundas continuas, tales que satisfacen las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Demuestre que u y v son armónicas.

***16.** Sea $F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0\ 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

Calcule $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, $F_{12}(x, y)$ y $F_{21}(x, y)$ en los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$. Calcule también estas derivadas en (0, 0). Observe que $F_{21}(0, 0) = 2$ y $F_{12}(0, 0) = -2$. ¿Contradice este resultado el Teorema 1? Explique por qué.

La ecuación (de difusión) del calor

17. Demuestre que la función $u(x, t) = t^{-1/2}e^{-x^2/4t}$ satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Esta ecuación se denomina **ecuación del calor unidimensional**, porque modela la difusión del calor en una barra aislada (donde $u(x, t)$ representa la temperatura en la posición x en el instante t) y otros fenómenos similares.

18. Demuestre que la función $u(x, y, t) = t^{-1}e^{-(x^2+y^2)/4t}$ cumple la **ecuación del calor bidimensional**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

19. Comparando los resultados de los Ejercicios 17 y 18, plantee una solución a la **ecuación del calor tridimensional**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Verifique su planteamiento (si está perezoso, utilice Maple).

Funciones biarmónicas

Una función $u(x, y)$ con derivadas parciales de cuarto orden continuas se denomina **biarmónica** si $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ es una función armónica.

20. Demuestre que $u(x, y)$ es biarmónica si y sólo si cumple la ecuación biarmónica

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

21. Verifique que $u(x, y) = x^4 - 3x^2y^2$ es biarmónica.

22. Demuestre que si $u(x, y)$ es armónica, entonces $v(x, y) = xu(x, y)$ y $w(x, y) = yu(x, y)$ son biarmónicas.

Utilice el resultado del Ejercicio 22 para demostrar que las funciones de los Ejercicios 23-25 son biarmónicas.

23. $xe^x \operatorname{sen} y$

24. $y \ln (x^2 + y^2)$

25. $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

26. Proponga una definición de función biarmónica de tres variables, y demuestre resultados análogos a los de los Ejercicios 20 y 22 para funciones biarmónicas $u(x, y, z)$.

27. Utilice Maple para verificar directamente que la función del Ejercicio 25 es biarmónica. 

12.5 La Regla de la Cadena

La Regla de la Cadena para funciones de una variable es una fórmula que permite obtener la derivada de una composición $f(g(x))$ de dos funciones f y g:

$$\frac{d}{dx}\, f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

La situación para el caso de varias variables es más complicada. Si f depende de más de una variable, y cualquiera de esas variables puede ser a su vez función de una o más de otras variables, no se puede obtener una fórmula simple de la composición que cubra todos los posibles casos. En este caso debemos ver la Regla de la Cadena como un *procedimiento de diferenciación de composiciones de funciones*, en vez de una fórmula de sus derivadas. Para motivar la formulación de la Regla de la Cadena en el caso de funciones de dos variables, empezaremos con un ejemplo concreto.

Ejemplo 1 Supongamos que estamos realizando una excursión por una región montañosa y tenemos un mapa. Sea (x, y) las coordenadas de nuestra posición en el mapa (es decir, las coordenadas horizontales de nuestra posición real en la región). Sea $z = f(x, y)$ la altura del terreno (por ejemplo, sobre el nivel del mar) en la posición (x, y). Supongamos que caminamos por una senda, de forma que nuestra posición en el

instante t se puede expresar como $x = u(t)$ e $y = v(t)$ (son las ecuaciones paramétricas del sendero sobre el mapa). En el instante t nuestra altitud sobre el nivel del mar se expresa mediante la función compuesta

$$z = f(u(t), v(t)) = g(t)$$

que es una función de una sola variable. ¿Con qué rapidez está cambiando nuestra altitud con respecto al tiempo en el instante t?

Solución La respuesta es la derivada de $g(t)$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h),\ v(t+h)) - f(u(t),\ v(t))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h),\ v(t+h)) - f(u(t),\ v(t+h))}{h} \\ &\quad + \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t),\ v(t+h)) - f(u(t),\ v(t))}{h} \end{aligned}$$

Hemos sumado 0 al numerador del cociente de Newton de una forma creativa, para separar el cociente en una suma de dos cocientes. En el primero de ellos, en la diferencia de valores de f interviene sólo la primera variable de f, y en el segundo, en la diferencia interviene sólo la segunda variable de f. La Regla de la Cadena de una sola variable sugiere que la suma de los dos límites anteriores es

$$g'(t) = f_1(u(t), v(t))u'(t) + f_2(u(t), v(t))v'(t)$$

La fórmula anterior es la Regla de la Cadena para $\frac{d}{dt} f(u(t), v(t))$. Empleando la notación de Leibniz tenemos

Una versión de la Regla de la Cadena

Si z es función de x e y, y sus derivadas parciales primeras son continuas, y si x e y son funciones diferenciables de t, entonces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Nótese que hay dos términos en la expresión de dz/dt (o de $g'(t)$) y cada uno de ellos proviene de cada una de las variables de f que depende de t.

Considere ahora una función f de dos variables, x e y, cada una de las cuales es a su vez una función de otras dos variables, s y t:

$$z = f(x, y), \qquad \text{siendo} \qquad x = u(s, t) \quad \text{e} \quad y = v(s, t)$$

Podemos formar la función compuesta

$$z = f(u(s, t), v(s, t)) = g(s, t)$$

Por ejemplo, si $f(x, y) = x^2 + 3y$, siendo $u(s, t) = st^2$ y $v(s, t) = s - t$, entonces $g(s, t) = s^2t^4 + 3(s - t)$.

Supongamos que f, u y v tienen derivadas parciales primeras con respecto a sus respectivas variables, y que las de f son continuas. Entonces las derivadas parciales primeras de g se expresan como

$$\begin{aligned} g_1(s, t) &= f_1(u(s, t), v(s, t))u_1(s, t) + f_2(u(s, t), v(s, t))v_1(s, t) \\ g_2(s, t) &= f_1(u(s, t), v(s, t))u_2(s, t) + f_2(u(s, t), v(s, t))v_2(s, t) \end{aligned}$$

Estas fórmulas se pueden expresar de forma más sencilla utilizando la notación de Leibniz:

Otra versión de la Regla de la Cadena

Si z es función de x e y, y sus derivadas parciales primeras son continuas, y si x e y dependen de s y de t, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Esto se puede deducir de la versión obtenida en el Ejemplo 1 haciendo que u y v dependan de dos variables, pero manteniendo una de ellas fija mientras diferenciamos con respecto a la otra. En la sección siguiente se dará una demostración más formal de este caso simple pero representativo de la Regla de la Cadena.

Las dos ecuaciones de la caja anterior se pueden combinar en una única ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Al final de esta sección comentaremos del significado de esta matriz.

En general, si z es una función de varias variables «primarias», y cada una de ellas depende de algunas variables «secundarias», entonces la derivada parcial de z con respecto a una de las variables secundarias tendrá varios términos, siendo cada uno de ellos la contribución a la derivada que proviene de cada una de las variables primarias de las que depende z.

Observación Nótese el significado de los diversos subíndices que indican derivadas parciales en la forma funcional de la Regla de la Cadena:

$$g_1(s, t) = f_1(u(s, t), v(s, t))u_1(s, t) + f_2(u(s, t), v(s, t))v_1(s, t)$$

El «1» en $g_1(s, t)$ indica diferenciación con respecto a x, la primera variable de la que depende g. En cambio, el «1» en $f_1(u(s, t), v(s, t))$ indica diferenciación con respecto a x, la primera variable de la que depende f (estas derivadas se evalúan después en $x = u(s, t)$, $y = v(s, t)$).

Ejemplo 2 Si $z = \operatorname{sen}(x^2 y)$, siendo $x = st^2$ y $y = s^2 + \dfrac{1}{t}$, calcule $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$:

(a) Mediante sustitución directa y la versión de una variable de la Regla de la Cadena.
(b) Utilizando la versión de dos variables de la Regla de la Cadena.

Solución

(a) Mediante sustitución directa:

$$z = \operatorname{sen}\left((st^2)^2\left(s^2 + \frac{1}{t}\right)\right) = \operatorname{sen}(s^4t^4 + s^2t^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (4s^3t^4 + 2st^3)\cos(s^4t^4 + s^2t^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (4s^4t^3 + 3s^2t^2)\cos(s^4t^4 + s^2t^3)$$

(b) Utilizando la Regla de la Cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= (2xy\cos(x^2y))t^2 + (x^2\cos(x^2y))2s\\ &= \left(2st^2\left(s^2+\frac{1}{t}\right)t^2 + 2s^3t^4\right)\cos(s^4t^4+s^2t^3)\\ &= (4s^3t^4+2st^3)\cos(s^4t^4+s^2t^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= (2xy\cos(x^2y))2st + (x^2\cos(x^2y))\left(\frac{-1}{t^2}\right)\\ &= \left(2st^2\left(s^2+\frac{1}{t}\right)2st + s^2t^4\left(\frac{-1}{t^2}\right)\right)\cos(s^4t^4+s^2t^3)\\ &= (4s^4t^3+3s^2t^2)\cos(s^4t^4+s^2t^3)\end{aligned}$$

Nótese que todavía hemos tenido que utilizar sustitución directa en las derivadas obtenidas en (b) para demostrar que los valores son los mismos que los obtenidos en (a). ■

Ejemplo 3 Calcule $\frac{\partial}{\partial x}f(x^2y, x+2y)$ y $\frac{\partial}{\partial y}f(x^2y, x+2y)$ en función de las derivadas parciales de f, suponiendo que dichas derivadas parciales son continuas.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x^2y, x+2y) &= f_1(x^2y, x+2y)\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + f_2(x^2y, x+2y)\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)\\ &= 2xy\,f_1(x^2y, x+2y) + f_2(x^2y, x+2y)\\ \frac{\partial}{\partial y}f(x^2y, x+2y) &= f_1(x^2y, x+2y)\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + f_2(x^2y, x+2y)\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)\\ &= x^2 f_1(x^2y, x+2y) + 2\,f_2(x^2y, x+2y)\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4 Exprese las derivadas parciales de $z = h(s, t) = f(g(s, t))$ en función de la derivada f' de f y de las derivadas parciales de g.

Solución Las derivadas parciales de h se pueden calcular utilizando la versión de una variable de la Regla de la Cadena: si $x = g(s, t)$, entonces $z = f(x)$ y

$$h_1(s, t) = \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial s} = f'(g(s, t))g_1(s, t)$$

$$h_2(s, t) = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial t} = f'(g(s, t))g_2(s, t)$$

■

El siguiente ejemplo presenta una aplicación híbrida de la Regla de la Cadena a una función que depende directa e indirectamente de la variable de diferenciación.

Ejemplo 5 Calcule dz/dt, siendo $z = f(x, y, t)$, $x = g(t)$ e $y = h(t)$ (suponga que f, g y h tienen derivadas continuas).

Solución Como z depende de t a través de cada una de las tres variables de f, la expresión de la Regla de la Cadena tendrá tres términos:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t}\\ &= f_1(x, y, t)g'(t) + f_2(x, y, t)h'(t) + f_3(x, y, t)\end{aligned}$$

Observación En el ejemplo anterior se puede distinguir fácilmente entre los significados de los símbolos dz/dt y $\partial z/\partial t$. Sin embargo, si la situación que hubiéramos tenido fuera

$$z = f(x, y, s, t) \qquad \text{siendo} \qquad x = g(s, t) \quad \text{e} \quad y = h(s, t)$$

entonces el significado del símbolo $\partial z/\partial t$ no estaría claro; podría referirse a la derivada parcial simple de f con respecto a su cuarta variable primaria (es decir, $f_4(x, y, s, t)$), o podría referirse a la derivada de la función compuesta $f(g(s, t), h(s, t), s, t)$. Tres de las cuatro variables primarias de f dependen de t y, por tanto, contribuyen a la tasa de cambio de z con respecto a t. La derivada parcial $f_4(x, y, s, t)$ indica la contribución de sólo una de estas tres variables. Es habitual utilizar $\partial z/\partial t$ para indicar la derivada completa de la función *compuesta* con respecto a la variable secundaria t:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} f(g(s, t), h(s, t), s, t)\\ &= f_1(x, y, s, t)g_2(s, t) + f_2(x, y, s, t)h_2(s, t) + f_4(x, y, s, t)\end{aligned}$$

Cuando sea necesario, podemos indicar la contribución de la variable primaria t como

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{x,y,s} = \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, s, t) = f_4(x, y, s, t)$$

En este caso, los subíndices indican las variables primarias de f que se *mantienen fijas*, es decir, cuyas contribuciones a la tasa de cambio de z con respecto a t *se ignoran*. Por supuesto, en la situación descrita anteriormente, $(\partial z/\partial t)_s$ significa lo mismo que $\partial z/\partial t$.

En las aplicaciones, las variables que contribuyen a una derivada parcial concreta, en general estarán claras a partir del contexto. El ejemplo que sigue presenta una aplicación de este tipo. Es un ejemplo de un procedimiento denominado *diferenciación tras el movimiento*.

Ejemplo 6 La temperatura atmosférica depende de la posición y del tiempo. Si la posición se indica mediante tres coordenadas espaciales x, y y z (medidas en kilómetros) y el tiempo se indica como t (medido en horas), entonces la temperatura T °C es una función de cuatro variables, $T(x, y, z, t)$.

(a) Si un termómetro se fija a un globo atmosférico que se mueve siguiendo una trayectoria cuyas ecuaciones paramétricas son $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$, ¿cuál es la tasa de cambio en el instante t de la temperatura T medida por el termómetro?

(b) Calcule la tasa de cambio de la temperatura medida en el instante $t = 1$ si

$$T(x, y, z, t) = \frac{xy}{1 + z}(1 + t)$$

y si el globo se mueve siguiendo la curva

$$x = t, \qquad y = 2t, \qquad z = t - t^2$$

Solución

(a) En este caso, la tasa de cambio de la medida del termómetro depende del cambio en la posición del termómetro, así como del tiempo. Por tanto, ninguna de las cuatro variables de T se puede ignorar en la diferenciación. La tasa se expresa como

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

El término $\partial T/\partial t$ se refiere sólo a la tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo en una posición fija de la atmósfera. Los otros tres términos provienen del movimiento del globo.

(b) Los valores de las tres coordenadas y de sus derivadas en $t = 1$ son $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$, $dx/dt = 1$, $dy/dt = 2$ y $dz/dt = -1$. Además, en $t = 1$,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{y}{1+z}(1+t) = 4, \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-xy}{(1+z)^2}(1+t) = -4$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{x}{1+z}(1+t) = 2, \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{xy}{1+z} = 2$$

Entonces,

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=1} = (4)(1) + (2)(2) + (-4)(-1) + 2 = 14$$

La temperatura medida se incrementa con una tasa de 14 °C/h en el instante $t = 1$. ■

La presentación y los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que la Regla de la Cadena puede tomar formas diferentes en el caso de varias variables, dependiendo del número de variables que intervengan en las funciones que se componen. Como ayuda para determinar la forma correcta de la Regla de la Cadena en una situación dada, se puede construir un diagrama que ilustre la dependencia de las variables. En la Figura 12.21 se muestra un ejemplo de diagrama para la función de temperatura del Ejemplo 6. En la aplicación de la Regla de la Cadena para dT/dt interviene un término para cada ruta desde T hasta t que se pueda seguir en el diagrama. Por ejemplo, la ruta desde T que pasa por x y t produce el término $\dfrac{\partial T}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}$, y así sucesivamente.

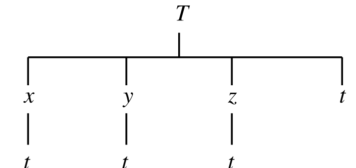


Figura 12.21 Diagrama que muestra la dependencia de T con t en el Ejemplo 6.

Ejemplo 7 Escriba la aplicación de la Regla de la Cadena a $\partial z/\partial x$, donde z depende de u, v y r; u y v dependen de x, y y r; r depende de x e y.

Solución El diagrama apropiado para este ejemplo se muestra en la Figura 12.22. Hay 5 rutas para ir de z a x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

Figura 12.22 Diagrama de dependencia del Ejemplo 7. ■

Funciones homogéneas

Se dice que una función $f(x_1, ..., x_n)$ es **positivamente homogénea de grado *k*** si, para todo punto $(x_1, x_2, ..., x_n)$, de su dominio y todo número real $t > 0$, se cumple que

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, ..., x_n)$$

Por ejemplo,

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2 \qquad \text{es positivamente homogénea de grado 2}$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{es positivamente homogénea de grado 1}$$

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \qquad \text{es positivamente homogénea de grado 0}$$

$$f(x, y, z) = \frac{x - y + 5z}{yz - z^2} \qquad \text{es positivamente homogénea de grado } -1$$

$$f(x, y) = x^2 + y \qquad \text{no es positivamente homogénea}$$

Obsérvese que una función positivamente homogénea de grado 0 permanece constante a lo largo de rayos que surjan del origen. De forma más general, una función positivamente homogénea crece o decrece a lo largo de dichos rayos proporcionalmente a la k-ésima potencia de la distancia al origen.

TEOREMA 2 **Teorema de Euler**

Si $f(x_1, ..., x_n)$ tiene derivadas parciales primeras continuas y es positivamente homogénea de grado k, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x_1, ..., x_n) = kf(x_1, ..., x_n)$$

DEMOSTRACIÓN Diferenciando la ecuación $f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, ..., x_n)$ con respecto a t se obtiene

$$x_1 f_1(tx_1, ..., tx_n) + x_2 f_2(tx_1, ..., tx_n) + \cdots + x_n f_n(tx_1, ..., tx_n) = kt^{k-1} f(x_1, ..., x_n)$$

Basta con sustituir ahora $t = 1$ para obtener el resultado.

Nótese que los Ejercicios 26-29 de la Sección 12.3 ilustran este teorema.

Derivadas de orden superior

La aplicación de la Regla de la Cadena a derivadas de orden superior puede ser muy complicada. Es importante tener en cuenta en cada etapa qué variables dependen de otras.

Ejemplo 8 Calcule $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x^2 - y^2, xy)$ en función de las derivadas parciales de la función f. Suponga que las derivadas parciales de segundo orden de f son continuas.

Solución En este problema no se indican explícitamente los símbolos de las variables primarias de las que depende f. Las denominaremos u y v. Por tanto, el problema nos pide calcular

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(u, v), \qquad \text{siendo} \qquad u = x^2 - y^2 \qquad \text{y} \qquad v = xy$$

Diferenciando primero con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(u, v) = -2y f_1(u, v) + x f_2(u, v)$$

Ahora se diferencia el resultado con respecto a x. Nótese que el segundo término de la derecha es un producto de dos funciones de x, por lo que hay que aplicar la Regla del Producto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(u, v) &= -2y(2x f_{11}(u, v) + y f_{12}(u, v)) \\ &\quad + f_2(u, v) + x(2x f_{21}(u, v) + y f_{22}(u, v)) \\ &= f_2(u, v) - 4xy f_{11}(u, v) + 2(x^2 - y^2) f_{12}(u, v) + xy f_{22}(u, v)\end{aligned}$$

En el último paso hemos usado el hecho de que las derivadas parciales mixtas de f son continuas, por lo que se pueden igualar f_{12} y f_{21}.

■

Revise cuidadosamente el cálculo anterior y asegúrese de entender lo que se hace en cada paso. Nótese que todas las derivadas de f que aparecen se evalúan en $(u, v) = (x^2 - y^2, xy)$, no en (x, y), ya que x e y no son las variables primarias de las que depende f.

Observación Los cálculos realizados en el ejemplo anterior (y en los siguientes) se pueden hacer fácilmente mediante un programa de matemáticas por computador. En Maple:

```
> g := (x, y) -> f(x^2 - y^2, x*y) :
   simplify(D[1, 2] (g) (x, y)) ;
```

$$\begin{aligned}&-4yD_{1,1}(f)(x^2 - y^2, xy)x - 2 * D_{1,2}(f)(x^2 - y^2, xy)y^2 \\ &\quad + 2D_{1,2}(f)(x^2 - y^2, xy)x^2 \\ &\quad + xD_{2,2}(f)(x^2 - y^2, xy)y + D_2(f)(x^2 - y^2, xy)\end{aligned}$$

que, tras inspeccionarla de cerca, se puede ver que es el mismo resultado calculado en el ejemplo.

Ejemplo 9 Si $f(x, y)$ es armónica, demuestre que $f(x^2 - y^2, 2xy)$ es también armónica.

Solución Sea $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$. Si $z = f(u, v)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x f_1(u, v) + 2y f_2(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -2y f_1(u, v) + 2x f_2(u, v) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2 f_1(u, v) + 2x(2x f_{11}(u, v) + 2y f_{12}(u, v)) \\ &\quad + 2y(2x f_{21}(u, v) + 2y f_{22}(u, v)) \\ &= 2 f_1(u, v) + 4x^2 f_{11}(u, v) + 8xy f_{12}(u, v) + 4y^2 f_{22}(u, v) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -2 f_1(u, v) - 2y(-2y f_{11}(u, v) + 2x f_{12}(u, v)) \\ &\quad + 2x(-2y f_{21}(u, v) + 2x f_{22}(u, v)) \\ &= -2 f_1(u, v) + 4y^2 f_{11}(u, v) - 8xy f_{12}(u, v) + 4x^2 f_{22}(u, v)\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(x^2 + y^2)(f_{11}(u, v) + f_{22}(u, v)) = 0$$

ya que f es armónica. Entonces, $z = f(x^2 - y^2, 2xy)$ es una función armónica de x e y. ■

En el siguiente ejemplo se demuestra que la ecuación diferencial bidimensional de Laplace (*véase* el Ejemplo 3 en la Sección 12.4) tiene la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0$$

cuando se plantea para una función z expresada en las coordenadas polares r y θ.

Ejemplo 10 **(Ecuación de Laplace en coordenadas polares)** Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, y si $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Solución Se puede hacer de dos formas diferentes. Podemos partir de cada miembro de la ecuación y utilizar la Regla de la Cadena para demostrar que son iguales. En este ejemplo calcularemos las derivadas parciales con respecto a r y θ que aparecen en el miembro izquierdo y las expresaremos en función de las derivadas parciales con respecto a x e y. El otro método, que se basa en expresar las derivadas parciales con respecto a x e y en función de las derivadas parciales con respecto a r y θ, es algo más difícil (*véase* el Ejercicio 24 posterior). Sin embargo, tendríamos que haberlo planteado de esta manera si no nos hubieran dado la forma de la ecuación diferencial en coordenadas polares y tuviéramos que obtenerla.

En primer lugar, nótese que

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \mathrm{sen}\,\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

¡¡ ATENCIÓN !! Este ejemplo es difícil pero importante. Examine cada paso cuidadosamente hasta asegurarse de entender lo que se hace.

Ahora se diferencia de nuevo con respecto a r. Recuérdese que r y θ son variables independientes, por lo que los factores $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$ se pueden considerar constantes. Sin embargo, $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ dependen de x e y y, por tanto, de r y θ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial y}\\ &= \cos\theta\left(\cos\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right) + \mathrm{sen}\,\theta\left(\cos\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \mathrm{sen}^2\,\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

En la última línea se ha utilizado la igualdad de las derivadas parciales mixtas. De forma similar,

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \operatorname{sen}\theta \frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial z}{\partial y}$$

Al diferenciar por segunda vez con respecto a θ, r se puede considerar constante, pero cada uno de los términos anteriores sigue siendo un producto de dos funciones que dependen de θ. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= -r\left(\cos\theta \frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + r\left(-\operatorname{sen}\theta \frac{\partial z}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&= -r\frac{\partial z}{\partial r} - r\operatorname{sen}\theta\left(-r\operatorname{sen}\theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r\cos\theta \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)\\
&\quad + r\cos\theta\left(-r\operatorname{sen}\theta \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + r\cos\theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\
&= -r\frac{\partial z}{\partial r} + r^2\left(\operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}$$

Combinando estos resultados, se obtiene la fórmula deseada:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Ejercicios 12.5

En los Ejercicios 1-4, escriba las versiones apropiadas de la Regla de la Cadena para las derivadas indicadas.

1. $\partial w/\partial t$ si $w = f(x, y, z)$, siendo $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$ y $z = k(s, t)$.

2. $\partial w/\partial t$ si $w = f(x, y, z)$, siendo $x = g(s)$, $y = h(s, t)$ y $z = k(t)$.

3. $\partial z/\partial u$ si $z = g(x, y)$, siendo $y = f(x)$ y $x = h(u, v)$.

4. dw/dt si $w = f(x, y)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, t)$, $r = k(s, t)$ y $s = m(t)$.

5. Si $w = f(x, y, z)$, siendo $x = g(y, z)$ e $y = h(z)$, indique versiones apropiadas de la Regla de la Cadena para $\dfrac{dw}{dz}$, $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ y $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$.

6. Utilice dos métodos diferentes para calcular $\partial u/\partial t$ si $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = e^{st}$ y $1 + s^2\cos t$.

7. Utilice dos métodos diferentes para calcular $\partial z/\partial x$ si $z = \tan^{-1}(u/v)$, $u = 2x + y$ y $v = 3x - y$.

8. Utilice dos métodos diferentes para calcular dz/dt si $z = txy^2$, $x = t + \ln(y + t^2)$ e $y = e^t$.

En los Ejercicios 9-12, calcule las derivadas que se indican, suponiendo que la función $f(x, y)$ tiene derivadas parciales primeras continuas.

9. $\dfrac{\partial}{\partial x} f(2x, 3y)$

10. $\dfrac{\partial}{\partial x} f(2y, 3x)$

11. $\dfrac{\partial}{\partial x} f(y^2, x^2)$

12. $\dfrac{\partial}{\partial y} f(yf(x, t),\ f(y, t))$

13. Supongamos que la temperatura T de un cierto líquido varía con la profundidad z y el tiempo t de acuerdo con la fórmula $T = e^{-t}z$. Calcule la tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo en un punto que se mueve por el líquido de forma que en el instante t su profundidad es $f(t)$. ¿Cuál es la tasa de cambio si $f(t) = e^t$? ¿Qué sucede en este caso?

14. Suponga que la intensidad de un campo eléctrico E varía con la posición (x, y, z) y con el tiempo t de acuerdo con la fórmula $E = f(x, y, z, t)$. Calcule la tasa de cambio con respecto al tiempo de la intensidad de campo medida por un instrumento que se mueve por el espacio siguiendo la trayectoria helicoidal $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = t$.

En los Ejercicios 15-20, suponga que f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

15. Si $z = f(x, y)$, siendo $x = 2s + 3t$ e $y = 3s - 2t$, calcule

(a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$, (b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ y (c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

16. Si $f(x, y)$ es armónica, demuestre que $f\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\right)$ es también armónica.

17. Si $x = t \operatorname{sen} s$ e $y = t \cos s$, calcule $\dfrac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(x, y)$.

18. Calcule $\dfrac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(2x + 3y, xy)$ en función de las derivadas parciales de la función f.

19. Calcule $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(y^2, xy, -x^2)$ en función de las derivadas parciales de la función f.

20. Calcule $\dfrac{\partial^3}{\partial t^2 \partial s} f(s^2 - t, s + t^2)$ en función de las derivadas parciales de la función f.

21. Suponga que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen derivadas parciales segundas continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Suponga también que $f(u, v)$ es una función armónica de u y v. Demuestre que $f(u(x, y), v(x, y))$ es una función armónica de x e y. *Sugerencia*: u y v son armónicas por el Ejercicio 15 de la Sección 12.4.

22. Si $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, verifique que $u(x, y, z) = 1/r$ es armónica en $\mathbb{R}^3$, excepto en el origen.

∗**23.** Si $x = e^s \cos t$, $y = e^s \operatorname{sen} t$ y $z = u(x, y) = v(s, t)$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (x^2 + y^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

∗**24.** **(Transformación de la ecuación de Laplace a coordenadas polares)** La transformación a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, implica que $r^2 = x^2 + y^2$ y $\tan\theta = y/x$. Utilice estas ecuaciones para demostrar que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Utilice estas fórmulas como ayuda para expresar $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en función de las derivadas parciales de u con respecto a r y θ, volviendo así a demostrar la fórmula de la ecuación diferencial de Laplace en coordenadas polares dada en el Ejemplo 10.

25. Si $u(x, y) = r^2 \ln r$, siendo $r^2 = x^2 + y^2$, verifique que u es una función biarmónica, demostrando que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

26. Si $f(x, y)$ es positivamente homogénea de grado k y tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, demuestre que

$$x^2 f_{11}(x, y) + 2xy f_{12}(x, y) + y^2 f_{22}(x, y) = k(k-1) f(x, y)$$

∗**27.** Generalice el resultado del Ejercicio 26 a funciones de n variables.

∗**28.** Generalice los resultados de los Ejercicios 26 y 27 a expresiones en las que intervengan las derivadas parciales de orden m de la función f.

Los Ejercicios 29 y 30 vuelven sobre el Ejercicio 16 de la Sección 12.4. Sea

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0\ \ 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

29. (a) Demuestre que $F(x, y) = -F(y, x)$ para todo (x, y).

(b) Demuestre que $F_1(x, y) = -F_2(y, x)$ y $F_{12}(x, y) = -F_{21}(y, x)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) Demuestre que $F_1(0, y) = -2y$ para todo y; a partir de aquí, demuestre que $F_{12}(0, 0) = 2$.

(d) Deduzca que $F_2(x, 0) = 2x$ y $F_{21}(0, 0) = 2$.

30. (a) Utilice el Ejercicio 29(b) para calcular $F_{12}(x, x)$ para $x \neq 0$.

(b) ¿Es $F_{12}(x, y)$ continua en $(0, 0)$? ¿Por qué?

❖**31.** Utilice los cambios de variable $\xi = x + ct$, $\eta = x$ para transformar la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\,\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (c = \text{constante})$$

en la ecuación más simple $\partial v/\partial \eta = 0$, con $v(\xi, \eta) = v(x + ct, x) = u(x, t)$. Esta ecuación indica que $v(\xi, \eta)$ no depende de η, por lo que $v = f(\xi)$ para alguna función diferenciable arbitraria f. ¿Cuál es la correspondiente «solución general» $u(x, t)$ de la ecuación diferencial en derivadas parciales original?

❖**32.** Habiendo considerado el Ejercicio 31, plantee una «solución general» $w(r, s)$ de la ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial s} w(r, s) = 0$$

En la respuesta deben intervenir dos funciones arbitrarias.

❖**33.** Utilice los cambios de variable $r = x + ct$, $s = x - ct$, $w(r, s) = u(x, t)$ para transformar la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a una forma más simple. Utilice ahora el resultado del Ejercicio 32 para obtener la *solución general* de esta ecuación de onda en la forma dada en el Ejemplo 4 de la Sección 12.4.

34. Demuestre que el problema de valor inicial de la ecuación de onda unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt}(x,\ t) = c^2 u_{xx}(x,\ t) \\ u(x,\ 0) = p(x) \\ u_t(x,\ 0) = q(x) \end{cases}$$

tiene como solución

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2}\,[p(x - ct) + p(x + ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} q(s)\,ds$$

Nótese que aquí hemos utilizado los subíndices x y t en lugar de 1 y 2 para indicar las derivadas parciales. Esto es práctica habitual cuando se trata con ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Observación El problema de valor inicial del Ejercicio 34 proporciona el pequeño desplazamiento lateral $u(x,\ t)$ de la posición x en el instante t de una cuerda que vibra bajo tensión según el eje x. La función $p(x)$ proporciona el desplazamiento *inicial* en la posición x, es decir, el desplazamiento en $t = 0$. De forma similar, $q(x)$ proporciona la velocidad inicial en la posición x. Obsérvese que la posición en el instante t depende sólo de los valores de esos datos iniciales en puntos no separados más de ct unidades. Esto es coherente con la observación hecha anteriormente de que las soluciones de la ecuación de onda representan ondas que viajan con velocidad c.

Vuelva a realizar los ejemplos y ejercicios que se indican en los Ejercicios 35-40 utilizando Maple para efectuar los cálculos.

35. Ejemplo 10

36. Ejercicio 16

37. Ejercicio 19

38. Ejercicio 20

39. Ejercicio 23

40. Ejercicio 34

12.6 Aproximaciones lineales, diferenciabilidad y diferenciales

La recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en $x = a$ proporciona una aproximación adecuada a los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos al punto a (*véase* la Figura 12.23):

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

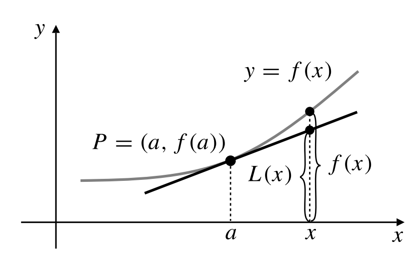


Figura 12.23 Linealización de la función f alrededor de a.

$L(x)$ es la **linealización** de f en a; su gráfica es una recta tangente a $y = f(x)$ en ese punto. La mera existencia de $f'(a)$ es suficiente para garantizar que el error de la aproximación (la distancia vertical entre la curva y la tangente en x) es pequeña comparada con la distancia a $h = x - a$ entre a y x, es decir,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - L(a+h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \\ &= f'(a) - f'(a) = 0\end{aligned}$$

De forma similar, el plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ en (a, b) es $z = L(x, y)$, siendo

$$L(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

la **linealización** de f en (a, b). Podemos utilizar $L(x, y)$ como aproximación a los valores de $f(x, y)$ cerca de (a, b):

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

Ejemplo 1 Calcule un valor aproximado de $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ en $(2.2, -0.2)$.

Solución Es conveniente utilizar la linealización en $(2, 0)$, donde los valores de f y de sus derivadas parciales se pueden calcular fácilmente:

$$f(2, 0) = 3$$

$$f_1(x, y) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}, \qquad f_1(2, 0) = \frac{4}{3}$$

$$f_2(x, y) = \frac{e^{2y}}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}, \qquad f_2(2, 0) = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $L(x, y) = 3 + \frac{4}{3}(x - 2) + \frac{1}{3}(y - 0)$, y

$$f(2.2, -0.2) \approx L(2.2, -0.2) = 3 + \frac{4}{3}(2.2 - 2) + \frac{1}{3}(-0.2 - 0) = 3.2$$

A efectos de comparación, $f(2.2, -0.2) \approx 3.2172$ con una precisión de 4 cifras decimales. ■

A diferencia del caso de una sola variable, la mera existencia de las derivadas parciales $f_1(a, b)$ y $f_2(a, b)$ no implica siempre que f sea continua en (a, b), y mucho menos que el error de linealización sea pequeño comparado con la distancia $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ entre (a, b) y (x, y). Adoptaremos esta última condición en nuestra definición de lo que quiere decir que una función de dos variables sea *diferenciable* en un punto.

DEFINICIÓN 5

Se dice que la función $f(x, y)$ es **diferenciable** en el punto (a, b) si

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(a + h,\ b + k) - f(a,\ b) - hf_1(a,\ b) - kf_2(a,\ b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Esta definición y los teoremas que siguen se pueden generalizar a funciones de cualquier número de variables en la forma obvia. Por motivos de sencillez, sólo los enunciaremos para el caso de dos variables.

La función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b) si y sólo si la superficie $z = f(x, y)$ tiene un *plano tangente no vertical* en (a, b). Esto implica que $f_1(a, b)$ y $f_2(a, b)$ deben existir y que f debe ser continua en (a, b) (sin embargo, recuérdese que la existencia de las derivadas parciales *no* implica siempre que f sea continua, y mucho menos que sea diferenciable). En particular, la función será *continua* allí donde sea diferenciable. Demostraremos una versión de dos variables del Teoremas del Valor Medio y la utilizaremos para demostrar que las funciones son diferenciables siempre que tengan derivadas parciales primeras *continuas*.

TEOREMA 3 **Un Teorema del Valor Medio**

Si $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ son continuas en un entorno del punto (a, b), y si los valores absolutos de h y k son lo suficientemente pequeños, entonces existen valores θ_1 y θ_2, ambos entre 0 y 1, tales que

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf_1(a+\theta_1 h, b+k) + kf_2(a, b+\theta_2 k)$$

DEMOSTRACIÓN La demostración de este teorema es muy similar a la del Teorema 1 de la Sección 12.4, por lo que sólo daremos algunas ideas. El lector puede completar los detalles. Se expresa

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = (f(a+h, b+k) - f(a, b+k)) + (f(a, b+k) - f(a, b))$$

y después se aplica el Teorema del Valor Medio de una variable a $f(x, b+k)$ en el intervalo comprendido entre a y $a+h$, y a $f(a, y)$ en el intervalo comprendido entre b y $b+k$, para obtener el resultado deseado.

TEOREMA 4

Si f_1 y f_2 son funciones continuas en un entorno del punto (a, b), entonces f es diferenciable en (a, b).

DEMOSTRACIÓN Utilizando el Teorema 3 y que

$$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leqslant 1 \quad \text{y} \quad \left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leqslant 1$$

estimamos

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b) - hf_1(a,\ b) - kf_2(a,\ b)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \\
&= \left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}(f_1(a+\theta_1 h, b+k) - f_1(a, b))\right. \\
&\qquad \left. + \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}(f_2(a, b+\theta_2 k) - f_2(a, b))\right| \\
&\leqslant |f_1(a+\theta_1 h, b+k) - f_1(a, b)| + |f_2(a, b+\theta_2 k) - f_2(a, b)|
\end{aligned}$$

Como f_1 y f_2 son continuas en (a, b), cada uno de los términos finales tiende a 0 cuando h y k tienden a 0. Esto es lo que queríamos demostrar.

Ilustraremos la diferenciabilidad con un ejemplo en el que podemos calcular directamente el error de la aproximación mediante plano tangente.

Ejemplo 2 Calcule $f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_1(x, y)h - f_2(x, y)k$ si $f(x, y) = x^3 + xy^2$.

Solución Como $f_1(x, y) = 3x^2 + y^2$ y $f_2(x, y) = 2xy$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_1(x, y)h - f_2(x, y)k \\
&= (x+h)^3 + (x+h)(y+k)^2 - x^3 - xy^2 - (3x^2+y^2)h - 2xyk \\
&= 3xh^2 + h^3 + 2yhk + hk^2 + xk^2
\end{aligned}$$

Obsérvese que el resultado anterior es un polinomio en h y k que no tiene ningún término cuyo grado sea menor que 2 en dichas variables. Por tanto, esta diferencia tiende a cero cuando $(h, k) \to (0, 0)$ como el *cuadrado* de la distancia $\sqrt{h^2 + k^2}$ desde (x, y) a $(x + h, y + k)$, por lo que realmente se cumple la condición de diferenciabilidad:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{3xh^2 + h^3 + 2yhk + hk^2 + xk^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Este comportamiento cuadrático ocurrirá para cualquier función f con derivadas parciales *segundas* continuas (*véase* el Ejercicio 19 posterior).

Demostración de la Regla de la Cadena

Ahora estamos en disposición de dar un planteamiento y demostración formales de un caso simple pero representativo de la Regla de la Cadena para funciones con varias variables.

TEOREMA 5 **Una Regla de la Cadena**

Sea $z = f(x, y)$, siendo $x = u(s, t)$ e $y = v(s, t)$. Supongamos que:

(i) $u(a, b) = p$ y $v(a, b) = q$.
(ii) Las derivadas parciales primeras de u y v existen en el punto (a, b).
(iii) f es diferenciable en el punto (p, q).

Entonces, $z = w(s, t) = f(u(s, t), v(s, t)$ tiene derivadas parciales primeras con respecto a s y t en (a, b), y

$$w_1(a, b) = f_1(p, q)u_1(a, b) + f_2(p, q)v_1(a, b)$$
$$w_2(a, b) = f_1(p, q)u_2(a, b) + f_2(p, q)v_2(a, b)$$

es decir,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

DEMOSTRACIÓN Definamos una función de dos variables E de la siguiente forma: $E(0, 0) = 0$ y, si $(h, k) \neq (0, 0)$, entonces

$$E(h, k) = \frac{f(p + h, q + k) - f(p, q) - hf_1(p, q) - kf_2(p, q)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Obsérvese que $E(h, k)$ es continua en $(0, 0)$ porque f es diferenciable en (p, q). Entonces

$$f(p + h, q + k) - f(p, q) = hf_1(p, q) + kf_2(p, q) + \sqrt{h^2 + k^2}\, E(h, k)$$

Si en esta fórmula ponemos $h = u(a + \sigma, b) - u(a, b)$ y $k = v(a + \sigma, b) - v(a, b)$ y dividimos por σ, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{w(a + \sigma, b) - w(a, b)}{\sigma} &= \frac{f(u(a + \sigma, b), v(a + \sigma, b)) - f(u(a, b), v(a, b))}{\sigma} \\ &= \frac{f(p + h, q + k) - f(p, q)}{\sigma} \\ &= f_1(p, q)\frac{h}{\sigma} + f_2(p, q)\frac{k}{\sigma} + \sqrt{\left(\frac{h}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{k}{\sigma}\right)^2}\, E(h, k)\end{aligned}$$

Vamos a hacer que σ tienda a 0 en esta fórmula. Nótese que

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{h}{\sigma}=\lim_{\sigma\to 0}\frac{u(a+\sigma,\ b)-u(a,\ b)}{\sigma}=u_1(a,b)$$

y, de forma similar, $\lim_{\sigma\to 0}(k/\sigma)=v_1(a,b)$. Como $(h,k)\to(0,0)$ si $\sigma\to 0$, tenemos que

$$w_1(a,b)=f_1(p,q)u_1(a,b)+f_2(p,q)v_1(a,b)$$

La demostración para w_2 es similar.

Diferenciales

Si existen las derivadas parciales primeras de una función $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ en un punto, podemos formar un **diferencial** dz o df de la función en ese punto de forma similar a como se hizo para funciones de una variable:

$$\begin{aligned}dz=df&=\frac{\partial z}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}\,dx_2+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\,dx_n\\&=f_1(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1+\cdots+f_n(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\end{aligned}$$

En este caso, el diferencial dz se considera función de las $2n$ variables independientes x_1, x_2, ..., x_n, dx_1, dx_2, ..., dx_n.

Dada una función *diferenciable* f, el diferencial df es una aproximación al cambio Δf en el valor de la función, que se expresa como

$$\Delta f=f(x_1+dx_1,\ldots,x_n+dx_n)-f(x_1,\ldots,x_n)$$

El error de esta aproximación es pequeño comparado con la distancia entre los dos puntos del dominio de f, es decir,

$$\frac{\Delta f-df}{\sqrt{(dx_1)^2+\cdots+(dx_n)^2}}\to 0\qquad\text{si todo } dx_i\to 0,\qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

En este sentido, los diferenciales se pueden ver como otra forma de expresar la linealización.

Ejemplo 3 Estime el cambio porcentual del periodo

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

de un péndulo simple si su longitud L crece un 2% y la aceleración de la gravedad g disminuye un 0.6%.

Solución Calculamos el diferencial de T:

$$\begin{aligned}dT&=\frac{\partial T}{\partial L}\,dL+\frac{\partial T}{\partial g}\,dg\\&=\frac{2\pi}{2\sqrt{Lg}}\,dL-\frac{2\pi\sqrt{L}}{2g^{3/2}}\,dg\end{aligned}$$

Los datos indican que $dL=\dfrac{2}{100}L$ y $dg=-\dfrac{6}{1000}g$. Entonces,

$$dT=\frac{1}{100}\,2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}-\left(-\frac{6}{1000}\right)\frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}=\frac{13}{1000}\,T$$

Por tanto, el periodo T del péndulo crece un 1.3%.

Funciones de un espacio de *n* dimensiones en un espacio de *m* dimensiones

(*Esta sección es opcional*). Un vector $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ de m funciones, donde cada una depende de n variables $(x_1, x_2, ..., x_n)$, define una *transformación* (es decir, una función) de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$; concretamente, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ es un punto de $\mathbb{R}^n$, y

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

entonces $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ es el punto de $\mathbb{R}^m$ que corresponde a $\mathbf{x}$ mediante la transformación $\mathbf{f}$. Estas ecuaciones se pueden expresar de forma más breve como

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Las derivadas parciales $\partial y_i/\partial x_j$, $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ contienen información sobre la tasa de cambio de $\mathbf{y}$ con respecto a $\mathbf{x}$, y es conveniente organizarlas en forma de matriz $m \times n$, $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$, denominada **matriz jacobiana** de la transformación $\mathbf{f}$:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La transformación lineal (*véase* la Sección 10.6) representada por la matriz jacobiana se denomina **derivada** de la transformación $\mathbf{f}$.

Observación Una función escalar de dos variables, por ejemplo $f(x, y)$, se puede ver como una transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Su derivada es entonces la transformación lineal cuya matriz es

$$Df(x, y) = (f_1(x, y),\ f_2(x, y))$$

No es nuestra intención entrar en el estudio de estas *funciones vectoriales de una variable vector*, pero podemos observar aquí que la matriz jacobiana de la composición de dos transformaciones de este tipo es el producto de sus matrices jacobianas.

Para ver que esto es así, sea $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ una transformación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ como se ha descrito antes, y sea $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ otra transformación de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^k$ dada por

$$\begin{aligned} z_1 &= g_1(y_1, y_2, ..., y_m) \\ z_2 &= g_2(y_1, y_2, ..., y_m) \\ &\vdots \\ z_k &= g_k(y_1, y_2, ..., y_m) \end{aligned}$$

cuya matriz jacobiana $k \times m$ es

$$D\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial y_1} & \frac{\partial z_k}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Entonces la composición $\mathbf{z} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ dada por

$$\begin{aligned} z_1 &= g_1(f_1(x_1, ..., x_n), ...\ f_m(x_1, ..., x_n)) \\ z_2 &= g_2(f_1(x_1, ..., x_n), ...\ f_m(x_1, ..., x_n)) \\ &\vdots \\ z_k &= g_k(f_1(x_1, ..., x_n), ...\ f_m(x_1, ..., x_n)) \end{aligned}$$

tiene, de acuerdo con la Regla de la Cadena, la matriz jacobiana $k \times n$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \frac{\partial z_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial y_1} & \frac{\partial z_k}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

que es, de hecho, la Regla de la Cadena para composiciones de transformaciones:

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))D\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

que imita exactamente a la Regla de la Cadena en el caso de una variable $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$.

La transformación $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ define también un vector $d\mathbf{y}$ de diferenciales de las variables y_i en términos del vector $d\mathbf{x}$ de diferenciales de las variables x_j. Expresando $d\mathbf{y}$ y $d\mathbf{x}$ como vectores columna tenemos

$$d\mathbf{y} = \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = D\mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

Ejemplo 4 Calcule la matriz jacobiana $D\mathbf{f}(1, 0)$ de la transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{f}(x, y) = (xe^y + \cos(\pi y), x^2, x - e^y)$$

y utilícela para calcular un valor aproximado de $\mathbf{f}(1.02, 0.01)$.

Solución $D\mathbf{f}(x, y)$ es la matriz 3×2 cuya fila j está formada por las derivadas parciales de la componente j de $\mathbf{f}$ con respecto a x e y. Entonces,

$$D\mathbf{f}(1, 0) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y - \pi \operatorname{sen}(\pi y) \\ 2x & 0 \\ 1 & -e^y \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $\mathbf{f}(1, 0) = (2, 1, 0)$ y $d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{pmatrix}$, tenemos que

$$d\mathbf{f} = D\mathbf{f}(1, 0)\, d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0.04 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\mathbf{f}(1.02, 0.01) \approx (2.03, 1.04, 0.01)$. ■

Para transformaciones entre espacios de la misma dimensión (por ejemplo, de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$), las matrices jacobianas correspondientes son cuadradas y tienen determinantes. Estos determinantes jacobianos tendrán un papel importante en nuestra presentación de las funciones implícitas y de las funciones inversas de la Sección 12.8, y en los cambios de variables en integrales múltiples del Capítulo 14.

El paquete **VectorCalculus** de Maple tiene una función denominada **jacobian** que toma dos entradas, una lista (o vector) de expresiones y una lista de variables, y produce la matriz jacobiana de las derivadas parciales de esas expresiones con respecto a las variables. Por ejemplo,

```
> with(VectorCalculus) :
> Jacobian([x*y*exp(z) , (x+2*y)*cos(z)] , [x, y, z]) ;
```

$$\begin{bmatrix} ye^z & xe^z & xye^z \\ \cos(z) & 2\cos(z) & -(x + 2y)\operatorname{sen}(z) \end{bmatrix}$$

VectorCalculus sólo está incluido desde Maple 8. Si se emplea una versión anterior hay que utilizar `linalg` y la función `jacobian`.

Ejercicios 12.6

En los Ejercicios 1-6, utilice las linealizaciones adecuadas para calcular valores aproximados de las funciones dadas en los puntos indicados.

1. $f(x, y) = x^2y^2$ en $(3.1, 0.9)$

2. $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ en $(3.01, 2.99)$

3. $f(x, y) = \operatorname{sen}(\pi xy + \ln y)$ en $(0.01, 1.05)$

4. $f(x, y) = \dfrac{24}{x^2 + xy + y^2}$ en $(2.1, 1.8)$

5. $f(x, y, z) = \sqrt{x + 2y + 3z}$ en $(1.9, 1.8, 1.1)$

6. $f(x, y) = xe^{y + x^2}$ en $(2.05, -3.92)$

7. Los bordes de una caja rectangular se miden con una precisión del 1% de su valor. Indique cuál es el máximo error porcentual aproximado en:

(a) El cálculo del volumen de la caja.

(b) El cálculo del área de una de las caras de la caja.

(c) El cálculo de la longitud de una diagonal de la caja.

8. Las medidas del radio y la altura de un tanque cónico circular recto son, respectivamente, 25 pies y 21 pies. La precisión de cada medida está dentro de

media pulgada. ¿Cuánto puede ser el error en el cálculo del volumen del tanque?

9. ¿Cuánto será aproximadamente el error en el cálculo del área de la superficie cónica del tanque del Ejercicio 8?

10. Dos lados y el ángulo entre ellos de un terreno con forma triangular miden 224 m, 158 m y 64°, respectivamente. La precisión de las medidas de longitud es de 0.4 m y la de la medida del ángulo de 2°. ¿Cuál es el máximo error porcentual aproximado si se calcula el área del terreno a partir de estas medidas?

11. El ángulo de elevación de la parte superior de una torre se mide en dos puntos A y B situados en la misma dirección desde la base de la torre. Los ángulos medidos son de 50° en A y de 35° en B, ambos con una precisión de 1°. La medida de la distancia AB es de 100 m, con un error máximo del 0.1%. ¿Cuánto vale la altura del edificio, y cuál será su error máximo? ¿A cuál de las tres medidas es más sensible la altura calculada?

12. ¿Por qué porcentaje aproximado crecerá o decrecerá el valor de $w = \dfrac{x^2y^3}{z^4}$ si x crece el 1%, y crece el 2% y z crece el 3%?

13. Calcule la matriz jacobiana de la transformación $\mathbf{f}(r, \theta) = (x, y)$, siendo

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Aunque (r, θ) se pueden ver como las *coordenadas polares* en el plano xy, son coordenadas cartesianas en su propio plano $r\theta$.

14. Calcule la matriz jacobiana de la transformación $\mathbf{f}(\rho, \phi, \theta) = (x, y, z)$, siendo

$$x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \quad y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \quad z = \rho\cos\phi$$

Aquí, (ρ, ϕ, θ) son *coordenadas esféricas* en el espacio xyz. Se presentarán formalmente en la Sección 14.5.

15. Calcule la matriz jacobiana $D\mathbf{f}(x, y, z)$ de la transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 + yz, y^2 - x\ln z)$$

Utilice $D\mathbf{f}(2, 2, 1)$ como ayuda para calcular un valor aproximado de $\mathbf{f}(1.98, 2.01, 1.03)$.

16. Calcule la matriz jacobiana $D\mathbf{g}(1, 3, 3)$ de la transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(r, s, t) = (r^2s, r^2t, s^2 - t^2)$$

y utilice el resultado para calcular un valor aproximado de $\mathbf{g}(0.99, 3.02, 2.97)$.

17. Demuestre que si $f(x, y)$ es diferenciable en (a, b), entonces $f(x, y)$ es continua en (a, b).

∗18. Demuestre la siguiente versión del Teorema del Valor Medio: si $f(x, y)$ tiene derivadas parciales primeras continuas en las proximidades de todos los puntos del segmento que une los puntos (a, b) y $(a + h, b + k)$, entonces existe un número θ, con $0 < \theta < 1$, tal que

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) = f(a, b) &+ hf_1(a + \theta h, b + \theta k) \\ &+ kf_2(a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned}$$

Sugerencia: Aplique el Teorema del Valor Medio de una variable $g(t) = f(a + th, b + tk)$. ¿Por qué no podemos utilizar este resultado en lugar del Teorema 3 para demostrar el Teorema 4 y de aquí la versión de la Regla de la Cadena dada en esta sección?

∗19. Generalice el Ejercicio 18 de la siguiente forma: demuestre que, si $f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas cerca del punto (a, b), entonces existe un número θ, con $0 < \theta < 1$, tal que, con h y k suficientemente pequeños en valor absoluto,

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) = f(a, b) &+ hf_1(a, b) + kf_2(a, b) \\ &+ h^2 f_{11}(a + \theta h, b + \theta k) \\ &+ 2hk f_{12}(a + \theta h, b + \theta k) \\ &+ k^2 f_{22}(a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned}$$

A partir de aquí, demuestre que existe una constante K tal que para todos los valores de h y k suficientemente pequeños en valor absoluto,

$$\begin{aligned} &|f(a + h, b + k) - f(a, b) - hf_1(a, b) - kf_2(a, b)| \\ &\leqslant K(h^2 + k^2) \end{aligned}$$

12.7 Gradientes y derivadas direccionales

Una derivada parcial primera de una función de varias variables proporciona la tasa de cambio de esa función con respecto a la distancia medida en la dirección de uno de los ejes coordenados. En esta sección desarrollaremos un método para calcular la tasa de cambio de dicha función con respecto a una distancia medida en *cualquier dirección* de su dominio.

Para empezar, es útil combinar las derivadas parciales primeras de una función en una única *función vector* denominada **gradiente**. Por motivos de sencillez, desarrollaremos e interpretaremos el gradiente para funciones de dos variables. La extensión a funciones de tres o más variables es directa y se presentará más adelante en esta sección.

DEFINICIÓN 6

En cualquier punto (x, y) donde existan las derivadas parciales primeras de la función $f(x, y)$, se define el **vector gradiente** $\nabla f(x, y) = \mathbf{grad}\, f(x, y)$ como

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{grad}\, f(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j}$$

Recuérdese que **i** y **j** indican los vectores unitarios de la base que van del origen a los puntos (1, 0) y (0, 1), respectivamente. El símbolo ∇ se denomina *nabla*, y es un *operador de diferenciación vectorial*:

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y}$$

Se puede *aplicar* este operador a una función $f(x, y)$ escribiendo el operador a la izquierda de la función. El resultado es el gradiente de dicha función

$$\nabla f(x, y) = \left(\mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j}$$

En el Capítulo 16 haremos un uso general de este operador.

Ejemplo 1 Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, entonces $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$. En particular, $\nabla f(1, 2) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Obsérvese que este vector es perpendicular a la tangente $x + 2y = 5$ a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ en (1, 2). Esta circunferencia es la curva de nivel de f que pasa por el punto (1, 2) (*véase* la Figura 12.24). Como indica el siguiente teorema, esta perpendicularidad no es una coincidencia.

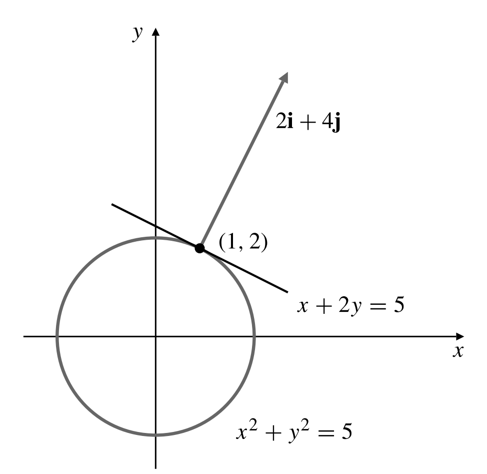


Figura 12.24 El gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en (1, 2) es normal a la curva de nivel de f que pasa por el punto (1, 2).

■

TEOREMA 6 Si $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b) y $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(a, b)$ es un vector normal a la curva de nivel de f que pasa por (a, b).

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ una parametrización de la curva de nivel de f tal que $x(0) = a$ e $y(0) = b$. Entonces, para todo t cercano a 0, $f(x(t), y(t)) = f(a, b)$. Diferenciando esta ecuación con respecto a t y utilizando la Regla de la Cadena, obtenemos

$$f_1(x(t), y(t))\,\frac{dx}{dt} + f_2(x(t), y(t))\,\frac{dy}{dt} = 0$$

En $t = 0$, esto indica que $\nabla f(a, b) \bullet \left.\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = 0$, es decir, ∇f es perpendicular al vector tangente $d\mathbf{r}/dt$ a la curva de nivel en (a, b).

Derivadas direccionales

Las derivadas parciales primeras $f_1(a, b)$ y $f_2(a, b)$ proporcionan las tasas de cambio de $f(x, y)$ en (a, b), medidas en las direcciones de los ejes x e y positivos, respectivamente. Si se desea conocer con qué rapidez cambia $f(x, y)$ cuando nos movemos por el dominio de f desde el punto (a, b) en alguna otra dirección, se requiere una **derivada direccional** más general. Podemos especificar la dirección mediante un vector distinto de cero. Es más cómodo utilizar un *vector unitario*.

DEFINICIÓN 7

Sea $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ un vector unitario, tal que $u^2 + v^2 = 1$. La **derivada direccional** de $f(x, y)$ en el punto (a, b) y en la dirección de $\mathbf{u}$ es la tasa de cambio de $f(x, y)$ con respecto a la distancia medida desde (a, b) siguiendo un rayo en la dirección de $\mathbf{u}$ en el plano xy (*véase* la Figura 12.25). La derivada direccional se expresa como

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a + hu,\ b + hv) - f(a,\ b)}{h}$$

También se puede expresar como

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \frac{d}{dt}\, f(a + tu, b + tv)\Big|_{t=0}$$

si existe la derivada del miembro derecho.

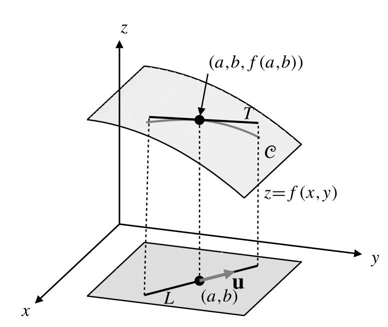


Figura 12.25 Un vector unitario $\mathbf{u}$ determina una recta L que pasa por el punto (a, b) en el dominio de f. El plano vertical que contiene a L corta a la gráfica de f formando una curva $\mathcal{C}$, cuya tangente T en $(a, b, f(a, b))$ tiene pendiente en $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$.

Obsérvese que las derivadas direccionales en direcciones paralelas a los ejes coordenados son directamente las derivadas parciales primeras: $D_{\mathbf{i}}f(a, b) = f_1(a, b)$, $D_{\mathbf{j}}f(a, b) = f_2(a, b)$, $D_{-\mathbf{i}}f(a, b) = -f_1(a, b)$ y $D_{-\mathbf{j}}f(a, b) = -f_2(a, b)$. El siguiente teorema muestra cómo se puede utilizar el gradiente para calcular cualquier derivada direccional.

TEOREMA 7 **Uso del gradiente para calcular derivadas direccionales**

Si f es diferenciable en (a, b) y $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces la derivada direccional de f en el punto (a, b) y en la dirección de $\mathbf{u}$ se expresa como

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(a, b)$$

DEMOSTRACIÓN Por la Regla de la Cadena:

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \frac{d}{dt} f(a + tu, b + tv)\Big|_{t=0}$$
$$= u f_1(a, b) + v f_2(a, b) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(a, b)$$

Ya sabemos que tener derivadas parciales en un punto no implica que una función sea continua en dicho punto, y ni siquiera que sea diferenciable. Lo mismo se puede decir sobre las derivadas direccionales. Es posible que una función tenga derivada direccional en cualquier dirección desde un punto dado y aun así no sea continua en dicho punto. *Véase* el Ejercicio 37 posterior donde se presenta un ejemplo de una función de ese tipo.

Dado cualquier vector **v** distinto de cero, siempre se puede obtener un vector unitario en la misma dirección dividiendo **v** por su longitud. La derivada direccional de f en (a, b) y en la dirección de **v** se expresa, por tanto, como

$$D_{\mathbf{v}/|\mathbf{v}|} f(a, b) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \bullet \nabla f(a, b)$$

Ejemplo 2 Calcule la tasa de cambio de $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ en (0, 1), medida en cada una de las siguientes direcciones:

(a) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, (b) $\mathbf{j} - 2\mathbf{i}$, (c) $3\mathbf{i}$, (d) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Solución Calculamos

$$\nabla f(x, y) = (2y^3 + 2xy^2)\mathbf{i} + (4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y)\mathbf{j}$$
$$\nabla f(0, 1) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

(a) La derivada direccional de f en (0, 1) y en la dirección de $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ es

$$\frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}{|\mathbf{i} + 2\mathbf{j}|} \bullet (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \frac{2 + 8}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Obsérvese que $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ apunta en la misma dirección que $\nabla f(0, 1)$, por lo que la derivada direccional es positiva e igual a la longitud de $\nabla f(0, 1)$.

(b) La derivada direccional de f en (0, 1) y en la dirección de $\mathbf{j} - 2\mathbf{i}$ es

$$\frac{-2\mathbf{i} + \mathbf{j}}{|-2\mathbf{i} + \mathbf{j}|} \bullet (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \frac{-4 + 4}{\sqrt{5}} = 0$$

Como $\mathbf{j} - 2\mathbf{i}$ es perpendicular a $\nabla f(0, 1)$, es tangente a la curva de nivel de f que pasa por (0, 1), por lo que la derivada direccional en esa dirección es cero.

(c) La derivada direccional de f en (0, 1) y en la dirección de $3\mathbf{i}$ es

$$\mathbf{i} \bullet (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = 2$$

Como se dijo anteriormente, la derivada direccional de f en la dirección del eje x positivo es precisamente $f_1(0, 1)$.

(d) La derivada direccional de f en (0, 1) y en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es

$$\frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{|\mathbf{i} + \mathbf{j}|} \bullet (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \frac{2 + 4}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Si nos movemos por la superficie $z = f(x, y)$ partiendo del punto (0, 1, 1) y en una dirección que forme ángulos horizontales de 45º con las direcciones positivas de los ejes x e y, estaremos subiendo a razón de $3\sqrt{2}$ unidades verticales por unidad horizontal de desplazamiento.

Observación Una dirección del plano se puede especificar mediante un ángulo polar. La dirección que forma un ángulo ϕ con la dirección positiva del eje x corresponde al vector unitario (*véase* la Figura 12.26)

$$\mathbf{u}_\phi = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}$$

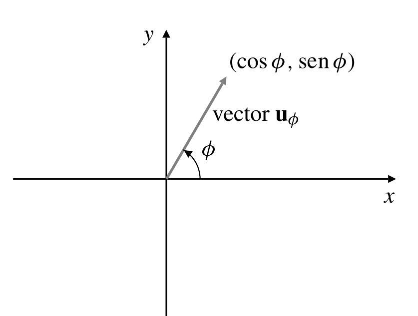


Figura 12.26 El vector unitario especificado por un ángulo polar ϕ.

por lo que la derivada direccional de f en (x, y) en esa dirección es

$$D_\phi f(x, y) = D_{\mathbf{u}_\phi} f(x, y) = \mathbf{u}_\phi \bullet \nabla f(x, y) = f_1(x, y)\cos\phi + f_2(x, y)\operatorname{sen}\phi$$

Nótese el uso del símbolo $D_\phi f(x, y)$ para indicar la derivada de f con respecto a la *distancia* medida en la dirección ϕ.

Como se ha observado en el ejemplo anterior, el Teorema 7 proporciona una interpretación útil del vector gradiente. Dado cualquier vector unitario $\mathbf{u}$ tenemos

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(a, b) = |\nabla f(a, b)|\cos\theta$$

siendo θ el ángulo que forman los vectores $\mathbf{u}$ y $\nabla f(a, b)$. Como $\cos\theta$ sólo toma valores entre -1 y 1, $D_{\mathbf{u}} f(a, b)$ sólo toma valores entre $-|\nabla f(a, b)|$ y $|\nabla f(a, b)|$. Es más, $D_{\mathbf{u}} f(a, b) = -|\nabla f(a, b)|$ si y sólo si $\mathbf{u}$ apunta en la dirección opuesta a $\nabla f(a, b)$ (de forma que $\cos\theta = -1$), y $D_{\mathbf{u}} f(a, b) = |\nabla f(a, b)|$ si y sólo si $\mathbf{u}$ apunta en la misma dirección que $\nabla f(a, b)$ (de forma que $\cos\theta = 1$). La derivada direccional es cero en la dirección $\theta = \pi/2$; esta es la dirección de la (tangente a la) curva de nivel de f que pasa por (a, b).

Resumimos estas propiedades del gradiente como sigue:

Propiedades geométricas del vector gradiente

(i) En (a, b), $f(x, y)$ tiene su máxima tasa de crecimiento en la dirección del vector gradiente $\nabla f(a, b)$. La máxima tasa de incremento es $|\nabla f(a, b)|$.
(ii) En (a, b), $f(x, y)$ tiene su máxima tasa de decrecimiento en la dirección de $-\nabla f(a, b)$. La máxima tasa de decrecimiento es $|\nabla f(a, b)|$.
(iii) La tasa de cambio de $f(x, y)$ en (a, b) es cero en direcciones tangentes a la curva de nivel de f que pasa por (a, b).

Obsérvese de nuevo el mapa topográfico de la Figura 12.6 en la Sección 12.1. Las corrientes del mapa fluyen en la dirección de la máxima pendiente, es decir, en la dirección de $-\nabla f$, siendo f la elevación de la tierra. Por tanto, las corrientes cruzan las curvas de nivel de f formando ángulos rectos. Como las corrientes, un esquiador experto escogería una trayectoria cercana a la dirección del gradiente negativo, mientras que un esquiador novato preferiría permanecer más paralelo las curvas de nivel.

Ejemplo 3 La temperatura en la posición (x, y) en una región del plano xy es de T °C, siendo

$$T(x, y) = x^2 e^{-y}$$

¿En qué dirección a partir del punto (2, 1) crece más rápidamente la temperatura? ¿Cuál es la tasa de crecimiento de f en esa dirección?

Solución Tenemos que

$$\nabla T(x, y) = 2xe^{-y}\mathbf{i} - x^2e^{-y}\mathbf{j}$$
$$\nabla T(2, 1) = \frac{4}{e}\mathbf{i} - \frac{4}{e}\mathbf{j} = \frac{4}{e}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

En (2, 1), $T(x, y)$ crece con la máxima velocidad en la dirección del vector $\mathbf{i} - \mathbf{j}$. La tasa de incremento en esta dirección es $|\nabla T(2, 1)| = 4\sqrt{2}/e$ °C/unidad de distancia.

Ejemplo 4 Una escaladora está de pie al lado de una corriente en la ladera de una montaña, examinando su mapa de la región. La altura de la tierra (en metros) en una posición cualquiera (x, y) se expresa mediante la función

$$h(x, y) = \frac{20\,000}{3 + x^2 + 2y^2}$$

donde x e y (en kilómetros) indican las coordenadas del punto en el mapa de la escaladora. La escaladora está en el punto (3, 2).

(a) ¿Cuál es la dirección de flujo de la corriente en (3, 2) sobre el mapa de la escaladora? ¿Con qué pendiente desciende la corriente en su posición?
(b) Calcule la ecuación de la trayectoria de la corriente en el mapa de la escaladora.
(c) ¿Con qué ángulo respecto a la trayectoria de la corriente (sobre el mapa) debería desplazarse la escaladora si desea escalar con una inclinación de 15° respecto a la horizontal?
(d) Dibuje aproximadamente el mapa de la escaladora, mostrando algunas curvas de elevación constante y relejando la corriente.

Solución

(a) Empezamos calculando el gradiente de h y su longitud en (3, 2):

$$\nabla h(x, y) = -\frac{20\,000}{(3 + x^2 + 2y^2)^2}(2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j})$$
$$\nabla h(3, 2) = -100(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$$
$$|\nabla h(3, 2)| = 500$$

La corriente fluye en la dirección cuya proyección horizontal en (3, 2) es $-\nabla h(3, 2)$, es decir, en la dirección horizontal del vector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. La corriente desciende a una tasa de 500 m/km, es decir, 0.5 m por cada metro horizontal recorrido.

(b) Las coordenadas del mapa son las coordenadas (x, y) en el dominio de la función de altura h. Podemos calcular la ecuación de la trayectoria de la corriente en el mapa de la región planteando una ecuación diferencial para relacionar el cambio de posición a lo largo de dicha trayectoria. Si el vector $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ es tangente a la trayectoria de la corriente en el punto (x, y) del mapa, entonces $d\mathbf{r}$ es paralelo a $\nabla h(x, y)$. Por tanto, los componentes de estos dos vectores son proporcionales:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{4y} \quad \text{o} \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación se obtiene $\ln y = 2\ln x + \ln C$, o $y = Cx^2$. Como la trayectoria de la corriente pasa por el punto (3, 2), tenemos que $C = 2/9$ y por consiguiente la ecuación es $9y = 2x^2$.

(c) Supongamos que la escaladora se desplaza desde el punto (3, 2) en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$. Ascenderá con una inclinación de 15° si la derivada direccional de h en la dirección de $\mathbf{u}$ es $1000\tan 15° \approx 268$ (el factor de 1000 compensa el hecho de que las unidades verticales son metros y las unidades horizontales son kilómetros). Si θ es el ángulo que forman $\mathbf{u}$ y la dirección de la corriente, entonces

$$500\cos\theta = |\nabla h(3, 2)|\cos\theta = D_{\mathbf{u}}h(3, 2) \approx 268$$

Por tanto, $\cos\theta \approx 0.536$ y $\theta \approx 57.6^{\circ}$. La escaladora debe moverse en una dirección que forme un ángulo horizontal de aproximadamente 58º con la dirección ascendente de la corriente.

(d) La Figura 12.27 muestra un dibujo del mapa.

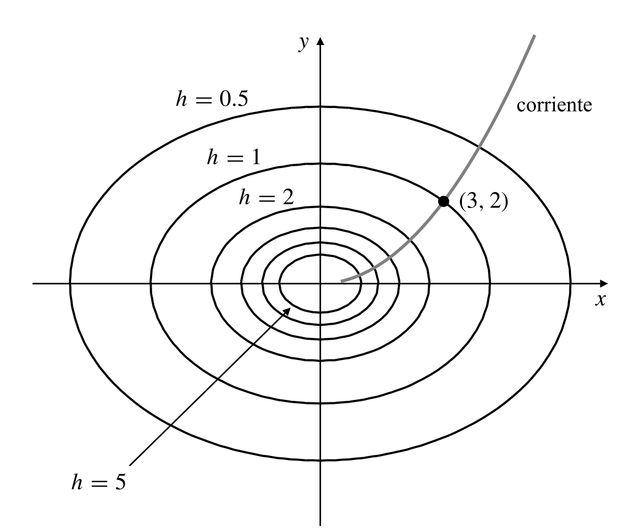


Figura 12.27 El mapa de la escaladora. A diferencia de la mayoría de las montañas, ésta tiene contornos perfectamente elípticos.

Ejemplo 5 Calcule la derivada direccional segunda de $f(x, y)$ en la dirección que forma un ángulo ϕ con el eje x positivo.

Solución Como se ha observado anteriormente, la derivada direccional primera es

$$D_{\phi} f(x, y) = (\cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}) \bullet \nabla f(x, y) = f_1(x, y)\cos\phi + f_2(x, y)\operatorname{sen}\phi$$

Por tanto, la derivada direccional segunda es

$$\begin{aligned} D^2_{\phi} f(x, y) &= D_{\phi}(D_{\phi} f(x, y)) \\ &= (\cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}) \bullet \nabla(f_1(x, y)\cos\phi + f_2(x, y)\operatorname{sen}\phi) \\ &= (f_{11}(x, y)\cos\phi + f_{21}(x, y)\operatorname{sen}\phi)\cos\phi \\ &\quad + (f_{12}(x, y)\cos\phi + f_{22}(x, y)\operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}\phi \\ &= f_{11}(x, y)\cos^2\phi + 2f_{12}(x, y)\cos\phi\operatorname{sen}\phi + f_{22}(x, y)\operatorname{sen}^2\phi \end{aligned}$$

Nótese que si $\phi = 0$ o $\phi = \pi$ (de forma que la derivada direccional sea paralela al eje x), entonces $D^2_{\phi} f(x, y) = f_{11}(x, y)$. De forma similar, si $\phi = \pi/2$ o $3\pi/2$, entonces $D^2_{\phi} f(x, y) = f_{22}(x, y)$.

Tasas de cambio percibidas por un observador en movimiento

Supongamos que un observador se mueve por el plano xy, midiendo el valor de una función $f(x, y)$ definida en dicho plano cuando pasa por cada punto (x, y) (por ejemplo, $f(x, y)$ podría ser la temperatura en (x, y)). Si el observador se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ cuando pasa por el punto (a, b), ¿con qué rapidez observará que cambia $f(x, y)$ en ese momento?

En el momento en cuestión el observador se mueve en la dirección del vector unitario $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. La tasa de cambio de $f(x, y)$ en (a, b) y en esa dirección es

$$D_{\mathbf{v}/|\mathbf{v}|} f(a, b) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \bullet \nabla f(a, b)$$

medida en unidades de f por unidad de distancia en el plano xy. Para convertir esta tasa a unidades de f por unidad de tiempo, debemos multiplicar por el módulo de la velocidad del observador, $|\mathbf{v}|$, en unidades de distancia por unidad de tiempo. Por tanto, la tasa de cambio con el tiempo de $f(x, y)$, tal como la mide un observador que pasa por el punto (a, b), es

$$|\mathbf{v}|\,\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \bullet \nabla f(a, b) = \mathbf{v} \bullet \nabla f(a, b)$$

Resulta natural extender nuestro uso del símbolo $D_{\mathbf{v}} f(a, b)$ a la representación de esta tasa aun cuando $\mathbf{v}$ no sea (necesariamente) un vector unitario. Así,

La tasa de cambio de $f(x, y)$ en el punto (a, b), medida por un observador que se mueve en dicho punto (a, b) con velocidad $\mathbf{v}$, es

$$D_{\mathbf{v}} f(a, b) = \mathbf{v} \bullet \nabla f(a, b)$$

unidades de f por unidad de tiempo.

Si la escaladora del Ejemplo 4 se desplaza desde el punto (3, 2) con velocidad horizontal $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$ km/h, estará escalando con una velocidad de

$$\mathbf{v} \bullet \nabla h(3, 2) = (-\mathbf{i} - \mathbf{j}) \bullet \left(-\frac{1}{10}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})\right) = \frac{7}{10}\ \text{km/h}$$

Tal como se ha definido, $D_{\mathbf{v}} f$ es la componente espacial de la derivada de f siguiendo el movimiento. *Véase* el Ejemplo 6 de la Sección 12.5. La tasa de cambio de los valores que se leerían en un termómetro en movimiento en ese ejemplo se expresarían como

$$\frac{dT}{dt} = D_{\mathbf{v}} T(x, y, z, t) + \frac{\partial T}{\partial t}$$

siendo $\mathbf{v}$ la velocidad del termómetro en movimiento y $D_{\mathbf{v}} T = \mathbf{v} \bullet \nabla T$. El gradiente se toma sólo con respecto a las *tres variables espaciales* (seguidamente se considera el gradiente en el espacio tridimensional).

El gradiente en tres y más dimensiones

Por analogía con el caso bidimensional, una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n variables que tenga derivadas parciales primeras, tiene un gradiente que se expresa como

$$\nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathbf{e_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathbf{e_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathbf{e_n}$$

siendo $\mathbf{e}_j$ el vector unitario que va desde el origen hasta un punto situado a una distancia unidad del mismo en el eje coordenado j. En particular, para el caso de una función de tres variables,

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

La superficie de nivel de $f(x, y, z)$ que pasa por el punto (a, b, c) tiene un plano tangente en dicho punto si f es diferenciable en (a, b, c) y $\nabla f(a, b, c) \neq \mathbf{0}$.

Para funciones de cualquier número de variables, el vector $\nabla f(P_0)$ es normal a la «superficie de nivel» de f que pasa por el punto P_0 (es decir, la hipersuperficie cuya ecuación es $f(x_1, ..., x_n) = f(P_0)$), y, si f es diferenciable en P_0, su tasa de cambio en P_0 en la dirección del

vector unitario $\mathbf{u}$ está dada por $\mathbf{u} \bullet \nabla f(P_0)$. Con la ayuda de los gradientes se pueden obtener ecuaciones de planos tangentes a superficies en el espacio tridimensional.

Ejemplo 6 Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(a) Calcule $\nabla f(x, y, z)$ y $\nabla f(1, -1, 2)$.
(b) Obtenga una ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ en el punto $(1, -1, 2)$.
(c) ¿Cuál es la máxima tasa de incremento de f en $(1, -1, 2)$?
(d) ¿Cuál es la tasa de cambio de f con respecto a la distancia en el punto $(1, -1, 2)$, medida en la dirección que va de ese punto hacia el punto $(3, 1, 1)$?

Solución

(a) $\nabla f(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, por lo que $\nabla f(1, -1, 2) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
(b) El plano tangente requerido tiene como vector normal $\nabla f(1, -1, 2)$ (*véase* la Figura 12.28(a)). Por tanto, su ecuación es $2(x-1) - 2(y+1) + 4(z-2) = 0$ o, de forma sencilla, $x - y + 2z = 6$.
(c) La tasa máxima de incremento de f en $(1, -1, 2)$ es $|\nabla f(1, -1, 2)| = 2\sqrt{6}$, y se produce en la dirección del vector $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
(d) La dirección que va desde $(1, -1, 2)$ hacia $(3, 1, 1)$ corresponde al vector $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. La tasa de cambio de f con respecto a la distancia en esta dirección es

$$\frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{4+4+1}} \bullet (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \frac{4-4-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

es decir, f decrece con una tasa de 4/3 de unidad, por unidad de desplazamiento horizontal.

Ejemplo 7 La gráfica de una *función* $f(x, y)$ de dos variables es la gráfica de la *ecuación* $z = f(x, y)$ en el espacio tridimensional. Esta superficie es también la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$ de la función de tres variables

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z$$

Si f es diferenciable en (a, b) y $c = f(a, b)$, entonces g es diferenciable en (a, b, c) y

$$\nabla g(a, b, c) = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

es normal a $g(x, y, z) = 0$ en (a, b, c) (nótese que $\nabla g(a, b, c) \neq \mathbf{0}$, ya que su componente z es -1). Se deduce entonces que la gráfica de f tiene un plano tangente no vertical en (a, b) dado por

$$f_1(a, b)(x-a) + f_2(a, b)(y-b) - (z-c) = 0$$

o bien

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x-a) + f_2(a, b)(y-b)$$

Véase la Figura 12.28(b). Este resultado se ha obtenido, empleando un argumento diferente, en la Sección 12.3.

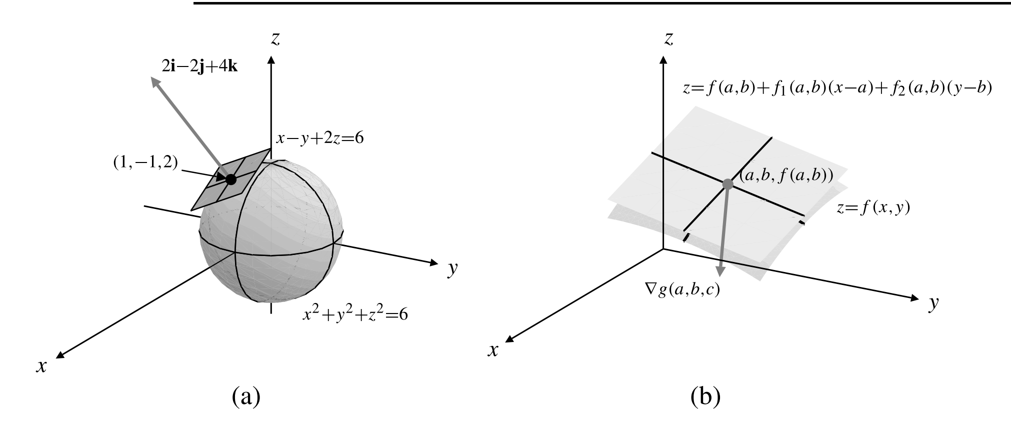


Figura 12.28
(a) El plano tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ en $(1, -1, 2)$.
(b) El gradiente de $f(x, y) - z$ en $(a, b, f(a, b))$ es normal al plano tangente a $z = f(x, y)$ en dicho punto.

¡¡ ATENCIÓN !! Asegúrese de entender la diferencia entre la gráfica de una función y una curva o superficie de nivel de dicha función (*véase* la exposición que sigue a este ejemplo). Aquí, la superficie $z = f(x, y)$ es la *gráfica* de la función f, pero es también una *superficie de nivel* de una función *diferente* g.

Algunas veces los estudiantes confunden las gráficas de funciones con las curvas o superficies de nivel de dichas funciones. En el ejemplo anterior hablábamos de una *superficie de nivel* de la función $g(x, y, z)$, que coincide con la *gráfica* de una función diferente $f(x, y)$. No hay que confundir esa superficie con la gráfica de g, que es una *hipersuperficie* tridimensional en el espacio de cuatro dimensiones, cuya ecuación es $w = g(x, y, z)$. De forma similar, no hay que confundir el *plano* tangente a la gráfica de $f(x, y)$ (es decir, el plano obtenido en el ejemplo anterior) con la *recta* tangente a la curva de nivel de $f(x, y)$ que pasa por el punto (a, b) y que está en el plano xy. En la ecuación de esta recta sólo intervienen x e y: $f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) = 0$.

Ejemplo 8 Calcule un vector tangente a la curva de intersección de las superficies

$$z = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad xyz + 30 = 0$$

en el punto $(-3, 2, 5)$.

Solución Las coordenadas del punto dado cumplen las ecuaciones de ambas superficies, por lo que dicho punto está en la intersección de éstas. Un vector tangente a esta curva en dicho punto será perpendicular a las normales a ambas superficies, es decir, a los vectores

$$\mathbf{n}_1 = \nabla(x^2 - y^2 - z)\Big|_{(-3,2,5)} = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}\Big|_{(-3,2,5)} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_2 = \nabla(xyz + 30)\Big|_{(-3,2,5)} = (yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})\Big|_{(-3,2,5)} = 10\mathbf{i} - 15\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

Por tanto, para obtener el vector tangente $\mathbf{T}$ podemos utilizar el producto vectorial de estas normales:

$$\mathbf{T} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & -4 & -1 \\ 10 & -15 & -6 \end{vmatrix} = 9\mathbf{i} - 46\mathbf{j} + 130\mathbf{k}$$

■



Observación El paquete **VectorCalculus** de Maple define una función **Gradient** que toma una pareja de argumentos (una expresión y una lista de variables) y produce el gradiente de dicha expresión con respecto a las variables:

```
> with(VectorCalculus) :
> f := x^2+y^3+z^4; G := Gradient(f, [x, y, z]) ;
```

$$f := x^2 + y^3 + z^4$$

$$G := 2x\bar{e}_x + 3y^2\bar{e}_y + 4z^3\bar{e}_z$$

Aunque el resultado de `G` parece un vector, realmente es algo diferente, denominado **campo vectorial**, que es una función vectorial de una variable vector. Este hecho se indica con las barras que aparecen sobre los vectores de la base de la salida. En los Capítulos 15 y 16 trataremos frecuentemente los campos vectoriales, por lo que aquí los consideraremos poco excepto para indicar que la evaluación de la función Gradient en un punto particular requiere la función `evalVF`, que toma dos argumentos: un campo vectorial y un vector donde evaluarlo.

```
> evalVF(G, <2, 3, –1>) ;
```

$$4e_x + 27e_y - 4e_z$$

Obsérvese que la salida es un vector, no un campo vectorial; no hay barras sobre los vectores de la base.

Si deseáramos definir una función gradiente (que denominaríamos `grad`) para obtener el valor anterior utilizando como entrada a `grad(f) (2, 3, –1)`, podríamos utilizar

```
> grad := g -> ((u, v, w) ->
>  evalVF(Gradient(g, [x, y, z]), <u, v, w>)) ;
```

Ejercicios 12.7

En los Ejercicios 1-6, calcule:

(a) El gradiente de las funciones dadas en los puntos indicados.

(b) Una ecuación del plano tangente a la gráfica de las funciones dadas en los puntos cuyas coordenadas x e y se proporcionan.

(c) Una ecuación de la recta tangente, en los puntos indicados, a las curvas de nivel de las funciones dadas que pasan por esos puntos.

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$ en $(2, -1)$

2. $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ en $(1, 1)$

3. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ en $(1, 2)$

4. $f(x, y) = e^{xy}$ en $(2, 0)$

5. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ en $(1, -2)$

6. $f(x, y) = \sqrt{1 + xy^2}$ en $(2, -2)$

En los Ejercicios 7-9, calcule una ecuación de los planos tangentes a las superficies de nivel de las funciones dadas que pasan por los puntos indicados.

7. $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2$ en $(1, -1, 1)$

8. $f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$ en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi, \pi\right)$

9. $f(x, y, z) = ye^{-x^2}\operatorname{sen} z$ en $(0, 1, \pi/3)$

En los Ejercicios 10-13, calcule las tasas de cambio de las funciones dadas en los puntos indicados y en las direcciones especificadas.

10. $f(x, y) = 3x - 4y$ en $(0, 2)$ y en la dirección del vector $-2\mathbf{i}$.

11. $f(x, y) = x^2y$ en $(-1, -1)$ y en la dirección del vector $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

12. $f(x, y) = \dfrac{x}{1+y}$ en $(0, 0)$ y en la dirección del vector $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

13. $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $(1, -2)$ y en la dirección que forma un ángulo (positivo) de 60^o con el eje x positivo.

14. Sea $f(x, y) = \ln|\mathbf{r}|$ con $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Demuestre que $\nabla f = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$.

15. Sea $f(x, y, z) = |\mathbf{r}|^{-n}$, con $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demuestre que $\nabla f = \dfrac{-n\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^{n+2}}$.

16. Demuestre que, en términos de coordenadas polares (r, θ) (siendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$), el gradiente de una función $f(r, \theta)$ se expresa como

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

siendo $\hat{\mathbf{r}}$ un vector unitario en la dirección del vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ un vector que forma un ángulo recto con $\hat{\mathbf{r}}$ en la dirección de θ creciente.

17. ¿En qué direcciones a partir del punto $(2, 0)$ tiene la función $f(x, y) = xy$ una tasa de cambio de -1? ¿Existen direcciones en las que la tasa de cambio sea -3? ¿Y -2?

18. ¿En qué direcciones a partir del punto (a, b, c) se incrementa la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ con la mitad de su tasa máxima de incremento en dicho punto?

19. Calcule $\nabla f(a, b)$ para la función diferenciable $f(x, y)$, dadas las derivadas direccionales

$$D_{(\mathbf{i}+\mathbf{j})/\sqrt{2}}\, f(a, b) = 3\sqrt{2} \text{ y } D_{(3\mathbf{i}-4\mathbf{j})/5}\, f(a, b) = 5$$

20. Si $f(x, y)$ es diferenciable en (a, b), ¿qué condición deberían satisfacer los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 para que el gradiente $\nabla f(a, b)$ se pudiera determinar a partir de los valores de las derivadas direccionales $D_{\phi 1}\, f(a, b)$ y $D_{\phi 2}\, f(a, b)$?

21. La temperatura $T(x, y)$ de puntos en el plano xy se expresa como $T(x, y) = x^2 - 2y^2$.

(a) Dibuje un diagrama de contornos de T que muestre algunas isotermas (curvas de temperatura constante).

(b) ¿En qué dirección debería moverse una hormiga que estuviera en la posición $(2, -1)$ si deseara enfriarse tan rápidamente como fuera posible?
(c) Si la hormiga se mueve en esa dirección con velocidad k (unidades de distancia por unidades de tiempo), ¿con qué tasa experimentará la disminución de temperatura?
(d) ¿Con qué tasa experimentaría la hormiga la disminución de temperatura si se moviera desde el punto $(2, -1)$ con velocidad k en la dirección del vector $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$?
(e) ¿A lo largo de qué curva que pasa por el punto $(2, -1)$ debería moverse la hormiga para seguir experimentando una tasa máxima de enfriamiento?

22. Calcule una ecuación de la curva del plano xy que pasa por el punto $(1, 1)$ y corta a todas las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^4 + y^2$ formando ángulos rectos.

23. Calcule una ecuación de la curva del plano xy que pasa por el punto $(2, -1)$ y corta a todas las curvas de nivel de la función $x^2y^3 = K$ formando ángulos rectos.

24. Calcule la derivada direccional segunda de $e^{-x^2-y^2}$ en $(a, b) \neq (0, 0)$ y en la dirección que se aleja directamente del origen.

25. Calcule la derivada direccional segunda de $f(x, y, z) = xyz$ en $(2, 3, 1)$ y en la dirección del vector $\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

26. Calcule un vector tangente a la curva de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 2$ e $y^2 + z^2 = 2$ en el punto $(1, -1, 1)$.

27. Repita el Ejercicio 26 para las superficies $x + y + z = 6$ y $x^2+y^2 + z^2 = 14$ y el punto $(1, 2, 3)$.

28. La temperatura en el espacio tridimensional está dada por

$$T(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + xz^2$$

En el instante $t = 0$ una mosca pasa por el punto $(1, 1, 2)$, volando según la trayectoria correspondiente a la intersección de las superficies $z = 3x^2 - y^2$ y $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$. Si la velocidad de la mosca es 7, ¿qué tasa de cambio de temperatura experimentará en $t = 0$?

29. Enuncie y demuestre una versión del Teorema 6 para una función de tres variables.

30. ¿Cuál es la superficie de nivel de $f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$ que pasa por (π, π, π)? ¿Cuál es el plano tangente a esa superficie de nivel en ese punto? (Compare este ejercicio con el Ejercicio 8 anterior).

31. Si $\nabla f(x, y) = 0$ en el disco $x^2 + y^2 < r^2$, demuestre que $f(x, y)$ es constante en dicho disco.

32. El Teorema 6 implica que la curva de nivel de $f(x, y)$ que pasa por (a, b) es suave (tiene tangente) en (a, b), siempre que f sea diferenciable en (a, b) y cumpla que $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$. Demuestre que la curva de nivel no necesita ser suave en (a, b) si $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$. (*Sugerencia*: Considere $f(x, y) = y^3 - x^2$ en $(0, 0)$).

33. Si $\mathbf{v}$ es un vector distinto de cero, exprese a $D_{\mathbf{v}}(D_{\mathbf{v}} f)$ en función de las componentes de $\mathbf{v}$ y de las derivadas parciales segundas de f. ¿Cuál es la interpretación de esta cantidad para un observador en movimiento?

*__34.__ Un observador se mueve de forma que su posición, velocidad y aceleración en el instante t se expresan como $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt$ y $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt$. Si la temperatura en la vecindad del observador depende sólo de la posición, $T = T(x, y, z)$, exprese la derivada segunda con respecto al tiempo de la temperatura tal como la mediría el observador en función de $D_{\mathbf{v}}$ y $D_{\mathbf{a}}$.

*__35.__ Repita el Ejercicio 34, pero con T dependiendo explícitamente del tiempo además de la posición: $T = T(x, y, z, t)$.

36. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Calcule $\nabla f(0, 0)$.
(b) Utilice la definición de derivada direccional para calcular $D_{\mathbf{u}} f(0, 0)$, siendo $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.
(c) ¿Es $f(x, y)$ diferenciable en $(0, 0)$? ¿Por qué?

37. Sea $f(x, y) = \begin{cases} 2x^2y/(x^4 + y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Utilice la definición de derivada direccional como límite (Definición 7) para demostrar que $D_{\mathbf{u}} f(0, 0)$ existe para todo vector unitario $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ del plano. Concretamente, demuestre que $D_{\mathbf{u}} f(0, 0) = 0$ si $v = 0$, y que $D_{\mathbf{u}} f(0, 0) = 2u^2/v$ si $v \neq 0$. Sin embargo, como se demostró en el Ejemplo 4 de la Sección 12.2, $f(x, y)$ no tiene límite cuando $(x, y) \to (0\ 0)$, por lo que no es continua aquí. Incluso aunque una función tenga derivadas direccionales en todas las direcciones desde un punto, puede no ser continua en dicho punto.

12.8 Funciones implícitas

Al estudiar el cálculo de funciones de una variable, encontramos ejemplos de funciones que se definían implícitamente como soluciones de ecuaciones de dos variables. Supongamos, por ejemplo, que $F(x, y) = 0$ es una de esas ecuaciones. Supongamos también que el punto (a, b) satisface la ecuación, y que F tiene derivadas parciales primeras continuas (y, por tanto, es diferenciable) en todos los puntos próximos a (a, b). ¿Se puede despejar y como función de x en la ecuación, cerca del punto (a, b)? Es decir, ¿existe alguna función $y(x)$ definida en algún intervalo $I = (a - h, a + h)$ (siendo $h > 0$) que cumpla que $y(a) = b$, y tal que

$$F(x, y(x)) = 0$$

se cumpla para todo x en el intervalo I? Si existe tal función $y(x)$, podemos intentar calcular su derivada en $x = a$, diferenciando la ecuación $F(x, y) = 0$ implícitamente con respecto a x y evaluando el resultado en (a, b):

$$F_1(x, y) + F_2(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

de forma que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = -\frac{F_1(a, b)}{F_2(a, b)}, \qquad \text{siempre que} \qquad F_2(a, b) \neq 0$$

Obsérvese, sin embargo, que la condición $F_2(a, b) \neq 0$ requerida para el cálculo de $y'(a)$ garantiza en sí misma que la solución $y(x)$ existe. Esta condición, junto con la diferenciabilidad de $F(x, y)$ cerca de (a, b), implica que la curva de nivel $F(x, y) = F(a, b)$ tiene una tangente *no vertical* cerca de (a, b), por lo que alguna parte de la curva de nivel cerca de (a, b) debe ser la gráfica de una función de x (*véase* la Figura 12.29; la parte de la curva $F(x, y) = 0$ en el disco sombreado centrado en $P_0 = (a, b)$ es la gráfica de una función $y(x)$ porque cualquier recta vertical cruza cualquier parte de la curva sólo una vez. Los únicos puntos de la curva donde no se puede dibujar un disco con esa propiedad son V_1, V_2 y V_3, donde la curva tiene una tangente vertical, es decir, donde $F_2(x, y) = 0$). Éste es un caso especial del Teorema de la Función Implícita, que enunciaremos de forma más general posteriormente en esta sección.

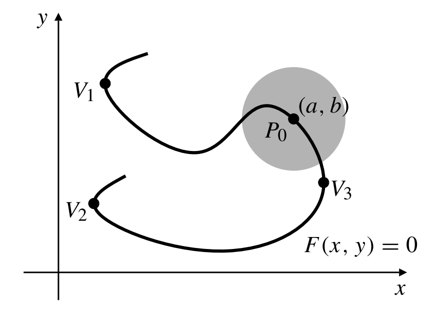


Figura 12.29 La ecuación $F(x, y) = 0$ permite despejar y como función de x cerca de P_0 o cerca de cualquier otro punto, excepto los tres donde la curva tiene tangente vertical.

Cuando la ecuación es de varias variables, la situación es similar. Por ejemplo, podemos preguntarnos si la ecuación

$$F(x, y, z) = 0$$

define z como función de x e y (es decir, $z = z(x, y)$) cerca de algún punto P_0 con coordenadas (x_0, y_0, z_0) que cumpla la ecuación. Si es así, y si las derivadas parciales primeras de F son continuas cerca de P_0, entonces se pueden obtener las derivadas parciales de z en (x_0, y_0) mediante diferenciación implícita de la ecuación $F(x, y, z) = 0$ con respecto a x e y:

$$F_1(x, y, z) + F_3(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{y} \qquad F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

de forma que

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,\, y_0)} = -\frac{F_1(x_0,\ y_0,\ z_0)}{F_3(x_0,\ y_0,\ z_0)} \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,\, y_0)} = -\frac{F_2(x_0,\ y_0,\ z_0)}{F_3(x_0,\ y_0,\ z_0)}$$

siempre que $F_3(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Como F_3 es la componente z del gradiente de F, esta condición implica que la superficie de nivel de F que pasa por el punto P_0 no tiene un vector normal horizontal, por lo que no es vertical (es decir, no es paralela al eje z). Por tanto, parte de la superficie cerca de P_0 debe ser de hecho la gráfica de una función $z = z(x, y)$. De forma similar, en $F(x, y, z) = 0$ se puede despejar x como función de y y z cerca de los puntos donde $F_1 \neq 0$ y $y = y(x, z)$ cerca de los puntos donde $F_2 \neq 0$.

Ejemplo 1 ¿Cerca de qué puntos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se puede despejar en dicha ecuación z en función de x e y? Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en esos puntos.

Solución La esfera es la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$ de la función

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

En la ecuación anterior se puede despejar $z = z(x, y)$ cerca de $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, siempre que P_0 no esté en el *ecuador* de la esfera, es decir, en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. El ecuador está formado por aquellos puntos que cumplen $F_3(x, y, z) = 0$. Si P_0 no está en el ecuador, entonces está en el hemisferio superior o en el inferior. El hemisferio superior tiene como ecuación $z = z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, y el inferior tiene como ecuación $z = z(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Si $z \neq 0$, se pueden calcular las derivadas parciales de la solución $z = z(x, y)$, diferenciando implícitamente la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \text{por lo que} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{por lo que} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

■

Sistemas de ecuaciones

La experiencia con ecuaciones lineales nos demuestra que estos sistemas de ecuaciones se podrán resolver de forma general cuando haya tantas variables como ecuaciones en el sistema. Por tanto, podemos esperar que una pareja de ecuaciones en varias variables determinen dos de dichas variables en función de las restantes. Por ejemplo, podíamos esperar que las ecuaciones

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z,\ w) = 0 \\ G(x,\ y,\ z,\ w) = 0 \end{cases}$$

posean, cerca de algún punto que las satisfaga, soluciones de una o más de las formas

$$\begin{cases} x = x(z,\ w) \\ y = y(z,\ w) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(y,\ w) \\ z = z(y,\ w) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(y,\ z) \\ w = w(y,\ z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = y(x,\ w) \\ z = z(x,\ w) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = y(x,\ z) \\ w = w(x,\ z) \end{cases} \qquad \begin{cases} z = z(x,\ y) \\ w = w(x,\ y) \end{cases}$$

Allí donde existan tales soluciones, podemos diferenciar el sistema dado implícitamente para obtener derivadas parciales de las soluciones.

Si tenemos una ecuación simple $F(x, y, z) = 0$ y deseamos calcular $\partial x/\partial z$, estamos entendiendo que x es una función de las restantes variables y y z, por lo que no hay posibilidad de equivocarse a la hora de decidir qué variable hay que mantener constante en el cálculo de la derivada

parcial. Sin embargo, supongamos que deseamos calcular $\partial x/\partial z$ dado el sistema $F(x, y, z, w) = 0$, $G(x, y, z, w) = 0$. Esto implica que x es una de las variables dependientes, y que z es una de las variables independientes, pero no implica cuál de las otras dos variables u y w es la variable dependiente y cuál la independiente. En pocas palabras, ¿a cuál de las situaciones

$$\begin{cases} x = x(z, w) \\ y = y(z, w) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = x(y, z) \\ w = w(y, z) \end{cases}$$

nos estamos enfrentando? Tal como se plantea, la pregunta es ambigua. Para evitar esta ambigüedad podemos especificar *en la notación de la derivada parcial* qué variable se tomará como la otra variable independiente y, por tanto, *permanecerá fija* durante la diferenciación. Así,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w \quad \text{implica la interpretación} \quad \begin{cases} x = x(z, w) \\ y = y(z, w) \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \quad \text{implica la interpretación} \quad \begin{cases} x = x(y, z) \\ w = w(y, z) \end{cases}$$

Ejemplo 2 Dadas las ecuaciones $F(x, y, z, w) = 0$ y $G(x, y, z, w) = 0$, donde F y G tienen derivadas parciales primeras continuas, calcule $(\partial x/\partial z)_w$.

Solución Diferenciamos las dos ecuaciones con respecto a z, considerando x e y como funciones de z y w, y manteniendo por tanto fija w:

$$F_1 \frac{\partial x}{\partial z} + F_2 \frac{\partial y}{\partial z} + F_3 = 0$$

$$G_1 \frac{\partial x}{\partial z} + G_2 \frac{\partial y}{\partial z} + G_3 = 0$$

Nótese que los términos $F_4(\partial w/\partial z)$ y $G_4(\partial w/\partial z)$ no están presentes, porque w y z son variables independientes, y w se mantiene fija durante la diferenciación. La pareja de ecuaciones anterior es lineal en $\partial x/\partial z$ y $\partial y/\partial z$. Eliminando $\partial y/\partial z$ (utilizando la Regla de Cramer, Teorema 6 de la Sección 10.6), obtenemos

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w = -\frac{F_3G_2 - F_2G_3}{F_1G_2 - F_2G_1}$$

A la luz de los ejemplos considerados anteriormente, no debe sorprendernos que la no anulación del denominador $F_1G_2 - F_2G_1$ en algún punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0)$ que cumpla el sistema $F = 0$, $G = 0$ sea suficiente para garantizar que el sistema tiene de hecho una solución de la forma $x = x(z, w)$, $y = y(z, w)$ cerca de P_0. Sin embargo, no intentaremos demostrar aquí este hecho.

Ejemplo 3 Sean x, y, u y v variables relacionadas por las ecuaciones

$$\begin{cases} u = x^2 + xy - y^2 \\ v = 2xy + y^2 \end{cases}$$

Calcule (a) $(\partial x/\partial u)_v$ y (b) $(\partial x/\partial u)_y$ en el punto donde $x = 2$ e $y = -1$.

Solución

(a) Para calcular $(\partial x/\partial u)_v$ consideraremos x e y como funciones de u y v y diferenciaremos las ecuaciones dadas con respecto a u, manteniendo v constante:

$$1 = \frac{\partial u}{\partial u} = (2x + y)\frac{\partial x}{\partial u} + (x - 2y)\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial u} = 2y\frac{\partial x}{\partial u} + (2x + 2y)\frac{\partial y}{\partial u}$$

En $x = 2$, $y = -1$, tenemos que

$$1 = 3\frac{\partial x}{\partial u} + 4\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$0 = -2\frac{\partial x}{\partial u} + 2\frac{\partial y}{\partial u}$$

Eliminando $\partial y/\partial u$ se llega al resultado $(\partial x/\partial u)_v = 1/7$.

(b) Para calcular $(\partial x/\partial u)_y$, consideraremos x y v como funciones de y y u y diferenciaremos las ecuaciones dadas con respecto a u, manteniendo y constante:

$$1 = \frac{\partial u}{\partial u} = (2x + y)\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial v}{\partial u} = 2y\frac{\partial x}{\partial u}$$

En $x = 2$, $y = -1$, la primera ecuación produce inmediatamente $(\partial x/\partial u)_y = 1/3$. ■

Sucede a menudo que las variables independientes en un problema surgen claramente del contexto, o bien se pueden escoger desde el principio. En cualquier caso, no se producirá ambigüedad, y podremos omitir de forma segura los subíndices que muestran qué variables se mantienen constantes. El siguiente ejemplo está extraído de la termodinámica de un gas ideal.

Ejemplo 4 **(Cambios reversibles en un gas ideal)** El estado de un sistema cerrado que contiene n moles de un gas ideal se caracteriza por tres variables de estado (presión, volumen y temperatura, P, V y T, respectivamente), que satisfacen la ecuación de estado de un gas ideal:

$$PV = nRT$$

donde R es la constante universal de los gases. Esta ecuación se puede considerar como la definición de una de las tres variables en función de las otras dos. La energía interna, E, y la entropía, S, del sistema son magnitudes termodinámicas que dependen de las variables de estado, y que por tanto se pueden expresar en función de dos cualesquiera de dichas variables P, V y T. Escojamos V y T como variables independientes y escribamos, por tanto, $E = E(V, T)$ y $S = S(V, T)$. Para procesos reversibles en el sistema, la primera y segunda ley de la termodinámica implican que los cambios infinitesimales de estas magnitudes deben satisfacer la ecuación diferencial

$$T\,dS = dE + P\,dV$$

Deduzca que, para tales procesos, E es independiente de V y depende sólo de la temperatura T.

Solución Calcularemos los diferenciales dS y dE y los sustituiremos en la ecuación diferencial. Se obtiene

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\,dV + \frac{\partial S}{\partial T}\,dT\right) = \frac{\partial E}{\partial V}\,dV + \frac{\partial E}{\partial T}\,dT + P\,dV$$

Dividiendo por T, sustituyendo P/T por nR/V (de la ecuación de estado) y agrupando coeficientes de dV y dT en los miembros opuestos de la ecuación, se obtiene

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} - \frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial V} - \frac{nR}{V}\right)dV = \left(\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial T} - \frac{\partial S}{\partial T}\right)dT$$

Como dV y dT son variables independientes, ambos coeficientes deben anularse. Por consiguiente,

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial V} + \frac{nR}{V}$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial T}$$

Diferenciamos ahora la primera de esas ecuaciones con respecto a T y la segunda con respecto a V. Utilizando la igualdad de las derivadas parciales mixtas tanto de S como de E, se obtiene el resultado deseado:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial V}+\frac{nR}{V}\right)=\frac{\partial^2 S}{\partial T\partial V}=\frac{\partial^2 S}{\partial V\partial T}=\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial T}\right)$$

$$\frac{-1}{T^2}\frac{\partial E}{\partial V}+\frac{1}{T}\frac{\partial^2 E}{\partial T\partial V}=\frac{1}{T}\frac{\partial^2 E}{\partial V\partial T}$$

$$\frac{-1}{T^2}\frac{\partial E}{\partial V}=0$$

Se deduce entonces que $\partial E/\partial V = 0$, por lo que E es independiente de V. ■

Determinantes jacobianos

Las derivadas parciales que se obtienen mediante diferenciación implícita de sistemas de ecuaciones son fracciones cuyos numeradores y denominadores se pueden expresar con comodidad en función de ciertos determinantes denominados *jacobianos*.

DEFINICIÓN 8

El **determinante jacobiano** (o simplemente **el jacobiano**) de las funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ con respecto a las variables x e y, es el determinante

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$$

De forma similar, el jacobiano de las funciones $F(x, y, ...)$ y $G(x, y, ...)$, con respecto a las variables x e y, es el determinante

$$\frac{\partial(F,\ G)}{\partial(x,\ y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_1 & F_2\\ G_1 & G_2\end{vmatrix}$$

La definición anterior se puede ampliar inmediatamente al jacobiano de n funciones (o variables) con respecto a n variables. Por ejemplo, el jacobiano de las funciones F, G y H con respecto a las variables x, y y z es el determinante

$$\frac{\partial(F,\ G,\ H)}{\partial(x,\ y,\ z)}=\begin{vmatrix}F_1 & F_2 & F_3\\ G_1 & G_2 & G_3\\ H_1 & H_2 & H_3\end{vmatrix}$$

Los jacobianos son los determinantes de las matrices jacobianas cuadradas correspondientes a transformaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, que se presentaron previamente en la Sección 12.6.

Ejemplo 5 En términos de jacobianos, el valor de $(\partial x/\partial z)_w$ obtenido a partir del sistema de ecuaciones

$$F(x, y, z, w) = 0, \qquad G(x, y, z, w) = 0$$

en el Ejemplo 2, se puede expresar de la forma

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w = -\frac{\dfrac{\partial(F,\,G)}{\partial(z,\,y)}}{\dfrac{\partial(F,\,G)}{\partial(x,\,y)}}$$

Obsérvese la pauta. El denominador es el jacobiano de F y G con respecto a las dos variables *dependientes*, x e y. El numerador es el mismo jacobiano, salvo que la variable dependiente x ha sido sustituida por la variable independiente z.

La pauta observada anteriormente es general. La enunciaremos formalmente en el Teorema de la Función Implícita que sigue.

El Teorema de la Función Implícita

El Teorema de la Función Implícita garantiza que, en ciertas circunstancias, se pueden despejar ciertas variables de sistemas de ecuaciones en función de otras variables, y proporciona una fórmula de las derivadas parciales de las funciones solución. Antes de enunciarlo, consideraremos un ejemplo ilustrativo simple.

Ejemplo 6 Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$F(x,\,y,\,s,\,t) = a_1x + b_1y + c_1s + d_1t + e_1 = 0$$
$$G(x,\,y,\,s,\,t) = a_2x + b_2y + c_2s + d_2t + e_2 = 0$$

Este sistema se puede expresar de forma matricial:

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{C}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

siendo

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones permiten despejar x e y como funciones de s y t, siempre que $\det(\mathcal{A}) \neq 0$; esto implica la existencia de la matriz inversa $\mathcal{A}^{-1}$ (Teorema 4 de la Sección 10.6), por lo que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{C}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \boldsymbol{E}\right)$$

Obsérvese que $\det(\mathcal{A}) = \partial(F,\,G)/\partial(x,\,y)$, por lo que la no anulación de este jacobiano garantiza que se pueden despejar x e y de las ecuaciones.

TEOREMA 8 **Teorema de la Función Implícita**

Consideremos un sistema de n ecuaciones con $n + m$ variables,

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) = 0 \\ F_{(2)}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ F_{(n)}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) = 0 \end{cases}$$

y un punto $P_0 = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$ que satisface el sistema. Supongamos que todas las funciones $F_{(i)}$ tienen derivadas parciales primeras continuas con respecto a todas

las variables x_j y y_k, ($i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$, $k = 1, ..., n$), cerca de P_0. Finalmente, supongamos que

$$\left.\frac{\partial(F_{(1)},\ F_{(2)},\ ...,\ F_{(n)})}{\partial(y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n)}\right|_{P_0} \neq 0$$

Entonces, se pueden despejar en el sistema las variables $y_1, y_2, ..., y_n$ como funciones de $x_1, x_2, ..., x_m$ cerca de P_0. Es decir, existen funciones

$$\phi_1(x_1, ..., x_m), ..., \phi_n(x_1, ..., x_m)$$

tales que

$$\phi_j(a_1, ..., a_m) = b_j, \qquad (j = 1, ..., n)$$

y tales que las ecuaciones

$$\begin{aligned} F_{(1)} &= (x_1, ..., x_m, \phi_1(x_1, ..., x_m), ..., \phi_n(x_1, ..., x_m)) = 0 \\ F_{(2)} &= (x_1, ..., x_m, \phi_1(x_1, ..., x_m), ..., \phi_n(x_1, ..., x_m)) = 0 \\ &\vdots \\ F_{(n)} &= (x_1, ..., x_m, \phi_1(x_1, ..., x_m), ..., \phi_n(x_1, ..., x_m)) = 0 \end{aligned}$$

se cumplen para todo $(x_1, ..., x_m)$ lo suficientemente cerca de $(a_1, ..., a_m)$.

Además,

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_m} = -\frac{\dfrac{\partial(F_{(1)}, F_{(2)}, ..., F_{(n)})}{\partial(y_1, ..., x_j, ..., y_n)}}{\dfrac{\partial(F_{(1)}, F_{(2)}, ..., F_{(n)})}{\partial(y_1, ..., y_i, ..., y_n)}}$$

Observación La fórmula de las derivadas parciales es una consecuencia de la Regla de Cramer (Teorema 6 de la Sección 10.6) aplicada a las n ecuaciones lineales con n incógnitas $\partial y_1/\partial x_j, ..., \partial y_n/\partial x_j$, obtenidas diferenciando cada una de las ecuaciones del sistema dado con respecto a x_j.

Ejemplo 7 Demuestre que el sistema

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ x^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$$

se puede resolver, obteniéndose (u, v) como una función (vectorial) de (x, y, z) cerca del punto P_0 tal que $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$, y calcule el valor de $\partial v/\partial y$ de la solución en $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Solución Sea $\begin{cases} F(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = xy^2 + xzu + yv^2 - 3 \\ G(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = x^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2 \end{cases}$. Entonces,

$$\left.\frac{\partial(F,\ G)}{\partial(u,\ v)}\right|_{P_0} = \left.\begin{vmatrix} xz & 2yv \\ -2uv^2 & 2x - 2u^2v \end{vmatrix}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Como este jacobiano no es cero, el Teorema de la Función Implícita nos asegura que las ecuaciones dadas se pueden resolver, obteniéndose u y v como funciones de x, y y z, es decir, como $(u, v) = \mathbf{f}(x, y, z)$. Dado que

$$\left.\frac{\partial(F,\ G)}{\partial(u,\ y)}\right|_{P_0} = \left.\begin{vmatrix} xz & 2xy + v^2 \\ -2uv^2 & x^3z \end{vmatrix}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

tenemos

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x,z} = -\left.\frac{\dfrac{\partial(F,\ G)}{\partial(u,\ y)}}{\dfrac{\partial(F,\ G)}{\partial(u,\ v)}}\right|_{P_0} = -\frac{7}{4}$$

■

Observación Si lo que hubiéramos deseado en este ejemplo hubiera sido calcular $\partial v/\partial y$, habría sido más fácil utilizar la técnica del Ejemplo 3 y diferenciar directamente las ecuaciones dadas con respecto a y, manteniendo x y z fijas.

Ejemplo 8 Si en las ecuaciones $x = u^2 + v^2$ e $y = uv$ se despejan u y v en función de x e y, calcule, donde sea posible,

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

A partir de aquí, demuestre que $\dfrac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = 1 \Big/ \dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$, suponiendo que el denominador no es cero.

Solución Las ecuaciones dadas se pueden expresar de la forma

$$F(u, v, x, y) = u^2 + v^2 - x = 0$$

$$G(u, v, x, y) = uv - y = 0$$

Sea

$$J = \frac{\partial(F,\ G)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2(u^2 - v^2) = \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$$

Si $u^2 \neq v^2$, entonces $J \neq 0$ y podemos calcular las derivadas parciales requeridas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,\ G)}{\partial(x,\ v)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -1 & 2v \\ 0 & u \end{vmatrix} = \frac{u}{2(u^2 - v^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,\ G)}{\partial(y,\ v)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 0 & 2v \\ -1 & u \end{vmatrix} = \frac{-2v}{2(u^2 - v^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,\ G)}{\partial(u,\ x)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ v & 0 \end{vmatrix} = \frac{-v}{2(u^2 - v^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,\ G)}{\partial(u,\ y)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ v & -1 \end{vmatrix} = \frac{2u}{2(u^2 - v^2)}$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = \frac{1}{J^2}\begin{vmatrix} u & -2v \\ -v & 2u \end{vmatrix} = \frac{J}{J^2} = \frac{1}{J} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}}$$

■

Observación Nótese en el ejemplo anterior que $\partial u/\partial x \neq 1/(\partial x/\partial u)$. Debe contrastarse este caso con la situación de una sola variable donde, si $y = f(x)$ y $dy/dx \neq 0$, entonces $x = f^{-1}(y)$ y $dx/dy = 1/(dy/dx)$. Ésta es otra razón para distinguir entre ∂ y d. Es el jacobiano, en vez de cualquier derivada parcial simple, el que toma el lugar de la derivada ordinaria en estas situaciones.

Observación Consideremos brevemente el caso general de transformaciones invertibles de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ son dos funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ cuyos componentes tienen derivadas parciales primeras continuas. Como se demostró en la Sección 12.6, la Regla de la Cadena implica que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La expresión anterior es exactamente la Regla de la Cadena aplicada a la composición $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Del Teorema 3(b) en la Sección 10.6 se deduce que los determinantes de estas matrices deben cumplir una ecuación similar:

$$\frac{\partial(z_1 \cdots z_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)} = \frac{\partial(z_1 \cdots z_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)} \frac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}$$

Si $\mathbf{f}$ es uno a uno y $\mathbf{g}$ es la inversa de $\mathbf{f}$, entonces $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, y $\partial(z_1 \cdots z_n)/\partial(x_1 \cdots x_n) = 1$, el determinante de la matriz identidad. Por consiguiente,

$$\frac{\partial(x_1 \cdots x_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}}$$

De hecho, la no anulación de ninguno de estos determinantes es suficiente para garantizar que $\mathbf{f}$ es uno a uno y tiene inversa. Éste es un caso especial del Teorema de la Función Implícita.

Los jacobianos aparecerán de nuevo al estudiar transformaciones de coordenadas en integrales múltiples, en el Capítulo 14.

Ejercicios 12.8

En los Ejercicios 1-12, calcule las derivadas indicadas de las ecuaciones dadas. ¿Qué condición sobre las variables garantizará la existencia de una solución que tenga la derivada indicada? Suponga que las tres funciones generales F, G y H tienen derivadas parciales primeras continuas.

1. $\dfrac{dx}{dy}$ si $xy^3 + x^4y = 2$

2. $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ si $xy^3 = y - z$

3. $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $z^2 + xy^3 = \dfrac{xz}{y}$

4. $\dfrac{\partial y}{\partial z}$ si $e^{yz} - x^2z\ln y = \pi$

5. $\dfrac{\partial x}{\partial w}$ si $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2w^2 - xw = 0$

6. $\dfrac{dy}{dx}$ si $F(x, y, x^2 - y^2) = 0$

7. $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ si $G(x, y, z, u, v) = 0$

8. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ si $F(x^2 - z^2, y^2 + xz) = 0$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ si $H(u^2w, v^2t, wt) = 0$

10. $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_u$ si $xyuv = 1$ y $x + y + u + v = 0$

11. $\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ si $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, y $x + 2y + 3z + 4w = 2$

12. $\dfrac{du}{dx}$ si $x^2y + y^2u - u^3 = 0$ y $x^2 + yu = 1$

13. Si $x = u^3 + v^3$ e $y = uv - v^2$ se resuelven expresando u y v en función de x e y, calcule

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

en el punto donde $u = 1$ y $v = 1$.

14. ¿Cerca de qué puntos (r, s) puede resolverse la transformación

$$x = r^2 + 2s, \qquad y = s^2 - 2r$$

obteniéndose r y s como funciones de x e y? Calcule los valores de las derivadas parciales primeras de la solución en el origen.

15. Calcule el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(r, \theta)$ de la transformación a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. ¿Cerca de qué puntos (r, θ) es la transformación uno a uno y por tanto invertible, permitiendo obtener r y θ como funciones de x e y?

16. Calcule el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(\rho, \phi, \theta)$, siendo

$$x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \text{ y } z = \rho\cos\phi$$

Las expresiones anteriores son la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares esféricas en el espacio tridimensional, que aparecerá en la Sección 14.6. ¿Cerca de qué puntos es la transformación uno a uno y por tanto invertible, permitiendo expresar ρ, ϕ y θ como funciones de x, y y z?

17. Demuestre que las ecuaciones

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3 \\ x^3z + 2y - uv = 2 \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases}$$

se pueden resolver, expresando x, y y z como funciones de u y v cerca del punto P_0 tal que $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$, y calcule $(\partial y/\partial u)_v$ en $(u, v) = (1, 1)$.

18. Demuestre que las ecuaciones $\begin{cases} xe^y + uz - \cos v = 2 \\ u\cos y + x^2v - yz^2 = 1 \end{cases}$ se pueden resolver, expresando u y v como funciones de x, y y z cerca del punto P_0 tal que $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ y $(u, v) = (1, 0)$, y calcule $(\partial u/\partial z)_{x,y}$ en $(x, y, z) = (2, 0, 1)$.

19. Calcule dx/dy para el sistema

$$F(x, y, z, w) = 0,\ G(x, y, z, w) = 0,\ H(x, y, z, w) = 0$$

20. Dado el sistema

$$F(x, y, z, u, v) = 0$$
$$G(x, y, z, u, v) = 0$$
$$H(x, y, z, u, v) = 0$$

¿cuántas posibles interpretaciones existen para $\partial x/\partial y$? Evalúelas.

21. Dado el sistema

$$F(x_1, x_2, ..., x_8) = 0$$
$$G(x_1, x_2, ..., x_8) = 0$$
$$H(x_1, x_2, ..., x_8) = 0$$

¿cuántas posibles interpretaciones existen para la derivada parcial $\dfrac{\partial x_1}{\partial x_2}$? Calcule $\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_4, x_6, x_7, x_8}$.

22. Si $F(x, y, z) = 0$ determina z como función de x e y, calcule $\partial^2z/\partial x^2$, $\partial^2z/\partial x\partial y$ y $\partial^2z/\partial y^2$ en función de las derivadas parciales de F.

23. Si $x = u + v$, $y = uv$ y $z = u^2 + v^2$ define z como función de x e y, calcule $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ y $\partial^2z/\partial x\partial y$.

24. Un cierto gas satisface la ley $pV = T - \dfrac{4p}{T^2}$, siendo p = presión, V = volumen y T = temperatura.

(a) Calcule $\partial T/\partial p$ y $\partial T/\partial V$ en el punto donde $p = V = 1$ y $T = 2$.

(b) Si las medidas de p y V producen $p = 1 \pm 0.001$ y $V = 1 \pm 0.002$, calcule el error máximo aproximado al obtener $T = 2$.

25. Si $F(x, y, z) = 0$, demuestre que $\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$. Obtenga resultados análogos para $F(x, y, z, u) = 0$ y para $F(x, y, z, u, v) = 0$. ¿Cuál es el caso general?

***26.** Si se resuelven las ecuaciones $F(x, y, u, v) = 0$ y $G(x, y, u, v) = 0$, expresando x e y como funciones de u y v, demuestre que

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \frac{\partial(F,\ G)}{\partial(u,\ v)} \Bigg/ \frac{\partial(F,\ G)}{\partial(x,\ y)}$$

***27.** Si se resuelven las ecuaciones $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, expresando u y v como funciones de x e y, demuestre que

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = 1 \Bigg/ \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$$

Sugerencia: Utilice el resultado del Ejercicio 26.

***28.** Si $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $u = h(r, s)$ y $v = k(r, s)$, entonces x e y se pueden expresar como funciones de r y s. Verifique por cálculo directo que

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ s)} = \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\,\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(r,\ s)}$$

que es un caso especial de la Regla de la Cadena para jacobianos.

***29.** Se dice que dos funciones, $f(x, y)$ y $g(x, y)$, son funcionalmente dependientes si una de ellas es función de la otra; es decir, si existe una función de una sola variable $k(t)$ tal que $f(x, y) = k(g(x, y))$ para todo x e y. Demuestre que en este caso $\partial(f, g)/\partial(x, y)$ se anula. Suponga que existen todas las derivadas necesarias.

***30.** Demuestre lo contrario del Ejercicio 29 como sigue: sean $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, y suponga que $\partial(u, v)/\partial(x, y) = \partial(f, g)/\partial(x, y)$ es idénticamente nula para todo x e y. Demuestre que $(\partial u/\partial x)_v$ es idénticamente nula. A partir de aquí u, considerada como función de x y v, es independiente de x; es decir, $u = k(v)$ para alguna función k de una variable. ¿Por qué implica esto que f y g son funcionalmente dependientes?

12.9 Aproximaciones mediante series de Taylor

Como en el caso de funciones de una variable, las representaciones mediante series de potencias y sus sumas parciales (polinomios de Taylor) proporcionan un método eficiente para determinar el comportamiento de una función suave de varias variables en las proximidades de un punto de su dominio. En esta sección presentaremos brevemente la extensión de las series de Taylor a este tipo de funciones. Como es habitual, realizaremos el desarrollo para funciones de dos variables, siendo clara la extensión al caso de más variables.

Para empezar, recordaremos la fórmula de Taylor para una función $F(x)$ con derivadas continuas hasta orden $n+1$ en el intervalo $[a, a+h]$:

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \frac{F''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{F^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

siendo X algún número comprendido entre a y $a+h$ (el último término de la fórmula es la forma de *Lagrange* del resto). En el caso especial de $a=0$ y $h=1$, esta fórmula se convierte en

$$F(1) = F(0) = F'(0) = \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

para algún valor θ entre 0 y 1.

Supongamos ahora que $f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas hasta de orden $n+1$ en todos los puntos de un conjunto abierto que contiene al segmento que une a los puntos (a, b) y $(a+h, b+k)$ de su dominio. Se puede obtener la fórmula de Taylor para $f(a+h, b+k)$ en potencias de h y k aplicando la fórmula de una variable presentada anteriormente a la función

$$F(t) = f(a+th, b+tk), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Es evidente que $F(0) = f(a, b)$ y $F(1) = f(a+h, b+k)$. Calculemos algunas derivadas de F:

$$\begin{aligned} F'(t) &= hf_1(a+th, b+tk) + kf_2(a+th, b+tk) \\ F''(t) &= h^2 f_{11}(a+th, b+tk) + 2hkf_{12}(a+th, b+tk) \\ &\quad + k^2 f_{22}(a+th, b+tk) \\ F'''(t) &= (h^3 f_{111} + 3h^2 k f_{112} + 3hk^2 f_{122} + k^3 f_{222})\Big|_{(a+th,\, b+tk)} \end{aligned}$$

El patrón de coeficientes es bastante obvio, pero la notación, en la que intervienen subíndices para indicar las derivadas parciales de f, se hace más y más compleja a medida que crece el orden de las derivadas. La notación se puede simplificar bastante utilizando $D_1 f$ y $D_2 f$ para indicar las derivadas parciales primeras de f con respecto a su primera y segunda variable. Como h y k son constantes y las derivadas parciales mixtas se pueden conmutar ($D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$), tenemos que

$$h^2 D_1^2 f + 2hkD_1 D_2 f + k^2 D_2^2 f = (hD_1 + kD_2)^2 f$$

y así sucesivamente. Por tanto,

$$\begin{aligned} F'(t) &= (hD_1 + kD_2) f(a+th, b+tk) \\ F''(t) &= (hD_1 + kD_2)^2 f(a+th, b+tk) \\ F'''(t) &= (hD_1 + kD_2)^3 f(a+th, b+tk) \\ &\vdots \\ F^{(m)}(t) &= (hD_1 + kD_2)^m f(a+th, b+tk) \end{aligned}$$

En particular, $F^{(m)}(0) = (hD_1 + kD_2)^m f(a, b)$. Entonces, la fórmula de Taylor $f(a + h, b + k)$ es

$$f(a + h, b + k) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} (hD_1 + kD_2)^m f(a, b) + R_n(h, k)$$
$$= \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} C_{mj} D_1^j D_2^{m-j} f(a, b) h^j k^{m-j} + R_n(h, k)$$

Nótese que $(hD_1 + kD_2)^m f(a, b)$ significa $((hD_1 + kD_2)^m f(|_{(a,b)}$, no $(hD_1 + kD_2)^m(f(a, b))$, que sería cero.

---

donde, utilizando el desarrollo binomial, tenemos

$$C_{mj} = \frac{1}{m!}\binom{m}{j} = \frac{1}{m!}\frac{m!}{j!(m-j)!} = \frac{1}{j!(m-j)!}$$

y donde el término de resto se expresa como

$$R_n(h, k) = \frac{1}{(n+1)!} (hD_1 + kD_2)^{n+1} f(a + \theta h, b + \theta k)$$

para algún valor θ comprendido entre 0 y 1. Si f tiene derivadas parciales de todos los órdenes y

$$\lim_{n\to\infty} R_n(h, k) = 0$$

entonces $f(a + h, b + k)$ se puede expresar como una serie de Taylor en potencias de h y k:

$$f(a + h, b + k) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} D_1^j D_2^{m-j} f(a, b) h^j k^{m-j}$$

Como en el caso de funciones de una variable, el polinomio de Taylor de grado n,

$$P_n(x, y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)} D_1^j D_2^{m-j} f(a, b)(x-a)^j (y-b)^{m-j}$$

proporciona la «mejor» aproximación mediante un polinomio de grado n a $f(x, y)$ en las cercanías de (a, b). Si en esta aproximación se hace $n = 1$, se reduce a la aproximación mediante plano tangente

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

Ejemplo 1 Calcule una aproximación mediante un polinomio de segundo grado a la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ cerca del punto (1, 2), y utilícela para estimar $\sqrt{(1.02)^2 + (1.97)^3}$.

Solución Para realizar la aproximación de segundo grado necesitamos los valores de las derivadas parciales de f hasta de segundo orden en (1, 2). Tenemos

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3} \qquad f(1, 2) = 3$$
$$f_1(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}} \qquad f_1(1, 2) = \frac{1}{3}$$
$$f_2(x, y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}} \qquad f_2(1, 2) = 2$$

$$f_{11}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^3)^{3/2}} \qquad f_{11}(1, 2) = \frac{8}{27}$$

$$f_{12}(x, y) = \frac{-3xy^2}{2(x^2 + y^3)^{3/2}} \qquad f_{12}(1, 2) = -\frac{2}{9}$$

$$f_{22}(x, y) = \frac{12x^2y + 3y^4}{4(x^2 + y^3)^{3/2}} \qquad f_{22}(1, 2) = \frac{2}{3}$$

Por tanto,

$$f(1 + h, 2 + k) \approx 3 + \frac{1}{3}h + 2k + \frac{1}{2!}\left(\frac{8}{27}h^2 + 2\left(-\frac{2}{9}\right)hk + \frac{2}{3}k^2\right)$$

o, haciendo $x = 1 + h$ e $y = 2 + k$,

$$f(x, y) = 3 + \frac{1}{3}(x - 1) + 2(y - 2) + \frac{4}{27}(x - 1)^2 - \frac{2}{9}(x - 1)(y - 2) + \frac{1}{3}(y - 2)^2$$

que es el polinomio de Taylor de segundo grado requerido para la función f cerca del punto (1, 2). Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\sqrt{(1.02)^2 + (1.97)^3} &= f(1 + 0.02, 2 - 0.03)\\ &\approx 3 + \frac{1}{3}(0.02) + 2(-0.03) + \frac{4}{27}(0.02)^2\\ &\quad - \frac{2}{9}(0.02)(-0.03) + \frac{1}{3}(-0.03)^2\\ &\approx 2.947\,159\,3\end{aligned}$$

A efectos de comparación: el valor verdadero es 2.947 136 6... La aproximación es exacta hasta 6 dígitos significativos.

Como se observó en el caso de funciones de una variable, en general no es necesario calcular las derivadas para determinar los coeficientes de una serie de Taylor o polinomio de Taylor. A menudo es mucho más fácil realizar cambios algebraicos sobre series conocidas. Por ejemplo, el ejemplo anterior se podría haber resuelto expresando f en la forma

$$\begin{aligned}f(1 + h, 2 + k) &= \sqrt{(1 + h)^2 + (2 + k)^3}\\ &= \sqrt{9 + 2h + h^2 + 12k + 6k^2 + k^3}\\ &= 3\sqrt{1 + \frac{2h + h^2 + 12k + 6k^2 + k^3}{9}}\end{aligned}$$

y aplicar después el desarrollo binomial

$$\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)t^2 + \cdots$$

con $t = \dfrac{2h + h^2 + 12k + 6k^2 + k^3}{9}$, para obtener los términos hasta de grado 2 en las variables h y k.

Ejemplo 2 Calcule el polinomio de Taylor de grado 3 en potencias de x e y para la función $f(x, y) = e^{x-2y}$.

Solución El polinomio de Taylor requerido será el polinomio de Taylor de grado 3 para e^t evaluado en $t = x - 2y$:

$$P_3(x, y) = 1 + (x - 2y) + \frac{1}{2!}(x - 2y)^2 + \frac{1}{3!}(x - 2y)^3$$
$$= 1 + x - 2y + \frac{1}{2}x^2 - 2xy + 2y^2 + \frac{1}{6}x^3 - x^2y + 2xy^2 - \frac{4}{3}y^3$$



Observación Por supuesto, se puede utilizar Maple para calcular polinomios de Taylor en varias variables mediante su función **mtaylor**, que, en función de la versión de Maple, puede ser necesario leer de la librería de Maple antes de utilizarla, si no es parte del Kernel.

```
> readlib(mtaylor) :
```

Los argumentos que se introducen en `mtaylor` son los siguientes:

(a) Una expresión en la que intervienen las variables del desarrollo.
(b) Una lista cuyos elementos son nombres de variables, o ecuaciones de la forma `variable=value`, que proporcionan las coordenadas del punto alrededor del que se calcula el desarrollo (si sólo se nombra una variable es equivalente a utilizar la ecuación `variable=0`).
(c) (Opcional) Un entero positivo m para forzar a que el orden del polinomio de Taylor calculado sea menor que m. Si no se especifica m, se emplea el valor de la variable global de Maple «Order». El valor por defecto es 6.

Unos pocos ejemplos serán suficientes.

```
> mtaylor(cos(x+y^2), [x, y]) ;
```

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - y^2x + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{6}y^2x^3$$

```
> mtaylor(cos(x+y^2), [x=Pi, y], 5) ;
```

$$-1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 + y^2(x - \pi) - \frac{1}{24}(x - \pi)^4 + \frac{1}{2}y^4$$

```
> mtaylor(g(x, y), [x=a, y=b], 3) ;
```

$$g(a, b) + D_1(g)(a, b)(x - a) + D_2(g)(a, b)(y - b) + \frac{1}{2}D_{1,1}(g)(a, b)(x - a)^2$$
$$+ (x - a)D_{1,2}(g)(a, b)(y - b) + \frac{1}{2}D_{2,2}(g)(a, b)(y - b)^2$$

La función `mtaylor` puede ser un poco estrafalaria. Tiene tendencia a desarrollar los términos lineales; por ejemplo, en un desarrollo alrededor de $x = 1$ e $y = -2$ puede escribir los términos $2 + (x - 1) + 2(y + 2)$ en la forma $5 + x + 2y$.

Aproximación de funciones implícitas

En la sección anterior vimos cómo determinar si en una ecuación con varias variables se podía despejar una de dichas variables en función de las otras. Aunque se sabe que existe una solución, en general no es posible obtener una expresión exacta de ella. Sin embargo, si en la ecuación intervienen sólo funciones suaves, entonces la solución debe tener un desarrollo en serie de Taylor. Podemos determinar al menos los primeros coeficientes de dicho desarrollo y obtener así una aproximación útil a la solución. El siguiente ejemplo muestra la técnica.

Ejemplo 3 Demuestre que la ecuación

$$\operatorname{sen}(x + y) = xy + 2x$$

tiene una solución de la forma $y = f(x)$ cerca de $x = 0$ que cumple $f(0) = 0$, y calcule los términos hasta de cuarto grado de la serie de Taylor de $f(x)$ en potencias de x.

Solución La ecuación dada se puede expresar de la forma $F(x, y) = 0$, siendo

$$F(x, y) = \operatorname{sen}(x + y) - xy - 2x$$

Como $F(0, 0) = 0$ y $F_2(0, 0) = \cos(0) = 1 \neq 0$, por el Teorema de la Función Implícita, la ecuación tiene una solución $y = f(x)$ cerca de $x = 0$ que cumple $f(0) = 0$. No es posible calcular exactamente $f(x)$, pero tendrá una serie de Maclaurin de la forma

$$y = f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$

No existe término constante porque $f(0) = 0$. Podemos sustituir esta serie en la ecuación dada y obtener los términos hasta de grado 4 para calcular los coeficientes a_1, a_2, a_3 y a_4. En el miembro izquierdo utilizaremos la serie de Maclaurin del seno para obtener

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x + y) &= \operatorname{sen}((1 + a_1)x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots) \\
&= (1 + a_1)x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \\
&\quad - \frac{1}{3!}((1 + a_1)x + a_2x^2 + \cdots)^3 + \cdots \\
&= (1 + a_1)x + a_2x^2 + \left(a_3 - \frac{1}{6}(1 + a_1)^3\right)x^3 \\
&\quad + \left(a_4 - \frac{3}{6}(1 + a_1)^2a_2\right)x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

El miembro derecho es

$$xy + 2x = 2x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \cdots$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, se obtiene

$$\begin{aligned}
1 + a_1 &= 2 & a_1 &= 1 \\
a_2 &= a_1 & a_2 &= 1 \\
a_3 - \frac{1}{6}(1 + a_1)^3 &= a_2 & a_3 &= \frac{7}{3} \\
a_4 - \frac{1}{2}(1 + a_1)^2\, a_2 &= a_3 & a_4 &= \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Podríamos haber obtenido más términos de la serie calculando potencias más altas de x en el proceso de sustitución.

■

Observación A partir de la serie de $f(x)$ obtenida anteriormente, podemos determinar los valores de las cuatro primeras derivadas de f en $x = 0$. Recuérdese que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
f'(0) &= a_1 = 1 & f''(0) &= 2!a_2 = 2 \\
f'''(0) &= 3!a_3 = 4 & f^{(4)}(0) &= 4!a_4 = 104
\end{aligned}$$

Podríamos haber hecho el ejemplo calculando primero estas derivadas mediante diferenciación implícita de la ecuación dada, y determinando después los coeficientes de la serie a partir de ellas. Habría sido una forma mucho más difícil de realizarlo (inténtelo y vea).

Ejercicios 12.9

En los Ejercicios 1-6, calcule la serie de Taylor de las funciones dadas alrededor de los puntos indicados.

1. $f(x, y) = \dfrac{1}{2 + xy^2}$, $(0, 0)$

2. $f(x, y) = \ln(1 + x + y + xy)$, $(0, 0)$

3. $f(x, y) = \tan^{-1}(x + xy)$, $(0, -1)$

4. $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$, $(1, -1)$

5. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $(0, 0)$

6. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$, $(0, 0)$

En los Ejercicios 7-12, calcule dos polinomios de Taylor de los grados indicados para las funciones definidas alrededor de los puntos dados. Tras calcularlos a mano, intente obtener los mismos resultados utilizando la función `mtaylor` de Maple.

7. $f(x, y) = \dfrac{1}{2 + x - 2y}$, grado 3, alrededor de $(2, 1)$

8. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, grado 3, alrededor de $(1, 0)$

9. $f(x, y) = \displaystyle\int_0^{x+y^2} e^{-t^2}\,dt$, grado 3, alrededor de $(0, 0)$

10. $f(x, y) = \cos(x + \operatorname{sen} y)$, grado 4, alrededor de $(0, 0)$

11. $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{y}$, grado 2, alrededor de $(\frac{\pi}{2}, 1)$

12. $f(x, y) = \dfrac{1 + x}{1 + x^2 + y^4}$, grado 2, alrededor de $(0, 0)$

En los Ejercicios 13-14, demuestre que, siendo x un valor cercano al punto indicado $x = a$, las ecuaciones dadas tienen solución de la forma $y = f(x)$, tomando los valores indicados en cada punto. Calcule los tres primeros términos distintos de cero de las series de Taylor de $f(x)$ en potencias de $x - a$.

***13.** $x \operatorname{sen} y = y + \operatorname{sen} x$, alrededor de $x = 0$, con $f(0) = 0$.

***14.** $\sqrt{1 + xy} = 1 + x + \ln(1 + y)$, alrededor de $x = 0$, con $f(0) = 0$.

***15.** Demuestre que la ecuación $x + 2y + z + e^{2z} = 1$ tiene una solución de la forma $z = f(x, y)$ alrededor de $x = 0$, $y = 0$, siendo $f(0, 0) = 0$. Calcule el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x, y)$ en potencias de x e y.

***16.** Utilice métodos basados en series para obtener el valor de la derivada parcial $f_{112}(0, 0)$ sabiendo que $f(x, y) = \arctan(x + y)$.

***17.** Utilice métodos basados en series para calcular

$$\left.\frac{\partial^{4n}}{\partial x^{2n}\partial y^{2n}}\,\frac{1}{1 + x^2 + y^2}\right|_{(0,0)}$$

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes palabras y frases?**
  - ◇ $\mathcal{S}$ es la gráfica de $f(x, y)$.
  - ◇ $\mathcal{C}$ es una curva de nivel de $f(x, y)$.
  - ◇ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$.
  - ◇ $f(x, y)$ es continua en (a, b).
  - ◇ La derivada parcial $(\partial/\partial x)f(x, y)$.
  - ◇ El plano tangente $z = f(x, y)$ en (a, b).
  - ◇ Derivadas parciales segundas puras.
  - ◇ Derivadas parciales segundas mixtas.
  - ◇ $f(x, y)$ es una función armónica.
  - ◇ $L(x, y)$ es la linealización de $f(x, y)$ en (a, b).
  - ◇ El diferencial de $z = f(x, y)$.
  - ◇ $f(x, y)$ el diferenciable en (a, b).
  - ◇ El gradiente de $f(x, y)$ en (a, b).
  - ◇ La derivada direccional de $f(x, y)$ en (a, b) y en la dirección $\mathbf{v}$.
  - ◇ El determinante jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.
- **¿En qué condiciones son iguales dos derivadas parciales mixtas?**
- **Enuncie la Regla de la Cadena para $z = f(x, y)$, siendo $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$.**
- **Describa el proceso de cálculo de las derivadas parciales de funciones definidas implícitamente.**
- **¿Qué es la serie de Taylor de $f(x, y)$ alrededor de (a, b)?**

Ejercicios de repaso

1. Dibuje algunas curvas de nivel de la función $x + \dfrac{4y^2}{x}$.

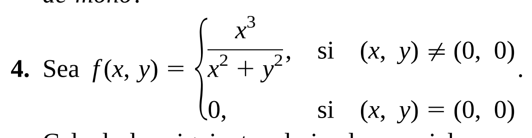
2. Dibuje algunas isotermas (líneas de temperatura constante) de la función de temperatura

$$T = \frac{140 + 30x^2 - 60x + 120y^2}{8 + x^2 - 2x + 4y^2} \quad (^{\circ}\mathrm{C})$$

¿Cuál es la posición más fría?

3. Dibuje algunas curvas de nivel de la función polinómica $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. ¿Cuál le parece la causa de que la gráfica de la función se denomine *silla de mono*?

4. Sea



$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Calcule las siguientes derivadas parciales o explique por qué no existen: $f_1(0, 0)$, $f_2(0, 0)$, $f_{21}(0, 0)$, $f_{12}(0, 0)$.

5. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$. ¿Dónde es continua $f(x, y)$? ¿Qué conjunto de puntos adicional hace que $f(x, y)$ tenga una extensión continua? En particular, ¿se puede extender f para que sea continua en el origen? ¿Se puede definir f en el origen de forma que sus derivadas parciales primeras existan allí?

6. La superficie $\mathscr{S}$ es la gráfica de la función $z = f(x, y)$, siendo $f(x, y) = e^{x^2 - 2x - 4y^2 + 5}$.

(a) Calcule una ecuación del plano tangente a $\mathscr{S}$ en el punto $(1, -1, 1)$.

(b) Dibuje una muestra representativa de las curvas de nivel de la función $f(x, y)$.

7. Considere la superficie $\mathscr{S}$ cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

(a) Calcule una ecuación del plano tangente a $\mathscr{S}$ en el punto (a, b, c) de $\mathscr{S}$.

(b) ¿Para qué puntos (a, b, c) de $\mathscr{S}$ el plano tangente a $\mathscr{S}$ en (a, b, c) pasa por el punto $(0, 0, 4)$? Describa geométricamente este conjunto de puntos.

8. Dos resistencias variables, R_1 y R_2, se conectan en paralelo de forma que su resistencia combinada R se expresa como

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si $R_1 = 100$ ohmios $\pm 5\%$ y $R_2 = 25$ ohmios $\pm 2\%$, ¿aproximadamente qué porcentaje de error puede tener un valor calculado de $R = 20$ ohmios de su resistencia combinada?

9. Suponga que mide dos lados de un terreno triangular y el ángulo que forman. Las medidas de los lados son 150 m y 200 m, ambas con una exactitud de ± 1 m. El ángulo medido es de 30°, con una precisión de $\pm 2^{\circ}$. ¿Cuál es el área del terreno y cuál es su estimación del máximo porcentaje de error de dicha área?

10. Suponga que $T(x, y, z) = x^3y + y^3z + z^3x$ da la temperatura en el punto (x, y, z) en el espacio tridimensional.

(a) Calcule la derivada direccional de T en $(2, -1, 0)$ y en la dirección que va desde ese punto al punto $(1, 1, 2)$.

(b) Una mosca se mueve por el espacio con velocidad constante 5. En el instante $t = 0$, la mosca cruza la superficie $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 11$ formando ángulos rectos en el punto $(2, -1, 0)$, moviéndose en la dirección de temperatura creciente. Calcule dT/dt en $t = 0$, tal como la experimenta la mosca.

11. Considere la función $f(x, y, z) = x^2y + yz + z^2$.

(a) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(1, -1, 1)$ y en la dirección del vector $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

(b) Una hormiga se mueve sobre el plano $x + y + z = 1$, pasando por el punto $(1, -1, 1)$. Suponga que se mueve de forma que mantiene f constante. ¿En qué dirección se está moviendo cuando pasa por dicho punto $(1, -1, 1)$?

(c) Otra hormiga camina por el plano $x + y + z = 1$, moviéndose en la dirección de la máxima tasa de incremento de f. Calcule su dirección cuando pasa por el punto $(1, -1, 1)$.

12. Sea $f(x, y, z) = (x^2 + z^2)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi xy}{2} + yz^2$. Sea P_0 el punto $(1, 1, -1)$.

(a) Calcule el gradiente de f en P_0.

(b) Calcule la linealización $L(x, y, z)$ de f en P_0.

(c) Calcule una ecuación del plano tangente en P_0 a la superficie de nivel de f que pasa por P_0.

(d) Si un pájaro vuela pasando por P_0 con velocidad 5, dirigiéndose directamente hacia el punto $(2, -1, 1)$, ¿cuál es la tasa de cambio de f vista por el pájaro cuando pasa por P_0?

(e) ¿En qué dirección desde P_0 debería volar el pájaro a una velocidad de 5 para experimentar la máxima tasa de crecimiento de f?

13. Verifique que para cualquier constante k, la función $u(x, y) = k(\ln\cos(x/k) - \ln\cos(y/k))$ satisface la *ecuación de la superficie mínima*

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - uu_xu_yu_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0$$

14. Las ecuaciones $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ pueden definir dos de las variables x, y y z en función de la variable. Demuestre que

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 1$$

15. Las ecuaciones $\begin{cases} x = u^3 - uv \\ y = 3uv + 2v^2 \end{cases}$ definen u y v como funciones de x e y alrededor del punto P tal que $(u, v, x, y) = (-1, 2, 1, 2)$.

(a) Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ en P.

(b) Calcule el valor aproximado de u cuando $x = 1.02$ e $y = 1.97$.

16. Las ecuaciones $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - 2xy^2 \end{cases}$ definen implícitamente x e y como funciones de u y v para valores de (x, y) cerca de $(1, 2)$, y valores de (u, v) cerca de $(5, -7)$.

(a) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ en $(u, v) = (5, -7)$.

(b) Si $z = \ln(y^2 - x^2)$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ en $(u, v) = (5, -7)$.

Problemas avanzados

1. (a) Si la gráfica de una función $f(x, y)$ que es diferenciable en (a, b) contiene parte de una recta que pasa por el punto (a, b), demuestre que la recta está en el plano tangente a $z = f(x, y)$ en (a, b).

(b) Si $g(t)$ es una función diferenciable de t, describa la superficie $z = yg(x/y)$ y demuestre que todos sus planos tangentes pasan por origen.

2. Una partícula se mueve en el espacio tridimensional de forma que su dirección de movimiento en cualquier punto es perpendicular a la superficie de nivel de

$$f(x, y, z) = 4 - x^2 - 2y^2 + 3z^2$$

que pasa por dicho punto. Si la trayectoria de una partícula pasa por el punto $(1, 1, 8)$, demuestre que también pasa por el punto $(2, 4, 1)$. ¿Pasa por el punto $(3, 7, 0)$?

3. **(El operador de Laplace en coordenadas esféricas)** Si $u(x, y, z)$ tiene derivadas parciales segundas continuas y

$$v(\rho, \phi, \theta) = u(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \ \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \ \rho\cos\phi)$$

demuestre que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\cot\phi}{\rho^2}\frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Puede hacerlo a mano, pero es mucho más fácil utilizar un programa de matemáticas por computador.

4. **(Ondas que se expanden esféricamente)** Si f es una función dos veces diferenciable de una variable y $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, demuestre que $u(x, y, z, t) = \dfrac{f(\rho - ct)}{\rho}$ satisface la ecuación de onda tridimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

¿Cuál es el significado geométrico de esta solución en función del tiempo creciente t? *Sugerencia*: Puede utilizar el resultado del Ejercicio 3. En este caso, $v(\rho, \phi, \theta)$ es independiente de ϕ y θ.

CAPÍTULO 13

Aplicaciones de las derivadas parciales

No sé lo que debo parecerle al mundo, pero a mí mismo me veo como un muchacho jugando en la orilla del mar y divirtiéndome de vez en cuando al encontrar un guijarro redondo y suave, o una concha más bonita que las demás, mientras el gran océano de la verdad está por descubrir, allí delante de mí.

Isaac Newton (1642-1727)

Introducción En este capítulo presentaremos algunas de las formas en las que las derivadas parciales contribuyen a la comprensión y solución de problemas en matemática aplicada. Muchos de estos problemas se pueden poner en el contexto de determinar valores máximos o mínimos de funciones de varias variables, aspectos que se consideran en las cuatro primeras secciones de este capítulo. Las restantes secciones presentan diversos problemas en los que interviene la diferenciación de funciones con respecto a parámetros, y también el Método de Newton para aproximar soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales. Una buena parte del material de este capítulo se puede considerar *opcional*. Sólo las Secciones 13.1-13.3 contienen *material básico*, e incluso partes de esas secciones se pueden omitir (por ejemplo, la presentación sobre programación lineal en la Sección 13.2).

13.1 Valores extremos

La función $f(x, y) = x^2 + y^2$, parte de cuya gráfica se muestra en la Figura 13.1, tiene un valor mínimo de 0; este valor se produce en el origen (0, 0), donde la gráfica tiene un plano tangente horizontal. De forma similar, la función $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, parte de cuya gráfica se muestra en la Figura 13.2, tiene un valor máximo de 1 en (0, 0). ¿Qué técnicas se podrían utilizar para descubrir estos hechos si no fueran evidentes observando una gráfica? La obtención de valores máximos y mínimos de funciones de varias variables es, como su análogo en el caso de funciones de una sola variable, el punto crucial de muchas aplicaciones de cálculo avanzado en problemas que surgen en otras disciplinas. Desafortunadamente, este problema es a menudo mucho más complicado que en el caso de una sola variable. Nuestra presentación comenzará por desarrollar las técnicas en el caso de funciones de dos variables. Algunas de esas técnicas se pueden extender a funciones de más variables en la forma obvia. La extensión de aquellas que no sean obvias se considerará posteriormente en esta sección.

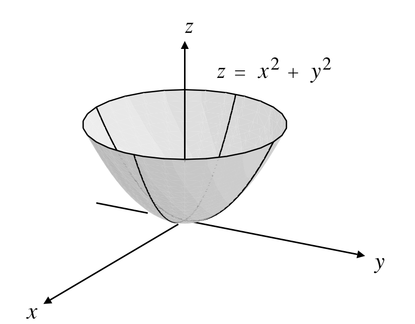


Figura 13.1 $x^2 + y^2$ tiene un valor mínimo de 0 en el origen.

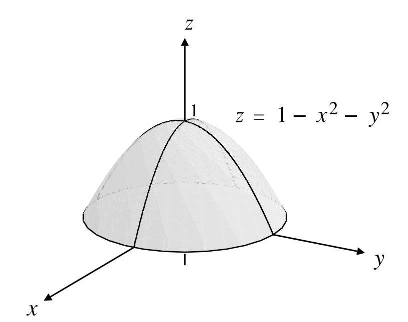


Figura 13.2 $1 - x^2 - y^2$ tiene un valor máximo de 1 en el origen.

Empecemos por revisar lo que conocemos sobre el caso de una sola variable. Recuérdese que una función $f(x)$ tiene un *valor máximo local* (o un *valor mínimo local*) en un punto a de su dominio si $f(x) \leqslant f(a)$ (o $f(x) \geqslant f(a)$) para todo x en el dominio de f que esté lo *suficientemente cerca* de a. Si la desigualdad apropiada se mantiene *para todo* x en el dominio de f, se dice que f tiene un valor *máximo absoluto* (o *mínimo absoluto*) en a. Además, estos valores extremos locales o absolutos sólo pueden ocurrir en puntos de uno de los tres siguientes tipos:

(a) Puntos críticos, donde $f'(x) = 0$.

(b) Puntos singulares, donde $f'(x)$ no existe.

(c) Puntos extremos del dominio de f.

En el caso de varias variables se produce una situación similar. Se dice que una función de dos variables tiene un valor **máximo local** o **máximo relativo** en el punto (a, b) de su dominio si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) del dominio de f que estén lo *suficientemente cerca* del punto (a, b). Si la desigualdad se mantiene *para todo* (x, y) del dominio de f, entonces se dice que f tiene un valor **máximo global** o **máximo absoluto** en (a, b). Las definiciones para valores mínimos locales (relativos) y absolutos (globales) son similares. En la práctica, en general se omite la palabra *absoluto* o *global*, por lo que simplemente diremos *el* valor máximo o *el* valor mínimo de f.

El siguiente teorema demuestra que existen tres posibilidades para los puntos donde pueden ocurrir valores extremos, análogamente al caso de una sola variable.

TEOREMA 1 **Condiciones necesarias para valores extremos**

Una función $f(x, y)$ sólo puede tener un valor extremo local absoluto en un punto (a, b) de su dominio si (a, b) es:

(a) Un **punto crítico** de f, es decir, un punto que cumple $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.
(b) Un **punto singular** de f, es decir, un punto donde $\nabla f(a, b)$ no existe.
(c) Un **punto frontera** del dominio de f.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que (a, b) pertenece al dominio de f. Si (a, b) no está en la frontera del dominio de f, entonces debe pertenecer al interior de dicho dominio, y si (a, b) no es un punto singular de f, entonces existe $\nabla f(a, b)$. Finalmente, si (a, b) no es un punto crítico de f, entonces $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$, por lo que f tiene una derivada direccional positiva en la dirección de $\nabla f(a, b)$ y una derivada direccional negativa en la dirección de $-\nabla f(a, b)$; es decir, f crece si nos movemos desde (a, b) en una dirección y decrece si nos movemos en la dirección opuesta. Por consiguiente, f no puede tener un valor máximo ni mínimo en (a, b). Por tanto, todo punto donde se produzca un valor extremo debe ser un punto crítico, un punto singular de f, o un punto frontera del dominio de f.

Nótese que el Teorema 1 sigue siendo válido sin modificar su demostración para el caso de funciones de cualquier número de variables. Por supuesto, el Teorema 1 no garantiza que una determinada función tendrá valores extremos. Sólo nos dice dónde buscarlos si existen. El Teorema 2, posterior, proporciona condiciones que garantizan la existencia de valores máximo y mínimo absolutos en el caso de funciones continuas. Es análogo al Teorema Max-Min en el caso de funciones de una variable. Su demostración se sale del alcance de este texto. Los estudiantes interesados pueden consultarla en textos elementales sobre análisis matemático.

Se dice que un conjunto de $\mathbb{R}^n$ está **acotado** si está contenido dentro de alguna *bola* $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2$ de radio finito R. Se dice que un conjunto de la recta real está acotado si está contenido en un intervalo de longitud finita.

TEOREMA 2 **Condiciones suficientes para la existencia de valores extremos**

Si f es una función *continua* de n variables cuyo dominio es un conjunto *cerrado* y *acotado* de $\mathbb{R}^n$, entonces el rango de f es un conjunto acotado de números reales, y habrá puntos de dicho dominio donde f tome valores máximo y mínimo absolutos.

Ejemplo 1 La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ (*véase* la Figura 13.1) tiene un punto crítico en (0, 0), ya que $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ y ambos componentes de ∇f se anulan en (0, 0). Como

$$f(x, y) > 0 = f(0, 0) \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

f debe tener un valor mínimo (absoluto) de 0 en ese punto. Si el dominio de f no se restringe, entonces no tendrá valor máximo. De forma similar, $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ tiene un valor máximo (absoluto) de 1 en su punto crítico (0, 0) (*véase* la Figura 13.2).

Ejemplo 2 La función $h(x, y) = y^2 - x^2$ tiene también un punto crítico en (0, 0), pero no tiene un valor máximo local ni mínimo local en dicho punto. Obsérvese que $h(0, 0) = 0$, pero $h(x, 0) < 0$ y $h(0, y) > 0$ para cualquier valor distinto de cero de x e y (*véase* la Figura 13.3). La gráfica de h es un paraboloide hiperbólico, y a la vista de la forma de esta superficie, podemos decir que el punto crítico (0, 0) es un *punto de ensilladura* de h.

Utilizaremos en general la nomenclatura de **punto de ensilladura** para denominar cualquier *punto crítico interior* del dominio de una función f de varias variables donde no haya un valor máximo o mínimo local. Incluso en funciones de dos variables, la gráfica puede no tener forma de ensilladura cerca de un punto de ese tipo. Por ejemplo, la función $f(x, y) = -x^3$ tiene una recta completa de puntos de ensilladura a lo largo del eje y (*véase* la Figura 13.4), aunque su gráfica no recuerda la forma de una ensilladura en ninguna parte. Estos puntos son semejantes a los puntos de inflexión en el caso de funciones de una variable. Los puntos de ensilladura son los análogos en dimensiones superiores a los puntos de inflexión horizontales en el caso de una dimensión.

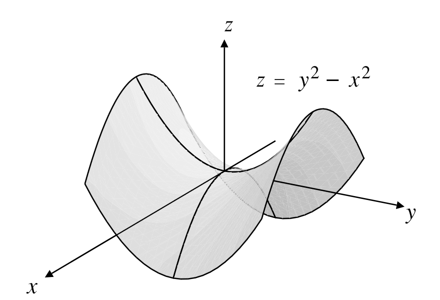


Figura 13.3 $y^2 - x^2$ tiene un punto de ensilladura en (0, 0).

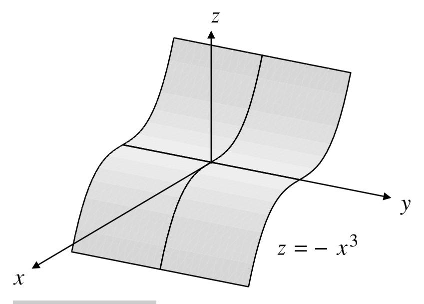
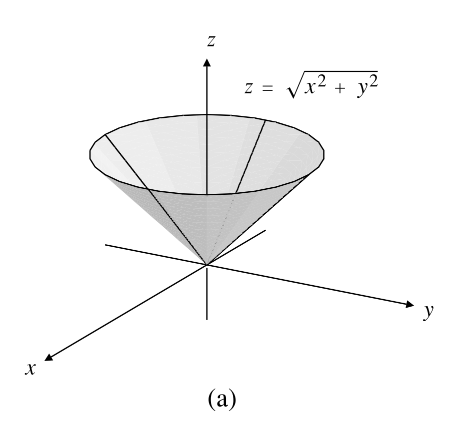


Figura 13.4 Una línea de puntos de ensilladura.

Ejemplo 3 La función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no tiene puntos críticos, pero tiene un punto singular en (0, 0), donde tiene un valor mínimo local (y absoluto) de cero. La gráfica de f tiene la forma de un cono circular recto (*véase* la Figura 13.5(a)). ■

Ejemplo 4 La función $f(x, y) = 1 - x$ está definida en todos los puntos del plano xy, y no tiene puntos críticos ni puntos singulares ($\nabla f(x, y) = -\mathbf{i}$ en todo (x, y)). Por tanto, f no tiene valores extremos. Sin embargo, si restringimos el dominio de f a los puntos del disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ (un conjunto cerrado y acotado en el plano xy), entonces f tiene valores máximo y mínimo absolutos, como debe ser por el Teorema 2. El valor máximo es 2 en el punto frontera $(-1, 0)$, y el valor mínimo es 0 en $(1, 0)$ (*véase* la Figura 13.5(b)). ■



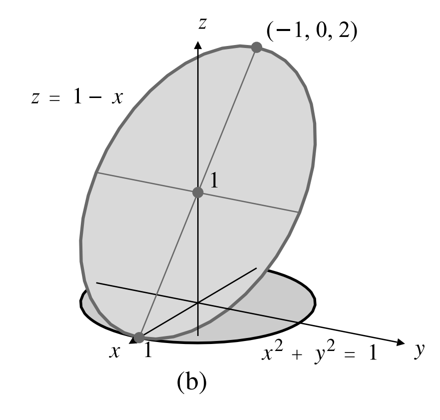


Figura 13.5
(a) $\sqrt{x^2 + y^2}$ tiene un valor mínimo en el punto singular (0, 0).
(b) Cuando se restringe al disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, la función $1 - x$ tiene valores máximo y mínimo en puntos frontera.

Clasificación de los puntos críticos

Los ejemplos anteriores son muy simples; es inmediatamente obvio en cada caso saber si la función tiene un máximo local, un mínimo local o un punto de ensilladura en los puntos críticos o singulares. En el caso de funciones más complicadas, puede ser más difícil clasificar los puntos críticos interiores. En teoría, tal clasificación se puede hacer siempre considerando la diferencia

$$\Delta f = f(a+h,\, b+k) - f(a,\, b)$$

para valores pequeños de h y k, siendo (a, b) el punto crítico en cuestión. Si la diferencia es siempre no negativa (o no positiva) para h y k pequeños, entonces f debe tener un mínimo (o máximo) local en (a, b); si la diferencia es negativa en algunos puntos (h, k) arbitrariamente cercanos $(0, 0)$ y positiva para otros, entonces f debe tener un punto de ensilladura en (a, b).

Ejemplo 5 Calcule y clasifique los puntos críticos de $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

Solución Los puntos críticos deben satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$0 = f_1(x, y) = 6x^2 - 6y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y$$

$$0 = f_2(x, y) = -6x + 6y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

En conjunto, estas ecuaciones implican que $x^2 = x$, de forma que $x = 0$ o $x = 1$. Por tanto, los puntos críticos son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Consideremos $(0, 0)$. En este caso Δf es

$$\Delta f = f(h, k) - f(0, 0) = 2h^3 - 6hk + 3k^2$$

Como $f(h, 0) - f(0, 0) = 2h^3$ es positivo para valores positivos pequeños de h y negativo para valores negativos pequeños de h, f no puede tener un valor máximo ni mínimo en $(0, 0)$. Por consiguiente, $(0, 0)$ es un punto de ensilladura.

Consideremos ahora $(1, 1)$. En este caso Δf es

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(1+h,\, 1+k) - f(1, 1)\\ &= 2(1+h)^3 - 6(1+h)(1+k) + 3(1+k)^2 - (-1)\\ &= 2 + 6h + 6h^2 + 2h^3 - 6 - 6h - 6k - 6hk + 3 + 6k + 3k^2 + 1\\ &= 6h^2 - 6hk + 3k^2 + 2h^3\\ &= 3(h-k)^2 + h^2(3+2h)\end{aligned}$$

Ambos términos en la expresión anterior son no negativos si $|h| < 3/2$, y no pueden ser los dos nulos a menos que $h = k = 0$. Por tanto, $\Delta f > 0$ para valores pequeños de h y k, y f tiene un valor mínimo local de -1 en $(1, 1)$. ■

El método utilizado para clasificar los puntos críticos en el ejemplo anterior se convierte en un método de «fuerza bruta» si la función que interviene es más complicada. Sin embargo, existe un *test de la segunda derivada* similar al de funciones de una variable. La versión para n variables es el objeto del siguiente teorema, cuya demostración se basa en las propiedades de las formas cuadráticas presentadas en la Sección 10.6.

TEOREMA 3 **Un test de la segunda derivada**

Supongamos que $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ es un punto crítico de $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ y que está en el interior del dominio de f. Supongamos también que todas las derivadas parciales segundas de f son continuas en un entorno de $\mathbf{a}$, de forma que la **matriz hessiana**

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{11}(\mathbf{x}) & f_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{1n}(\mathbf{x}) \\ f_{21}(\mathbf{x}) & f_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(\mathbf{x}) & f_{2n}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{nn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Es también continua en ese entorno. Nótese que la continuidad de las derivadas parciales garantiza que $\mathcal{H}$ es una matriz simétrica.

(a) Si $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ es definida positiva, entonces f tiene un mínimo local en $\mathbf{a}$.
(b) Si $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ es definida negativa, entonces f tiene un máximo local en $\mathbf{a}$.
(c) Si $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ es indefinida, entonces f tiene un punto de ensilladura en $\mathbf{a}$.
(d) Si $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ no es ni definida positiva ni definida negativa ni indefinida, este test no da información.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$, siendo $\mathbf{h}$ un vector de n dimensiones. Entonces,

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_i$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_i h_j = \mathbf{h}^T \mathcal{H}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\mathbf{h}$$

En la expresión anterior, $\mathbf{h}$ se trata como un vector columna. Aplicando la fórmula de Taylor con resto de Lagrange a g se puede expresar

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\theta)$$

para algún valor θ entre 0 y 1. Así,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{a})h_i + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathcal{H}(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})\mathbf{h}$$

Como $\mathbf{a}$ es un punto crítico de f, $f_i(\mathbf{a}) = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, por lo que

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathcal{H}(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})\mathbf{h}$$

Si $\mathcal{H}(\mathbf{a})$ es definida positiva, entonces, por la continuidad de $\mathcal{H}$, también lo es $\mathcal{H}(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})$ para $|\mathbf{h}|$ suficientemente pequeño. Por tanto, $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) > 0$ para $\mathbf{h}$ distinto de cero, lo que demuestra (a).

Los apartados (b) y (c) se demuestran de forma similar. Las funciones $f(x, y) = x^4 + y^4$, $g(x, y) = -x^4 - y^4$ y $h(x, y) = x^4 - y^4$ son casos del apartado (d), y demuestran que en este caso una función puede tener un mínimo, un máximo o un punto de ensilladura.

Ejemplo 6 Calcule y clasifique los puntos críticos de la función $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$.

Solución Las ecuaciones que determinan los puntos críticos son

$$0 = f_1(x, y, z) = 2xy - 2$$
$$0 = f_2(x, y, z) = x^2 + 2yz$$
$$0 = f_3(x, y, z) = y^2 + 2z$$

La tercera ecuación implica que $z = -y^2/2$ y la segunda implica entonces que $y^3 = x^2$. De la primera ecuación se obtiene $y^{5/2} = 1$. Por consiguiente, $y = 1$ y $z = -\frac{1}{2}$. Como $xy = 1$, debemos tener $x = 1$. El único punto crítico es $P = (1, 1, -\frac{1}{2})$. Evaluando las derivadas parciales segundas de f en este punto se obtiene la matriz hessiana

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como

$$2 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 < 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20 < 0$$

$\mathcal{H}$ es indefinida por el Teorema 8 de la Sección 10.6, por lo que P es un punto de ensilladura de f. ■

Observación Aplicando el test de definición positiva o negativa o de indefinición, dado por el Teorema 8 de la Sección 10.6, podemos enunciar el test de la segunda derivada para una función de dos variables como sigue:

Supongamos que (a, b) es un punto crítico de la función $f(x, y)$, perteneciente al interior del dominio de f. Supongamos también que las derivadas parciales segundas de f son continuas y tienen en ese punto los valores

$$A = f_{11}(a, b), \qquad B = f_{12}(a, b) = f_{21}(a, b) \qquad \text{y} \qquad C = f_{22}(a, b)$$

(a) Si $B^2 - AC < 0$ y $A > 0$, entonces f tiene un valor mínimo local en (a, b).
(b) Si $B^2 - AC < 0$ y $A < 0$, entonces f tiene un valor máximo local en (a, b).
(c) Si $B^2 - AC > 0$, entonces f tiene un punto de ensilladura en (a, b).
(d) Si $B^2 - AC = 0$, este test no proporciona información; f puede tener un máximo local, un mínimo local o un punto de ensilladura en (a, b).

Ejemplo 7 Reconsidere el Ejemplo 5 y utilice el test de la segunda derivada para clasificar los dos puntos críticos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ de $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

Solución Tenemos

$$f_{11}(x, y) = 12x, \qquad f_{12}(x, y) = -6 \qquad \text{y} \qquad f_{22}(x, y) = 6$$

En $(0, 0)$, tenemos, por tanto,

$$A = 0, \quad B = -6, \quad C = 6 \quad \text{y} \quad B^2 - AC = 36 > 0$$

por lo que $(0, 0)$ es un punto de ensilladura. En $(1, 1)$ tenemos

$$A = 12 > 0, \quad B = -6, \quad C = 6 \quad \text{y} \quad B^2 - AC = -36 < 0$$

por lo que f debe tener un mínimo local en $(1, 1)$. ■

Ejemplo 8 Calcule y clasifique los puntos críticos de

$$f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$$

¿Tiene f valores máximo y mínimo? ¿Por qué?

Solución Empezaremos calculando las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función f:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= y(1 - x^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ f_2(x, y) &= x(1 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ f_{11}(x, y) &= xy(x^2 - 3)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ f_{12}(x, y) &= (1 - x^2)(1 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ f_{22}(x, y) &= xy(y^2 - 3)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{aligned}$$

En cualquier punto crítico, $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$, por lo que en este caso los puntos críticos serán las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y(1 - x^2) &= 0 \\ x(1 - y^2) &= 0 \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones dice que $y = 0$ o $x = \pm 1$. La segunda ecuación dice que $x = 0$ o $y = \pm 1$. Hay cinco puntos que satisfacen ambas condiciones: (0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1) y (-1, -1). Los clasificaremos utilizando el test de la segunda derivada.

En (0, 0) tenemos que $A = C = 0$, $B = 1$, por lo que $B^2 - AC = 1 > 0$. Así, f resulta tener un punto de ensilladura en (0, 0).

En (1, 1) y (-1, -1) tenemos $A = C = -2/e < 0$, $B = 0$. Se deduce que $B^2 - AC = -4/e^2 < 0$. Por tanto, f tiene valores máximos locales en dichos puntos. El valor de f en cada uno de ellos es $-1/e$.

En (1, -1) y (-1, 1) tenemos $A = C = 2/e > 0$, $B = 0$. Se deduce que $B^2 - AC = -4/e^2 < 0$. Así, f tiene valores mínimos locales en dichos puntos. El valor de f en cada uno de ellos es $-1/e$.

De hecho, f tiene valores máximo y mínimo absolutos, a saber, los valores obtenidos antes como extremos locales. Para ver por qué, obsérvese que $f(x, y)$ tiende a 0 cuando el punto (x, y) tiende a infinito en cualquier dirección, debido a la exponencial negativa que domina al factor potencial xy para valores grandes de $x^2 + y^2$. Elijamos un número entre 0 y el valor máximo local $1/e$ obtenido antes, por ejemplo, el número $1/(2e)$. Para algún valor R, debemos tener $|f(x, y)| \leqslant 1/(2e)$, siempre que $x^2 + y^2 \geqslant R^2$. Por el Teorema 2, f debe tener valores máximo y mínimo absolutos en el disco cerrado $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Dichos valores no pueden estar en la circunferencia frontera $x^2 + y^2 = R^2$, porque $|f|$ es menor allí ($\leqslant 1/(2e)$) que en los puntos críticos considerados antes. Como f no tiene puntos singulares, los valores máximo y mínimo absolutos para el disco, y por tanto para todo el plano, deben estar en esos puntos críticos. ■

Ejemplo 9 Calcule la forma de una caja rectangular sin tapa cuyo volumen sea V y el área total de sus cinco caras sea mínima.

Solución Si las dimensiones horizontales de la caja son x e y, y su altura es z (*véase* la Figura 13.6), entonces deseamos minimizar

$$S = xy + 2yz + 2xz$$

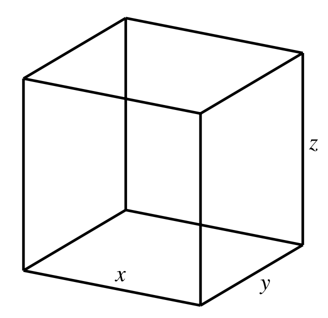


Figura 13.6

con la restricción de que $xyz = V$, el volumen requerido. Podemos utilizar esta restricción para reducir el número de variables de las que depende S, por ejemplo, sustituyendo

$$z = \frac{V}{xy}$$

Entonces S se convierte en una función de las variables x e y:

$$S = S(x, y) = xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}$$

Una caja real debe tener dimensiones positivas, por lo que el dominio de S sólo puede estar formado por aquellos puntos (x, y) que cumplan $x > 0$ e $y > 0$. Si x o y tienden a 0 o a ∞, entonces $S \to \infty$, por lo que el valor mínimo de S debe producirse en un punto crítico (S no tiene puntos singulares). Para obtener los puntos críticos se resuelven las ecuaciones

$$0 = \frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 y = 2V$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2} \quad \Leftrightarrow \quad xy^2 = 2V$$

Por tanto, $x^2y - xy^2 = 0$ o $xy(x - y) = 0$. Como $x > 0$ e $y > 0$, esto implica que $x = y$. Por tanto, $x^3 = 2V$, $x = y = (2V)^{1/3}$ y $z = V/(xy) = 2^{-2/3}V^{1/3} = x/2$. Como sólo hay un punto crítico, debe minimizar S (¿por qué?). La caja con área de superficie mínima tiene base cuadrada, pero su altura es sólo la mitad de sus dimensiones horizontales.

■

Observación El problema anterior es un problema de valores extremos de tres variables *con restricciones*; la ecuación $xyz = V$ es una *restricción* que limita la libertad de x, y y z. Hemos utilizado la restricción para eliminar una variable, z, y así hemos reducido el problema a un problema de dos variables *libre* (*sin restricciones*). En la Sección 13.3 desarrollaremos un método más potente para resolver problemas de valores extremos con restricciones.

Ejercicios 13.1

En los Ejercicios 1-17, calcule y clasifique los puntos críticos de las funciones dadas.

1. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$

2. $f(x, y) = xy - x + y$

3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

4. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

5. $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{8}{x} - y$

6. $f(x, y) = \cos(x + y)$

7. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

8. $f(x, y) = \cos x + \cos y$

9. $f(x, y) = x^2 y e^{-(x^2+y^2)}$

10. $f(x, y) = \dfrac{xy}{2 + x^4 + y^4}$

11. $f(x, y) = xe^{-x^3+y^3}$

12. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

13. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

14. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x + y + x^2 + y^2}$

15. $f(x, y) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

***16.** $f(x, y, z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$

***17.** $f(x, y, z) = xy + x^2z - x^2 - y - z^2$

***18.** Demuestre que $f(x, y, z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$ tiene un valor máximo local en el punto $(1, 1, 1)$.

19. Calcule los valores máximo y mínimo de

$$f(x, y) = xye^{-x^2-y^4}$$

20. Calcule los valores máximo y mínimo de

$$f(x, y) = \frac{x}{(1 + x^2 + y^2)}$$

***21.** Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = xyze^{-x^2-y^2-z^2}$. ¿Cómo sabe que estos valores extremos existen?

22. Calcule el valor mínimo de $f(x, y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$ en el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$. ¿Cómo sabe que existe un mínimo?

23. Las regulaciones postales exigen que la suma de la altura y el perímetro horizontal de un paquete no supere las L unidades. Calcule el máximo volumen de una caja rectangular que pueda satisfacer esta restricción.

24. El material utilizado para hacer el fondo de una caja rectangular es dos veces más caro por unidad de área que el material utilizado para hacer la tapa y las paredes laterales. Calcule las dimensiones de la caja de un volumen dado V para la que el coste de materiales es mínimo.

25. Calcule el volumen de la mayor caja rectangular (con caras paralelas a los planos coordenados) que se puede inscribir en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

26. Calcule tres números positivos a, b y c tales que su suma es 30 y la expresión ab^2c^3 es máxima.

27. Calcule los puntos críticos de la función $z = g(x, y)$ que satisface la ecuación $e^{2zx - x^2} - 3e^{2zy + y^2} = 2$.

∗28. Clasifique los puntos críticos de la función g del ejercicio anterior.

∗29. Sea $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$. Demuestre que el origen es un punto crítico de f y que la restricción de f a toda recta que pase por el origen tiene un valor mínimo local en el origen (es decir, demuestre que $f(x, kx)$ tiene un valor mínimo local en $x = 0$ para todo k, y que $f(0, y)$ tiene un valor mínimo local en $y = 0$). ¿Tiene $f(x, y)$ un valor mínimo local en el origen? ¿Qué le sucede a f en la curva $y = 2x^2$? ¿Qué dice el test de la segunda derivada en esta situación?

30. Verifique completando el cuadrado (es decir, sin utilizar el Teorema 8 de la Sección 10.6) que la forma cuadrática

$$Q(u, v) = (x, y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

es definida positiva si $A > 0$ y $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, definida negativa si $A < 0$ y $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ e indefinida si $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$. Esto proporciona una confirmación independiente de la afirmación que se hace en la observación que precede al Ejemplo 7.

∗31. Enuncie y demuestre (utilizando argumentos basados en completar cuadrados en vez de emplear el Teorema 8 de la Sección 10.6) un resultado análogo al del Ejercicio 30 para una forma cuadrática $Q(u, v, w)$ de tres variables. ¿Cuáles son las implicaciones para un punto crítico (a, b, c) de una función $f(x, y, z)$, cuyas derivadas parciales segundas son conocidas en (a, b, c)?

13.2 Valores extremos de funciones definidas en dominios restringidos

Una buena parte de la sección anterior ha considerado técnicas para determinar si un punto crítico de una función es un valor máximo, mínimo o un punto de ensilladura. En esta sección vamos a considerar el problema de determinar los valores máximos y mínimos absolutos de funciones que los posean (generalmente funciones cuyos dominios estén restringidos a subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, o $\mathbb{R}^n$, con interiores no vacíos). En el Ejemplo 8 de la Sección 13.1 tuvimos que *demostrar* que la función dada tenía valores extremos absolutos. Sin embargo, si lo que tenemos es una función continua en un dominio cerrado y acotado, entonces podemos basarnos en el Teorema 2 para garantizar la existencia de valores extremos absolutos, pero tendremos que comprobar siempre los puntos frontera, así como los puntos críticos del interior y los puntos singulares para obtener dichos extremos. Los siguientes ejemplos ilustran la técnica.

Ejemplo 1 Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = 2xy$ en el disco cerrado $x^2 + y^2 \leqslant 4$ (*véase* la Figura 13.7).

Solución Como f es continua y el disco es cerrado, debe alcanzar valores máximo y mínimo absolutos en algunos puntos de dicho disco. Las derivadas parciales primeras de f son

$$f_1(x, y) = 2y \quad \text{y} \quad f_2(x, y) = 2x$$

por lo que no hay puntos singulares, y el único punto crítico es $(0, 0)$, donde f toma el valor 0.

Figura 13.7 Puntos candidatos a valores extremos en el Ejemplo 1.

Debemos considerar todavía los valores de f en la circunferencia frontera $x^2 + y^2 = 4$. Podemos expresar f sobre esta circunferencia en función de una sola variable utilizando una parametrización de la circunferencia, es decir,

$$x = 2\cos t, \qquad y = 2\,\mathrm{sen}\, t, \qquad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$$

Tenemos

$$f(2\cos t,\, 2\,\mathrm{sen}\, t) = 8\cos t\,\mathrm{sen}\, t = g(t)$$

Tenemos que obtener los valores extremos de $g(t)$. Podemos hacer esto de dos formas. Si escribimos $g(t) = 4\,\mathrm{sen}\, 2t$, es claro que $g(t)$ tiene un valor máximo de 4 (en $t = \frac{\pi}{4}$ y $-\frac{3\pi}{4}$) y un valor mínimo de -4 (en $t = -\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$). También podemos diferenciar g para obtener sus puntos críticos:

$$\begin{aligned} 0 = g'(t) = -8\,\mathrm{sen}^2 t + 8\cos^2 t \quad &\Leftrightarrow \quad \tan^2 t = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad t = \pm\frac{\pi}{4} \text{ o } \pm\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

con lo que se obtiene de nuevo el valor máximo de 4 y el valor mínimo de -4 (no es necesario comprobar los extremos $t = -\pi$ y $t = \pi$, ya que g es diferenciable en todas partes y es periódica de periodo π, y cualquier máximo o mínimo absoluto se producirá en un punto crítico).

En cualquier caso, f tiene un valor máximo de 4 en los puntos frontera $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, y un valor mínimo de -4 en los puntos frontera $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Se puede demostrar fácilmente mediante el test de la segunda derivada (o de cualquier otra forma) que el punto crítico interior (0, 0) es un punto de ensilladura (*véase* la Figura 13.7).

Ejemplo 2 Calcule los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2ye^{-(x+y)}$ en la región triangular T dada por $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ y $x + y \leqslant 4$.

Solución Primero se buscan los puntos críticos:

$$0 = f_1(x, y) = xy(2 - x)e^{-(x+y)} \quad \Rightarrow \quad x = 0,\, y = 0 \text{ o } x = 2$$

$$0 = f_2(x, y) = x^2(1 - y)e^{-(x+y)} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ o } y = 1$$

Los puntos críticos son $(0, y)$ para todo y, y (2, 1). Sólo (2, 1) es un punto interior de T (*véase* la Figura 13.8). $f(2, 1) = 4/e^3 \approx 0.199$. La frontera de T está formada por tres segmentos rectos. En dos de ellos, los ejes coordenados, f es idénticamente nula. El tercer segmento se expresa como

$$y = 4 - x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 4$$

por lo que los valores de f en este segmento se pueden expresar sólo en función de x:

$$g(x) = f(x, 4 - x) = x^2(4 - x)e^{-4}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 4$$

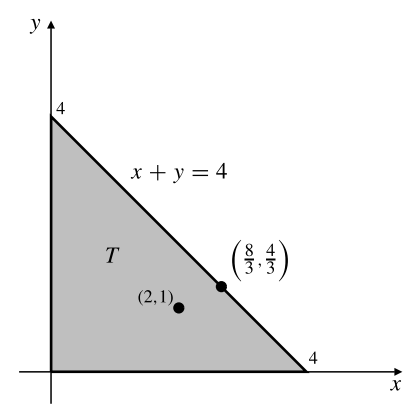


Figura 13.8 Puntos de interés en el Ejemplo 2.

Obsérvese que $g(0) = g(4) = 0$ y $g(x) > 0$ si $0 < x < 4$. Los puntos críticos de g están dados por $0 = g'(x) = (8x - 3x^2)e^{-4}$, por lo que son $x = 0$ y $x = 8/3$. Tenemos que

$$g\left(\frac{8}{3}\right) = f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{256}{27}\, e^{-4} \approx 0.174 < f(2, 1)$$

Concluimos entonces que el valor máximo de f en la región T es $4/e^3$, y que se produce en el punto crítico interior (2, 1). El valor mínimo de f es cero y se produce en todos los puntos de los dos segmentos frontera perpendiculares. Nótese que f no tiene ni un máximo local ni un mínimo local en el punto frontera (8/3, 4/3), aunque g presenta un máximo local allí. Por supuesto, ese punto tampoco es un punto de ensilladura de f; no es un punto crítico de f.

■

Ejemplo 3 Entre todos los triángulos cuyos vértices están en una circunferencia dada, calcule el que tiene área máxima.

Solución La intuición nos dice que los triángulos equiláteros serán los de área máxima. Sin embargo, demostrarlo puede ser muy difícil a menos que se haga una buena selección de las variables para plantear el problema analíticamente. Con una elección adecuada de las unidades y los ejes podemos suponer que la circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$ y que un vértice del triángulo es el punto P de coordenadas (1, 0). Sean Q y R los otros dos vértices, como se muestra en la Figura 13.9. Puede suponerse que Q está en la semicircunferencia superior y R en la inferior, y que el origen O está dentro del triángulo PQR. Supongamos que PQ y PR forman ángulos θ y ϕ, respectivamente, con la dirección negativa del eje x. Claramente, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ y $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2$. Las rectas que van desde O hasta Q y R forman ángulos iguales ψ con la recta QR, con $2\theta + 2\phi + 2\psi = \pi$. Trazando perpendiculares desde O a los tres lados del triángulo PQR, podemos expresar el área A del triángulo como la suma de las áreas de seis triángulos rectángulos más pequeños:

$$\begin{aligned} A &= 2 \times \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2 \times \frac{1}{2}\operatorname{sen}\phi\cos\phi + 2 \times \frac{1}{2}\operatorname{sen}\psi\cos\psi \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}2\theta + \operatorname{sen}2\phi + \operatorname{sen}2\psi) \end{aligned}$$

Como $2\psi = \pi - 2(\theta + \phi)$, expresamos A en función de las dos variables θ y ϕ:

$$A = A(\theta, \phi) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}2\theta + \operatorname{sen}2\phi + \operatorname{sen}2(\theta + \phi))$$

El dominio de A es el triángulo $\theta \geqslant 0$, $\phi \geqslant 0$, $\theta + \phi \leqslant \pi/2$. $A = 0$ en los vértices de un triángulo y es positiva en todas partes (*véase* la Figura 13.10). Demostraremos que el valor máximo de $A(\theta, \phi)$ en cualquier lado del triángulo es 1 y se produce en el punto medio de dicho lado. En dicho lado $\theta = 0$ y tenemos

$$A(0, \phi) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}2\phi + \operatorname{sen}2\phi) = \operatorname{sen}2\phi \leqslant 1 = A(0, \pi/4)$$

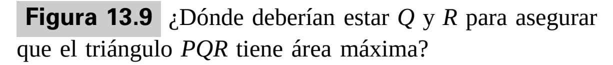


Figura 13.9 ¿Dónde deberían estar Q y R para asegurar que el triángulo PQR tiene área máxima?

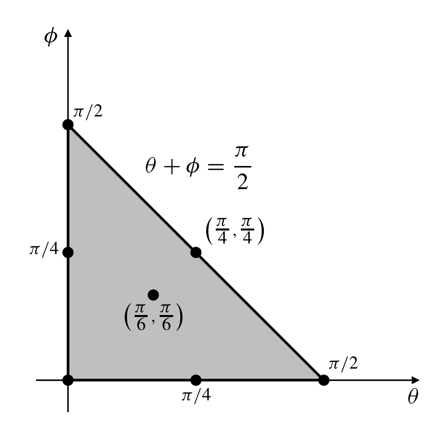


Figura 13.10 El dominio de $A(\theta, \phi)$.

De forma similar, en $\phi = 0$, $A(\theta, 0) \leqslant 1 = A(\pi/4, 0)$. En el lado $\theta + \phi = \pi/2$ tenemos

$$A\left(\theta, \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2}\,(\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen}(\pi - 2\theta))$$

$$= \operatorname{sen} 2\theta \leqslant 1 = A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Debemos comprobar ahora los puntos críticos interiores de $A(\theta, \phi)$ (no hay puntos singulares). Los puntos críticos deben cumplir

$$0 = \frac{\partial A}{\partial \theta} = \cos 2\theta + \cos(2\theta + 2\phi)$$

$$0 = \frac{\partial A}{\partial \phi} = \cos 2\phi + \cos(2\theta + 2\phi)$$

por lo que dichos puntos críticos cumplen $\cos 2\theta = \cos 2\phi$, y, por consiguiente, $\theta = \phi$. Sustituimos ahora esta ecuación en cualquiera de las ecuaciones anteriores para determinar θ:

$$\cos 2\theta + \cos 4\theta = 0$$

$$2\cos^2 2\theta + \cos 2\theta - 1 = 0$$

$$(2\cos 2\theta - 1)(\cos 2\theta + 1) = 0$$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \cos 2\theta = -1$$

La única solución que produce un punto interior del dominio de A es $\theta = \phi = \pi/6$. Nótese que

$$A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 1$$

Este punto interior crítico maximiza el área del triángulo inscrito. Finalmente, obsérvese que para $\theta = \phi = \pi/6$, tenemos también que $\psi = \pi/6$, por lo que el triángulo de área máxima es un triángulo equilátero.

■

Observación Como el área A del triángulo inscrito debe tener un valor máximo (A es continua y su dominio es cerrado y acotado), se puede utilizar un argumento estrictamente geométrico para demostrar que el triángulo de área máxima es equilátero. Si un triángulo inscrito tuviera dos lados desiguales, su área se podría hacer mayor moviendo el vértice común de esos dos lados por la circunferencia para incrementar su distancia perpendicular al lado opuesto del triángulo.

Programación lineal

La programación lineal es una rama del álgebra lineal que desarrolla técnicas sistemáticas para obtener máximos y mínimos de una *función lineal* sujeta a varias *restricciones lineales de desigualdad*. Estos problemas aparecen frecuentemente en las ciencias de gestión y en la investigación de operaciones. Debido a su naturaleza lineal, en general no requieren el empleo del cálculo en su solución; la programación lineal se presenta frecuentemente en cursos de *matemática finita*. No presentaremos aquí ningún estudio formal de la programación lineal, pero haremos algunas observaciones que permitan su comparación con los problemas más generales no lineales de valores extremos considerados anteriormente, y que requieren el empleo del cálculo para obtener su solución.

La inecuación $ax + by \leqslant c$ es un ejemplo de inecuación lineal en dos variables. El *conjunto solución* de esta inecuación está formado por un semiplano que queda a un lado de la recta $ax + by = c$. El conjunto solución de un sistema de varias inecuaciones lineales de dos variables es la intersección de estos semiplanos, por lo que es una región *convexa* del plano limitada por una *línea poligonal*. Si es un conjunto acotado, entonces es un polígono convexo junto con su interior (un conjunto se denomina **convexo** si contiene completamente a una recta que se trace entre dos cualesquiera de sus puntos. En la recta real los conjuntos convexos son los intervalos).

Examinemos un ejemplo concreto simple en el que intervienen sólo dos variables y unas pocas restricciones.

Ejemplo 4 Calcule el valor máximo de $F(x, y) = 2x + 7y$ sujeta a las restricciones $x + 2y \leqslant 6$, $2x + y \leqslant 6$, $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

Solución El conjunto solución $\mathcal{S}$ de este sistema de cuatro desigualdades de restricciones se muestra en la Figura 13.11. Es la región con forma de cuadrilátero cuyos vértices son (0, 0), (3, 0), (2, 2) y (0, 3). La figura muestra también algunas curvas de nivel de la función lineal F. Son rectas paralelas de pendiente $-\frac{2}{7}$. Deseamos encontrar la recta correspondiente al máximo valor de F que corte todavía a $\mathcal{S}$. Evidentemente, se trata de la recta $F = 21$, que pasa por el vértice (0, 3) de $\mathcal{S}$. El máximo valor de F sujeto a las restricciones es 21.

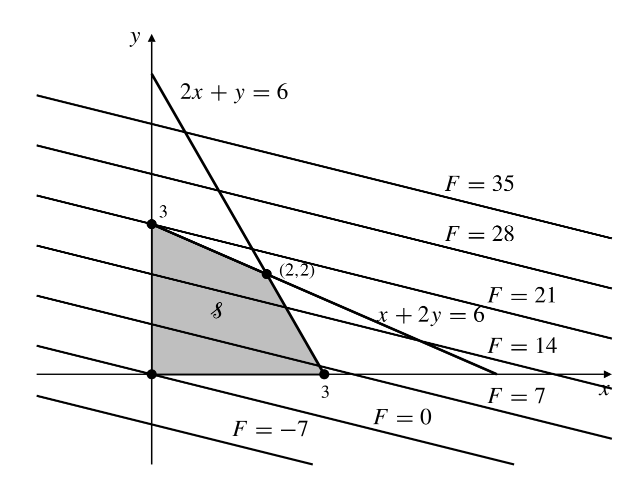


Figura 13.11 La región sombreada es el conjunto solución de las desigualdades de restricciones del Ejemplo 4.

■

Como ilustra este ejemplo simple, una función *lineal* con dominio restringido por desigualdades lineales no alcanza valores máximos ni mínimos en puntos del interior de su dominio (si dicho dominio tiene interior). Cualquier valor extremo se producirá en un punto frontera del dominio o en un conjunto de tales puntos frontera. Cuando el valor extremo se produzca en un conjunto de puntos frontera, dicho conjunto *siempre* contendrá al menos un vértice.

Este comportamiento se sigue cumpliendo en general para problemas de valores extremos de funciones lineales en cualquier número de variables, cuyos dominios estén restringidos por cualquier número de desigualdades lineales. En el caso de problemas con tres variables, el dominio será una región convexa de $\mathbb{R}^3$ limitada por planos. En el caso de un problema con n variables, el dominio será una región convexa de $\mathbb{R}^n$ limitada por hiperplanos de dimensión $n - 1$. Estas regiones *poliédricas* tendrán vértices (donde se crucen n hiperplanos), y los valores máximo y mínimo de las funciones lineales sujetas a las restricciones se seguirán produciendo en subconjuntos de la frontera que contendrán a esos vértices. Por tanto, estos problemas se pueden resolver evaluando la función lineal que se ha de optimizar (se denomina **función objetivo**) en todos los vértices y seleccionando el valor máximo o mínimo.

En la práctica, en los problemas de programación lineal pueden intervenir cientos y hasta miles de variables, e incluso más restricciones. Estos problemas deben ser resueltos con computadores, pero incluso así es extremadamente ineficiente, si no imposible, calcular todos los vértices del conjunto solución de las restricciones, y los valores de la función objetivo en dichos vértices. Muchos de los estudios sobre programación lineal se centran, por tanto, en desarrollar técnicas para obtener (o al menos acercarse) el vértice óptimo en tan pocos pasos como sea posible. En general, intervienen criterios por los que un gran número de vértices se pueden rechazar mediante consideraciones geométricas. No profundizaremos en estas técnicas, sino que nos contentaremos con presentar un ejemplo más para ilustrar, en un caso muy simple, cómo se puede utilizar la geometría subyacente de un problema para reducir el número de vértices que se deben considerar.

Ejemplo 5 Un sastre dispone de 230 m de cierta tela y tiene pedidos para un máximo de 20 trajes, un máximo de 30 chaquetas y un máximo de 40 pantalones, para realizar con dicha tela. Cada traje requiere 6 m de tela, cada chaqueta 3 m y cada pantalón 2 m. Si el beneficio del sastre es de 20 € por traje, 14 € por chaqueta y 12 € por pantalón, ¿cuántos debe hacer para obtener el máximo beneficio con la tela de que dispone?

Solución Supongamos que el sastre hace x trajes, y chaquetas y z pantalones. En ese caso, su beneficio será

$$P = 20x + 14y + 12z$$

Las restricciones del problema son

$$\begin{aligned} x &\geqslant 0, & x &\leqslant 20 \\ y &\geqslant 0, & y &\leqslant 30 \\ z &\geqslant 0, & z &\leqslant 40 \end{aligned}$$

$$6x + 3y + 2z \leqslant 230$$

La última desigualdad se debe al suministro limitado de la fábrica. La Figura 13.12 muestra el conjunto solución. Tiene 10 vértices, $A, B, ..., J$. Como P crece en la dirección del vector $\nabla P = 20\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$, que apunta hacia el primer octante, el valor máximo no se puede alcanzar en ninguno de los vértices $A, B, ..., G$ (piénsese por qué). Por consiguiente, sólo necesitamos buscar en los vértices H, I y J.

$$\begin{aligned} H &= (20, 10, 40), & P &= 1020 \text{ en } H \\ I &= (10, 30, 40), & P &= 1100 \text{ en } I \\ J &= (20, 30, 10), & P &= 940 \text{ en } J \end{aligned}$$

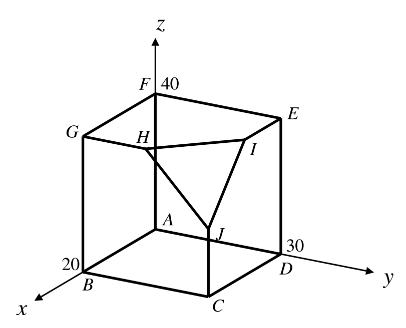


Figura 13.12 El conjunto convexo de puntos que cumplen las restricciones del Ejemplo 5.

Por consiguiente, el sastre debe hacer 10 trajes, 30 chaquetas y 40 pantalones para obtener su máximo beneficio, 1100 €, con la tela de que dispone. ■

Ejercicios 13.2

1. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = x - x^2 + y^2$ en el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

2. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = xy - 2x$ en el rectángulo $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

3. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = xy - y^2$ en el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

4. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = x + 2y$ en el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

5. Calcule el valor máximo de $f(x, y) = xy - x^3y^2$ en el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

6. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ en el triángulo cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (0, 1).

7. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ en la región triangular cerrada limitada por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 2\pi$.

8. Calcule el valor máximo de

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x + y)$$

en el triángulo limitado por los ejes de coordenadas y la recta a $x + y = \pi$.

9. La temperatura de todos los puntos del disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ está dada por

$$T = (x + y)e^{-x^2-y^2}$$

Calcule las temperaturas máxima y mínima en los puntos del disco.

10. Calcule los valores máximo y mínimo de

$$f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$$

en el semiplano superior $y \geqslant 0$.

11. Calcule los valores máximo y mínimo de $xy^2 + yz^2$ en la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

12. Calcule los valores máximo y mínimo de $xz + yz$ en la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

13. Considere la función $f(x, y) = xye^{-xy}$ cuyo dominio es el primer cuadrante $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Demuestre que $\lim_{x\to\infty} f(x, kx) = 0$. ¿Tiene f límite cuando (x, y) se aleja arbitrariamente del origen por el primer cuadrante? ¿Tiene f un valor máximo en el primer cuadrante?

14. Repita el Ejercicio 13 para la función $f(x, y) = xy^2e^{-xy}$.

15. En cierta comunidad hay dos fábricas de cerveza que compiten, de forma que las ventas de una afectan negativamente al beneficio de la otra. Si la fábrica A produce x litros de cerveza al mes y la fábrica B produce y litros de cerveza al mes, entonces los beneficios mensuales de P € de la fábrica A y de Q € de la fábrica B se pueden expresar como

$$P = 2x - \frac{2x^2 + y^2}{10^6}$$

$$Q = 2y - \frac{4y^2 + x^2}{2 \times 10^6}$$

Calcule la suma de los beneficios de las dos fábricas si cada una establece su producción de forma independiente, con el criterio de maximizar su propio beneficio, y asume que su competidora hace lo mismo. Calcule la suma de los beneficios si las dos fábricas cooperan y determinan sus producciones respectivas de forma que se maximice dicha suma.

16. En una valla recta de 100 m de longitud se realizan dos dobleces que forman el mismo ángulo a la misma

distancia de sus extremos, y la cerca de tres segmentos resultantes se pega a un muro existente para formar un recinto de forma trapezoidal. ¿Cuál es la máxima área posible de dicho recinto?

17. Maximice $Q(x, y) = 2x + 3y$ sujeta a las restricciones $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant 5$, $x + 2y \leqslant 12$ y $4x + y \leqslant 12$.

18. Minimice $F(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$ sujeta a las restricciones $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y \geqslant 2$, $y + z \geqslant 2$ y $x + z \geqslant 2$.

19. Un fabricante textil produce dos tipos de tela de lana-algodón-poliéster. El tipo de lujo tiene una composición (por peso) del 20% de lana, el 50% de algodón y el 30% de poliéster y lo vende a 3 € por kilogramo. El tipo estándar tiene una composición del 10% de lana, el 40% de algodón y el 50% de poliéster, y lo vende a 2 € por kilogramo. Si tiene en stock 2000 kg de lana, 6000 kg de algodón y 6000 kg de poliéster, ¿cuántos kilogramos de tela de cada tipo debería fabricar para maximizar sus ingresos?

20. Un terreno de 10 hectáreas se parcela para realizar construcciones con densidades de seis chalets aislados por hectárea, ocho dúplex por hectárea o 12 apartamentos por hectárea. El promotor que posee el terreno puede obtener un beneficio de 40 000 € por chalet aislado, 20 000 € por dúplex y 16 000 € por apartamento. Las leyes municipales lo obligan a construir al menos tantos apartamentos como el total de chalets y dúplex. ¿Cuántas construcciones de cada tipo debe realizar para maximizar su beneficio?

13.3 Multiplicadores de Lagrange

Un problema de valores extremos con restricciones es aquel en el que las variables de la función a maximizar o minimizar no son completamente independientes entre sí, sino que deben satisfacer una o más ecuaciones o desigualdades de restricciones. Por ejemplo, los problemas

$$\textbf{maximizar} \quad f(x, y) \quad \textbf{sujeto a} \quad g(x, y) = C$$

y

$$\begin{aligned} \textbf{minimizar} \quad f(x, y, z, w) \quad \textbf{sujeto a} \quad & g(x, y, z, w) = C_1 \\ \textbf{y} \quad & h(x, y, z, w) = C_2 \end{aligned}$$

tienen, respectivamente, una y dos ecuaciones de restricciones, y el problema

$$\textbf{maximizar} \quad f(x, y, z) \quad \textbf{sujeto a} \quad g(x, y, z) \leqslant C$$

tiene una única desigualdad de restricciones.

En general, se puede considerar que las desigualdades de restricciones restringen el dominio de la función a optimizar a un conjunto menor que todavía posea puntos interiores. La Sección 13.2 ha estado dedicada a estos problemas. En los tres primeros ejemplos de dicha sección buscábamos valores extremos *libres* (es decir, *sin restricciones*) en el interior del dominio, y examinábamos también la frontera del dominio, especificada por una o varias *ecuaciones de restricciones*. En el Ejemplo 1 parametrizamos la frontera y expresamos la función a optimizar en función del parámetro, para reducir así el problema a un problema libre en una variable, en vez de ser un problema con restricciones en dos variables. En el Ejemplo 2 la frontera estaba formada por tres segmentos rectos, en dos de los cuales la función valía obviamente cero. Utilizando la ecuación del tercer segmento despejamos y en función de x, para expresar los valores de $f(x, y)$ en ese segmento en función de una única variable libre. En el Ejemplo 3 utilizamos un enfoque similar para tratar la frontera triangular de la función de área $A(\theta, \phi)$.

La reducción de problemas de optimización con ecuaciones de restricciones a problemas libres con menos variables independientes sólo es posible cuando a partir de las ecuaciones de restricciones se pueden despejar explícitamente algunas variables en función de las otras, o bien cuando se pueden expresar paramétricamente todas las variables en función de unos pocos parámetros. A menudo es muy difícil o imposible resolver las ecuaciones de restricciones, por lo que necesitamos otras técnicas.

El método de los multiplicadores de Lagrange

Una técnica para calcular valores extremos de $f(x, y)$ sujeta a la restricción de igualdad $g(x, y) = 0$ se basa en el siguiente teorema:

TEOREMA 4 Supongamos que f y g tienen derivadas parciales primeras continuas cerca del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ sobre la curva $\mathcal{C}$ cuya ecuación es $g(x, y) = 0$. Supongamos además que, cuando se restringe a los puntos de $\mathcal{C}$, la función $f(x, y)$ tiene un valor máximo o mínimo local en P_0. Supongamos finalmente que,

(i) P_0 no es un extremo de $\mathcal{C}$.
(ii) $\nabla g(P_0) \neq \mathbf{0}$.

Entonces existe un número λ_0 tal que (x_0, y_0, λ_0) es un punto crítico de la **función Lagrangiana**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

DEMOSTRACIÓN En conjunto, (i) y (ii) implican que $\mathcal{C}$ es lo suficientemente suave para tener una tangente en P_0, y que $\nabla g(P_0)$ es normal a dicha tangente. Si $\nabla f(P_0)$ no es paralela a $\nabla g(P_0)$, entonces $\nabla f(P_0)$ tiene un vector proyección $\mathbf{v}$ distinto de cero sobre la recta tangente a $\mathcal{C}$ en P_0 (*véase* la Figura 13.13). Por lo tanto, f tiene una derivada direccional positiva en P_0 en la dirección de $\mathbf{v}$, y una derivada direccional negativa en la dirección opuesta. Entonces, $f(x, y)$ crece o decrece a medida que nos alejamos de P_0 por la curva $\mathcal{C}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ o de $-\mathbf{v}$, y f no puede tener un máximo ni un mínimo en P_0. Como estamos suponiendo que f *tiene* un valor extremo en P_0, lo que debe ocurrir es que $\nabla f(P_0)$ es paralelo a $\nabla g(P_0)$. Como $\nabla g(P_0) \neq \mathbf{0}$, debe existir un número real λ_0 tal que $\nabla f(P_0) = -\lambda_0 \nabla g(P_0)$, o

$$\nabla(f + \lambda_0 g)(P_0) = \mathbf{0}$$

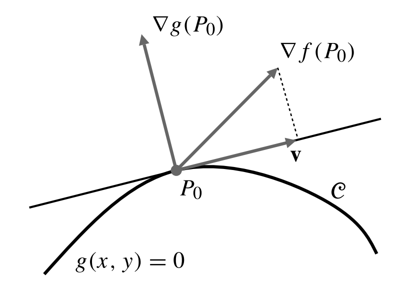


Figura 13.13 Si $\nabla f(P_0)$ no es un múltiplo de $\nabla g(P_0)$, entonces $\nabla f(P_0)$ tiene un vector proyección $\mathbf{v}$ distinto de cero tangente a la curva de nivel de g que pasa por P_0.

Las dos componentes de la ecuación vectorial anterior afirman que $\partial L/\partial x = 0$ y $\partial L/\partial y = 0$ en (x_0, y_0, λ_0). La tercera ecuación que debe cumplir un punto crítico de L es $\partial L/\partial \lambda = g(x, y) = 0$. Ésta se cumple en (x_0, y_0, λ_0), ya que P_0 está en $\mathcal{C}$. Por tanto, (x_0, y_0, λ_0) es un punto crítico de $L(x, y, \lambda)$.

El Teorema 4 sugiere que para obtener candidatos de puntos de la curva $g(x, y) = 0$ donde $f(x, y)$ alcance un máximo o un mínimo, hay que buscar los puntos críticos de la función Lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

En todo punto crítico de L debe cumplirse

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial x} = f_1(x, y) + \lambda g_1(x, y) \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial y} = f_2(x, y) + \lambda g_2(x, y) \end{aligned}\right\} \quad \text{es decir, } \nabla f \text{ es paralelo a } \nabla g$$

$$\text{y} \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) \qquad \text{la ecuación de la restricción}$$

Nótese, sin embargo, que se *supone* que el problema con restricciones *tiene solución*. El Teorema 4 no garantiza que dicha solución exista; sólo indica la forma de calcular una solución que ya se sabe que existe. En general es necesario ver primero si el problema en estudio tiene solución antes de utilizar este método para intentar obtenerla.

Apliquemos el método en un caso concreto:

Ejemplo 1 Calcule la mínima distancia desde el origen a la curva $x^2y = 16$.

Solución La Figura 13.14 muestra la gráfica de $x^2y = 16$. Parece haber dos puntos en la curva que son los más cercanos al origen (la curva no está acotada). Para calcular los puntos más cercanos basta con minimizar el *cuadrado* de la distancia de un punto (x, y) de la curva al origen (es más sencillo trabajar con el cuadrado de la distancia que con la propia distancia, ya que en esta última aparece una raíz cuadrada, más difícil de diferenciar). Por tanto, deseamos resolver el problema

$$\textbf{minimizar} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \textbf{sujeto a} \quad g(x, y) = x^2y - 16 = 0$$

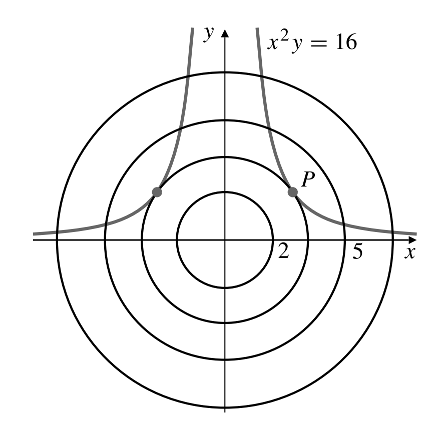


Figura 13.14 La curva de nivel de la función que representa el cuadrado de la distancia al origen es tangente a la curva $x^2y = 16$ en los dos puntos donde dicha curva está más próxima al origen.

Sea $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2y - 16)$. En los puntos críticos de L debe cumplirse

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda xy = 2x(1 + \lambda y) \qquad \text{(A)}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda x^2 \qquad \text{(B)}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2y - 16 \qquad \text{(C)}$$

La ecuación (A) requiere que $x = 0$ o que $\lambda y = -1$. Sin embargo, $x = 0$ es inconsistente con la ecuación (C). Por tanto, $\lambda y = -1$. A partir de la ecuación (B) tenemos ahora

$$0 = 2y^2 + \lambda yx^2 = 2y^2 - x^2$$

Por consiguiente, $x = \pm\sqrt{2}y$, y (C) permite obtener ahora $2y^3 = 16$, por lo que $y = 2$. Así, existen dos candidatos a puntos de $x^2y = 16$ más cercanos al origen, $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$. Ambos están a distancia

$\sqrt{8+4} = 2\sqrt{3}$ unidades del origen, por lo que ésta debe ser la mínima distancia desde el origen a la curva. En la Figura 13.14 se muestran algunas curvas de nivel de $x^2 + y^2$, junto con la curva de la restricción $x^2y = 16$. Obsérvese cómo la curva de la restricción es tangente a la curva de nivel que pasa por los puntos que minimizan la distancia $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$, reflejando el hecho de que las normales a las dos curvas son paralelas en esos puntos.

Observación Por supuesto, en el ejemplo anterior podríamos haber despejado y de la ecuación de restricciones en la forma $y = 16/x^2$, haber sustituido en f y, por tanto, haber reducido el problema al de obtener el valor mínimo (sin restricciones) de

$$F(x) = f\left(x, \frac{16}{x^2}\right) = x^2 + \frac{256}{x^4}$$

Se invita al lector a verificar que se obtiene el mismo resultado.

El número λ que aparece en la función Lagrangiana se denomina **multiplicador de Lagrange**. La técnica de solución de problemas de valores extremos buscando los puntos críticos de un problema con restricciones con más variables (las variables originales más los multiplicadores de Lagrange correspondientes a cada ecuación de restricciones) se denomina **método de los multiplicadores de Lagrange**. Dará buenos resultados en tanto en cuanto la función a maximizar o minimizar (denominada **función objetivo**) y las ecuaciones de las restricciones tengan gráficas *suaves* en un entorno de los puntos donde se produzcan los valores extremos, y esos puntos no estén en *bordes* de las gráficas. *Véanse* el Ejemplo 3 y el Ejercicio 26 posteriores.

Ejemplo 2 Calcule los puntos de la curva $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ que están más cerca y más lejos del origen.

Solución La forma cuadrática del miembro izquierdo de la ecuación anterior es definida positiva, como se puede ver completando el cuadrado. Por tanto, la curva está acotada y debe tener puntos con distancia máxima y mínima al origen (de hecho, la curva es una elipse centrada en el origen y con ejes principales oblicuos. El problema pide calcular los extremos de los ejes mayor y menor).

De nuevo, lo que deseamos es optimizar $x^2 + y^2$ sujeta a la ecuación de restricciones. En este caso el Lagrangiano es

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100)$$

y los puntos críticos deben cumplir

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(34x + 12y) \qquad \text{(A)}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(12x + 16y) \qquad \text{(B)}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 \qquad \text{(C)}$$

Despejando λ en las ecuaciones (A) y (B) e igualando las dos expresiones de λ se obtiene

$$\frac{-2x}{34x + 12y} = \frac{-2y}{12x + 16y} \quad \text{o} \quad 12x^2 + 16xy = 34xy + 12y^2$$

Esta ecuación se puede simplificar, obteniéndose

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$$

Multiplicando la ecuación (D) por 4 y sumando el resultado a la ecuación (C) se obtiene $25x^2 = 100$, por lo que $x = \pm 2$. Finalmente, se sustituyen los dos valores de x en (D) y se obtienen (para cada uno) dos valores de y de las correspondientes ecuaciones de segundo grado:

$$\text{Para } x = 2: y^2 + 3y - 4 = 0, \qquad \text{Para } x = -2: y^2 - 3y - 4 = 0$$
$$(y - 1)(y + 4) = 0 \qquad\qquad (y + 1)(y - 4) = 0$$

Obtenemos, por tanto, cuatro puntos candidatos: (2, 1), (−2, −1), (2, −4) y (−2, 4). Los dos primeros puntos son los más cercanos al origen; son los extremos del eje menor de la elipse. Los otros dos son los más lejanos del origen (los extremos del eje mayor) (*véase* la Figura 13.15).

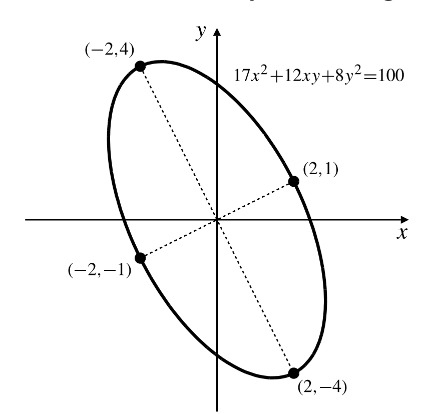


Figura 13.15 Los puntos de la elipse que están más cerca y más lejos del origen.

Considerando las bases geométricas del método de los multiplicadores de Lagrange, no debemos esperar que el método tenga éxito si las curvas de nivel de las funciones que intervienen no son suaves, o si el máximo o mínimo se produce en un extremo de la curva de restricciones. Uno de los obstáculos del método es que las curvas de nivel de las funciones pueden no ser suaves, incluso aunque las propias funciones tengan derivadas parciales. Pueden aparecer problemas cuando un gradiente se anula, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Calcule el valor mínimo de $f(x, y) = y$, sujeta a la ecuación de restricción $g(x, y) = y^3 - x^2 = 0$.

Solución La parábola semicúbica $y^3 = x^2$ tiene un vértice en el origen (*véase* la Figura 13.16). Es claro que $f(x, y) = y$ tiene un valor mínimo de 0 en ese punto. Sin embargo, supongamos que intentamos resolver el problema utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange. En este caso el Lagrangiano es

$$L(x, y, \lambda) = y + \lambda(y^3 - x^2)$$

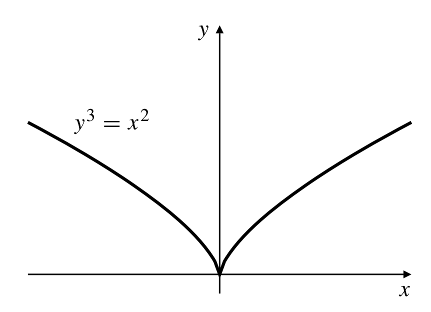


Figura 13.16 El mínimo de y se produce en un punto de la curva donde ésta no tiene tangente.

cuyos puntos críticos deben cumplir

$$-2\lambda x = 0$$
$$1 + 3\lambda y^2 = 0$$
$$y^3 - x^2 = 0$$

Obsérvese que $y = 0$ no puede satisfacer la segunda ecuación, y, de hecho, las tres ecuaciones *no tienen solución* (x, y, λ) (la primera ecuación implica que o bien $\lambda = 0$, o bien $x = 0$, pero ninguna de ellas es consistente con las otras dos ecuaciones).

Observación El método de los multiplicadores de Lagrange no funciona en el ejemplo anterior porque $\nabla g = \mathbf{0}$ en el punto de solución, y por tanto la curva $g(x, y) = 0$ puede no ser suave en dicho punto (de hecho, en este caso no lo es). La condición geométrica de que ∇f debe ser paralelo ∇g en el punto de solución carece de sentido en este caso. Cuando se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange, hay que estar seguro de que el valor extremo se puede producir en:

(i) Un punto crítico del Lagrangiano.
(ii) Un punto donde $\nabla g = \mathbf{0}$.
(iii) Un punto donde ∇f o ∇g no existen.
(iv) Un «extremo» del conjunto de restricciones.

Esta situación es similar a la de los valores extremos de una función f de una variable, que pueden producirse en un punto crítico, un punto singular o un extremo del dominio de f.

Problemas con más de una restricción

Consideraremos a continuación un problema tridimensional que requiere la obtención de un valor máximo o mínimo de una función de tres variables sujeta a dos ecuaciones de restricciones:

$$\textbf{optimizar} \quad f(x, y, z) \quad \textbf{sujeto a} \quad g(x, y, z) = 0 \text{ y } h(x, y, z) = 0$$

Supongamos de nuevo que el problema tiene solución, por ejemplo el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, y que las funciones f, g y h tienen derivadas parciales primeras continuas cerca de P_0. Supongamos también que $\mathbf{T} = \nabla g(P_0) \times \nabla h(P_0) \neq \mathbf{0}$. Estas condiciones implican que las superficies $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$ son suaves cerca de P_0 y que no son tangentes entre sí en ese punto, por lo que deben cruzarse formando una curva $\mathcal{C}$ que es suave cerca de P_0. La curva $\mathcal{C}$ tiene un vector tangente $\mathbf{T}$ en P_0. El mismo argumento geométrico utilizado en la demostración del Teorema 4 demuestra de nuevo que $\nabla f(P_0)$ debe ser perpendicular a $\mathbf{T}$ (si no lo fuera, entonces habría un vector proyección sobre $\mathbf{T}$ no nulo, y f tendría derivadas direccionales no nulas en las direcciones $\pm\mathbf{T}$, y por tanto crecería y decrecería cuando nos moviéramos a partir de P_0 siguiendo la curva $\mathcal{C}$ en direcciones opuestas).

Como $\nabla g(P_0)$ y $\nabla h(P_0)$ son no nulos y ambos son perpendiculares a $\mathbf{T}$ (*véase* la Figura 13.17), $\nabla f(P_0)$ debe estar en el plano generado por esos dos vectores y, por consiguiente, debe ser una combinación lineal de aquéllos:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = -\lambda_0 \nabla g(x_0, y_0, z_0) - \mu_0 \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

para algunas constantes λ_0 y μ_0. Se deduce entonces que $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ es un punto crítico de la función Lagrangiana

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

Buscamos tripletes (x, y, z) que optimicen $f(x, y, z)$ sujeta a las dos restricciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$ entre los puntos (x, y, z, λ, μ) que sean puntos críticos de la función Lagrangiana anterior, y por tanto debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) + \lambda g_1(x, y, z) + \mu h_1(x, y, z) &= 0 \\ f_2(x, y, z) + \lambda g_2(x, y, z) + \mu h_2(x, y, z) &= 0 \\ f_3(x, y, z) + \lambda g_3(x, y, z) + \mu h_3(x, y, z) &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \\ h(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

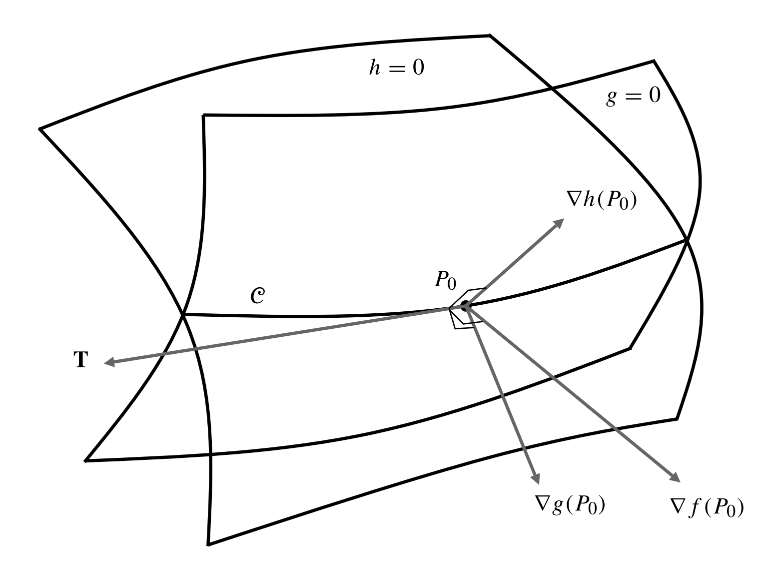


Figura 13.17 En P_0, ∇f, ∇g y ∇h son todos perpendiculares a **T**. Por tanto, ∇f está en el plano generado por ∇g y ∇h.

La resolución de un sistema como éste puede ser muy difícil. Debe notarse que al utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange en vez de resolver las ecuaciones de restricciones, hemos cambiado el problema de resolver dos ecuaciones para expresar dos variables como *funciones* de una tercera por un problema de obtener valores *numéricos* resolviendo cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

Ejemplo 4 Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = xy + 2z$ en la circunferencia correspondiente a la intersección del plano $x + y + z = 0$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 24$.

Solución La función f es continua, y la circunferencia es un conjunto cerrado y acotado en el espacio tridimensional. Por tanto, deben existir valores máximo y mínimo. Buscaremos los puntos críticos del Lagrangiano

$$L = xy + 2z + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 24)$$

Igualando a cero las primeras derivadas de L, obtenemos

$$y + \lambda + 2\mu x = 0 \qquad \text{(A)}$$

$$x + \lambda + 2\mu y = 0 \qquad \text{(B)}$$

$$2 + \lambda + 2\mu z = 0 \qquad \text{(C)}$$

$$x + y + z = 0 \qquad \text{(D)}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 24 = 0 \qquad \text{(E)}$$

Restando (A) de (B) obtenemos $(x - y)(1 - 2\mu) = 0$. Por tanto, o $\mu = \frac{1}{2}$ o $x = y$. Analizaremos ambas posibilidades.

Cuando ninguna de las ecuaciones se pueda factorizar, intente combinar dos o más para producir una nueva ecuación que se pueda factorizar.

CASO I Si $\mu = \frac{1}{2}$, obtenemos a partir de (B) y (C)

$$x + \lambda + y = 0 \quad \text{y} \quad 2 + \lambda + z = 0$$

Por tanto, $x + y = 2 + z$. Combinando esto con (D) se obtiene $z = -1$ y $x + y = 1$. Ahora, por (E), $x^2 + y^2 = 24 - z^2 = 23$. Como $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 = 1$, tenemos $2xy = 1 - 23 = -22$ y $xy = -11$. Ahora $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 23 + 22 = 45$, por lo que $x - y = \pm 3\sqrt{5}$. Combinando esto con

$x + y = 1$, se obtienen dos puntos críticos que resultan de $\mu = \frac{1}{2}$, concretamente, $((1 + 3\sqrt{5})/2,\ (1 - 3\sqrt{5})/2,\ -1)$ y $((1 - 3\sqrt{5})/2,\ (1 + 3\sqrt{5})/2,\ -1)$. En ambos puntos se tiene que $f(x, y, z) = xy + 2z = -11 - 2 = -13$.

CASO II Si $x = y$, entonces (D) implica que $z = -2x$, y (E) produce entonces $6x^2 = 24$, por lo que $x = \pm 2$. Por tanto, debemos considerar los puntos $(2, 2, -4)$ y $(-2, -2, 4)$. Tenemos $f(2, 2, -4) = 4 - 8 = -4$ y $f(-2, -2, 4) = 4 + 8 = 12$.

Concluimos entonces que el valor máximo de f en la circunferencia es 12, y el valor mínimo es -13. ■

El método de los multiplicadores de Lagrange se puede aplicar para obtener valores extremos de una función de n variables, es decir, de una variable vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, sujeta a $m \leqslant n - 1$ restricciones:

$$\textbf{optimizar} \quad f(\mathbf{x}) \quad \textbf{sujeto a} \quad g_{(1)}(\mathbf{x}) = 0, ..., g_{(m)}(\mathbf{x}) = 0$$

Suponiendo que el problema tiene solución en el punto P_0, que f y todas las funciones $g_{(j)}$ tienen derivadas parciales primeras continuas en un entorno de P_0, y que la intersección de las (hiper) superficies de restricciones es suave cerca de P_0, entonces podemos buscar el punto P_0 entre los puntos críticos de la función Lagrangiana de $(n + m)$ variables

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_{(j)}(\mathbf{x})$$

No demostraremos esta afirmación general (la demostración se puede basar en el Teorema de la Función Implícita). Todos los puntos críticos deben satisfacer las $n + m$ ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n), \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g_{(j)}(\mathbf{x}) = 0, \qquad (1 \leqslant j \leqslant m)$$

Programación no lineal

Cuando en la sección anterior buscamos valores extremos de funciones f en dominios restringidos R, tuvimos que buscar separadamente puntos críticos de f en el interior de R y puntos críticos de la restricción de f en la frontera de R. El interior de R está generalmente especificado por una o más restricciones en forma de inecuación $g < 0$, y la frontera corresponde a restricciones en forma de ecuación $g = 0$ (para las que se puede utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange).

Es posible unificar estos enfoques en un solo método de cálculo de valores extremos de funciones definidas en regiones especificadas por inecuaciones de la forma $g \leqslant 0$.

Consideremos, por ejemplo, el problema de obtener valores extremos de $f(x, y)$ en la región R especificada por $g(x, y) \leqslant 0$. Podemos proceder intentando obtener los puntos críticos de la función de cuatro variables

$$L(x, y, \lambda, u) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) + u^2)$$

Estos puntos críticos deben cumplir las cuatro ecuaciones

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = f_1(x, y) + \lambda g_1(x, y) \qquad \text{(A)}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} = f_2(x, y) + \lambda g_2(x, y) \qquad \text{(B)}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g_2(x, y) + u^2 \qquad \text{(C)}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u} = 2\lambda u \qquad \text{(D)}$$

Supongamos que (x, y, λ, u) satisface estas ecuaciones. Consideraremos dos casos:

CASO I $u \neq 0$. Entonces (D) implica que $\lambda = 0$, (C) implica que $g(x, y) = -u^2 < 0$, y (A) y (B) implican que $f_1(x, y) = 0$ y $f_2(x, y) = 0$. Por tanto, (x, y) es un punto crítico interior de f.

CASO II $u = 0$. Entonces (C) implica que $g(x, y) = 0$, y (A) y (B) implican que $\nabla f(x, y) = -\lambda \nabla g(x, y)$, por lo que (x, y) es un punto frontera candidato a ser valor extremo.

Esta técnica se puede ampliar al problema de calcular los valores extremos de una función de n variables, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, en la intersección R de m regiones R_j definidas por restricciones en forma de inecuación $g_{(j)}(\mathbf{x}) \leqslant 0$.

$$\textbf{optimizar} \quad f(\mathbf{x}) \quad \textbf{sujeto a} \quad g_{(1)}(\mathbf{x}) \leqslant 0, ..., g_{(m)}(\mathbf{x}) \leqslant 0$$

En este caso buscaremos puntos críticos del Lagrangiano de $n + 2m$ variables

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, ..., \lambda_m, u_1, ..., u_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_{(j)}(\mathbf{x}) + u_j^2)$$

Los puntos críticos cumplirán el sistema de $n + 2m$ ecuaciones

$$\nabla f(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_{(j)}(\mathbf{x}) \qquad (n \text{ ecuaciones})$$

$$g_{(j)}(\mathbf{x}) = -u_j^2, \quad (1 \leqslant j \leqslant m) \qquad (m \text{ ecuaciones})$$

$$2\lambda_j u_j = 0, \quad (1 \leqslant j \leqslant m) \qquad (m \text{ ecuaciones})$$

Las últimas m ecuaciones muestran que $\lambda_j = 0$ para todo j tal que $u_j \neq 0$. Si todo $u_j \neq 0$, entonces $\mathbf{x}$ es un punto crítico de f interior a R. En otro caso, alguna de las u_j será cero, por ejemplo, aquellas correspondientes a valores de j en un subconjunto J de $\{1, 2, ..., m\}$. En este caso $\mathbf{x}$ estará en la parte de la frontera de R formada por puntos de cada una de las regiones R_j para las que $j \in J$, y ∇f será una combinación lineal de los correspondientes gradientes $\nabla g_{(j)}$:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = -\sum_{j \in J} \lambda_j \nabla g_{(j)}(\mathbf{x})$$

Las expresiones anteriores se conocen por el nombre de **condiciones de Kuhn-Tucker**, y esta técnica de resolución de problemas de valores extremos en dominios restringidos se denomina **programación no lineal**.

Ejercicios 13.3

1. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para maximizar x^3y^5 sujeta a la restricción $x + y = 8$.

2. Calcule la mínima distancia del punto (3, 0) a la parábola $y = x^2$:

(a) Por reducción a un problema sin restricciones en una variable.

(b) Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

3. Calcule la distancia del origen al plano $x + 2y + 2z = 3$:

(a) Utilizando un argumento geométrico (sin utilizar cálculo).

(b) Reduciendo el problema a un problema sin restricciones en dos variables.

(c) Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

4. Calcule los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x + y - z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular la máxima y mínima distancia del punto $(2, 1, -2)$ a la esfera cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (por supuesto, la respuesta se podría obtener más fácilmente utilizando un argumento geométrico simple).

6. Calcule la mínima distancia del origen a la superficie $xyz^2 = 2$.

7. Calcule a, b y c de forma que el volumen $V = 4\pi abc/3$ de un elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ que pase por el punto $(1, 2, 1)$ sea lo más pequeño posible.

8. Calcule los extremos de los ejes mayor y menor de la elipse $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 16$.

9. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = xyz$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

10. Calcule los valores máximo y mínimo de $x + 2 - 3z$ en el elipsoide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leqslant 108$.

11. Calcule los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x$ en la curva correspondiente a la intersección del plano $z = x + y$ y el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$.

12. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en la elipse formada por la intersección del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $x - 2z = 3$.

13. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = 4 - z$ en la elipse formada por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 8$ y el plano $x + y + z = 1$.

14. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = x + y^2z$ sujeta a las restricciones $y^2 + z^2 = 2$ y $z = x$.

*__15.__ Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular la mínima distancia entre las rectas $x = y = z$ y $x = -y$, $z = 2$ (existen, por supuesto, formas mucho más sencillas de obtener la respuesta. Esto es un ejemplo de matar moscas a cañonazos).

16. Calcule los valores máximo y mínimo de la función de n variables $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ sujeta a la restricción $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

17. Repita el Ejercicio 16 para la función $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n$ con la misma restricción.

18. Calcule la forma más económica de una caja rectangular sin tapa.

19. Calcule el volumen máximo de una caja rectangular con caras paralelas a los planos coordenados, si una esquina está en el origen y la esquina situada en la diagonal opuesta está en el plano $4x + 2y + z = 2$.

20. Calcule el volumen máximo de una caja rectangular con caras paralelas a los planos coordenados si una esquina está en el origen y la esquina situada en la diagonal opuesta está en la parte del primer octante de la superficie $xy + 2yz + 3xz = 18$.

21. Se desea construir una caja rectangular sin tapa con un volumen determinado V m^3 utilizando dos materiales diferentes. El material utilizado para el fondo y la parte frontal de la caja cuesta cinco veces (por metro cuadrado) lo que cuesta el material utilizado para la parte trasera y los otros dos lados. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la caja para minimizar el coste de los materiales?

*__22.__ Calcule los valores máximo y mínimo de $xy + z^2$ en la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Utilice multiplicadores de Lagrange para tratar el caso de la frontera.

*__23.__ Repita el Ejercicio 22 pero considere el caso de la frontera parametrizando la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ utilizando

$$x = \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \qquad y = \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \qquad z = \cos\phi$$

con $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

*__24.__ Si α, β y γ son los ángulos de un triángulo, demuestre que

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$$

¿Para qué triángulos se produce la igualdad?

*__25.__ Suponga que f y g tienen derivadas parciales primeras continuas en el plano xy, y suponga también que $g_2(a, b) \neq 0$. Esto implica que la ecuación $g(x, y) = g(a, b)$ define implícitamente y como función de x cerca del punto (a, b). Utilice la Regla de la Cadena para demostrar que si $f(x, y)$ tiene un valor extremo local en (a, b) sujeto a la restricción $g(x, y) = g(a, b)$, entonces para algún valor λ el punto (a, b, λ) es un punto crítico de la función

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Esto constituye una justificación más formal del método de los multiplicadores de Lagrange en este caso.

26. ¿Cuál es la mínima distancia del punto $(0, -1)$ a la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$? ¿Se puede resolver este problema mediante el método de los multiplicadores de Lagrange? ¿Por qué?

27. El Ejemplo 3 demostró que el método de los multiplicadores de Lagrange puede fallar al obtener un punto que optimice $f(x, y)$ sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$, si $\nabla g = \mathbf{0}$ en el punto óptimo. ¿Puede fallar también el método si $\nabla f = \mathbf{0}$ en el punto óptimo? ¿Por qué?

13.4 El método de los mínimos cuadrados

En el análisis de datos experimentales surgen importantes problemas de optimización. Con frecuencia, se diseñan experimentos para medir los valores de una o más magnitudes que se suponen constantes, o para demostrar una supuesta relación funcional entre magnitudes variables. El error experimental suele estar presente en las medidas, y es necesario repetir los experimentos varias veces para obtener valores *medios* o *promedios* de las cantidades que se desea medir.

Consideremos un ejemplo muy simple. Un experimento destinado a medir una cierta constante física c se repite n veces, y se obtienen los valores c_1, c_2, ..., c_n. Si ninguna de las medidas se considera errónea, la intuición nos dice que es razonable utilizar el valor medio $c = (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)/n$ como el valor de c determinado por los experimentos. Veamos cómo se puede justificar esta intuición.

Son posibles varios modelos para determinar c a partir de los valores de los datos. Por ejemplo, podríamos escoger el valor de c que minimizara la suma T de sus distancias a los puntos de datos:

$$T = |c - c_1| + |c - c_2| + \cdots + |c - c_n|$$

Esto no resulta satisfactorio por varias razones. Como los valores absolutos tienen puntos singulares, es difícil determinar el valor óptimo de c de acuerdo con este criterio. Lo que es más importante, c podría no quedar únicamente determinado. Si $n = 2$, cualquier punto situado en el intervalo entre c_1 y c_2 dará el mismo valor mínimo de T (*véase* el Ejercicio 24 posterior donde se presenta una generalización de este fenómeno).

Un enfoque más prometedor es minimizar la suma S de los *cuadrados* de las distancias de c a los puntos de datos:

$$S = (c - c_1)^2 + (c - c_2)^2 + \cdots + (c - c_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (c - c_i)^2$$

Esta función de c es suave, y su valor mínimo (sin restricciones) se producirá en los puntos críticos de $\bar{c}$ dados por

$$0 = \left.\frac{dS}{dc}\right|_{c=\bar{c}} = \sum_{i=1}^{n} 2(\bar{c} - c_i) = 2n\bar{c} - 2\sum_{i=1}^{n} c_i$$

Por tanto, $\bar{c}$ es la *media* de los valores de los datos:

$$\bar{c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}$$

La técnica utilizada para obtener $\bar{c}$ anteriormente es un ejemplo de lo que se denomina **método de los mínimos cuadrados**. Tiene la siguiente interpretación geométrica. Si los valores de datos c_1, c_2, ..., c_n se consideran componentes de un vector $\mathbf{c}$ en $\mathbb{R}^n$, y $\mathbf{w}$ es el vector cuyas componentes son 1, 1, ..., 1, entonces el vector proyección de $\mathbf{c}$ en la dirección de $\mathbf{w}$,

$$\mathbf{c}_{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{c} \bullet \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\,\mathbf{w} = \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}\,\mathbf{w}$$

tiene todas sus componentes iguales al promedio de los valores de los datos. Así, determinar c a partir de los datos mediante el método de mínimos cuadrados es equivalente a obtener el vector proyección del vector de los datos en el subespacio unidimensional de $\mathbb{R}^n$ generado por $\mathbf{w}$. Si las medidas c_i no tuvieran error, entonces $\mathbf{c}$ habría sido igual a $c\mathbf{w}$.

Regresión lineal

En las investigaciones científicas muchas veces se sospecha que la respuesta de un sistema es una cierta clase de función de una o más variables de entrada. Los investigadores crean experimentos para medir la respuesta del sistema a diversos valores de esas variables para determinar los parámetros de la función.

Por ejemplo, supongamos que se sospecha que la respuesta y de un sistema depende de la entrada x de acuerdo con la relación lineal

$$y = ax + b$$

donde los valores de a y b son desconocidos. Un experimento diseñado para medir los valores de y correspondientes a varios valores de x producirá n puntos de datos, (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$. Si la supuesta relación lineal es válida, esos datos seguirán *aproximadamente* una línea recta, pero no exactamente, debido al error experimental. Supongamos que los puntos están dispuestos como se muestra en la Figura 13.18. En este caso, parece razonable suponer una relación lineal. Nuestro objetivo sería calcular los valores de a y b de la recta $y = ax + b$ que «mejor» se ajuste a los datos.

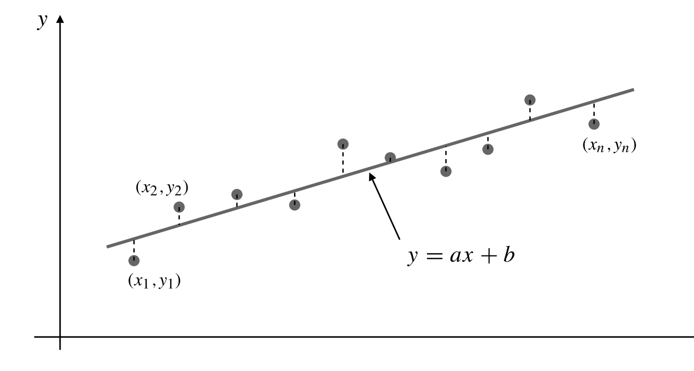


Figura 13.18 Ajuste de una recta a unos datos experimentales.

En esta situación, el método de los mínimos cuadrados requiere escoger los valores de a y b de forma que se minimice la suma S de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

Se trata de un problema de minimización sin restricciones con dos variables, a y b. El mínimo se producirá en un punto crítico de S que debe cumplir

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - ax_i - b)$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar como

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + \qquad nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Resolviendo esa pareja de ecuaciones lineales, obtenemos los parámetros deseados:

$$a = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$$

En estas fórmulas hemos utilizado una barra para indicar el valor medio de una magnitud; por ejemplo, $\overline{xy} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, y así sucesivamente.

Este procedimiento de ajuste de la «mejor» recta a un conjunto de puntos de datos mediante el método de los mínimos cuadrados se denomina **regresión lineal**, y la recta $y = ax + b$ obtenida de esta forma se denomina **recta de regresión empírica** de los datos. Algunas calculadoras científicas con funciones estadísticas permiten calcular regresiones lineales, acumulando las sumas de x_i, y_i, x_i^2 y $x_i y_i$ en varios registros y llevando la cuenta en otro registro del número n de puntos introducidos. En todo momento está disponible la información necesaria para calcular a y b, y el valor de y correspondiente a cualquier valor x dado.

Ejemplo 1 Calcule la recta de regresión empírica de los datos $(x, y) = (0, 2.10)$, $(1, 1.92)$, $(2, 1.84)$, $(3, 1.71)$ y $(4, 1.64)$. ¿Cuál es el valor predicho para y en $x = 5$?

Solución Tenemos

$$\bar{x} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + 4}{5} = 2$$

$$\bar{y} = \frac{2.10 + 1.92 + 1.84 + 1.71 + 1.64}{5} = 1.842$$

$$\overline{xy} = \frac{(0)(2.10) + (1)(1.92) + (2)(1.84) + (3)(1.71) + (4)(1.64)}{5} = 3.458$$

$$\overline{x^2} = \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{5} = 6$$

Por tanto,

$$a = \frac{3.458 - (2)(1.842)}{6 - 2^2} = -0.113$$

$$b = \frac{(6)(1.842) - (2)(3.458)}{6 - 2^2} = 2.068$$

y la recta de regresión empírica es

$$y = 2.068 - 0.113x$$

El valor predicho para y en $x = 5$ es $2.068 - 0.113 \times 5 = 1.503$. ■

Observación La regresión lineal se puede interpretar también desde la perspectiva de proyección de vectores. Los puntos de datos definen dos vectores **x** e **y** en $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son $x_1, x_2, ..., x_n$ y $y_1, y_2, ..., y_n$, respectivamente. Sea **w** el vector de componentes 1, 1, ..., 1. Calcular

los coeficientes a y b de la recta de regresión equivale a calcular la proyección ortogonal de **y** en el subespacio bidimensional (plano) de $\mathbb{R}^n$ generado por **x** y **w** (*véase* la Figura 13.19). Esta proyección es $\mathbf{p} = a\mathbf{x} + b\mathbf{w}$. De hecho, las dos ecuaciones obtenidas anteriormente igualando a cero las derivadas parciales de S se corresponden con las dos condiciones

$$(\mathbf{y} - \mathbf{p}) \bullet \mathbf{x} = 0$$

$$(\mathbf{y} - \mathbf{p}) \bullet \mathbf{w} = 0$$

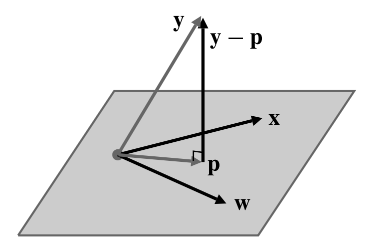


Figura 13.19 $\mathbf{p} = a\mathbf{x} + b\mathbf{w}$ es la proyección de **y** en el plano generado por **x** y **w**.

que indican que **y** menos su proyección en el subespacio es perpendicular a dicho subespacio. El ángulo que forman **y** y **p** mide lo bien que la recta de regresión empírica se ajusta a los datos; cuanto menor sea el ángulo, mejor será el ajuste.

La regresión lineal se puede utilizar también para obtener relaciones funcionales específicas de tipos diferentes a la lineal aplicando previamente a los datos las transformaciones adecuadas.

Ejemplo 2 Calcule los valores de las constantes K y s para las que la curva

$$y = Kx^s$$

se ajusta mejor a los puntos de datos experimentales (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$ (suponga que todos los valores de los datos son positivos).

Solución Obsérvese que la forma funcional requerida corresponde a una regresión lineal entre $\ln y$ y $\ln x$:

$$\ln y = \ln K + s \ln x$$

Si determinamos los parámetros a y b de la recta de regresión empírica $\eta = a\xi + b$ correspondiente a los datos transformados $(\xi_i, \eta_i) = (\ln x_i, \ln y_i)$, entonces $s = a$ y $K = e^b$ son los valores pedidos. ■

Observación Debe recalcarse que las constantes K y s obtenidas por el método utilizado en la solución del ejemplo anterior no son las mismas que se habrían obtenido aplicando directamente el método de los mínimos cuadrados al problema sin transformar, es decir, minimizando $\sum_{i=1}^{n} (y_i - Kx_i^s)^2$. Este problema no se puede resolver fácilmente (¡inténtelo!).

En general, el método de los mínimos cuadrados se aplica para ajustar una ecuación en la que la respuesta se expresa como una suma de constantes multiplicadas por funciones de una o más variables de entrada. Las constantes se determinan como los puntos críticos de la suma de las desviaciones al cuadrado entre los valores reales de la respuesta y los valores predichos por la ecuación.

Aplicaciones del método de los mínimos cuadrados a integrales

El método de los mínimos cuadrados se puede utilizar para obtener aproximaciones a funciones razonablemente bien comportadas (es decir, continuas por tramos), en forma de sumas de constantes multiplicadas por funciones especificadas. La idea es escoger las constantes que minimicen la *integral* del cuadrado de la diferencia.

Por ejemplo, supongamos que deseamos aproximar la función continua $f(x)$ en el intervalo [0, 1] mediante la función lineal $g(x) = px + q$. El método de los mínimos cuadrados requiere que p y q se elijan de forma que se minimice la integral

$$I(p, q) = \int_0^1 (f(x) - px - q)^2\, dx$$

Suponiendo que podemos «diferenciar la integral» (investigaremos este aspecto en la Sección 13.5), el punto crítico de $I(p, q)$ se puede obtener a partir de

$$0 = \frac{\partial I}{\partial p} = -2 \int_0^1 x(f(x) - px - q)\, dx$$

$$0 = \frac{\partial I}{\partial q} = -2 \int_0^1 (f(x) - px - q)\, dx$$

Entonces,

$$\frac{p}{3} + \frac{q}{2} = \int_0^1 x f(x)\, dx$$

$$\frac{p}{2} + q = \int_0^1 f(x)\, dx$$

y resolviendo este sistema lineal se pueden obtener p y q:

$$p = \int_0^1 (12x - 6) f(x)\, dx$$

$$q = \int_0^1 (4 - 6x) f(x)\, dx$$

El siguiente ejemplo considerará la aproximación de una función mediante un **polinomio trigonométrico**. Estas aproximaciones forman la base del estudio de las **series de Fourier**, que son de importancia fundamental en la solución de problemas con condiciones de contorno en los que intervienen las ecuaciones de Laplace, del calor y de onda, así como de otras ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que aparecen en matemáticas aplicadas (*véase* la Sección 9.9).

Ejemplo 3 Utilice una integral de mínimos cuadrados para aproximar $f(x)$ mediante la suma

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx$$

en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Solución Deseamos calcular las constantes que minimizan

$$I = \int_0^\pi \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx \right)^2 dx$$

Para todo $1 \leqslant j \leqslant n$, tenemos

$$0 = \frac{\partial I}{\partial b_j} = -2 \int_0^\pi \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx \right) \operatorname{sen} jx\, dx$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \int_0^\pi \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} jx\, dx = \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} jx\, dx$$

Sin embargo, si $j \neq k$, entonces $\operatorname{sen} kx \operatorname{sen} jx$ es una función par, por lo que

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} jx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} jx\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k-j)x - \cos(k+j)x)\, dx = 0$$

Si $j = k$, tenemos entonces que

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 jx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2jx)\, dx = \frac{\pi}{2}$$

de forma que

$$b_j = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} jx\, dx$$

Observación La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx, \quad \text{siendo} \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} kx\, dx, \quad k = 1, 2, ...,$$

se denomina representación mediante **serie de Fourier en senos** de $f(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$. Si f es continua en $[0, \pi]$, se puede demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx \right)^2 dx = 0$$

pero se requiere algo más que la continuidad de f para asegurar que esta serie de Fourier en senos converge a $f(x)$ en todos los puntos de $(0, \pi)$. Estas cuestiones se estudian en el *análisis armónico*. De forma similar, la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad \text{siendo} \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \cos kx\, dx, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

se denomina representación mediante **serie de Fourier en cosenos** de $f(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$.

Observación Representar una función como suma de una serie de Fourier es análogo a representar un vector como combinación lineal de vectores de una base. Si vemos las funciones continuas en el intervalo $[0, \pi]$ como «vectores» con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas punto a punto:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (cf)(x) = cf(x)$$

y con la operación «producto escalar» definida como

$$f \bullet g = \int_0^\pi f(x)g(x)\, dx$$

entonces, las funciones $e_k(x) = \sqrt{2/\pi} \operatorname{sen} kx$ forman una «base». Como se demuestra en el ejemplo anterior, $e_j \bullet e_j = 1$, y si $k \neq j$ entonces $e_k \bullet e_j = 0$. Por tanto, estos «vectores base» son «vectores unitarios mutuamente perpendiculares». Los coeficientes de los senos en la serie de Fourier de una función f son las componentes de dicha función con respecto a esa base.

Ejercicios 13.4

1. Se va a instalar un generador en una factoría para suministrar potencia a n máquinas situadas en las posiciones (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$. ¿Dónde se debe situar el generador para minimizar la suma de los cuadrados de su distancia a las máquinas?

2. Se sabe que entre ciertas variables se cumple la relación $y = ax^2$. Dados los datos experimentales (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$, determine el valor de a mediante el método de los mínimos cuadrados.

3. Repita el Ejercicio 2, pero con la relación $y = ae^x$.

4. Utilice el método de los mínimos cuadrados para obtener el plano $z = ax + by + c$ que se ajusta mejor a los datos (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, ..., n$.

5. Repita el Ejercicio 4 utilizando un argumento basado en proyección de vectores en vez del método de los mínimos cuadrados.

En los Ejercicios 6-11, demuestre cómo se puede adaptar la regresión lineal para determinar los parámetros p y q de forma que la relación dada se ajuste a los datos experimentales (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$. ¿En cuál de esas situaciones son los valores obtenidos de p y q idénticos a los que se obtendrían mediante aplicación directa del método de los mínimos cuadrados sin cambio de variable?

6. $y = p + qx^2$

7. $y = pe^{qx}$

8. $y = \ln(p + qx)$

9. $y = px + qx^2$

10. $y = \sqrt{px + q}$

11. $y = pe^x + qe^{-x}$

12. Calcule la parábola de la forma $y = p + qx^2$ que mejor se ajuste a los datos $(x, y) = (1, 0.11)$, $(2, 1.62)$, $(3, 4.07)$, $(4, 7.55)$, $(6, 17.63)$ y $(7, 24.20)$. No existe valor de y medido en $x = 5$. ¿Qué valor predeciría en este punto?

13. Utilice el método de los mínimos cuadrados para calcular las constantes a, b y c tales que la relación $y = ax^2 + bx + c$ describa lo mejor posible los datos experimentales (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$, $(n \geqslant 3)$. ¿Cómo se interpreta esta situación en términos de proyección de vectores?

14. ¿Cómo se puede utilizar el resultado del Ejercicio 13 para ajustar una curva de la forma $y = pe^x + q + re^{-x}$ a los mismos puntos de datos?

15. Calcule el valor de la constante a para la que la función $f(x) = ax^2$ se aproxima mejor a la función $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$, en el sentido de que se minimice la integral

$$I = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\,dx$$

¿Cuál es el valor mínimo de I?

16. Calcule a de forma que se minimice $I = \int_0^\pi (ax(\pi - x) - \operatorname{sen} x)^2\,dx$. ¿Cuál es el valor mínimo de la integral?

17. Repita el Ejercicio 15 con la función $f(x) = ax^2 + b$ y la misma g. Calcule a y b.

***18.** Calcule a, b y c de forma que se minimice $\int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2\,dx$. ¿Cuál es el mínimo valor de la integral?

***19.** Calcule a y b de forma que se minimice $\int_0^\pi (\operatorname{sen} x - ax^2 - bx)^2\,dx$.

20. Calcule a, b y c de forma que se minimice la integral

$$J = \int_{-1}^1 (x - a\operatorname{sen}\pi x - b\operatorname{sen}2\pi x - c\operatorname{sen}3\pi x)^2\,dx$$

***21.** Calcule las constantes a_j, $j = 0, 1, ..., n$ que minimizan

$$\int_0^\pi \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n a_k \cos kx\right)^2 dx$$

22. Calcule la serie de Fourier en senos de la función $f(x) = x$ en el intervalo $0 < x < \pi$. Suponiendo que la serie converge a x en el intervalo $(0, \pi)$, ¿a qué función podría esperarse que converja la serie en el intervalo $(-\pi, 0)$?

23. Repita el Ejercicio 22, pero calculando ahora una serie de Fourier en cosenos.

24. Suponga que $x_1, x_2, ..., x_n$ cumplen $x_i \leqslant x_j$ siempre que $i < j$. Calcule el valor de x que minimiza $\sum_{i=1}^n |x - x_i|$. Trate separadamente los casos de n par e impar. ¿Para qué valores de n es x único? *Sugerencia*: No utilice el cálculo en este problema.

13.5 Problemas paramétricos

En esta sección examinaremos brevemente tres situaciones no relacionadas, en las que se desea diferenciar una función con respecto a un parámetro, en vez de con respecto a las variables básicas de la función. Estas situaciones surgen frecuentemente en matemáticas y sus aplicaciones.

Diferenciación de integrales con parámetros

El Teorema Fundamental del Cálculo indica cómo diferenciar una integral definida con respecto a su límite superior de integración:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Consideraremos ahora un problema diferente sobre diferenciación de integrales. Si el integrando de una integral definida depende también de variables distintas de la variable integración, entonces la integral será una función de esas otras variables. ¿Cómo calculamos la derivada de una función de ese tipo? Por ejemplo, consideremos la función $F(x)$ definida como

$$F(x) = \int_a^b f(x,\, t)\,dt$$

Calcularemos $F'(x)$ tomando la derivada dentro de la integral:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^b f(x,\, t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,\, t)\,dt$$

Obsérvese que hemos utilizado d/dx fuera de la integral y $\partial/\partial x$ dentro; esto es porque la integral es una función sólo de x, pero el integrando f es una función de x y de t. Si el integrando depende de más de un parámetro, entonces habría que utilizar derivadas parciales dentro y fuera de la integral:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f(x,\, y,\, t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,\, y,\, t)\,dt$$

La operación de tomar una derivada con respecto a un parámetro dentro de la integral, o *diferenciación dentro de una integral*, parece razonable. Para diferenciar sumas, lo hacemos término a término, y las integrales son límites de sumas. Sin embargo, tanto la diferenciación como la integración requieren tomar límites (límites de cocientes de Newton para las derivadas y límites de sumas de Riemann para las integrales). La diferenciación dentro de una integral requiere cambiar el orden en el cual se toman los dos límites y, por tanto, requiere justificación.

Ya hemos visto otro ejemplo de cambio de orden de límites. Cuando establecimos que las derivadas parciales mixtas con respecto a las mismas variables eran iguales,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

estábamos, de hecho, diciendo que los límites correspondientes a la diferenciación respecto a x e y se pueden tomar en cualquier orden con el mismo resultado. Esto no es verdad en general; lo demostramos bajo la suposición de que ambas derivadas parciales mixtas eran *continuas* (*véanse* el Teorema 1 y el Ejercicio 16 de la Sección 12.4). En general, se requieren algunas suposiciones para justificar el intercambio de límites. El teorema siguiente da una serie de condiciones que justifican el intercambio de límites que interviene en la diferenciación dentro de una integral.

TEOREMA 5 **Diferenciación dentro de una integral**

Supongamos que para todo x tal que $c < x < d$ se cumplen las siguientes condiciones:

(i) Las integrales

$$\int_a^b f(x,\, t)\,dt \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f_1(x,\, t)\,dt$$

existen (bien como integrales propias o bien como integrales impropias convergentes).

(ii) $f_{11}(x, t)$ existe y satisface

$$|f_{11}(x, t)| \leqslant g(t), \qquad a < t < b$$

con

$$\int_a^b g(t)\, dt = K < \infty$$

Entonces, para todo x tal que $c < x < d$ se cumple

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t)\, dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\, dt$$

DEMOSTRACIÓN Sea

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$$

Si $c < x < d$, $h \neq 0$, y $|h|$ es lo suficientemente pequeño para que $c < x + h < d$, entonces, por la fórmula de Taylor,

$$f(x + h, t) = f(x, t) + h f_1(x, t) + \frac{h^2}{2} f_{11}(x + \theta h, t)$$

para algún valor θ entre 0 y 1. Por tanto,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{F(x + h) - F(x)}{h} - \int_a^b f_1(x, t)\, dt \right| \\
&\qquad = \left| \int_a^b \frac{f(x + h, t) - f(x, t)}{h}\, dt - \int_a^b f_1(x, t)\, dt \right| \\
&\qquad \leqslant \int_a^b \left| \frac{f(x + h, t) - f(x, t)}{h} - f_1(x, t) \right| dt \\
&\qquad = \int_a^b \left| \frac{h}{2} f_{11}(x + \theta h, t) \right| dt \\
&\qquad \leqslant \frac{h}{2} \int_a^b g(t)\, dt = \frac{Kh}{2} \to 0 \text{ cuando } h \to 0
\end{aligned}$$

Entonces,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \int_a^b f_1(x, t)\, dt$$

que es el resultado deseado.

Observación Se puede demostrar que la conclusión del Teorema 5 se mantiene también sólo bajo la suposición de que $f_1(x, t)$ es continua en el rectángulo *cerrado y acotado* $c \leqslant x \leqslant d$, $a \leqslant t \leqslant b$. No podemos demostrarlo aquí; la prueba se basa en una sutil propiedad denominada *continuidad uniforme* que poseen las funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$ (*véase* el Apéndice IV para el caso de $n = 1$). En cualquier caso, el Teorema 5 es más útil para nuestros fines porque permite integrales impropias.

Ejemplo 1 Calcule $\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt$.

Solución Partiendo de la integral impropia convergente

$$\int_0^\infty e^{-s}\,ds = \lim_{R\to\infty} \left.\frac{e^{-s}}{-1}\right|_0^R = \lim_{R\to\infty} (1 - e^{-R}) = 1$$

introduciremos un parámetro mediante el cambio $s = xt$, $ds = x\,dt$ (con $x > 0$), con lo que obtenemos

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$$

Ahora diferenciaremos n veces (cada una de las integrales resultantes converge):

$$\int_0^\infty -te^{-xt}\,dt = -\frac{1}{x^2}$$

$$\int_0^\infty (-t)^2 e^{-xt}\,dt = (-1)^2\frac{2}{x^3}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^\infty (-t)^n e^{-xt}\,dt = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

Haciendo $x = 1$ obtenemos

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n!$$

Nótese que este resultado se podría haber obtenido mediante integración por partes (n veces) o mediante una fórmula de reducción. Este método es un poco más sencillo.

Observación El lector debe comprobar que la función $f(x, t) = t^k e^{-xt}$ cumple las condiciones del Teorema 5 para $x > 0$ y $k \geqslant 0$. Nosotros normalmente no lo comprobaremos.

Ejemplo 2 Calcule $F(x, y) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}\,dt$ para $x > 0$, $y > 0$.

Solución Tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\int_0^\infty e^{-xt}\,dt = -\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^\infty e^{-yt}\,dt = \frac{1}{y}$$

Se deduce entonces que

$$F(x, y) = -\ln x + C_1(y) \quad \text{y} \quad F(x, y) = \ln y + C_2(x)$$

Comparando estas dos fórmulas de F, tenemos que concluir que $C_1(y) = \ln y + C$ para alguna constante C. Por tanto,

$$F(x, y) = \ln y - \ln x + C = \ln\frac{y}{x} + C$$

Como $F(1, 1) = 0$, debemos tener $C = 0$ y $F(x, y) = \ln(y/x)$.

Observación Podemos combinar el Teorema 5 y el Teorema Fundamental del Cálculo para diferenciar una integral con respecto a un parámetro que aparezca en los límites de integración y en el integrando. Si

$$F(x, b, a) = \int_a^b f(x, t)\, dt$$

entonces, por la Regla de la Cadena,

$$\frac{d}{dx} F(x, b(x), a(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{dx} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dx}$$

De acuerdo con esto, tenemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)\, dt \\ &= \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\, dt + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x)\end{aligned}$$

Se requiere que $a(x)$ y $b(x)$ sean diferenciables en x y, para la aplicación del Teorema 5, que $a \leqslant a(x) \leqslant b$ y $a \leqslant b(x) \leqslant b$ para todo x tal que $c < x < d$.

Ejemplo 3 Resuelva la *ecuación integral*

$$f(x) = a - \int_b^x (x - t) f(t)\, dt$$

Solución Supongamos, por el momento, que la ecuación tiene una solución lo suficientemente bien comportada para permitir la diferenciación dentro de la integral. Diferenciando dos veces, obtenemos

$$\begin{aligned}f'(x) &= -(x - x) f(x) - \int_b^x f(t)\, dt = -\int_b^x f(t)\, dt \\ f''(x) &= -f(x)\end{aligned}$$

La última ecuación es la ecuación diferencial del movimiento armónico simple. Obsérvese que la ecuación dada de f y la de f' implican las condiciones iniciales

$$f(b) = a \quad \text{y} \quad f'(b) = 0$$

De acuerdo con esto, podemos expresar la solución general de $f''(x) = -f(x)$ de la forma

$$f(x) = A\cos(x - b) + B\,\text{sen}\,(x - b)$$

Las condiciones iniciales implican, entonces, que $A = a$ y $B = 0$, por lo que la solución pedida es $f(x) = a\cos(x - b)$. Finalmente, nótese que esta función es de hecho lo suficientemente suave para permitir la diferenciación dentro de la integral y es, por tanto, la solución de la ecuación integral dada (si lo desea, verifíquelo en la ecuación integral).

Envolventes

Una ecuación $f(x, y, c) = 0$ en la que interviene un parámetro c, además de las variables x e y, representa una familia de curvas en el plano xy. Considérese, por ejemplo, la familia

$$f(x, y, c) = \frac{x}{c} + cy - 2 = 0$$

Esta familia está formada por todas las rectas que cortan a los ejes coordenados en los puntos $(2c, 2/c)$. La Figura 13.20 muestra alguna de estas rectas. Parece que hay una curva a la que todas las rectas son tangentes. Esta curva se denomina *envolvente* de la familia de rectas.

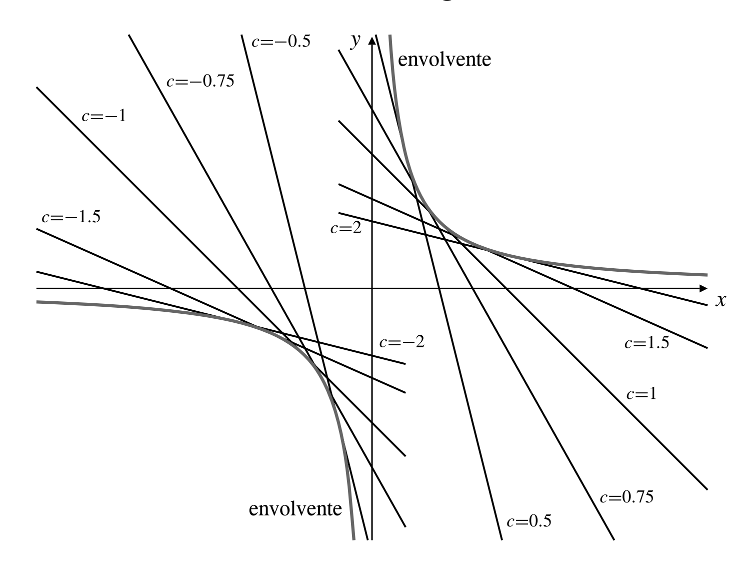


Figura 13.20 Familia de rectas y su envolvente.

En general, una curva $\mathcal{C}$ se denomina **envolvente** de la familia de curvas de ecuaciones $f(x, y, c) = 0$ si, para todo valor de c, la curva $f(x, y, c) = 0$ es tangente a $\mathcal{C}$ en algún punto que depende de c.

En la familia de curvas de la Figura 13.20, parece que la envolvente puede ser la hipérbola rectangular $xy = 1$. Verificaremos esto tras desarrollar un método para determinar la ecuación de la envolvente de una familia de curvas. Supongamos que la función $f(x, y, c)$ tiene derivadas parciales primeras continuas y que la envolvente es una curva suave.

Para cada valor de c, la curva $f(x, y, c) = 0$ es tangente a la envolvente en un punto (x, y) que depende de c. Expresemos esta dependencia en la forma explícita $x = g(c)$, $y = h(c)$; estas ecuaciones son las ecuaciones paramétricas de la envolvente. Como (x, y) está en la curva $f(x, y, c) = 0$, tenemos

$$f(g(c), h(c), c) = 0$$

¡¡ ATENCIÓN !! Es un argumento sutil. Tómese el tiempo que necesite e intente comprender cada paso del desarrollo.

Diferenciando esta ecuación con respecto a c, obtenemos

$$f_1 g'(c) + f_2 h'(c) + f_3 = 0 \qquad (*)$$

donde las derivadas parciales de f se evalúan en $(g(c), h(c), c)$.

La pendiente de la curva $f(x, y, c) = 0$ en $(g(c), h(c), c)$ se puede obtener diferenciando implícitamente su ecuación con respecto a x:

$$f_1 + f_2 \frac{dy}{dx} = 0$$

Por otra parte, la pendiente de la envolvente $x = g(c)$, $y = h(c)$ en ese punto es $dy/dx = h'(c)/g'(c)$. Como la curva y la envolvente son tangentes en $f(g(c), h(c), c)$, sus pendientes deben ser iguales. Por tanto,

$$f_1 + f_2 \frac{h'(c)}{g'(c)} = 0, \quad \text{de forma que} \quad f_1 g'(c) + f_2 h'(c) = 0$$

Combinando esto con la ecuación (*) obtenemos $f_3(x, y, c) = 0$ en todos los puntos de la envolvente.

La ecuación de la envolvente se puede obtener eliminando c en las ecuaciones

$$f(x, y, c) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial c} f(x, y, c) = 0$$

Ejemplo 4 Calcule la envolvente de la familia de rectas

$$f(x, y, c) = \frac{x}{c} + cy - 2 = 0$$

Solución Eliminamos c en las ecuaciones

$$f(x, y, c) = \frac{x}{c} + cy - 2 = 0 \quad \text{y} \quad f_3(x, y, c) = -\frac{x}{c^2} + y = 0$$

Estas ecuaciones se pueden resolver fácilmente y se obtiene $x = c$ e $y = 1/c$. Esto quiere decir que la envolvente es $xy = 1$, como planteábamos anteriormente. ■

Ejemplo 5 Calcule la envolvente de la familia de circunferencias

$$(x - c)^2 + y^2 = c$$

Solución En este caso, $f(x, y, c) = (x - c)^2 + y^2 - c$. La ecuación de la envolvente se obtiene eliminando c en la pareja de ecuaciones

$$f(x, y, c) = (x - c)^2 + y^2 - c = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c} f(x, y, c) = -2(x - c) - 1 = 0$$

De la segunda ecuación, $x = c - \frac{1}{2}$, y entonces, de la primera, $y^2 = c - \frac{1}{4}$. Por consiguiente, la envolvente es la parábola

$$x = y^2 - \frac{1}{4}$$

La Figura 13.21 muestra esta envolvente y algunas circunferencias de la familia.

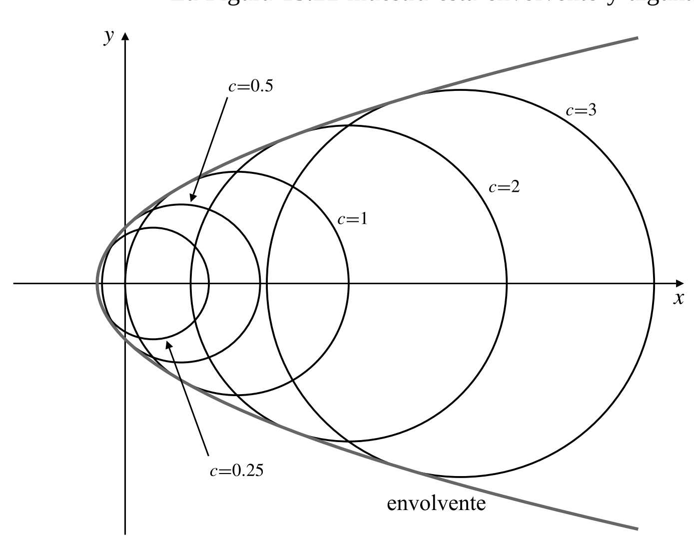


Figura 13.21 Las circunferencias $(x - c)^2 + y^2 = c$ y su envolvente. ■

Se puede utilizar una técnica similar para obtener la envolvente de una familia de superficies. Será una superficie tangente a todos los miembros de la familia.

Ejemplo 6 **(El cono de Mach)** Supongamos que el sonido viaja con una velocidad c en el aire en calma, y que un avión supersónico viaja a una velocidad $v > c$ por el eje x, de forma que su posición en el instante t es $(vt, 0, 0)$. Calcule la envolvente en el instante t de las ondas sonoras creadas por la aeronave en instantes anteriores. *Véase* la Figura 13.22.

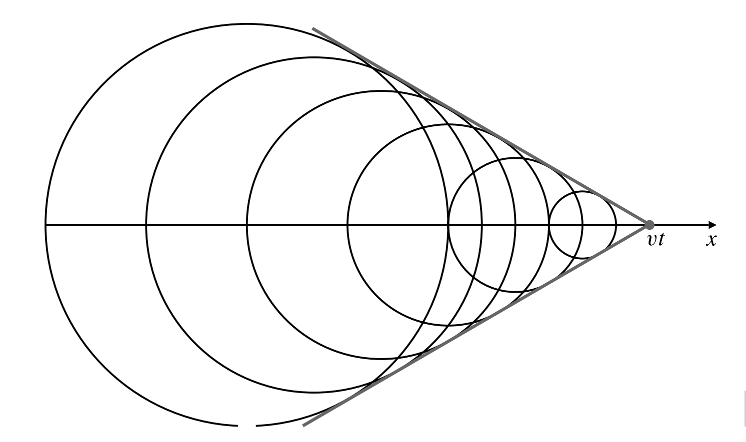


Figura 13.22 El cono de Mach.

Solución El sonido creado por la aeronave en el instante $\tau < t$ se expande en un frente de ondas esférico con velocidad c. El centro de este frente de ondas es $(v\tau, 0, 0)$, la posición de la aeronave en el instante τ. En el instante t el radio de este frente de ondas es $c(t - \tau)$, por lo que su ecuación es

$$f(x, y, z, \tau) = (x - v\tau)^2 + y^2 + z^2 - c^2(t - \tau)^2 = 0 \qquad (*)$$

En el instante t la envolvente de todos esos frentes de ondas creados en instantes anteriores τ se puede obtener eliminando el parámetro τ de la ecuación anterior y la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(x, y, z, \tau) = -2v(x - v\tau) + 2c^2(t - \tau) = 0$$

Despejando τ en esta última ecuación, se obtiene $\tau = \dfrac{vx - c^2t}{v^2 - c^2}$. Por lo tanto,

$$x - v\tau = x - \frac{v^2x - vc^2t}{v^2 - c^2} = \frac{c^2}{v^2 - c^2}(vt - x)$$

$$t - \tau = t - \frac{vx - c^2t}{v^2 - c^2} = \frac{v}{v^2 - c^2}(vt - x)$$

Sustituimos estas dos expresiones en la ecuación (*) para eliminar τ:

$$\frac{c^4}{(v^2 - c^2)^2}(vt - x)^2 + y^2 + z^2 - \frac{c^2v^2}{(v^2 - c^2)^2}(vt - x)^2 = 0$$

$$y^2 + z^2 = \frac{c^2}{(v^2 - c^2)^2}(v^2 - c^2)(vt - x)^2 = \frac{c^2}{v^2 - c^2}(vt - x)^2$$

La envolvente es el cono

$$x = vt - \frac{\sqrt{v^2 - c^2}}{c}\sqrt{y^2 + z^2}$$

que se extiende hacia atrás en la dirección x desde su vértice en $(vt, 0, 0)$, la posición de la aeronave en el instante t. Se denomina **cono de Mach**. En un determinado punto, el sonido de la aeronave no se oirá hasta que el cono alcance dicho punto. ■

Ecuaciones con perturbaciones

En matemáticas aplicadas aparecen frecuentemente ecuaciones insolubles para las que se desea obtener soluciones al menos aproximadas. Algunas veces estas ecuaciones resultan de añadir un término extra a lo que de otra forma sería una ecuación simple y fácil de resolver. Este término extra se denomina **perturbación** de la ecuación más simple. A menudo esta perturbación tiene un coeficiente menor que los otros términos de la ecuación, es decir, es una **perturbación pequeña**. En este caso se pueden obtener soluciones aproximadas a la ecuación perturbada sustituyendo el coeficiente pequeño por un parámetro y calculando un desarrollo en polinomios de Maclaurin con respecto a ese parámetro. Un ejemplo servirá para clarificar el método.

Ejemplo 7 Calcule una solución aproximada de la ecuación

$$y + \frac{1}{50}\ln(1+y) = x^2$$

Solución Sin el término del logaritmo, la ecuación tendría claramente la solución $y = x^2$. Sustituyamos el coeficiente $1/50$ por el parámetro ϵ y busquemos una solución $y = y(x, \epsilon)$ a la ecuación

$$y + \epsilon\ln(1+y) = x^2 \qquad (*)$$

de la forma

$$y = y(x, \epsilon) = y(x, 0) + \epsilon y_\epsilon(x, 0) + \frac{\epsilon^2}{2!}y_{\epsilon\epsilon}(x, 0) + \cdots$$

donde los subíndices ϵ indican derivadas con respecto a ϵ. Calcularemos términos hasta segundo orden en ϵ. Evidentemente, $y(x, 0) = x^2$. Diferenciando dos veces la ecuación (*) con respecto a ϵ y evaluando los resultados en $\epsilon = 0$, se obtiene

$$\frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \ln(1+y) + \frac{\epsilon}{1+y}\frac{\partial y}{\partial \epsilon} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \epsilon^2} + \frac{2}{1+y}\frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \epsilon\frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(\frac{1}{1+y}\frac{\partial y}{\partial \epsilon}\right) = 0$$

$$y_\epsilon(x, 0) = -\ln(1+x^2)$$

$$y_{\epsilon\epsilon}(x, 0) = \frac{2}{1+x^2}\ln(1+x^2)$$

Por consiguiente,

$$y(x, \epsilon) = x^2 - \epsilon\ln(1+x^2) + \frac{\epsilon^2}{1+x^2}\ln(1+x^2) + \cdots$$

y la ecuación dada tiene como solución aproximada

$$y \approx x^2 - \frac{\ln(1+x^2)}{50} + \frac{\ln(1+x^2)}{2500(1+x^2)}$$

■

Se pueden utilizar técnicas de perturbación similares para sistemas de ecuaciones y para ecuaciones diferenciales.

Ejercicios 13.5

1. Sea $F(x) = \int_0^1 t^x\,dt = \dfrac{1}{x+1}$ para $x > -1$. Mediante diferenciación repetida de F, calcule la integral

$$\int_0^1 t^x (\ln t)^n\,dt$$

2. Sustituyendo t por xt en la integral muy conocida

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

y diferenciando con respecto a x, calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-t^2}\,dt$$

3. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-xt^2} - e^{-yt^2}}{t^2}\,dt$ para $x > 0$, $y > 0$.

4. Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - t^y}{\ln t}\,dt$ para $x > -1$, $y > -1$.

5. Sabiendo que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xt} \operatorname{sen} t\,dt = \frac{1}{1+x^2}$ para $x > 0$ (que se puede demostrar mediante integración por partes), calcule

$$\int_0^{\infty} te^{-xt} \operatorname{sen} t\,dt \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} t^2 e^{-xt} \operatorname{sen} t\,dt$$

* **6.** Utilizando el Ejercicio 5, calcule para $x > 0$

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

Demuestre que $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$ y, a partir de aquí, calcule la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \lim_{x\to 0} F(x)$$

7. Calcule $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{x^2+t^2}$ y utilice el resultado como ayuda para calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^2} \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^3}$$

8. Calcule $\displaystyle\int_0^{x} \frac{dt}{x^2+t^2}$ y utilice el resultado como ayuda para calcular

$$\int_0^{x} \frac{dt}{(x^2+t^2)^2} \quad \text{y} \quad \int_0^{x} \frac{dt}{(x^2+t^2)^3}$$

9. Calcule $f^{(n+1)}(a)$ si $f(x) = 1 + \displaystyle\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt$.

Resuelva las ecuaciones integrales de los Ejercicios 10-12.

10. $f(x) = Cx + D + \displaystyle\int_0^x (x-t) f(t)\,dt$

11. $f(x) = x + \displaystyle\int_0^x (x-2t) f(t)\,dt$

12. $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^1 (x+t) f(t)\,dt$

Calcule las envolventes de las familias de curvas de los Ejercicios 13-18.

13. $y = 2cx - c^2$

14. $y - (x-c)\cos c = \operatorname{sen} c$

15. $x\cos c + y \operatorname{sen} c = 1$

16. $\dfrac{x}{\cos c} + \dfrac{y}{\operatorname{sen} c} = 1$

17. $y = c + (x-c)^2$

18. $(x-c)^2 + (y-c)^2 = 1$

19. ¿Tiene envolvente toda familia de curvas del plano dependientes de un parámetro? Intente calcular la envolvente de $y = x^2 + c$.

20. ¿Para qué valores de k tiene envolvente la familia de curvas $x^2 + (y-c)^2 = kc^2$?

21. Intente calcular la envolvente de la familia $y^3 = (x+c)^2$. ¿Son las curvas de la familia tangentes a la envolvente? ¿Qué ha obtenido realmente en este caso? Compare este ejercicio con el Ejemplo 3 de la Sección 13.3.

***22.** Demuestre que si una familia de superficies dependientes de dos parámetros $f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$ tiene envolvente, entonces la ecuación de dicha envolvente se puede obtener eliminando λ y μ de las ecuaciones

$$f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial\lambda} f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial\mu} f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$$

23. Calcule la envolvente de la familia de planos dependientes de dos parámetros

$$x \operatorname{sen}\lambda \cos\mu + y \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\mu + z\cos\lambda = 1$$

24. Calcule la envolvente de la familia de esferas dependientes de dos parámetros

$$(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + z^2 = \frac{\lambda^2+\mu^2}{2}$$

En los Ejercicios 25-27, calcule los términos en ϵ hasta segundo orden de la solución y de las ecuaciones dadas.

25. $y + \epsilon \operatorname{sen} \pi y = x$

26. $y^2 + \epsilon e^{-y^2} = 1 + x^2$

27. $2y + \dfrac{\epsilon x}{1 + y^2} = 1$

28. Utilice métodos de perturbaciones para calcular y con un error menor que 10^{-8} sabiendo que $y + (y^5/100) = 1/2$.

***29.** Utilice métodos de perturbaciones para calcular valores aproximados de x e y en el sistema

$x + 2y - \dfrac{1}{100} e^{-x} = 3, \; x - y + \dfrac{1}{100} e^{-y} = 0.$

Calcule todos los términos en $\epsilon = 1/100$ hasta segundo orden.

13.6 Método de Newton

Un problema que aparece frecuentemente en matemáticas aplicadas es el de determinar, con algún grado de precisión deseada, una raíz (es decir, una solución r) de una ecuación de la forma

$$f(r) = 0$$

La raíz se denomina **cero** de la función f. En la Sección 4.6 presentamos el Método de Newton, un método simple pero potente para determinar raíces de funciones que sean lo suficientemente suaves. El método parte de una *estimación* aproximada x_0 de la raíz r de la función f, y procede después calculando aproximaciones sucesivas x_1, x_2, ..., mediante la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si la estimación inicial x_0 no está muy lejos de r, y si $|f'(x)|$ *no es muy pequeña ni* $|f''(x)|$ *muy grande* cerca de r, entonces las aproximaciones sucesivas x_1, x_2, ... convergerán muy rápidamente a r. Recuérdese que cada nueva aproximación x_{n+1} se obtiene mediante el corte con el eje x de la tangente trazada sobre la gráfica de f, x_n. La tangente a la gráfica $y = f(x)$ en $x = x_n$ tiene como ecuación (*véase* la Figura 13.23)

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

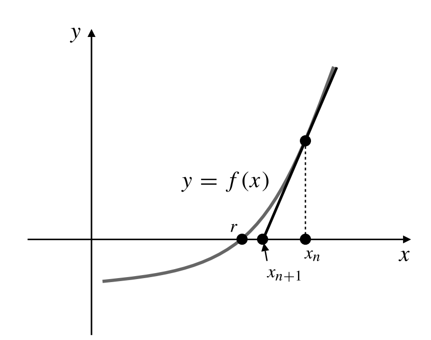


Figura 13.23 x_{n+1} es el corte con el eje x de la tangente en x_n.

El corte con el eje x, x_{n+1}, de esta recta se determina haciendo $y = 0$, $x = x_{n+1}$ en esta ecuación, y el resultado es la fórmula de la caja sombreada anterior.

El Método de Newton se puede ampliar para calcular soluciones de sistemas de m ecuaciones con m variables. Demostraremos aquí cómo adaptar el método para calcular aproximaciones a una solución (x, y) de la pareja de ecuaciones

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

partiendo de una estimación inicial (x_0, y_0). En circunstancias favorables, observaremos la misma convergencia rápida de las aproximaciones a la raíz que en el caso de una sola variable.

La idea es como sigue. Las dos superficies $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ se cruzan formando una curva que a su vez corta al plano xy en el punto cuyas coordenadas son la solución deseada. Si (x_0, y_0) está cerca de ese punto, entonces los planos tangentes a las dos superficies en (x_0, y_0) se cortarán formando una recta. Ésta cortará al plano xy en un punto (x_1, y_1) que debería estar más cerca de la solución que (x_0, y_0). Podemos determinar fácilmente (x_1, y_1). Los planos tangentes $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ en (x_0, y_0) tienen como ecuaciones

$$z = f(x_0, y_0) + f_1(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = g(x_0, y_0) + g_1(x_0, y_0)(x - x_0) + g_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$

La recta de intersección de estos dos planos corta al plano xy en el punto (x_1, y_1) que cumple

$$f_1(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f_2(x_0, y_0)(y_1 - y_0) + f(x_0, y_0) = 0$$

$$g_1(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + g_2(x_0, y_0)(y_1 - y_0) + g(x_0, y_0) = 0$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para obtener x_1 y y_1 resulta

$$x_1 = x_0 - \left.\frac{fg_2 - f_2g}{f_1g_2 - f_2g_1}\right|_{(x_0, y_0)} = x_0 - \left.\frac{\begin{vmatrix} f & f_2 \\ g & g_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}}\right|_{(x_0, y_0)}$$

$$y_1 = y_0 - \left.\frac{f_1g - fg_1}{f_1g_2 - f_2g_1}\right|_{(x_0, y_0)} = y_0 - \left.\frac{\begin{vmatrix} f_1 & f \\ g_1 & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}}\right|_{(x_0, y_0)}$$

Obsérvese que el denominador en cada una de estas expresiones es el determinante jacobiano $\partial(f, g)/\partial(x, y)|_{(x_0, y_0)}$. Éste es otro ejemplo en el que el jacobiano resulta ser el análogo en el caso multivariable a la derivada de una función de una variable.

Continuando de esta forma generamos aproximaciones sucesivas (x_n, y_n) de acuerdo con las fórmulas

$$x_{n+1} = x_n - \left.\frac{\begin{vmatrix} f & f_2 \\ g & g_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}}\right|_{(x_n, y_n)}$$

$$y_{n+1} = y_n - \left.\frac{\begin{vmatrix} f_1 & f \\ g_1 & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}}\right|_{(x_n, y_n)}$$

El procedimiento se detiene cuando se alcanza la precisión deseada.

Ejemplo 1 Calcule la raíz del sistema

$$x(1 + y^2) - 1 = 0, \qquad y(1 + x^2) - 2 = 0$$

con la suficiente precisión para asegurar que los miembros izquierdos de las ecuaciones se anulan hasta la sexta cifra decimal.

Solución Un dibujo de las gráficas de las dos ecuaciones (*véase* la Figura 13.24) en el plano xy indica que el sistema sólo tiene una raíz cerca del punto (0.2, 1.8). La aplicación del Método de Newton requiere calcular sucesivamente las cantidades

$$f(x, y) = x(1 + y^2) - 1, \qquad f_1(x, y) = 1 + y^2, \qquad f_2(x, y) = 2xy$$
$$g(x, y) = y(1 + x^2) - 2, \qquad g_1(x, y) = 2xy, \qquad g_2(x, y) = 1 + x^2$$

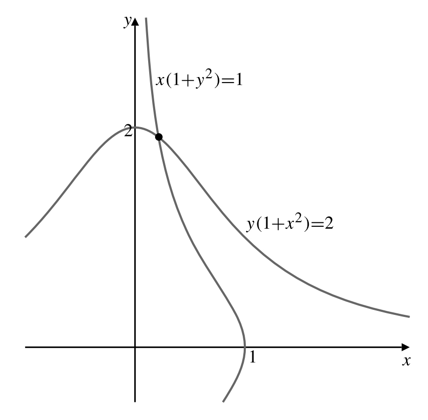


Figura 13.24 Las dos gráficas se cortan cerca del punto (0.2, 1.8).

Utilizando una calculadora o un computador, podemos calcular los valores sucesivos de (x_n, y_n) empezando en $x_0 = 0.2$, $y_0 = 1.8$:

Tabla 1. Raíz cerca de (0.2, 1.8)

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$g(x_n, y_n)$
0	0.200 000	1.800 000	−0.152 000	−0.128 000
1	0.216 941	1.911 349	0.009 481	0.001 303
2	0.214 827	1.911 779	−0.000 003	0.000 008
3	0.214 829	1.911 769	0.000 000	0.000 000

Los valores de esta tabla se han calculado secuencialmente en una hoja de cálculo mediante el método que se sugiere posteriormente. Se han redondeado para incluirlos en la tabla, pero en los cálculos sucesivos se han utilizado los valores sin redondear. Si se utilizaran los valores (redondeados) de x_n e y_n que se muestran en la tabla para calcular $f(x_n, y_n)$ y $g(x_n, y_n)$, los resultados podrían variar ligeramente.

Las aproximaciones deseadas a las raíces son los valores de x_n e y_n de la última línea de la tabla anterior. Nótese la rapidez de convergencia. Sin embargo, hay que realizar muchos cálculos de funciones para cada iteración del método. En el caso de sistemas grandes el Método de Newton es demasiado ineficiente computacionalmente para ser práctico. En la práctica se utilizan otros métodos que requieren más iteraciones pero menos cálculos por iteración. ■

Realización del Método de Newton utilizando una hoja de cálculo

Una hoja de cálculo es un entorno ideal para calcular aproximaciones mediante el Método de Newton. Dada una pareja de ecuaciones con dos incógnitas como las del sistema del Ejemplo 1, podemos proceder como sigue:

(i) En las nueve primeras celdas de la primera fila (A1-I1) se ponen las etiquetas `n, x, y, f, g, f1, g2, g1` y `g2`.
(ii) En las celdas A2-A9 se ponen los números 0, 1, 2, ..., 7.
(iii) En las celdas B2 y C2 se ponen los valores iniciales x_0 e y_0.
(iv) En las celdas D2-I2 se ponen las fórmulas para calcular $f(x, y)$, $g(x, y)$, ..., $g_2(x, y)$ en función de los valores de x e y que están en B2 y C2.

(v) En las celdas B3 y C3 se almacenan las fórmulas del Método de Newton para calcular x_1 e y_1 en función de los valores de x_0 e y_0, utilizando los valores calculados en la segunda fila. Por ejemplo, la celda B3 debe contener la fórmula

```
+B2– (D2*I2–G2*E2)/(F2*I2–G2*H2)
```

(vi) Se reproducen las fórmulas de las celdas D2-I2 en las celdas D3-I3.
(vii) Se reproducen las fórmulas de las celdas B3-I3 en las celdas B4-I9.

Ahora podemos inspeccionar las sucesivas aproximaciones a x_n e y_n en las columnas B y C. Para utilizar diferentes valores iniciales, basta con sustituir los números de las celdas B2 y C2. Para resolver un sistema diferente de (dos) ecuaciones, basta con sustituir los contenidos de las celdas D2-I2. Es conveniente salvar esta hoja de cálculo para volver a utilizarla con los ejercicios posteriores o con otros sistemas que podamos desear resolver más tarde.

Observación Aunque un análisis detallado de la convergencia de las aproximaciones del Método de Newton está fuera del alcance de este libro, podemos realizar algunas observaciones. En cada paso del proceso de aproximación debemos dividir por J, el determinante jacobiano de f y g respecto a x e y, evaluado en la aproximación obtenida más recientemente. Suponiendo que las funciones y las derivadas parciales que intervienen en las fórmulas son continuas, cuanto mayor sea el valor de J en la solución real, más probable será que las aproximaciones converjan a la solución, y que lo hagan rápidamente. Si J se anula (o si es muy pequeño) en la solución, las aproximaciones sucesivas pueden no converger, aun cuando la estimación inicial esté muy cerca de la solución. Incluso cuando las derivadas parciales primeras de f y g son grandes en la solución, su jacobiano puede ser pequeño si sus gradientes son aproximadamente paralelos en dicha solución. Por tanto, no podemos esperar que la convergencia sea rápida cuando las curvas $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$ se cortan formando un ángulo muy pequeño.

El Método de Newton se puede aplicar a sistemas de m ecuaciones en m variables; las fórmulas son las generalizaciones obvias de las dadas anteriormente para dos funciones.

Ejercicios 13.6

Calcule las soluciones de los sistemas de los Ejercicios 1-6, de forma que los miembros izquierdos de las ecuaciones se anulen hasta la sexta cifra decimal. Esto se puede hacer con la ayuda de una calculadora científica, pero eso consumiría mucho tiempo. Es mucho más fácil programar las fórmulas del Método de Newton en un computador para generar las aproximaciones requeridas. Intente determinar en cada caso *estimaciones iniciales* razonables dibujando las gráficas de las ecuaciones.

1. $y - e^x = 0, \quad x - \operatorname{sen} y = 0$

2. $x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y - e^x = 0$ (dos soluciones)

3. $x^4 + y^2 - 16 = 0, \quad xy - 1 = 0$ (cuatro soluciones)

4. $x^2 - xy + 2y^2 = 10, \quad x^3y^2 = 2$ (cuatro soluciones)

5. $y - \operatorname{sen} x = 0, \quad x^2 + (y + 1)^2 - 2 = 0$ (dos soluciones)

6. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y - 1 = 0, \quad y^2 - x^3 = 0$ (dos soluciones)

∗ **7.** Obtenga fórmulas para calcular las aproximaciones sucesivas mediante el Método de Newton a una solución del sistema

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0, \qquad h(x, y, z) = 0$$

empezando con la estimación inicial (x_0, y_0, z_0).

8. Utilice las fórmulas del Ejercicio 7 para obtener el punto de intersección en el primer octante de las superficies $y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + z^2 = 2$ y $x^2 - z = 0$.

9. Las ecuaciones $y - x^2 = 0$ e $y - x^3 = 0$ tienen evidentemente las soluciones $x = y = 0$ y $x = y = 1$. Intente obtenerlas utilizando la forma de dos variables del Método de Newton con valores iniciales:

(a) $x_0 = y_0 = 0.1$ y (b) $x_0 = y_0 = 0.9$

¿Cuántas iteraciones se requieren para obtener una precisión de seis cifras decimales en la solución apropiada en cada caso? ¿Cómo explica la diferencia en el comportamiento del Método de Newton para estas ecuaciones cerca de (0, 0) y (1, 1)?

13.7 Cálculos con Maple

Los cálculos necesarios para la resolución de sistemas de ecuaciones con varias variables pueden ser muy largos, incluso aunque el número de variables sea pequeño. En particular, localizar los puntos críticos de una función de n variables requiere resolver un sistema (generalmente no lineal) de n ecuaciones con n incógnitas. En estas situaciones, el uso eficaz de un sistema de matemáticas por computador como Maple puede ser muy útil. En esta sección opcional (y breve) presentaremos ejemplos de uso de la rutina «fsolve» de Maple, que permite resolver sistemas de ecuaciones no lineales, y encontrar y clasificar puntos críticos y, por consiguiente, resolver problemas de valores extremos.

Resolución de sistemas de ecuaciones

Maple dispone en su kernel de un procedimiento denominado **fsolve** (por lo que no se necesita cargar ningún paquete para acceder a él), cuyo objetivo es encontrar soluciones reales en punto flotante de sistemas de n ecuaciones en n variables (si se aplica a una ecuación polinómica de una variable intentará encontrar todas sus raíces reales, pero puede perder alguna). A nuestros efectos, una ecuación es, o bien una única expresión f en las variables (en cuyo caso la ecuación se expresará como $f = 0$), o bien dos expresiones relacionadas por un signo igual, como $f = g$. El procedimiento admite dos o tres argumentos. El primero es un conjunto de n ecuaciones separadas por comas, y encerrado por llaves. El segundo es también un conjunto (asimismo encerrado por llaves) que indica las n variables en las que hay que resolver las ecuaciones (el número de variables en las ecuaciones debe ser igual al número de ecuaciones). Los elementos del segundo conjunto pueden consistir en ecuaciones de la forma «variable = estimación inicial», donde la estimación inicial es un número que pensamos que puede estar *cerca* de la verdadera solución. No siempre es posible encontrar una buena estimación inicial de los valores de las variables, por lo que, si lo deseamos, podemos incluir un tercer argumento que especifique intervalos de valores de las variables en los que buscar una solución. Por ejemplo, para obtener una solución del sistema $x^2 + y^3 = 3$, $x\,\mathrm{sen}\,(y) - y\cos(x) = 0$ cerca del punto (1, 2) podemos intentar

```
> Digits := 6:
> fsolve({x^2+y^2=3, x*sin(y)-y*cos(x)}, {x=1, y=2}) ;
```

$$\{x = 0.909510,\ y = 1.47404\}$$

Si no hubiéramos sido capaces de especificar una estimación inicial, pero hubiéramos buscado una solución en el intervalo [0, 2], habríamos obtenido la misma respuesta:

```
> fsolve({x^2+y^2=3, x*sin(y)-y*cos (x)},
  {x, y}, {x=0..2, y=0..2}) ;
```

$$\{x = 0.909510,\ y = 1.47404\}$$

De hecho, sin especificar estimaciones iniciales ni intervalos de búsqueda se obtiene la misma salida

```
> fsolve({x^2+y^2=3, x*sin(y)-y*cos(x)}, {x, y}) ;
```

$$\{y = 1.47404,\ x = 0.909510\}$$

aunque, por sus propias razones privadas, Maple presenta en este caso los valores de x e y en orden inverso. Si hubiéramos especificado un intervalo de búsqueda diferente, habríamos obtenido un resultado diferente:

```
> fsolve({x^2+y^2=3, x*sin(y)-y*cos(x)},
  {x, y}, {x=0..2, y=0..1}) ;
```

$$\{y = 0,\ x = 1.73205\}$$

o incluso ninguna solución en absoluto, si de hecho no existiera solución en los intervalos especificados.

```
> fsolve({x^2+y^2=3, x*sin(y)-y*cos(x)} ,
  {x, y}, {x=0..1, y=0..1}) ;
```

$$fsolve(\{x^2 + y^2 = 3,\ s\,\mathrm{sen}\,(y) - y\,\mathrm{sen}\,(x)\},\ \{x, y\},\ \{x = (0..1),\ y = (0..1)\})$$

Para utilizar eficazmente fsolve es necesario tener una idea de dónde se pueden encontrar las soluciones. Si el número de variables es 2 o 3, se pueden utiliza las rutinas gráficas de Maple para buscar sus posiciones aproximadas.

Ejemplo 1 Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^4 = 1 \\ z = x^3 y \\ e^x = 2y - z \end{cases}$$

Solución Empezaremos por definir el conjunto de ecuaciones.

```
> eqns := {x^2+y^4=1, z=x^3*y, exp(x)=2*y-z} ;
```

$$eqns := \{x^2 + y^4 = 1,\ z = x^3 y,\ \mathbf{e}^x = 2y - z\}$$

¿Qué vamos a utilizar como estimación inicial? La primera ecuación no la puede cumplir ningún punto exterior al cuadrado $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, por lo que sólo es necesario considerar valores de x e y en el interior de dicho cuadrado. La segunda ecuación obliga entonces a z a estar también entre 1 y -1. Podríamos probar con muchas estimaciones iniciales que cumplieran esta condición y ver lo que obtiene fsolve. Otra forma puede ser realizar varias gráficas implícitas de las tres ecuaciones para algunos valores fijos de z entre -1 y 1, buscando los casos en los que las tres curvas se acercan lo suficiente para tener un punto de intersección común:

```
> with(plots) :
  for z from -1 by .2 to 1 do print (''z ='', z) ;
  implicitplot({x^2+y^4-1, z-x^3*y, exp(x)-2*y+z} ,
  x=-1.5 .. 1.5, y=-1.5 .. 1.5) od;
```

Estos comandos producen 11 gráficas de las tres ecuaciones, considerando que dependen de x e y, para valores de z entre -1 y 1 en pasos de 0.2. Dos de ellas se muestran en las Figuras 13.25 y 13.26. Corresponden a $z = -0.2$ y $z = 0.2$, e indican que probablemente las tres ecuaciones tienen soluciones cerca de $(-1, 0.2, -0.2)$ y $(0.5, 0.9, 0.2)$. Ejecutamos `fsolve` con esos valores iniciales y después sustituimos el resultado en las tres ecuaciones para comprobar que se cumplen. Limitaremos la salida de Maple a 6 cifras significativas, en vez de las 10 por defecto:

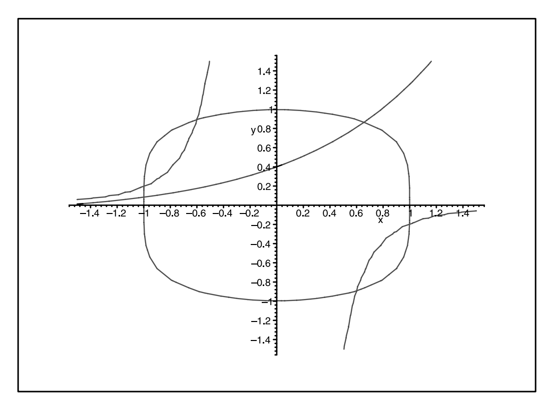


Figura 13.25 $z = -0.2$.

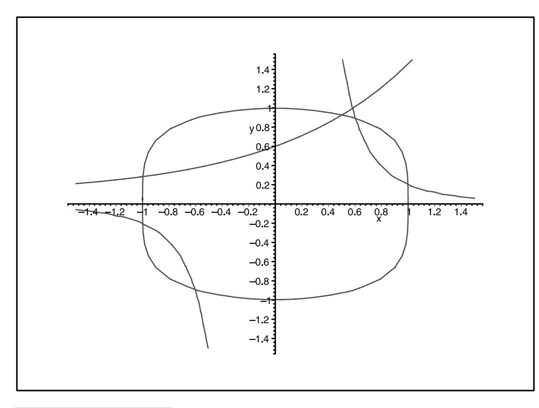


Figura 13.26 $z = 0.2$.

```
> Digits := 6:
  vars := {x=-1, y=0.2, z=-0.2} :
  sols := fsolve(eqns, vars) ;
  evalf(subs(sols, eqns)) ;
```

$$sols := \{x = -.999887, y = 0.122654, z = -.122613\}$$

$$\{-.122613 = -.122612, 1.00000 = 1., 0.367921 = 0.367921\}$$

```
> vars := {x=0.5, y=0.9, z=0.2} :
  sols := fsolve(eqns, vars) ;
  evalf(subs(sols, eqns)) ;
```

$$sols := \{z = 0.138432, x = 0.531836, y = 0.920243\}$$

$$\{0.138432 = 0.138432, 1.00000 = 1., 1.70205 = 1.70206\}$$

Hemos calculado las dos soluciones con seis dígitos significativos.

Búsqueda y clasificación de puntos críticos

La búsqueda de los puntos críticos de una función de varias variables requiere resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene de igualar a cero las derivadas parciales primeras de la función. Los ejemplos siguientes ilustran cómo realizarlo utilizando la rutina `fsolve` de Maple. Como deseamos también clasificar los puntos críticos, calcularemos los autovalores de la matriz hessiana de la función en cada punto crítico, para determinar si es definida positiva, definida negativa o indefinida.

Como el paquete VectorCalculus contiene un procedimiento `Hessian` para el cálculo de la matriz hessiana y LinearAlgebra contiene un procedimiento `Eigenvalues` para determinar los autovalores de una matriz cuadrada, tendremos, o bien que cargar dichos paquetes, o bien llamar a los procedimientos como `VectorCalculus[Hessian]` y `LinearAlgebra[Eigenvalues]`, respectivamente. Como ahora no necesitamos nada más de esos paquetes, lo haremos de esta última forma. Si tenemos una versión anterior a Maple 8, hay que asegurarse de que el paquete más antiguo linalg tiene los procedimientos `hessian` y `eigenvals`, que harán el mismo trabajo.

Ejemplo 2 Obtenga y clasifique los puntos críticos de

$$(x^2 + xy + 5y^2 + x - y)e^{-(x^2+y^2)}$$

Solución Empezaremos por definir f como la expresión anterior, que sólo depende de las dos variables x e y. No es necesario que f sea una función, por lo que la definiremos como una expresión.

```
> f := (x^2+x*y+5*y^2+x-y)*exp(-(x^2+y^2)) ;
```

$$f := (x^2 + xy + 5y^2 + x - y)\mathbf{e}^{-(x^2+y^2)}$$

A continuación, definiremos H como la matriz hessiana de f con respecto a las variables x e y. Como esto produce varias líneas de salida, suprimiremos dicha salida.

`> H := VectorCalculus[Hessian] (f, [x, y]) :` Las ecuaciones que hay que resolver para obtener los puntos críticos son

```
> eqns := {diff(f, x)=0, diff(f, y)=0} :
```

De nuevo hemos omitido la salida. Podríamos haber suprimido «= 0» en las dos ecuaciones, ya que se asume por defecto.

Ahora llega la parte difícil. ¿Dónde buscamos las soluciones? Dibujar las curvas de nivel de f puede sugerir las posiciones probables de los puntos críticos.

```
> plots[contourplot] (f, x=-3..3, y=-3..3, grid=[50, 50] ,
  contours=16) ;
```

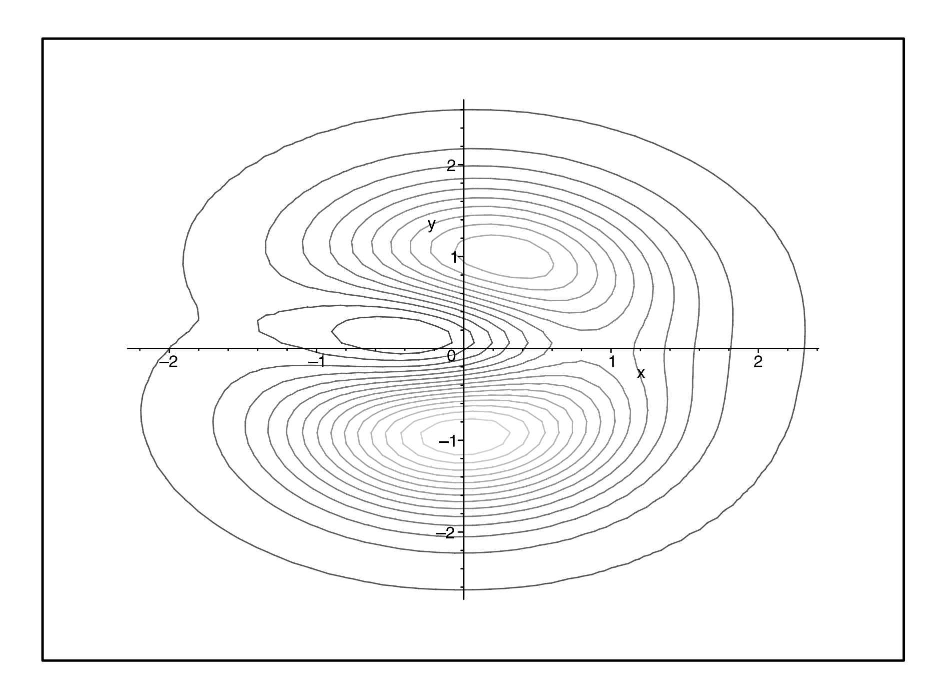


Figura 13.27 Contornos de $f(x, y)$ en el Ejemplo 2.

La gráfica de contornos (Figura 13.27) sugiere que hay cinco puntos críticos, tres extremos locales cerca de (0.3, 1), (0, -1) y (-0.6, 0.1) y dos puntos de ensilladura cerca de (1, 0) y (-1.6, 0.2). Utilizaremos `fsolve` con estas estimaciones iniciales. Para cada una de ellas, ejecutaremos `fsolve` para obtener el punto crítico. Seguidamente, calcularemos el valor de f en cada punto. Finalmente, calcularemos los autovalores del hessiano de f para determinar la naturaleza del punto crítico. De nuevo utilizaremos 6 dígitos significativos.

```
> Digits := 6:
```

(a) Cerca del punto (0.3, 1):

```
> sols := fsolve(eqns, {x=0.3, y=1}) ; evalf(subs(sols, f)) ;
```

$$sols := \{x = 0.275057, y = 1.00132\}$$
$$1.57773$$

```
> LinearAlgebra[Eigenvalues] (subs(sols, H)) ;
```

$$\begin{bmatrix} -2.41894 \\ -6.61497 \end{bmatrix}$$

Como ambos autovalores son negativos, f tiene un valor máximo local de 1.577 73 en el punto crítico (0.275 057, 1.001 32).

(b) Cerca del punto (0, -1):

```
> sols := fsolve(eqns, {x=0, y=−1}), evalf(subs(sols,f)) ;
```

$$sols := \{y = -.955506, x = 0.00492113\}$$
$$2.21553$$

```
> LinearAlgebra[Eigenvalues] (subs(sols, H)) ;
```

$$\begin{bmatrix} -3.58875 \\ -8.54885 \end{bmatrix}$$

Como ambos autovalores son negativos, f tiene un valor máximo local de 2.215 533 en el punto crítico (0.004 921 13, -0.955 506).

(c) Cerca del punto $(-0.6, 0.1)$:

```
> sols := fsolve(eqns, {x=-0.6, y=0.1}) ;
  evalf(subs(sols, f)) ;
```

$$sols := \{y = 0.132977, x = -.421365\}$$
$$-.283329$$

```
> LinearAlgebra[Eigenvalues] (subs(sols, H)) ;
```

$$\begin{bmatrix} 8.90194 \\ 2.32438 \end{bmatrix}$$

Como ambos autovalores son positivos, f tiene un valor mínimo local de $-0.283\,329$ en el punto crítico $(-0.421\,365, 0.132\,977)$.

(d) Cerca del punto $(1, 0)$:

```
> sols := fsolve(eqns, {x=1, y=0}), evalf(subs(sols, f)) ;
```

$$sols := \{y = 0.0207852, x = 0.858435\}$$
$$0.762810$$

```
> LinearAlgebra[Eigenvalues] (subs(sols, H)) ;
```

$$\begin{bmatrix} 3.28636 \\ -2.84680 \end{bmatrix}$$

Como el hessiano tiene autovalores positivos y negativos, f tiene un punto de ensilladura en $(0.858\,435, 0.020\,785\,2)$. Su valor en ese punto es 0.762 810.

(e) Cerca del punto $(-1.6, 0.2)$:

```
> sols := fsolve(eqns, {x=-1.6, y=0.2}) ;
  evalf(subs(sols, f)) ;
```

$$sols := \{y = 0.292686, x = -1.58082\}$$
$$0.0445843$$

```
> LinearAlgebra[Eigenvalues] (subs(sols, H)) ;
```

$$\begin{bmatrix} 0.673365 \\ -.407579 \end{bmatrix}$$

Como el hessiano tiene autovalores tanto positivos como negativos, f tiene un punto de ensilladura en $(-1.580\,82, 0.292\,686)$. Su valor en ese punto es 0.044 584 3.

La exponencial negativa en la definición de f asegura que $f \to 0$ cuando $x^2 + y^2 \to \infty$. Suponiendo entonces que hemos encontrado todos los puntos críticos de f, el valor del punto crítico de (b) debe ser el máximo absoluto y el de (c) el mínimo absoluto. ■

Observación La parte más difícil al utilizar `fsolve` para sistemas grandes es determinar estimaciones de partida adecuadas para las raíces o puntos críticos. Los procedimientos gráficos sólo son realmente adecuados para sistemas pequeños (una, dos o tres ecuaciones), e incluso en esos casos es importante analizar las ecuaciones o funciones que intervienen para encontrar indicios de dónde pueden estar las raíces o los puntos críticos. He aquí algunos aspectos a considerar:

1. En ciertas ocasiones, algunas ecuaciones pueden ser lo suficientemente simples para que se puedan eliminar ciertas variables, reduciéndose así el tamaño del sistema. Podríamos haber utilizado la segunda ecuación del Ejemplo 1 para eliminar z de las ecuaciones primera y tercera, reduciendo así el sistema a dos ecuaciones con dos incógnitas.
2. El sistema puede resultar de añadir un término extra a un sistema más simple, y la posición de las raíces de este último puede ser conocida. En ese caso se pueden utilizar las posiciones de esas raíces conocidas como estimaciones iniciales.
3. Es conveniente estar siempre alerta frente a la posibilidad de ecuaciones que limiten los valores posibles de algunas variables. Por ejemplo, en el Ejemplo 1 la ecuación $x^2 + y^4 = 1$ limita los valores de x e y al intervalo $[-1, 1]$.

Ejercicios 13.7

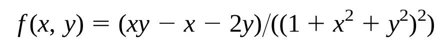
En los Ejercicios 1 y 2, resuelva los sistemas de ecuaciones dados utilizando la rutina `fsolve` de Maple. Utilice 5 dígitos significativos. Esté atento a posibles cambios que puedan reducir el número de ecuaciones a introducir en `fsolve`.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = xy \\ 6xy = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^4 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = \operatorname{sen} z \\ z + z^3 + z^4 = x + y \end{cases}$

En los Ejercicios 3-6, utilice `fsolve` para calcular los resultados pedidos. Utilice 5 dígitos significativos en todos los casos.

3. Calcule los valores máximos y mínimos y sus posiciones para la función



$$f(x, y) = (xy - x - 2y)/((1 + x^2 + y^2)^2)$$

Utilice un diagrama de contornos como ayuda para determinar los puntos de partida adecuados.

4. Evidentemente, $f = 1 - 10x^4 - 8y^4 - 7z^4$ tiene un valor máximo de 1 en (0, 0, 0). Calcule el valor máximo absoluto de $h = f + g$, siendo $g = yz - xyz - x - 2y + z$, comenzando en varios puntos cerca de (0, 0, 0).

5. Calcule el valor mínimo de

$$f = x^2 + y^2 + z^2 + 0.2xy - 0.3xz + 4x - y$$

6. Calcule los valores máximo y mínimo de

$$f(x, y, z) = \frac{x + 1.1y - 0.9z + 1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan los siguientes términos o expresiones?**
  - ◇ Punto crítico de $f(x, y)$
  - ◇ Punto singular de $f(x, y)$
  - ◇ Valor máximo absoluto de $f(x, y)$
  - ◇ Valor mínimo local de $f(x, y)$
  - ◇ f tiene un valor mínimo local en $f(x, y)$
  - ◇ Punto de ensilladura de $f(x, y)$
  - ◇ Forma cuadrática
  - ◇ Restricción
  - ◇ Programación lineal
  - ◇ Envolvente de una familia de curvas
- **Explique el test de la segunda derivada sobre un punto crítico de $f(x, y)$.**
- **Describa el método de los multiplicadores de Lagrange.**
- **Describa el método de los mínimos cuadrados.**
- **Describa el Método de Newton para dos ecuaciones.**

Ejercicios de repaso

En los Ejercicios 1-4, calcule y clasifique los puntos críticos de las funciones dadas.

1. xye^{-x+y} **2.** $x^2y - 2xy^2 + 2xy$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{9}{4 - x - y}$ **4.** $x^2y(2 - x - y)$

5. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$. ¿Tiene f un valor mínimo? Si es así, ¿cuál es y dónde se alcanza?

6. Demuestre que $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$ tiene un valor mínimo local en (0, 0, 0). ¿Se alcanza ese valor mínimo en algún otro punto?

7. Calcule los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x, y) = xye^{-x^2-4y^2}$. Justifique su respuesta.

8. Sea $f(x, y) = (4x^2 - y^2)e^{-x^2+y^2}$.

(a) Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y)$ en el plano xy.

(b) Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y)$ en la región con forma de cuña definida por $0 \leqslant y \leqslant 3x$.

9. Un alambre de longitud L se corta en tres trozos, y con cada trozo se forma un cuadrado. ¿Cuál es (a) el valor mínimo y (b) el valor máximo de la suma de las áreas de los cuadrados?

10. Un servicio de mensajería acepta paquetes de forma rectangular siempre que la suma de su perímetro y su altura sea menor que 120 pulgadas. ¿Cuál es el máximo volumen posible de una caja de este tipo?

11. Calcule el área de la elipse más pequeña $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ que contenga al rectángulo $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$.

12. Calcule el volumen del elipsoide más pequeño

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que contenga a la caja rectangular $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$, $-3 \leqslant z \leqslant 3$.

13. Calcule el volumen de la región más pequeña de la forma

$$0 \leqslant z \leqslant a\left(1 - \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

que contenga a la caja $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$.

14. Una ventana tiene la forma de un rectángulo sobre el que se monta un triángulo isósceles. ¿Cuáles son las dimensiones x, y y z de la ventana (*véase* la Figura 13.28) si su perímetro es L y su área es máxima?

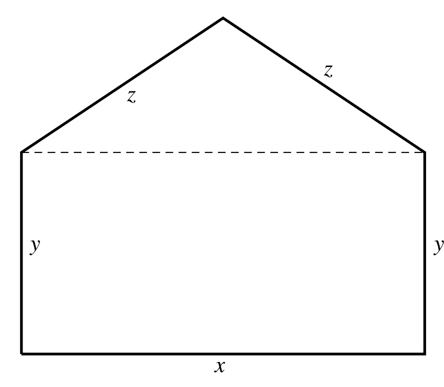


Figura 13.28

15. Un fabricante de productos determina que si fabrica x miles de productos al mes y los vende a y euros cada uno, su beneficio mensual (en miles de euros) será $P = xy - \frac{1}{27}x^2y^3 - x$. Si su fábrica es capaz de producir un máximo de 3000 productos al mes, y las leyes estatales le impiden cobrar más de 2 euros por ese tipo de producto, ¿cuántos productos debería fabricar y cuánto debería cobrar por cada uno para maximizar el beneficio mensual?

16. Calcule la envolvente de la familia de curvas $y = (x - c)^3 + 3c$.

17. Calcule una solución aproximada $y(x, \epsilon)$ de la ecuación $y + \epsilon x e^y = -2x$ con términos hasta de segundo grado en ϵ.

18. (a) Calcule $G'(y)$ si $G(y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(xy)}{x}\,dx$.

(b) Calcule $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(\pi x) - \tan^{-1} x}{x}\,dx$. *Sugerencia*: Esta integral es $G(\pi) - G(1)$.

Problemas avanzados

1. (Series de Fourier)
Demuestre que las constantes a_k ($k = 0, 1, 2, ..., n$) y b_k ($k = 1, 2, ..., n$), que minimizan la integral

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)\right]^2 dx$$

se expresan como

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\; b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx$$

Nótese que esas constantes, denominadas **coeficientes de Fourier** de f en $[-\pi, \pi]$, no dependen de n. Si se pueden calcular para todos los enteros positivos k, entonces la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

se denomina **serie de Fourier (de rango completo)** de f en $[-\pi, \pi]$ (*véase* la Sección 9.9).

2. Este problema es una continuación del Problema 1. Calcule los coeficientes de Fourier (de rango completo) a_k y b_k de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

¿Cuál es el mínimo valor de I_n en este caso? ¿Cómo se comporta cuando $n \to \infty$?

∗**3.** Calcule $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(tx + 1)}{1 + t^2}\,dt$.

∗**4. (Problema de Steiner)** El problema de calcular un punto del plano (o de un espacio de dimensión superior) que minimice la suma de su distancia a n puntos dados es muy difícil. El caso $n = 3$ se conoce como problema de Steiner. Si $P_1P_2P_3$ es un triángulo cuyo ángulo más grande es menor que 120º, existe un punto Q en el interior del triángulo tal que las líneas QP_1, QP_2 y QP_3 forman ángulos de 120º entre sí. Demuestre que la suma de las distancias desde los vértices del triángulo a un punto P es mínima cuando $P = Q$. *Sugerencia*: Demuestre primero que si $P = (x, y)$ y $P_i = (x_i, y_i)$, entonces

$$\frac{d|PP_i|}{dx} = \cos\theta_i \quad \text{y} \quad \frac{d|PP_i|}{dy} = \operatorname{sen}\theta_i$$

siendo θ_i el ángulo que forman $\overrightarrow{P_iP}$ y la dirección positiva del eje x. A partir de aquí, demuestre que el punto mínimo P cumple dos ecuaciones trigonométricas en las que intervienen θ_1, θ_2 y θ_3. Intente demostrar después que dos cualesquiera de esos ángulos difieren en $\pm 2\pi/3$. ¿Dónde debería tomarse P si el triángulo tuviera un ángulo de 120º o mayor?



CAPÍTULO 14

Integración múltiple

¿Sabéis qué es un matemático? —preguntó Lord Kelvin a sus alumnos. Se dirigió a la pizarra y escribió

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Apuntando con el dedo a lo que había escrito, se dirigió a la clase—: Un matemático es alguien al que *eso* le parece tan obvio como ‘‘dos por dos son cuatro’’ os lo parece a vosotros.

William Thomson Kelvin (1824-1907)
anécdota recogida en *Men of Mathematics* de E. Bell

Introducción En este capítulo se amplía el concepto de integral definida a funciones de varias variables. Definidas como límites de sumas de Riemann, como en el caso de la integral definida unidimensional, las integrales múltiples se pueden calcular utilizando sucesivas integrales definidas simples. Se emplean para representar y calcular valores de magnitudes especificadas en términos de densidades en regiones del plano o en espacios de dimensión superior. En el ejemplo más simple, el volumen de una región tridimensional se calcula utilizando una *integral doble* de su altura sobre la región plana bidimensional de su base.

14.1 Integrales dobles

La definición de integral definida $\int_b^a f(x)$ está motivada por el *problema estándar del área*, concretamente, el problema de calcular el área de una región plana limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x, y las rectas $x = a$ y $x = b$. De forma análoga se puede motivar la integral doble de una función de dos variables en un dominio D del plano como solución al *problema estándar del volumen*, que consiste en calcular el volumen de la región tridimensional S limitada por la superficie $z = f(x, y)$, el plano xy y el cilindro paralelo al eje z que pasa por la frontera de D (*véase* la Figura 14.1). D se denomina **dominio de integración**. Denominaremos «sólido» a la región tridimensional S, sin que esto implique que esté llena con ninguna sustancia en particular. Definimos así la integral doble de $f(x, y)$ en el dominio D como

$$\iint_D f(x, y)\, dA$$

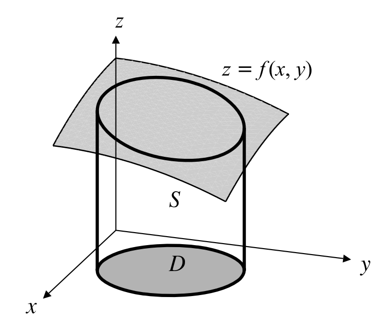


Figura 14.1 Una región *sólida* S dispuesta por encima del dominio D en el plano xy y por debajo de la superficie $z = f(x, y)$.

de forma que su valor será el volumen del sólido S siempre que D sea un dominio razonable y f sea una función «razonable» con valores positivos.

Empecemos con el caso en el que D es un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados en el plano xy y f es una función acotada en D. Si D está formada por los puntos (x, y) tales que $a \leqslant x \leqslant b$ y $c \leqslant y \leqslant d$, podemos definir una **partición** P de D en pequeños rectángulos dividiendo los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$, por ejemplo, en los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

La partición P de D consiste entonces en los mn rectángulos R_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ formados por los puntos (x, y) para los que $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ e $y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j$ (*véase* la Figura 14.2).

El área del rectángulo R_{ij} es

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

y su *diámetro* (es decir, la longitud de su diagonal),

$$\operatorname{diam}(R_{ij}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

La **norma** de la partición P es el máximo de los diámetros de los subrectángulos:

$$\|P\| = \lim_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \operatorname{diam}(R_{ij})$$

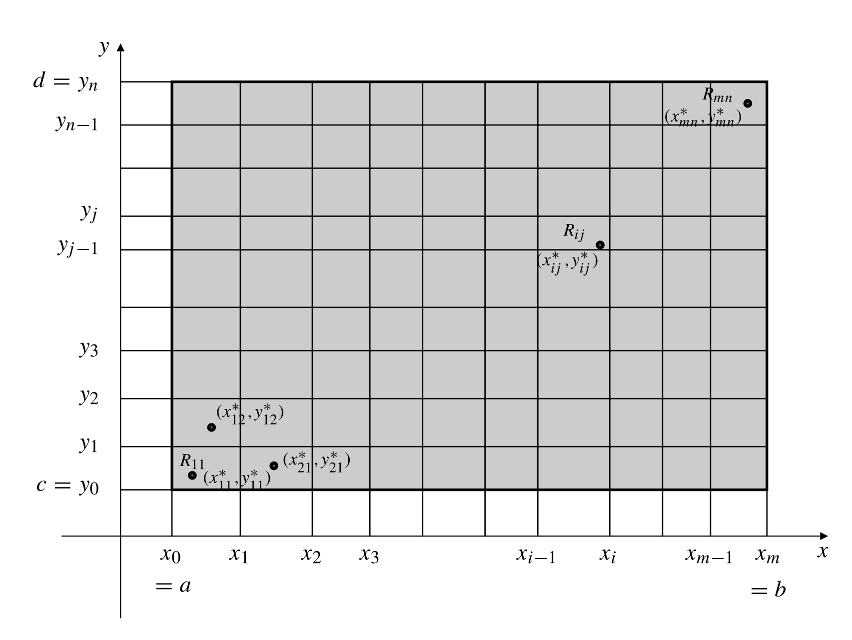


Figura 14.2 Una partición de D (el triángulo sombreado grande) en rectángulos más pequeños R_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$.

Ahora, seleccionamos un punto arbitrario (x^*_{ij}, y^*_{ij}) en cada uno de los rectángulos R_{ij} y formamos la **suma de Riemann**

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta A_{ij}$$

que es una suma de mn términos, uno por cada rectángulo de la partición (la *doble numeración* indica que i va de 1 a m términos, cada uno de los cuales es a su vez una suma en la que j va de 1 a n). El término correspondiente al rectángulo R_{ij} es, si $f(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \geqslant 0$, el volumen de la caja rectangular cuya base es R_{ij} y cuya altura es el valor de f en (x^*_{ij}, y^*_{ij}) (*véase* la Figura 14.3). Por tanto, para funciones positivas f, la suma de Riemann $R(f, P)$ se aproxima al volumen contenido por encima de D y por debajo de la gráfica de f. La integral doble de f sobre D se define como el límite de estas sumas de Riemann, siempre que ese límite exista, cuando $\|P\| \to 0$, independientemente de la elección de los puntos (x^*_{ij}, y^*_{ij}). Precisaremos estas ideas en la definición siguiente.

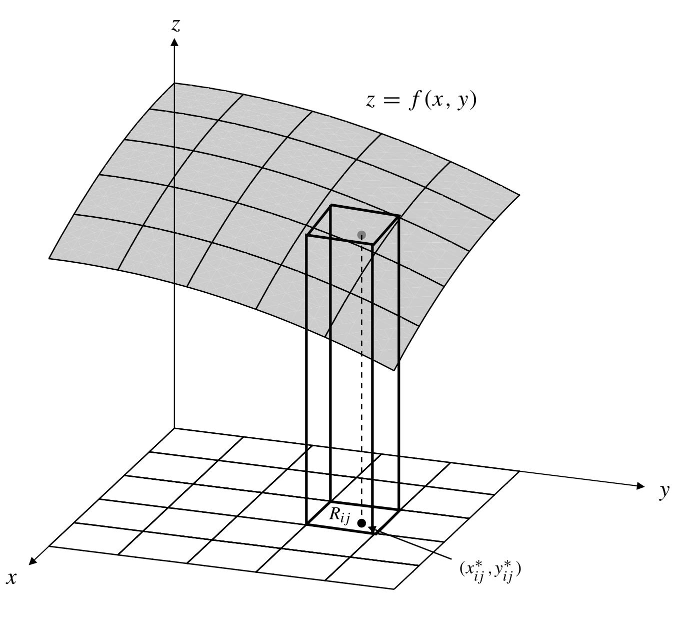


Figura 14.3 Una caja rectangular sobre el rectángulo R_{ij}. La suma de Riemann es la suma de los volúmenes de esas cajas.

DEFINICIÓN 1 Integral doble sobre un rectángulo

Se dice que f es **integrable** sobre el rectángulo D y tiene **integral doble**

$$I = \iint_D f(x, y)\, dA$$

si para todo número positivo ϵ existe un número δ que depende de ϵ tal que

$$|R(f, P) - I| < \epsilon$$

se cumple para toda partición P de D que cumpla $\|P\| < \delta$ y para todas las elecciones de los puntos (x_{ij}^*, y_{ij}^*) de los subrectángulos de P.

El dA que aparece en la expresión de la integral doble es un *elemento de área*. Representa el límite de $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$ en la suma de Riemann y se puede expresar también como $dx\, dy$ o $dy\, dx$, sin que el orden sea relevante. Cuando se calculen integrales dobles mediante *iteración*, cosa que haremos en la sección siguiente, dA será sustituido por el producto de diferenciales dx y dy y entonces el orden sí será importante.

Como en el caso de funciones de una variable, las funciones continuas en D serán integrables en D. Por supuesto, muchas funciones acotadas pero discontinuas también serán integrables, pero dar una descripción exacta de la clase de las funciones integrables se sale de los límites de este texto.

Ejemplo 1 Sea D el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Utilice una suma de Riemann correspondiente a la partición de D en cuatro cuadrados más pequeños con puntos seleccionados en el centro de cada uno, para calcular un valor aproximado de

$$\iint_D (x^2 + y)\, dA$$

Solución La partición pedida P está formada por las rectas $x = 1/2$ e $y = 1/2$, que dividen a D en cuatro cuadrados, cada uno de área $\Delta A = 1/4$. Los centros de estos cuadrados son los puntos $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ y $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ (*véase* la Figura 14.4). Por tanto, la aproximación requerida es

$$\iint_D (x^2 + y)\, dA \approx R(x^2 + y, P) = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{4}$$
$$+ \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + \left(\frac{9}{16} + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{4} = \frac{13}{16} = 0.8125$$

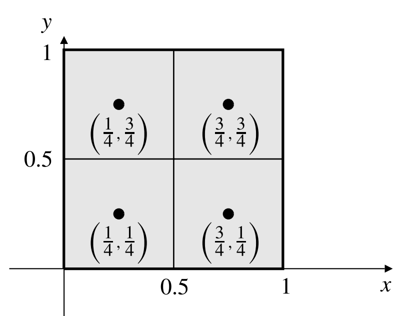


Figura 14.4 La partición del cuadrado del Ejemplo 1.

Integrales dobles en dominios más generales

A menudo es necesario utilizar integrales dobles de funciones acotadas $f(x, y)$ en dominios que no son rectangulares. Si el dominio D está acotado, podemos escoger un rectángulo R cuyos la-

dos sean paralelos a los ejes coordenados, tal que D esté contenido en R (*véase* la Figura 14.5). Si $f(x, y)$ está definida en D, se puede extender su dominio a R definiendo $f(x, y) = 0$ en todos los puntos de R que estén fuera de D. La integral de f en D se puede definir como la integral de la función extendida en el rectángulo R.

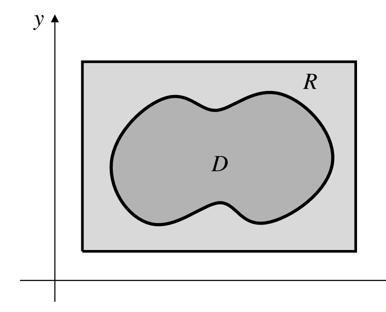


Figura 14.5

DEFINICIÓN 2

Si $f(x, y)$ está definida en el dominio acotado D, sea $\hat{f}$ la extensión de f que vale cero en todo el exterior de D:

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si} \quad (x, y) \text{ pertenece a } D \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) \text{ no pertenece a } D \end{cases}$$

Si D es un dominio *acotado*, entonces estará incluido en algún rectángulo R con lados paralelos a los ejes coordenados. Si $\hat{f}$ es integrable en R, se dice que f es **integrable** en D, y se define la **integral doble** de f en D como

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R \hat{f}(x, y)\, dA$$

Esta definición tiene sentido porque los valores de $\hat{f}$ en la parte de R que está fuera de D son cero, por lo que no contribuyen en nada al valor de la integral. Sin embargo, aunque f sea continua en D, $\hat{f}$ no será continua en R a menos que $f(x, y) \to 0$ cuando (x, y) tienda a la frontera de D. No obstante, si f y D «se comportan bien», la integral existirá. No podemos profundizar demasiado en lo que significa *comportarse bien*, pero enunciaremos, sin demostrarlo, el siguiente teorema que asegura que la mayoría de las integrales dobles que encontraremos, de hecho, existen.



Si f es una función continua en un dominio D *cerrado y acotado* cuya frontera está formada por un número finito de curvas de longitud finita, entonces f es integrable en D.

De acuerdo con el Teorema 2 de la Sección 13.1, una función continua está acotada si su dominio es cerrado y acotado. Sin embargo, en general, no es necesario restringir nuestros dominios a que sean cerrados. Si D es un dominio acotado e $\text{int}(D)$ es su interior (un conjunto abierto), y si f es integrable en D, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{\text{int}(D)} f(x, y)\, dA$$

En la Sección 14.3 trataremos las *integrales dobles impropias* de funciones no acotadas, o en dominios no acotados.

Propiedades de la integral doble

Algunas propiedades de las integrales dobles son análogas a las propiedades de las integrales definidas unidimensionales y no requieren mucho comentario: si f y g son integrables en D, y si L y M son constantes, entonces:

(a) $\iint_D f(x, y)\, dA = 0$ si D tiene área cero.

(b) **Área de un dominio:** $\iint_D 1\, dA =$ área de D (ya que es el volumen de un cilindro de base D y altura 1).

(c) **Integrales como representación de volúmenes:**

Si $f(x, y) \geqslant 0$ en D, entonces $\iint_D f(x, y)\, dA = V \geqslant 0$, siendo V el volumen del sólido que se eleva verticalmente sobre D y que queda por debajo de la superficie $z = f(x, y)$.

(d) Si $f(x, y) \leqslant 0$ en D, entonces $\iint_D f(x, y)\, dA = -V \leqslant 0$, siendo V el volumen del sólido que desciende verticalmente desde D y que queda por encima de la superficie $z = f(x, y)$.

(e) **Dependencia lineal con el integrando:**

$$\iint_D (Lf(x, y) + Mg(x, y))\, dA = L \iint_D f(x, y)\, dA + M \iint_D g(x, y)\, dA$$

(f) **Las desigualdades se conservan:**

Si $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ en D, entonces $\iint_D f(x, y)\, dA \leqslant \iint_D g(x, y)\, dA$

(g) **La desigualdad del triángulo:** $\left| \iint_D f(x, y)\, dA \right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|\, dA.$

(h) **Aditividad de dominios:** Si $D_1, D_2, ..., D_k$ son dominios no solapados en cada uno de los cuales f es integrable, entonces f en la unión $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_k$ y

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \sum_{j=1}^{k} \iint_{D_j} f(x, y)\, dA$$

Los dominios no solapados pueden compartir puntos de su frontera, pero no pueden tener puntos interiores en común.

Resolución de integrales dobles por inspección

Hasta ahora, no hemos dicho nada sobre cómo *calcular* una integral doble. La técnica principal para hacer esto, denominada *iteración*, se mostrará en la sección siguiente, pero merece la pena señalar que algunas veces las integrales dobles se pueden evaluar utilizando argumentos basados en simetría, o interpretándolas como volúmenes que ya conocemos.

Ejemplo 2 Si R es el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, entonces

$$\iint_R 3\,dA = 3 \times \text{área de } R = 3(b-a)(d-c)$$

En este caso, el integrando es $f(x, y) = 3$ y la integral es igual al volumen del sólido con forma de caja de altura 3 cuya base es el rectángulo R (*véase* la Figura 14.6).

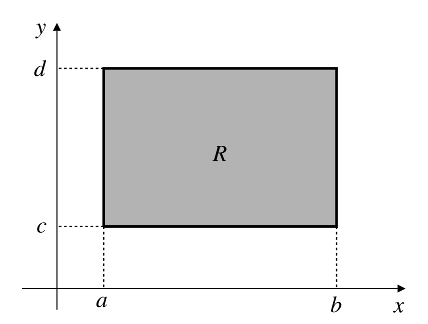


Figura 14.6

Ejemplo 3 Calcule $I = \displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} (\operatorname{sen} x + y^3 + 4)\,dA$

Solución La integral se puede expresar como la suma de tres integrales por la propiedad (e) de las integrales dobles:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} \operatorname{sen} x\,dA + \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} y^3\,dA + \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} 4\,dA \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

El dominio de integración (Figura 14.7) es un disco circular de radio 1 centrado en el origen. Como $f(x, y) = \operatorname{sen} x$ es una función *impar* de x, su gráfica deja tanto volumen por debajo del plano xy en la región $x < 0$ como por encima del plano xy en la región $x > 0$. Estas dos contribuciones a la integral doble se cancelan, por lo que $I_1 = 0$. Nótese que es necesaria la simetría *tanto* del dominio *como* del integrando para que este argumento sea válido.

De forma similar, $I_2 = 0$ porque y^3 es una función impar y D es simétrica respecto al eje x.

Finalmente,

$$I_3 = \iint_D 4\,dA = 4 \times \text{área de } D = 4\pi$$

Por tanto, $I = 0 + 0 + 4\pi = 4\pi$.

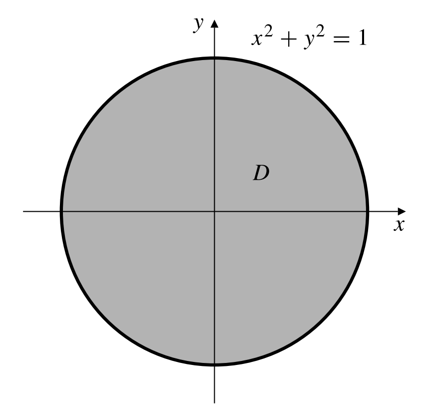


Figura 14.7

Ejemplo 4 Si D es el disco del Ejemplo 3, la integral

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dA$$

representa el volumen de una semiesfera de radio 1 y, por tanto, tiene el valor $2\pi/3$. ■

Cuando se evalúan integrales dobles, hay que estar siempre atentos para detectar situaciones como las de los ejemplos anteriores. Se puede ahorrar mucho tiempo cuando no se intenta calcular una integral cuyo valor es obvio sin calcularlo explícitamente.

Ejercicios 14.1

Los Ejercicios 1-6 se refieren a la integral doble

$$I = \iint_D (5 - x - y)\, dA$$

siendo D el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. P es la partición de D en seis cuadrados de lado 1 como se muestra en la Figura 14.8.

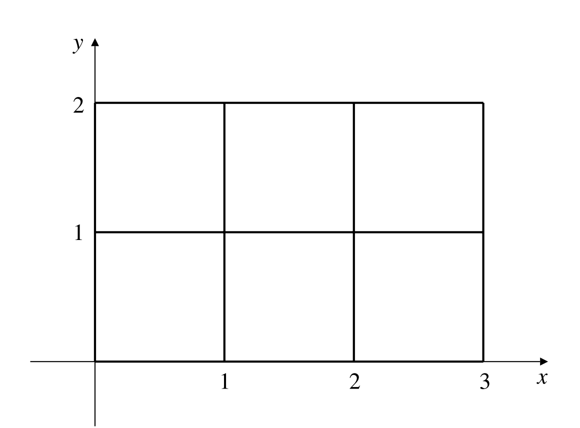


Figura 14.8

En los Ejercicios 1-5, calcule las sumas de Riemann para I correspondientes a la selección dada de los puntos (x_{ij}^*, y_{ij}^*).

1. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es la esquina superior izquierda de cada cuadrado.

2. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es la esquina superior derecha de cada cuadrado.

3. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es la esquina inferior izquierda de cada cuadrado.

4. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es la esquina inferior derecha de cada cuadrado.

5. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es el centro de cada cuadrado.

6. Calcule I interpretándolo como un volumen.

En los Ejercicios 7-10, D es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 25$ y P es la partición del cuadrado $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-5 \leqslant y \leqslant 5$ en cien cuadrados 1×1, como se muestra en la Figura 14.9. Aproxime la integral doble

$$J = \iint_D f(x, y)\, dA$$

siendo $f(x, y) = 1$, calculando las sumas de Riemann $R(f, P)$ correspondientes a las selecciones indicadas de puntos de los cuadrados pequeños. *Sugerencia*: El uso de simetrías puede facilitar el trabajo.

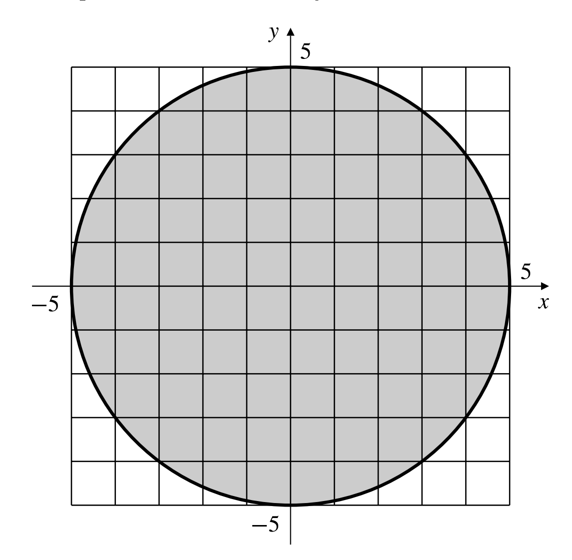


Figura 14.9

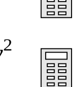
7. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es la esquina de cada cuadrado que está más cerca del origen.

8. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es la esquina de cada cuadrado que está más lejos del origen.

9. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es el centro de cada cuadrado.

10. Calcule J.

11. Repita el Ejercicio 5 utilizando el integrando e^x en vez de $5 - x - y$.



12. Repita el Ejercicio 9 utilizando $f(x, y) = x^2 + y^2$ en vez de $f(x, y) = 1$.

En los Ejercicios 13-22, calcule por simple inspección las integrales dobles dadas.

13. $\iint_R dA$, siendo R el rectángulo $-1 \leqslant x \leqslant 3$, $-4 \leqslant y \leqslant 1$.

14. $\iint_D (x + 3)\, dA$, siendo D el semidisco $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2}$.

15. $\iint_T (x + y)\, dA$, siendo T el paralelogramo cuyos vértices son los puntos $(2, 2)$, $(1, -1)$, $(-2, -2)$ y $(-1, 1)$.

16. $\iint_{|x|+|y| \leqslant 1} (x^3 \cos(y^2) + 3 \operatorname{sen} y - \pi)\, dA$

17. $\iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} (4x^2y^3 - x + 5)\, dA$

18. $\iint_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dA$

19. $\iint_{x^2+y^2 \leqslant a^2} (a - \sqrt{x^2 + y^2})\, dA$

20. $\iint_S (x + y)\, dA$, siendo S el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$.

21. $\iint_T (1 - x - y)\, dA$, siendo T el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

22. $\iint_R \sqrt{b^2 - y^2}\, dA$, siendo R el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

14.2 Iteración de integrales dobles en coordenadas cartesianas

La existencia de la integral doble $\iint_D f(x, y)\, dA$ depende de f y del dominio D. Como veremos, el cálculo de integrales dobles es más sencillo cuando el dominio de integración es de tipo *simple*.

Se dice que el dominio D en el plano xy es **simple** en y si está acotado por dos rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y por dos gráficas continuas $y = c(x)$ e $y = d(x)$ entre esas rectas (*véase* la Figura 14.10). Las rectas paralelas al eje y cortan (si lo hacen) a un dominio simple en y en un *intervalo* (que puede ser un solo punto). De forma similar, D es un dominio **simple** en x si está acotado por rectas horizontales $y = c$ e $y = d$ y por dos gráficas continuas $x = a(y)$ y $x = b(y)$ entre esas rectas (*véase* la Figura 14.11). Muchos dominios sobre los que hemos calculado integrales son simples en y, simples en x o ambas cosas. Por ejemplo, los rectángulos, triángulos y discos son simples en x y simples en y. Los dominios que no son ni una cosa ni la otra serán en general uniones de un número finito de subdominios no solapados que serán simples en x y simples en y. Denominaremos **regulares** a estos dominios. La región sombreada de la Figura 14.12 se encuentra dividida en cuatro subregiones, y cada una de ellas es simple en x y simple en y.

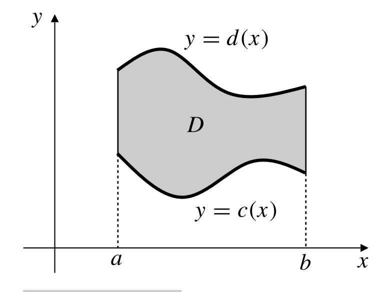


Figura 14.10 Un dominio simple en y.

Figura 14.11 Un dominio simple en x.

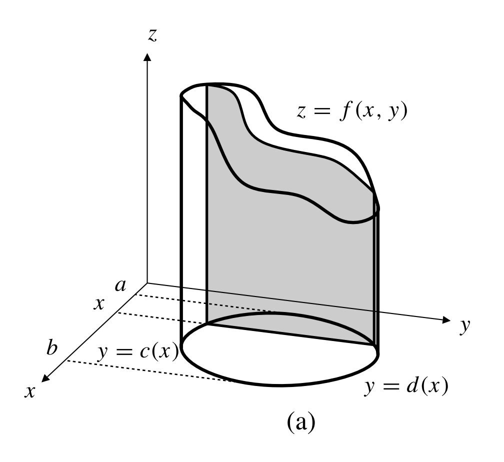
Figura 14.12 Un dominio regular.

Se puede demostrar que una función continua y acotada $f(x, y)$ es integrable en un dominio acotado simple en x o simple en y siendo integrable, por tanto, en cualquier dominio regular.

A diferencia de los ejemplos de la sección anterior, la mayoría de las integrales dobles no se pueden calcular por simple inspección. Necesitamos una técnica para calcular integrales dobles similar a la técnica de cálculo de integrales definidas simples mediante primitivas. Como la integral doble representa un volumen, podremos calcularla en dominios simples mediante una técnica de secciones.

Supongamos, por ejemplo, que D es simple en y, y está acotada por $x = a$, $x = b$, $y = c(x)$ e $y = d(x)$, como se muestra en la Figura 14.13(a). Entonces $\iint_D f(x, y)\, dA$ representa (al menos para f positiva) el volumen de la región sólida interior al cilindro vertical que pasa por la frontera de D y entre el plano xy y la superficie $z = f(x, y)$. Consideremos la sección cruzada de este sólido en el plano vertical perpendicular al eje x en la posición x. Nótese que x es constante en ese plano. Si utilizamos las proyecciones de los ejes y y z en el plano como ejes de coordenadas en dicho plano, la sección cruzada es una región plana acotada por rectas verticales $y = c(x)$ e $y = d(x)$, por la recta horizontal $z = 0$ y por la curva $z = f(x, y)$. El área de la sección cruzada se expresa, por tanto, como

$$A(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$$



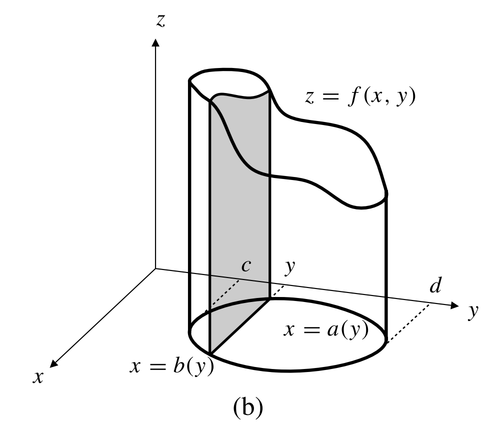


Figura 14.13
(a) En integrales en dominios simples en y, las secciones se deben tomar perpendiculares al eje x.
(b) En integrales en dominios simples en x, las secciones se deben tomar perpendiculares al eje y.

La integral doble $\iint_D f(x, y)\, dA$ se obtiene sumando los volúmenes de secciones «finas» de área $A(x)$ y espesor dx, entre $x = a$ y $x = b$ y, por tanto, es

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

A efectos de notación, es común omitir los paréntesis grandes y escribir

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

o

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$$

La última forma muestra más claramente a qué variable corresponden los límites de integración.

Las expresiones de los miembros derechos de las fórmulas anteriores se denominan integrales **iteradas**. La **iteración** es el proceso de reducir el problema de evaluar una integral doble (o múltiple) a dos (o más) integrales definidas simples sucesivas. En la iteración anterior, la integral

$$\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$$

se denomina integral **interna**, ya que se debe calcular primero. Se calcula utilizando técnicas estándar, considerando x como constante. El resultado de este cálculo es una función sólo de x (nótese que tanto el integrando como los límites de la integral interna pueden depender de x) y es en el integrando de la integral **externa** donde x es la variable de integración.

En el caso de integrales dobles en dominios simples en x podemos tomar secciones perpendiculares al eje y y obtener una integral iterada con la integral externa en la dirección de y (*véase* la Figura 14.13(b)). Resumimos la exposición anterior en el siguiente teorema, cuya demostración formal, sin embargo, no daremos.

TEOREMA 2 **Iteración de integrales dobles**

Si $f(x, y)$ es continua en el dominio D, acotado y simple en y, dado por $a \leqslant x \leqslant b$ y $c(x) \leqslant y \leqslant d(x)$, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$$

De forma semejante, si f es continua en el dominio D, acotado y simple en x, dado por $c \leqslant y \leqslant d$ y $a(y) \leqslant x \leqslant b(y)$, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx$$

Observación El símbolo dA en la integral doble se sustituye en la integral iterada por dx y dy. Por tanto, dA se escribe frecuentemente como $dx\, dy$ o $dy\, dx$ en la integral doble. Las tres expresiones

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy, \qquad \iint_D f(x, y)\, dy\, dx \qquad \text{y} \qquad \iint_D f(x, y)\, dA$$

indican todas una integral doble de f en D. Sólo cuando la integral doble es iterada, el orden de dx y dy se hace importante. Posteriormente en este capítulo veremos integrales iteradas dobles en coordenadas polares, y dA tomará la forma $r\, dr\, d\theta$.

No siempre es necesario realizar un gráfico tridimensional del volumen sólido representado por una integral doble. Para iterar la integral apropiadamente (en una dirección o en la otra) en general es suficiente hacer un gráfico *del dominio D* sobre el que se realiza la integral. La dirección de iteración se muestra mediante una línea sobre la cual se realiza la integral interna. Los siguientes ejemplos sirven de ilustración.

Ejemplo 1 Calcule el volumen del sólido que está por encima del cuadrado Q definido por $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $1 \leqslant y \leqslant 2$, y por debajo del plano $z = 4 - x - y$.

Solución El cuadrado Q es simple en x y simple en y, por lo que la integral doble correspondiente al volumen se puede iterar en cualquier dirección. Lo haremos de las dos formas para practicar. La recta horizontal situada a una altura y en la Figura 14.14 sugiere que integramos primero con respecto a x siguiendo esta recta (desde 0 hasta 1) e integramos después el resultado con respecto a y desde 1 hasta 2. Iterando la integral doble en esta dirección, calculamos

$$\begin{aligned}
\text{Volumen por encima de } Q &= \iint_Q (4 - x - y)\, dA \\
&= \int_1^2 dy \int_0^1 (4 - x - y)\, dx \\
&= \int_1^2 dy \left(4x - \frac{x^2}{2} - xy\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} \\
&= \int_1^2 \left(\frac{7}{2} - y\right) dy \\
&= \left(\frac{7y}{2} - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = 2 \text{ unidades al cubo}
\end{aligned}$$

Utilizando la iteración contraria, como se muestra en la Figura 14.15, calculamos

$$\begin{aligned}
\text{Volumen por encima de } Q &= \iint_Q (4 - x - y)\, dA \\
&= \int_0^1 dx \int_1^2 (4 - x - y)\, dy \\
&= \int_0^1 dx \left(4y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1}^{y=2} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - x\right) dx \\
&= \left(\frac{5x}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 2 \text{ unidades al cubo}
\end{aligned}$$

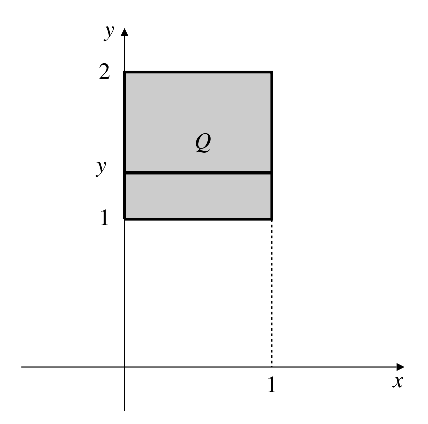


Figura 14.14 La recta horizontal en Q indica iteración con la integral interna en la dirección de x.

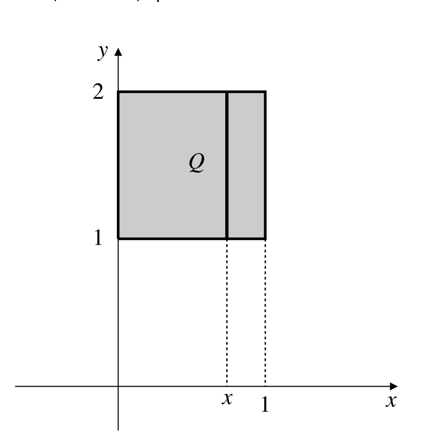


Figura 14.15 La recta vertical en Q indica iteración con la integral interna en la dirección de y.

¡Es reconfortante obtener el mismo resultado de las dos formas! Nótese que como Q es un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, los límites de las integrales internas no dependen de las variables de las integrales externas en cada iteración. No debemos esperar que esto ocurra en dominios más generales.

Ejemplo 2 Calcule $\iint_T xy\, dA$ en el triángulo T cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (1, 1).

Solución El triángulo T se muestra en la Figura 14.16. Es simple en x y simple en y. Utilizando la iteración correspondiente a tomar secciones en la dirección que se muestra en la figura, se obtiene:

$$\begin{aligned}\iint_T xy\, dA &= \int_0^1 dx \int_0^x xy\, dy \\ &= \int_0^1 dx \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \frac{x^4}{8}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

La iteración en la otra dirección (Figura 14.17) conduce al mismo valor:

$$\begin{aligned}\iint_T xy\, dA &= \int_0^1 dy \int_y^1 xy\, dx \\ &= \int_0^1 dy \left(\frac{yx^2}{2}\right)\Bigg|_{x=y}^{x=1} \\ &= \int_0^1 \frac{y}{2}(1 - y^2)\, dy \\ &= \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

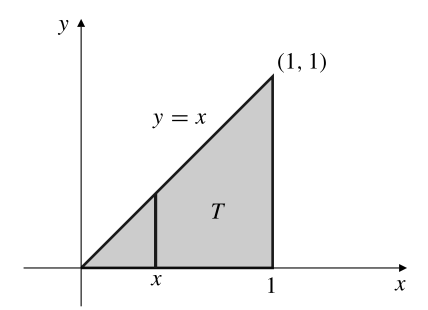


Figura 14.16 El dominio triangular T con una recta vertical que indica iteración con integral interna en la dirección de y.

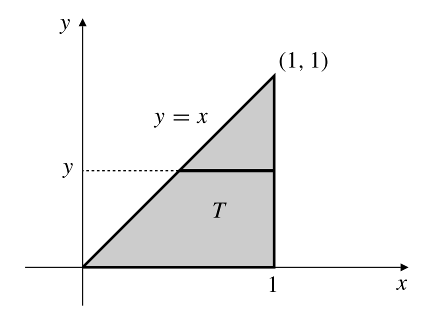


Figura 14.17 El dominio triangular T con una recta horizontal que indica iteración con la integral interior en la dirección de x.

En los dos ejemplos anteriores, la integral doble se puede calcular fácilmente utilizando cualquiera de las dos posibles iteraciones (lo hemos hecho de las dos formas a efectos ilustrativos). Sin embargo, ocurre a menudo que una integral doble se evalúa fácilmente si se itera en una dirección y resulta muy difícil, si no imposible, de calcular si se itera en la otra dirección. Algunas veces incluso aparecen integrales iteradas cuyo cálculo requiere que se expresen como integrales dobles y después se iteren en la dirección contraria.

Ejemplo 3 Calcule la integral iterada $I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy$.

Solución No podemos calcular una primitiva de e^{y^3} para evaluar la integral interior con esta iteración, por lo que expresaremos I como una integral doble e identificaremos la región donde se calcula:

$$I = \iint_D e^{y^3}\, dA$$

siendo D la región que se muestra en la Figura 14.18. Volviendo a realizar la iteración con la integración en x en el interior, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{y^3}\, dx \\ &= \int_0^1 e^{y^3}\, dy \int_0^{y^2} dx \\ &= \int_0^1 y^2 e^{y^3}\, dy = \left.\frac{e^{y^3}}{3}\right|_0^1 = \frac{e-1}{3} \end{aligned}$$

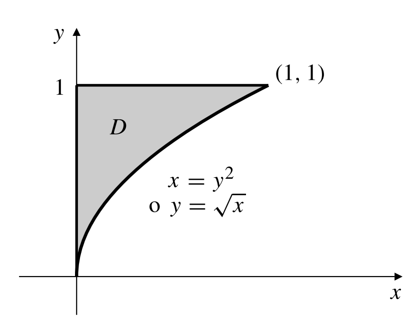


Figura 14.18 La región correspondiente a la integral iterada del Ejemplo 3.

■

A continuación presentamos un ejemplo de cálculo de volumen de un sólido algo más complicado. Aunque no siempre es necesario dibujar los sólidos para calcular sus volúmenes, es conveniente hacerlo siempre que sea posible. Cuando posteriormente en este capítulo consideremos las integrales triples en regiones tridimensionales, en general será necesario dibujar las regiones. Practique cuanto pueda.

Ejemplo 4 Dibuje y calcule el volumen del sólido limitado por los planos $y = 0$, $z = 0$ y $z = a - x + y$, y el cilindro parabólico $y = a - (x^2/a)$, siendo a una constante positiva.

Solución El sólido se muestra en la Figura 14.19. Su base es el segmento parabólico D en el plano xy limitado por $y = 0$ e $y = a - (x^2/a)$, por lo que el volumen del sólido está dado por

$$V = \iint_D (a - x + y)\, dA = \iint_D (a + y)\, dA$$

Nótese cómo se ha utilizado la simetría para eliminar el término en x del integrando. Este término es una función impar de x, y D es simétrico respecto al eje y. Iterando la integral doble en la dirección que sugiere la sección que se muestra en la figura, obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} dx \int_0^{a-(x^2/a)} (a + y)\, dy \\ &= \int_{-a}^{a} \left(ay + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=a-(x^2/a)} dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-a}^{a} \left[a^2 - x^2 + \frac{1}{2}\left(a^2 - 2x^2 + \frac{x^4}{a^2} \right) \right] dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} \left[\frac{3}{2}\, a^2 - 2x^2 + \frac{x^4}{2a^2} \right] dx$$

$$= \left(3a^2 x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{5a^2} \right) \Bigg|_0^a$$

$$= 3a^3 - \frac{4}{3}\, a^3 + \frac{1}{5}\, a^3 = \frac{28}{15}\, a^3 \text{ unidades al cubo}$$

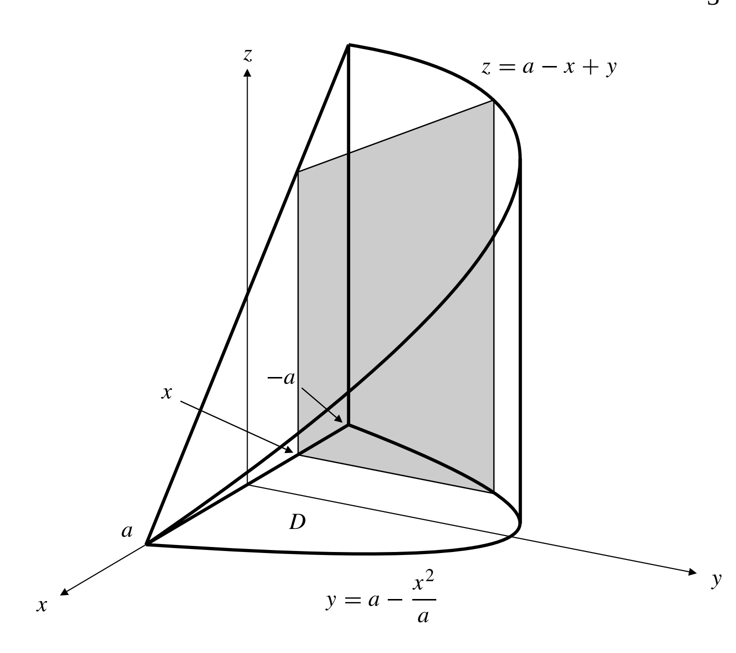


Figura 14.19 El sólido del Ejemplo 4, con una sección perpendicular al eje x.

Observación La rutina **int** de Maple se puede anidar para calcular simbólicamente integrales iteradas dobles (o múltiples). Por ejemplo, la integral iterada para el cálculo del volumen del Ejemplo 4 anterior se puede obtener mediante el comando de Maple

```
> V = int(int(a+y, y=0..a – xˆ2/a), x=–a..a) ;
```

$$V = \frac{28}{15}\, a^3$$

Recuérdese que «int» tiene una forma *inerte* «Int», que devuelve la propia integral sin intentar calcularla simbólicamente. Por ejemplo, se puede presentar en pantalla una ecuación de la integral reiterada de la solución del Ejemplo 3 utilizando el comando

```
> Int(Int(exp(yˆ3), x=0..yˆ2), y=0..1)
  =int(int(exp(yˆ3), x=0..yˆ2), y=0..1) ;
```

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{(y^3)}\, dx\, dy = \frac{1}{3}\, e - \frac{1}{3}$$

Si se desea que Maple aproxime una integral iterada sin intentar que primero la resuelva simbólicamente, se introduce en «evalf» la forma inerte.

```
> evalf(Int(Int(exp(yˆ3), x=0..yˆ2), y=0..1)) ;
```

$$.5727606095$$

Por supuesto, Maple no puede resolver todas las integrales de forma simbólica. Si sustituimos $\exp(y^3)$ en la integral iterada anterior por $\exp(x^3)$, Maple se enfrentará valerosamente con la integral interna (de $\exp(x^3)$ con respecto a x) e intentará expresarla mediante la función gamma y una función de dos variables relacionada con la anterior denominada función gamma incompleta, pero no podrá calcular la integral externa (y).

```
> Int(Int(exp(x^3), x=0..y^2), y=0..1)
  =int(int(exp(x^3), x=0..y^2), y=0..1) ;
```

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{(x^3)}\, dx\, dy = \int_0^1 \frac{1}{9} \frac{y^2\left(-2\pi\sqrt{3} + 3\Gamma\left(\frac{1}{3}, -y^6\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(y^6)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\, dy$$

Podemos forzar de nuevo la evaluación numérica utilizando la función «evalf» aplicada a la forma inerte.

```
> Int(Int(exp(x^3), x=0...y^2), y=0..1)
  =evalf(Int(Int(exp(x^3), x=0..y^2), y=0..1)) ;
```

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{(x^3)}\, dx\, dy = .3668032540$$

Siempre que se desee calcular una aproximación numérica hay que emplear la forma inerte. En algunas versiones de Maple, intentar utilizar «evalf» con «int(int(...» puede producir resultados inesperados, como un valor complejo de una integral de funciones reales:

```
> evalf(int(int(exp(x^3), x=0..y^2), y=0..1)) ;
```

$$-.1834016270 - .3176609362\, I$$

Ejercicios 14.2

En los Ejercicios 1-4, calcule las integrales iteradas dadas.

1. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^x (xy + y^2)\, dy$

2. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y (xy + y^2)\, dx\, dy$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_{-x}^{x} \cos y\, dy\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^2 dy \int_0^y y^2 e^{xy}\, dx$

En los Ejercicios 5-14, calcule las integrales dobles mediante iteración.

5. $\displaystyle\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$, siendo R el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

6. $\displaystyle\iint_R x^2y^2\, dA$, siendo R el rectángulo del Ejercicio 5.

7. $\displaystyle\iint_S (\operatorname{sen} x + \cos y)\, dA$, siendo S el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

8. $\displaystyle\iint_T (x - 3y)\, dA$, siendo T el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(a, 0)$ y $(0, b)$.

9. $\displaystyle\iint_R xy^2\, dA$, siendo R la región finita del primer cuadrante limitada por las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$.

10. $\displaystyle\iint_D x \cos y\, dA$, siendo D la región finita del primer cuadrante limitada por los ejes coordenados y la curva $y = 1 - x^2$.

11. $\displaystyle\iint_D \ln x\, dA$, siendo D la región finita del primer cuadrante limitada por la recta $2x + 2y = 5$ y la hipérbola $xy = 1$.

12. $\displaystyle\iint_T \sqrt{a^2 - y^2}\, dA$, siendo T el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(a, 0)$ y (a, a).

13. $\displaystyle\iint_R \frac{x}{y} e^y \, dA$, siendo R la región $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant y \leqslant x$.

14. $\displaystyle\iint_T \frac{xy}{1+x^4} \, dA$, siendo T el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

En los Ejercicios 15-18, dibuje los dominios de integración y calcule las integrales iteradas dadas.

15. $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} \, dx$

16. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} dy \int_y^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx$

17. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 \frac{y^\lambda}{x^2+y^2} \, dy \ (\lambda > 0)$

18. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^{x^{1/3}} \sqrt{1-y^4} \, dy$

En los Ejercicios 19-28, calcule los volúmenes de los sólidos indicados.

19. Por debajo de $z = 1 - x^2$ y por encima de la región $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x$.

20. Por debajo de $z = 1 - x^2$ y por encima de la región $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant y$.

21. Por debajo de $z = 1 - x^2 - y^2$ y por encima de la región $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$.

22. Por debajo de $z = 1 - y^2$ y por encima de $z = x^2$.

23. Por debajo de la superficie $z = 1/(x + y)$ y por encima de la región del plano xy limitada por $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = x$.

24. Por debajo de la superficie $z = x^2 \operatorname{sen}(y^4)$ y por encima del triángulo del plano xy cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, \pi^{1/4})$ y $(\pi^{1/4}, \pi^{1/4})$.

25. Por encima del plano xy y por debajo de la superficie $z = 1 - x^2 - 2y^2$.

26. Por encima del triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(a, 0)$ y $(0, b)$ y por debajo del plano $z = 2 - (x/a) - (y/b)$.

27. En el interior de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$.

28. En el interior del cilindro $x^2 + 2y^2 = 8$, por encima del plano $z = y - 4$ y por debajo del plano $z = 8 - x$.

$*$**29.** Suponga que $f(x, t)$ y $f_1(x, t)$ son funciones continuas en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$ y $c \leqslant t \leqslant d$. Sea

$$g(x) = \int_c^d f(x, t) \, dt \quad \text{y} \quad G(x) = \int_c^d f_1(x, t) \, dt$$

Demuestre que $g'(x) = G(x)$ para $a < x < b$. *Sugerencia*: Calcule $\int_a^x G(u) \, du$ invirtiendo el orden de iteración. Diferencie posteriormente el resultado. Ésta es una versión diferente del Teorema 5 de la Sección 13.5.

$*$**30.** Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$ en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Sea T el triángulo cuyos vértices son (a, a), (b, a) y (b, b). Iterando $\iint_T f(x)g(y) \, dA$ en las dos direcciones, demuestre que

$$\int_a^b f(x)G(x) \, dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b g(y)F(y) \, dy$$

Esto es una forma alternativa de obtener la fórmula de integración por partes.

31. Utilice la rutina **int** de Maple o rutinas similares de otros sistemas de matemáticas por computador para calcular las integrales iteradas de los Ejercicios 1-4 o las integrales iteradas construidas en los restantes ejercicios anteriores.

14.3 Integrales impropias y un teorema del valor medio

A efectos de simplificación, en la definición de integral doble dada en la Sección 14.1 exigimos que el dominio D fuera un conjunto acotado y que el integrando f fuera acotado en D. Como en el caso de una sola variable, pueden aparecer **integrales dobles impropias** si el dominio de integración no está acotado o si el integrando no está acotado cerca de un punto del dominio o de su frontera.

Integrales impropias de funciones positivas

Una integral impropia de una función f que cumple $f(x, y) \geqslant 0$ en su dominio D, o bien existe (es decir, converge a un valor finito), o bien es infinita (diverge a infinito). La convergencia o divergencia de integrales dobles impropias de funciones *no negativas* se puede determinar iterando y determinando la convergencia o divergencia de las integrales impropias que resultan.

Ejemplo 1 Calcule $I = \iint_R e^{-x^2}\,dA$. En este caso, R es la región definida por $x \geqslant 0$ y $-x \leqslant y \leqslant x$ (*véase* la Figura 14.20).

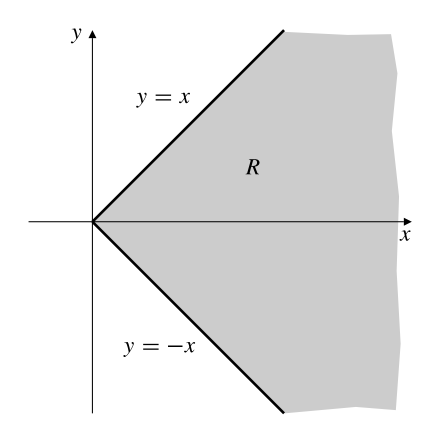


Figura 14.20 Un sector no acotado del plano.

Solución Iteramos con la integral externa en la dirección de x:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty dx \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\,dy \\ &= \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_{-x}^{x} dy \\ &= 2\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx \end{aligned}$$

Se trata de una integral impropia que se puede expresar como un límite:

$$\begin{aligned} I &= 2 \lim_{r\to\infty} \int_0^r x e^{-x^2}\,dx \\ &= 2 \lim_{r\to\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right)\Bigg|_0^r \\ &= \lim_{r\to\infty} (1 - e^{-r^2}) = 1 \end{aligned}$$

La integral dada converge, y su valor es 1.

Ejemplo 2 Si D es la región que está por encima del eje x, por debajo de la curva $y = 1/x$ y a la derecha de la recta $x = 1$, determine si la integral doble

$$\iint_D \frac{dA}{x+y}$$

converge o diverge.

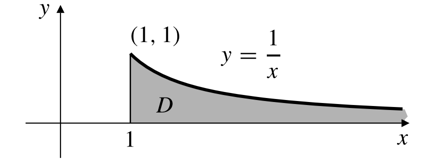


Figura 14.21 El dominio de la integral del Ejemplo 2.

Solución La región D se muestra en la Figura 14.21. Tenemos

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{dA}{x+y} &= \int_1^\infty dx \int_0^{1/x} \frac{dy}{x+y} \\ &= \int_1^\infty \ln(x+y)\Big|_{y=0}^{y=1/x} dx \\ &= \int_1^\infty \left(\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) - \ln x\right) dx \\ &= \int_1^\infty \ln\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{x}\right) dx = \int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx\end{aligned}$$

Esta integral se puede calcular de forma exacta (*véase* el Ejercicio 28 posterior), pero sólo se nos pide determinar si converge, y eso se puede hacer más fácilmente estimándola. Como $0 < \ln(1+u) < u$ si $u > 0$, tenemos

$$0 < \iint_D \frac{dA}{x+y} < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = 1$$

Por tanto, la integral dada converge, y su valor está entre 0 y 1. ■

Ejemplo 3 Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\, dA$, siendo D la región $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x^2$.

Solución La integral es impropia porque el integrando no está acotado cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, un punto frontera de D (*véase* la Figura 14.22). Sin embargo, aplicando iteración se llega a la integral propia:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{(x+y)}\, dA &= \lim_{c\to 0+} \int_c^1 dx \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\, dy \\ &= \lim_{c\to 0+} \int_c^1 dx \left(-\frac{1}{x+y}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2} \\ &= \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x}\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2\end{aligned}$$

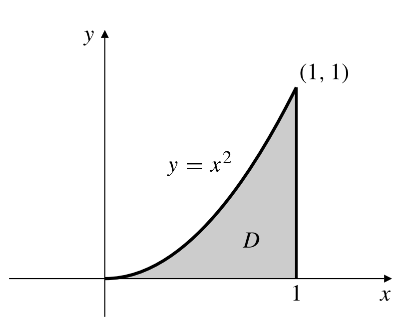


Figura 14.22 La función $\dfrac{1}{(x+y)^2}$ no está acotada en D. ■

Ejemplo 4 Determine la convergencia o divergencia de $I = \iint_D \frac{dA}{xy}$, siendo D la región acotada del primer cuadrante que está entre la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$.

Solución El dominio D se muestra en la Figura 14.23. La integral es de nuevo impropia ya que el integrando $1/(xy)$ no está acotado cuando (x, y) tiende al punto frontera $(0, 0)$. Tenemos

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{dA}{xy} = \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_{x^2}^{x} \frac{dy}{y} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x} (\ln x - \ln x^2)\, dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\, dx \end{aligned}$$

Si sustituimos $x = e^{-t}$ en esta integral, obtenemos

$$I = -\int_{\infty}^{0} \frac{-t}{e^{-t}} (-e^{-t})\, dt = \int_0^{\infty} t\, dt$$

que diverge a infinito.

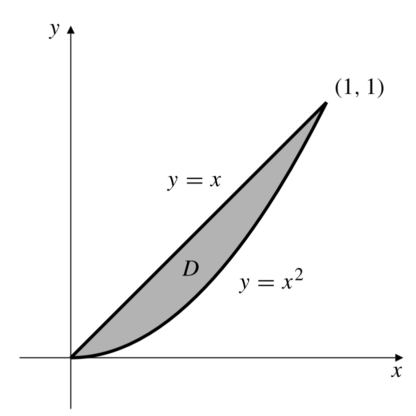


Figura 14.23 $\frac{1}{xy}$ no está acotada en el dominio D.

Observación En los ejemplos anteriores, el integrando era no negativo en el dominio de integración. Los integrandos no positivos se pueden tratar de forma similar, pero no podemos considerar aquí la convergencia de integrales dobles impropias de tipo general en las que los integrandos $f(x, y)$ pueden tomar valores positivos y negativos en su dominio D. Hay que recalcar, sin embargo, que una integral no puede converger a menos que

$$\iint_E f(x, y)\, dA$$

sea finita para todo subdominio regular y acotado E de D. En general, no podemos determinar la convergencia de una integral dada viendo la convergencia de las iteraciones. La integral doble podría divergir aunque las iteraciones convergieran (*véase* el Ejercicio 21 posterior). De hecho, las iteraciones opuestas pueden dar valores diferentes. La causa de esto es la cancelación de volúmenes infinitos de signo contrario (un comportamiento similar en una dimensión se puede ver en la integral $\int_{-1}^{1} dx/x$, que no existe, aunque representa una diferencia de áreas «iguales» pero infinitas). Es posible demostrar (para una clase amplia de funciones entre las que se encuentran, por ejemplo, las funciones continuas) que una integral doble impropia de $f(x, y)$ en D converge si la integral de $|f(x, y)|$ en D converge:

$$\iint_D |f(x, y)|\, dA \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x, y)\, dA \text{ converge}$$

En este caso cualquier iteración convergerá al mismo valor. Estas integrales dobles se denominan **absolutamente convergentes** por analogía con las series infinitas absolutamente convergentes.

Un teorema del valor medio para integrales dobles

Sea D un conjunto cerrado y acotado en el plano xy, con área positiva $A = \iint_D dA$. Supongamos que $f(x, y)$ es continua en D. Entonces existen puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D donde f toma valores máximo y mínimo (*véase* el Teorema 2 de la Sección 13.1); es decir,

$$f(x_1, y_1) \leqslant f(x, y) \leqslant f(x_2, y_2)$$

para todos los puntos (x, y) de D. Integrando esta inecuación en D, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1)A &= \iint_D f(x_1, y_1)\, dA \\ &\leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant \iint_D f(x_2, y_2)\, dA = f(x_2, y_2)A \end{aligned}$$

Por tanto, dividiendo por A, observamos que el *número*

$$\bar{f} = \frac{1}{A} \iint_D f(x, y)\, dA$$

está entre los valores mínimo y máximo de f en D:

$$f(x_1, x_1) \leqslant \bar{f} \leqslant f(x_2, y_2)$$

Se dice que un conjunto D del plano es **conexo** si dos puntos cualesquiera de éste se pueden unir mediante una curva paramétrica continua $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ que está en D. Supongamos que esta curva une los puntos (x_1, y_1) (donde $t = 0$) y (x_2, y_2) (donde $t = 1$). Sea $g(t)$ una función que cumple

$$g(t) = f(x(t), y(t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Entonces g es continua y toma los valores $f(x_1, y_1)$ en $t = 0$ y $f(x_2, y_2)$ en $t = 1$. Por el Teorema del Valor Medio, existe un número t_0 entre 0 y 1 tal que $\bar{f} = g(t_0) = f(x_0, y_0)$, donde $x_0 = x(t_0)$ y $y_0 = y(t_0)$. Por tanto, hemos encontrado un punto (x_0, y_0) en D tal que

$$\frac{1}{\text{área de } D} \iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0)$$

Y, por tanto, hemos demostrado la siguiente versión el Teorema del Valor Medio.

TEOREMA 3 **Un Teorema del Valor Medio para integrales dobles**

Si la función $f(x, y)$ es continua en un conjunto D cerrado, acotado y conexo en el plano xy, entonces existe un punto (x_0, y_0) en D tal que

$$\iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0) \times (\text{área de } D)$$

Por analogía con la definición de valor medio de funciones de una variable, podemos establecer la siguiente definición:

DEFINICIÓN 3

El **valor medio** de una función integrable $f(x, y)$ en el conjunto D es el número

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{área de } D} \iint_D f(x, y)\, dA$$

Si $f(x, y) \geqslant 0$ en D, entonces el cilindro de base D y altura constante $\bar{f}$ tiene un volumen igual al de la región sólida que está por encima de D y por debajo de la superficie $z = f(x, y)$. En muchos casos es muy útil interpretar una integral doble en función del valor medio de su función integrando.

Ejemplo 5 El valor medio de x en un dominio D de área A es

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x\, dA$$

Por supuesto, $\bar{x}$ es la coordenada x del centroide de la región D. ■

Ejemplo 6 Un número grande de puntos (x, y) se escogen aleatoriamente en el triángulo T cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (1, 1). ¿Cuál es el valor medio aproximado de $x^2 + y^2$ para esos puntos?

Solución El valor medio aproximado de $x^2 + y^2$ para los puntos escogidos aleatoriamente será el valor medio de la función en el triángulo, concretamente,

$$\frac{1}{1/2} \iint_T (x^2 + y^2)\, dA = 2 \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 + y^2)\, dy$$

$$= 2 \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Bigg|_{y=0}^{y=x} dx = \frac{8}{3} \int_0^1 x^3\, dx = \frac{2}{3}$$ ■

Ejemplo 7 Sea (a, b) un punto interior de un dominio D en el que $f(x, y)$ es continua. Para un valor positivo r lo suficientemente pequeño, el disco circular cerrado D_r con centro en (a, b) y radio r está contenido en D. Demuestre que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y)\, dA = f(a, b)$$

Solución Si D_r está contenido en D, entonces, por el Teorema 3,

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0)$$

para algún punto (x_0, y_0) en D_r. Cuando $r \to 0$, el punto (x_0, y_0) tiende a (a, b). Como f es continua en (a, b), tenemos que $f(x_0, y_0) \to f(a, b)$. Por tanto,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y)\, dA = f(a, b)$$ ■

Ejercicios 14.3

En los Ejercicios 1-12, determine si las integrales dadas convergen o divergen. Intente calcular las que converjan.

1. $\displaystyle\iint_Q e^{-x-y}\,dA$, siendo Q el primer cuadrante del plano xy.

2. $\displaystyle\iint_Q \frac{dA}{(1+x^2)(1+y^2)}$, siendo Q el primer cuadrante del plano xy.

3. $\displaystyle\iint_S \frac{y}{1+x^2}\,dA$, siendo S la banda $0 < y < 1$ en el plano xy.

4. $\displaystyle\iint_T \frac{1}{x\sqrt{y}}\,dA$, en el triángulo T cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(1, 2)$.

5. $\displaystyle\iint_Q \frac{x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dA$, siendo Q el primer cuadrante del plano xy.

6. $\displaystyle\iint_H \frac{1}{1+x+y}\,dA$, siendo H la semibanda $0 \leqslant x \leqslant \infty$, $0 < y < 1$.

7. $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(|x|+|y|)}\,dA$

8. $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x+y|}\,dA$

9. $\displaystyle\iint_T \frac{1}{x^3}e^{-y/x}\,dA$, siendo T la región que cumple $x \geqslant 1$ y $0 \leqslant y \leqslant x$.

10. $\displaystyle\iint_T \frac{dA}{x^2+y^2}$, siendo T la región del Ejercicio 9.

*__11.__ $\displaystyle\iint_Q e^{-xy}\,dA$, siendo Q el primer cuadrante del plano xy.

12. $\displaystyle\iint_R \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\,dA$, siendo R la región $2/\pi \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant 1/x$.

13. Calcule

$$I = \iint_S \frac{dA}{x+y}$$

siendo S el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$,

(a) Mediante iteración directa de la integral doble.

(b) Utilizando la simetría del integrando y del dominio para expresar

$$I = 2\iint_T \frac{dA}{x+y}$$

siendo T el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

14. Calcule el volumen del sólido que está por encima del cuadrado S del Ejercicio 13 y por debajo de la superficie $z = 2xy/(x^2+y^2)$.

En los Ejercicios 15-20, a y b son dos números reales dados, D_k es la región $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x^k$ y R_k es la región $1 \leqslant x \leqslant \infty$, $0 \leqslant y \leqslant x^k$. Calcule todos los valores reales de k para los que las integrales dadas convergen.

15. $\displaystyle\iint_{D_k} \frac{dA}{x^a}$

16. $\displaystyle\iint_{D_k} y^b\,dA$

17. $\displaystyle\iint_{R_k} x^a\,dA$

18. $\displaystyle\iint_{R_k} \frac{dA}{y^b}$

19. $\displaystyle\iint_{D_k} x^a y^b\,dA$

20. $\displaystyle\iint_{R_k} x^a y^b\,dA$

*__21.__ Calcule las dos iteraciones de la integral impropia

$$\iint_S \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dA$$

siendo S el cuadrado $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Demuestre que la integral doble impropia anterior no existe, considerando

$$\iint_T \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dA$$

siendo T la parte del cuadrado S que está bajo la línea $x = y$.

En los Ejercicios 22-24, calcule el valor medio de las funciones dadas en las regiones dadas.

22. x^2 en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$.

23. $x^2 + y^2$ en el triángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a - x$.

24. $1/x$ en la región $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

*__25.__ Calcule la distancia media de los puntos del cuarto de disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ a la recta $x + y = 0$.

26. ¿Tiene la función $f(x, y) = x$ valor medio en la región $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$? Si es así, ¿cuál es?

27. ¿Tiene la función $f(x, y) = xy$ valor medio en la región $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$? Si es así, ¿cuál es?

$*$**28.** Calcule el valor exacto de la integral del Ejemplo 2. *Sugerencia*: Integre por partes $\int_1^\infty \ln(1 + (1/x^2))\,dx$.

$*$**29.** Sea (a, b) un punto interior de un dominio D en el que la función $f(x, y)$ es continua. Para un valor de $h^2 + k^2$ lo suficientemente pequeño, el rectángulo R_{hk}, cuyos vértices son (a, b), $(a + h, b)$, $(a, b + k)$ y $(a + h, b + k)$, estará incluido en D. Demuestre que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk} \iint_{R_{hk}} f(x, y) = f(a, b)$$

Sugerencia: Vea el Ejemplo 7.

$*$**30. (Otra demostración de la igualdad de las derivadas parciales mixtas)** Suponga que $f_{12}(x, y)$ y $f_{21}(x, y)$ son continuas en un entorno del punto (a, b). Sin suponer la igualdad de estas derivadas parciales mixtas, demuestre que

$$\iint_R f_{12}(x, y)\,dA = \iint_R f_{21}(x, y)\,dA$$

siendo R el rectángulo cuyos vértices son (a, b), $(a + h, b)$, $(a, b + k)$ y $(a + h, b + k)$, y $h^2 + k^2$ un valor lo suficientemente pequeño. Utilice ahora el resultado del Ejercicio 29 para demostrar que $f_{12}(a, b) = f_{21}(a, b)$. Esto parece contradecir al Teorema 1 de la Sección 12.4. Sin embargo, en ese teorema sólo se suponía continuidad de las derivadas parciales mixtas *en* (a, b). Aquí suponemos continuidad *en todos los puntos suficientemente cerca de* (a, b).

14.4 Integrales dobles en coordenadas polares

En muchas aplicaciones de las integrales dobles, el dominio de integración, la función integrando o ambos se pueden expresar de forma más sencilla empleando coordenadas polares en lugar de coordenadas cartesianas. Recuérdese que un punto P con coordenadas cartesianas (x, y) se puede expresar también mediante sus coordenadas polares $[r, \theta]$, siendo r la distancia desde P al origen O, y θ el ángulo que OP forma con la dirección positiva del eje x (los ángulos θ positivos se miden en sentido contrario al de las agujas del reloj). Las coordenadas polares y cartesianas de P se relacionan mediante las transformaciones (*véase* la Figura 14.24)

$$x = r\cos\theta, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad \tan\theta = y/x$$

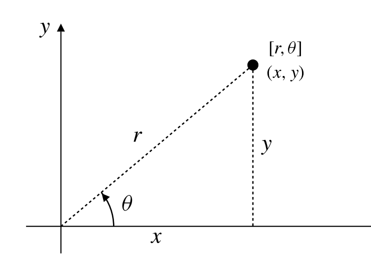


Figura 14.24 Transformaciones de polares a cartesianas.

Consideremos el problema de calcular el volumen V de la región sólida que está por encima del plano xy y por debajo del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. Como el paraboloide corta al plano xy en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, el volumen se expresa en coordenadas cartesianas como

$$V = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (1 - x^2 - y^2)\,dA = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,dy$$

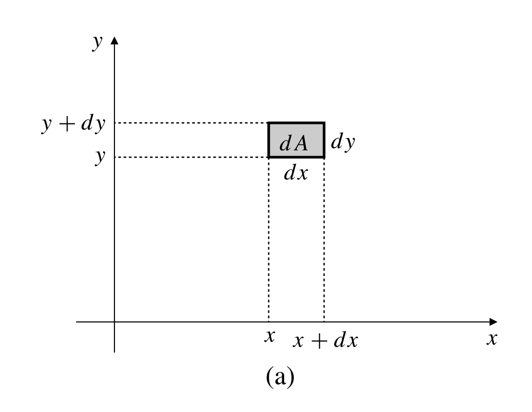
El cálculo de esta integral iterada requiere un esfuerzo considerable. Sin embargo, podemos expresar el mismo volumen utilizando coordenadas polares como

$$V = \iint_{r\leqslant 1} (1 - r^2)\,dA$$

Para iterar esta integral, tenemos que saber la forma del *elemento de área dA* en coordenadas polares.

En la fórmula cartesiana de V, el elemento de área $dA = dx\,dy$ representa el área de la región «infinitesimal» limitada por las rectas paralelas a los ejes de coordenadas que pasan por x, $x + dx$, y, e $y + dy$ (*véase* la Figura 14.25(a)). En la fórmula en polares, el elemento de área dA debe representar la región «infinitesimal» limitada por las circunferencias de radios r y $r + dr$, y las rectas que parten del origen en ángulos θ y $\theta + d\theta$ (*véase* la Figura 14.25(b)). Obsérvese que dA es aproximadamente el área de un rectángulo de dimensiones dr y $r\,d\theta$. El error de esta aproximación se hace despreciable *comparado con el tamaño de dA* cuando dr y $d\theta$ tienden a cero. Por tanto, al transformar una integral doble de coordenadas cartesianas a polares, el elemento de área se transforma de acuerdo con la fórmula

$$dx\,dy = dA = r\,dr\,d\theta$$



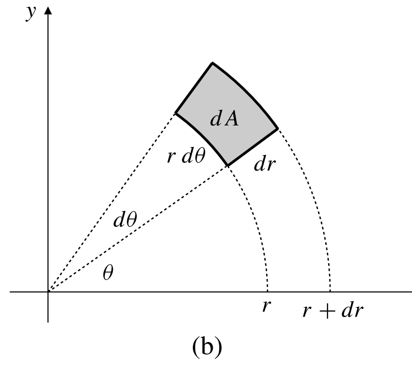


Figura 14.25
(a) $dA = dx\,dy$ en coordenadas cartesianas.
(b) $dA = r\,dr\,d\theta$ en coordenadas polares.

Para iterar la forma polar de la integral doble correspondiente al cálculo de V considerada anteriormente, podemos considerar el dominio de integración como un conjunto en un plano con *coordenadas cartesianas* r y θ. En el plano cartesiano xy el dominio es un disco $r \leqslant 1$ (*véase* la Figura 14.26), pero en el plano cartesiano $r\theta$ (con ejes r y θ perpendiculares) el dominio es el rectángulo R especificado por $0 \leqslant r \leqslant 1$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ (*véase* la Figura 14.27). El elemento de área en el plano $r\theta$ es $dA^* = dr\,d\theta$, por lo que la transformación a coordenadas polares ($dA = r\,dA^*$) no conserva el área. Entonces, la integral en polares de V es en realidad una integral en cartesianas en el plano $r\theta$, con el integrando modificado por la inclusión de un factor extra r que compensa el cambio de área. Se puede calcular mediante métodos de iteración estándar:

$$\begin{aligned} V = \iint_R (1 - r^2) r\,dA^* &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2)\,r\,dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\bigg|_0^1 d\theta = \frac{\pi}{2} \text{ unidades al cubo} \end{aligned}$$

Observación No es necesario dibujar la región R en el plano $r\theta$. Estamos acostumbrados a pensar en coordenadas polares como distancias y ángulos en el plano xy y podemos entender fácilmente observando el disco de la Figura 14.26 que la iteración de la integral en coordenadas polares corresponde a $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant r \leqslant 1$. Es decir, debemos ser capaces de escribir la iteración

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2)\,r\,dr$$

directamente a partir de la consideración del dominio de integración en el plano xy.

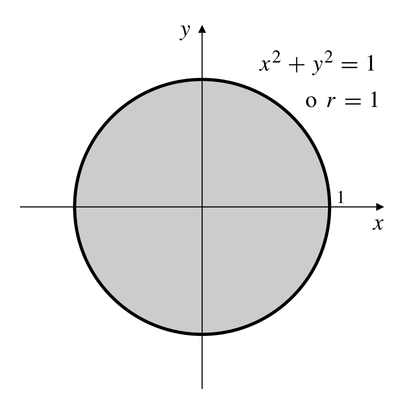


Figura 14.26 El dominio en el plano xy.

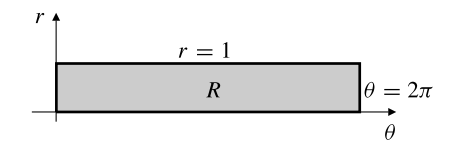


Figura 14.27 El dominio en el plano $r\theta$.

Ejemplo 1 Si R es la parte de la corona $0 < a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$ que está en el primer cuadrante y por debajo de la recta $y = x$, calcule

$$I = \iint_R \frac{y^2}{x^2}\, dA$$

Solución La Figura 14.28 muestra la región R. Se especifica en coordenadas polares como $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ y $a \leqslant r \leqslant b$. Como

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$$

tenemos

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4} \tan^2 \theta \, d\theta \int_a^b r\, dr \\
&= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \int_0^{\pi/4} (\sec^2 \theta - 1)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(\tan \theta - \theta)\Big|_0^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 - \pi}{8}(b^2 - a^2)
\end{aligned}$$

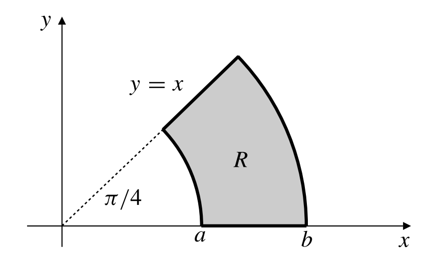


Figura 14.28

■

Ejemplo 2 **(Área de una región en polares)** Obtenga la fórmula del área de la región en polares R limitada por la curva $r = f(\theta)$ y por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ (*véase* la Figura 14.29).

Solución El área A de R es numéricamente igual al volumen de un cilindro de altura 1, por encima de la región R:

$$A = \iint_R dx\,dy = \iint_R r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{f(\theta)} r\,dr = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2\,d\theta$$

Obsérvese que en la integral interna de la iteración hay que integrar r en la recta especificada por θ desde 0 hasta $f(\theta)$.

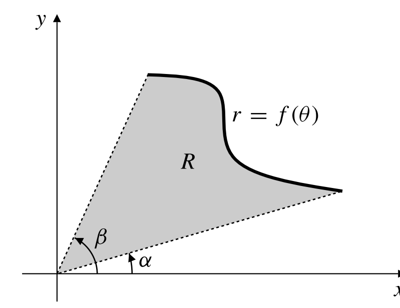


Figura 14.29 Un problema estándar de áreas en coordenadas polares.

■

No existe una regla firme que indique si se debe o no se debe convertir una integral doble de coordenadas cartesianas a polares. En el Ejemplo 1 anterior, la forma del dominio sugería fuertemente la conversión, con el apoyo del hecho de que el integrando y^2/x^2 se convertía en una función sólo de θ al transformar a coordenadas polares. Es aconsejable en general cambiar a coordenadas polares si este cambio simplifica la integración (es decir, si el *dominio* es «más simple» cuando se expresa en coordenadas polares), aun cuando la forma del integrando se haga más complicada.

Ejemplo 3 Calcule el volumen del sólido que está situado en el primer octante, dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y bajo el plano $z = y$.

Solución El sólido se muestra en la Figura 14.30. La base es un cuarto de disco, que se expresa en coordenadas polares mediante las inecuaciones $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ y $0 \leqslant r \leqslant a$. Por consiguiente, la altura se expresa como $z = y = r\,\text{sen}\,\theta$. El volumen del sólido es

$$V = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a (r\,\text{sen}\,\theta)r\,dr = \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,\theta\,d\theta \int_0^a r^2\,dr = \frac{1}{3}a^3 \text{ unidades al cubo}$$

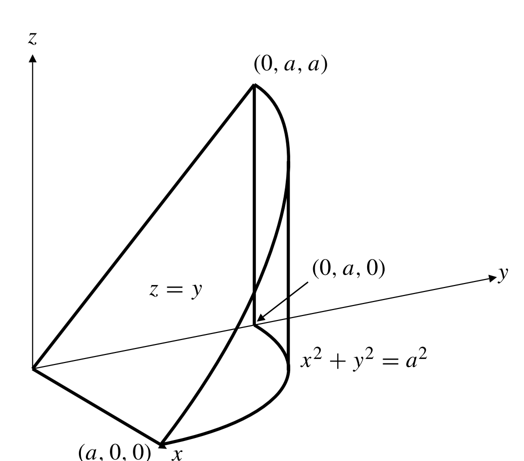


Figura 14.30 Este volumen se calcula fácilmente utilizando iteración en coordenadas polares.

■

El ejemplo que sigue establece el valor de una integral definida que tiene un papel muy importante en teoría de la probabilidad y en estadística. Es interesante notar que esta integral de una variable no se puede calcular utilizando técnicas de cálculo de una sola variable.

Ejemplo 4 **(Una integral muy importante)** Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Solución La integral impropia (llamémosla I) converge, y su valor no depende del símbolo que utilicemos como variable integración. Por tanto, podemos expresar el cuadrado de la integral como un producto de dos integrales idénticas, pero con sus variables de integración denominadas de forma diferente. A continuación interpretamos este producto como una integral doble impropia y la iteramos en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr \\ &= 2\pi \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_0^R = \pi \end{aligned}$$

Por tanto, $I = \sqrt{\pi}$.

Nótese que la integral en r de la iteración anterior es una integral impropia convergente; se calcula con la ayuda del cambio $u = r^2$.

En nuestro ejemplo final de iteración en coordenadas polares, intentaremos algo un poco más difícil.

Ejemplo 5 Calcule el volumen de la región sólida que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$, con $a > 0$.

Solución La esfera está centrada en el origen y su radio es $2a$. La ecuación del cilindro se puede convertir en

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

si completamos el cuadrado en los términos en y. Por tanto, es un cilindro circular vertical de radio a que tiene su eje en la recta vertical que pasa por el punto $(0, a, 0)$. El eje z está en el cilindro. Una cuarta parte del volumen requerido está en el primer octante. La Figura 14.31 muestra esta parte.

Si utilizamos coordenadas polares en el plano xy, entonces la ecuación de la esfera es $r^2 + z^2 = 4a^2$ y la ecuación del cilindro es $r^2 = 2ar\,\mathrm{sen}\,\theta$ o, de forma más simple, $r = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta$. La parte del primer octante del volumen está por encima de la región especificada por las inecuaciones $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ y $0 \leqslant r \leqslant 2a\,\mathrm{sen}\,\theta$. Por tanto, el volumen total es

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\,\mathrm{sen}\,\theta} \sqrt{4a^2 - r^2}\,r\,dr \qquad \text{Cambio } u = 4a^2 - r^2 \\ &= 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{4a^2\cos^2\theta}^{4a^2} \sqrt{u}\,du \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} (8a^3 - 8a^3\cos^3\theta)\,d\theta \qquad \text{Cambio } v = \mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{16}{3}\pi a^3 - \frac{32}{3} a^3 \int_0^1 (1 - v^2)\, dv$$

$$= \frac{16}{3}\pi a^3 - \frac{64}{9} a^3 = \frac{16}{9}(3\pi - 4)a^3 \text{ unidades al cubo}$$

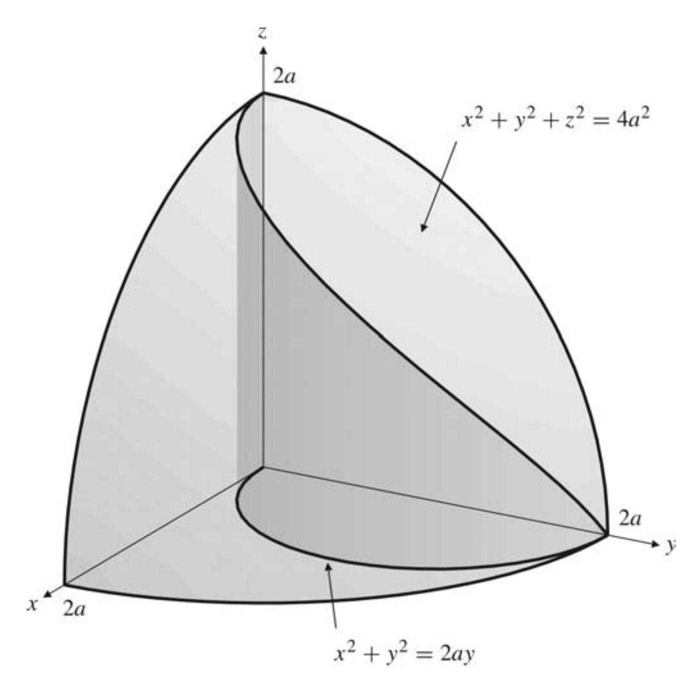


Figura 14.31 La parte del primer octante de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$.

Cambio de variables en integrales dobles

La transformación de una integral doble a coordenadas polares es sólo un caso especial de una fórmula de cambio de variable en integrales dobles. Supongamos que x e y se expresan en función de otras dos variables u y v mediante las ecuaciones

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v)$$

Esas ecuaciones definen una **transformación** de los puntos (u, v) en un plano cartesiano uv, en puntos (x, y) en el plano xy (*véase* la Figura 14.32). Diremos que la transformación del conjunto S en el plano uv en el conjunto D en el plano xy es *uno a uno* si se cumple que:

(i) Todo punto en S se transforma en un punto en D.
(ii) Todo punto en D es la imagen de un punto en S.
(iii) Puntos diferentes en su S se transforman en puntos diferentes en D.

Si la transformación es uno a uno, en las ecuaciones que la definen se pueden despejar u y v en función de x e y, con lo que se obtiene la **transformación inversa**,

$$u = u(x, y)$$
$$v = v(x, y)$$

que es uno a uno de D en S.

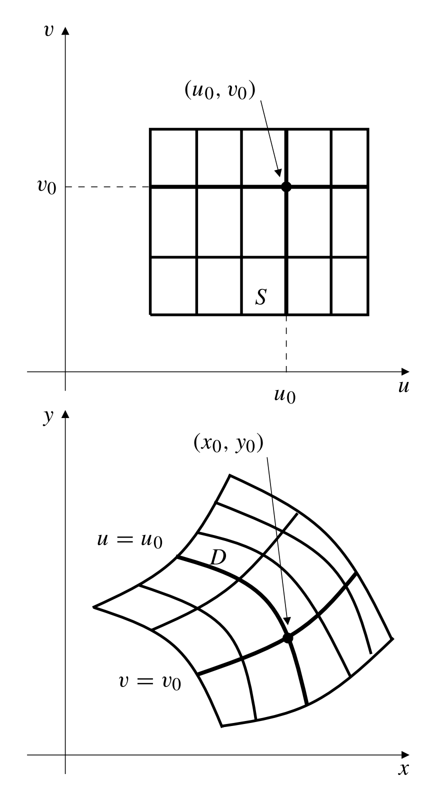


Figura 14.32 Bajo la transformación $\begin{cases} x = x(u,\ v) \\ y = y(u,\ v) \end{cases}$ las rectas $u = u_0$ y $v = v_0$ en el plano uv se transforman en las curvas $\begin{cases} x = x(u_0,\ v) \\ y = y(u_0,\ v) \end{cases}$ y $\begin{cases} x = x(u,\ v_0) \\ y = y(u,\ v_0) \end{cases}$ en el plano xy, que denominaremos como $u = u_0$ y $v = v_0$. El punto (u_0, v_0) se transforma en el punto (x_0, y_0).

Supongamos que las funciones $x(u, v)$ e $y(u, v)$ tienen derivadas parciales primeras continuas y que el determinante jacobiano

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} \neq 0 \qquad \text{en} \qquad (u,\ v)$$

Como se indicó en la Sección 12.8, el Teorema de la Función Implícita implica que la transformación es uno a uno cerca de (u, v) y que la transformación inversa tiene también derivadas parciales primeras continuas y un jacobiano distinto de cero que cumple

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}} \qquad \text{en } D$$

Ejemplo 6 El jacobiano de la transformación a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ es

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Cerca de cualquier punto excepto del origen (donde $r = 0$) la transformación es uno a uno (de hecho, es uno a uno en cualquier conjunto del plano $r\theta$ que no contenga más de un punto donde $r = 0$ y que esté en, por ejemplo, la banda $0 \leqslant \theta < 2\pi$).

Se puede utilizar una transformación uno a uno para transformar la integral doble

$$\iint_D f(x, y)\,dA$$

en una integral doble en el correspondiente conjunto S del plano uv. Mediante la transformación, el integrando $f(x, y)$ se convierte en $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Debemos descubrir la forma de expresar el elemento de área $dA = dx\,dy$ en función del elemento de área $du\,dv$ en el plano uv.

Dado un valor fijo de u (por ejemplo, $u = c$), las ecuaciones

$$x = x(u, v) \quad \text{e} \quad y = y(u, v)$$

definen una curva paramétrica (con v como parámetro) en el plano xy. Esta curva se denomina curva u correspondiente al valor $u = c$. De forma similar, para v fija la ecuación define una curva paramétrica (con parámetro u) denominada curva v. Consideremos el elemento de área diferencial limitado por las curvas u correspondientes a valores cercanos u y $u + du$, y las curvas v correspondientes a valores cercanos v y $v + dv$. Como estas curvas son suaves, para valores pequeños de du y dv, el elemento de área es aproximadamente un paralelogramo, y su área aproximada es

$$dA = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$$

siendo P, Q y R los puntos que se muestran en la Figura 14.33. El error en esta aproximación es despreciable comparado con dA cuando du y dv tienden a cero.

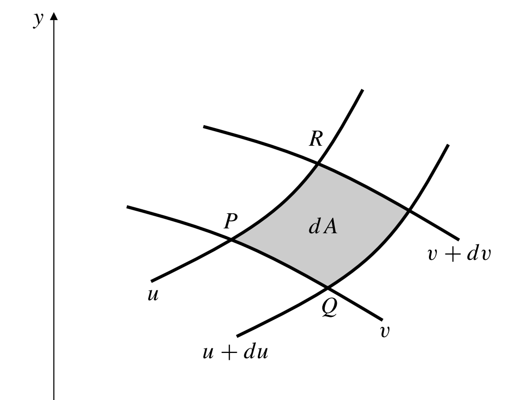


Figura 14.33 Imagen en el plano xy del elemento de área $du\,dv$ en el plano uv.

Tenemos que $\overrightarrow{PQ} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$, siendo

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv \quad \text{y} \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv$$

Sin embargo, $dv = 0$ en la curva v PQ, por lo que

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{\partial x}{\partial u}\,du\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,du\,\mathbf{j}$$

De forma similar,

$$\overrightarrow{PR} = \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\,\mathbf{j}$$

Entonces,

$$dA = \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\,du & \dfrac{\partial y}{\partial u}\,du & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dv & \dfrac{\partial y}{\partial v}\,dv & 0 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv$$

es decir, el valor absoluto del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ es el cociente entre los correspondientes elementos de área en el plano xy y en el plano uv:

$$dA = dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| du\,dv$$

El teorema que sigue resume el procedimiento de cambio de variables en una integral doble.

TEOREMA 4 **Fórmula de cambio de variables en integrales dobles**

Sea $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ una transformación uno a uno de un dominio S en el plano uv en un dominio D en el plano xy. Supongamos que las funciones x e y, y sus derivadas parciales primeras con respecto a u y v, son continuas en S. Si $f(x, y)$ es integrable en D, y si $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, entonces g es integrable en S y

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_S g(u, v)\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| du\,dv$$

Observación No es necesario que S o D sean cerrados o que la transformación sea uno a uno en la frontera de S. La transformación a coordenadas polares hace corresponder el rectángulo $0 < r < 1$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ de forma uno a uno con el disco perforado $0 < x^2 + y^2 < 1$ y, como en el primer ejemplo de esta sección, podemos transformar una integral en el disco cerrado $x^2 + y^2 \leqslant 1$ en otra en el rectángulo cerrado $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Ejemplo 7 Utilice el cambio de variables apropiado para calcular el área del disco elíptico E dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$$

Solución Mediante la transformación $x = au$, $y = bv$, el disco elíptico E es la imagen uno a uno del disco circular D dado por $u^2 + v^2 \leqslant 1$. Suponiendo que $a > 0$ y $b > 0$, tenemos

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| du\,dv = \left|\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}\right| du\,dv = ab\,du\,dv$$

Por tanto, el área de E se calcula como

$$\iint_E 1\,dx\,dy = \iint_D ab\,du\,dv = ab \times (\text{área de } D) = \pi ab \text{ unidades al cuadrado}$$

A menudo es tentador intentar utilizar la fórmula del cambio de variables para transformar el dominio de un integral doble en un rectángulo, de forma que la integración sea fácil. Como muestra el siguiente ejemplo, esto en general requiere definir la transformación inversa (u y v en función de x e y). Recuérdese que las transformaciones inversas tienen jacobianos inversos.

Ejemplo 8 Calcule el área de la región plana finita limitada por las cuatro parábolas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ y $x = 3y^2$.

Solución La región, que denominaremos D, se muestra en la Figura 14.34. Sea

$$u = \frac{y}{x^2} \quad \text{y} \quad v = \frac{x}{y^2}$$

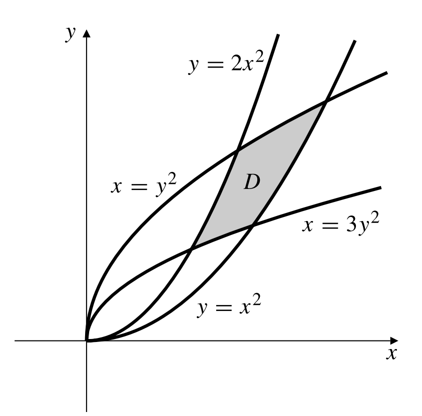


Figura 14.34

Entonces, la región D corresponde al rectángulo R en el plano uv dado por $1 \leqslant u \leqslant 2$ y $1 \leqslant v \leqslant 3$. Como

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = \begin{vmatrix} -2y/x^3 & 1/x^2 \\ 1/y^2 & -2x/y^3 \end{vmatrix} = \frac{3}{x^2y^2} = 3u^2v^2$$

se deduce que

$$\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| = \frac{1}{3u^2v^2}$$

y, por tanto, el área de D está dada por

$$\iint_D dx\,dy = \iint_R \frac{1}{3u^2v^2}\,du\,dv$$
$$= \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{u^2}\int_1^3 \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \text{ unidades al cuadrado}$$

El siguiente ejemplo muestra lo que puede ocurrir si una transformación del dominio de una integral doble no es uno a uno.

Ejemplo 9 Sea D el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ en el plano xy, y sea S el cuadrado $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ en el plano uv. Demuestre que la transformación

$$x = 4u - 4u^2, \qquad y = v$$

transforma S en D, y utilícela para transformar la integral $I = \iint_D dx\,dy$. Compare el valor de I con el valor de la integral transformada.

Solución Como $x = 4u - 4u^2 = 1 - (1 - 2u)^2$, el valor mínimo de x en el intervalo $0 \leqslant u \leqslant 1$ es 0 (en $u = 0$ y $u = 1$), y el valor máximo es 1 (en $u = \frac{1}{2}$). Por tanto, $x = 4u - 4u^2$ transforma el intervalo $0 \leqslant u \leqslant 1$ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$. Como $y = v$ transforma claramente $0 \leqslant v \leqslant 1$ en $0 \leqslant y \leqslant 1$, la transformación dada transforma S en D. Como

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| du\,dv = \left|\begin{vmatrix} 4 - 8u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right| du\,dv = |4 - 8u|\,du\,dv$$

transformar I lleva a la integral

$$J = \iint_S |4 - 8u|\,du\,dv = 4\int_0^1 dv \int_0^1 |1 - 2u|\,du = 8\int_0^{1/2} (1 - 2u)\,du = 2$$

Sin embargo, $I = \iint_D dx\,dy =$ área de $D = 1$. La razón de que $J \neq I$ es que la transformación no es uno a uno de S a D; realmente transforma S en D dos veces. El rectángulo R definido por $0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}$ y $0 \leqslant v \leqslant 1$ se transforma uno a uno en D mediante la transformación, por lo que la integral transformada apropiada es $\iint_R |4 - 8u|\,du\,dv$, que es igual a I.

Ejercicios 14.4

En los Ejercicios 1-6, calcule las integrales dobles dadas en el disco D dado por $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, con $a > 0$.

1. $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\, dA$

2. $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$

3. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dA$

4. $\displaystyle\iint_D |x|\, dA$

5. $\displaystyle\iint_D x^2\, dA$

6. $\displaystyle\iint_D x^2y^2\, dA$

En los Ejercicios 7-10, calcule las integrales dobles dadas en el cuarto de disco Q dado por $x \geqslant 0$, $y > 0$ y $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, con $a > 0$.

7. $\displaystyle\iint_Q y\, dA$

8. $\displaystyle\iint_Q (x + y)\, dA$

9. $\displaystyle\iint_Q e^{x^2+y^2}\, dA$

10. $\displaystyle\iint_Q \frac{2xy}{x^2 + y^2}\, dA$

11. Calcule $\displaystyle\iint_S (x + y)\, dA$, siendo S la región del primer cuadrante que está dentro del disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ y bajo la recta $y = \sqrt{3}x$.

12. Calcule $\displaystyle\iint_S x\, dA$, siendo S el segmento de disco $x^2 + y^2 \leqslant 2$, $x \geqslant 1$.

13. Calcule $\displaystyle\iint_T (x^2 + y^2)\, dA$, siendo T el triángulo cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (1, 1).

14. Calcule $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln(x^2 + y^2)\, dA$.

15. Calcule la distancia media del origen a los puntos del disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

16. Calcule el valor medio de $e^{-(x^2+y^2)}$ en la región anular $0 < a \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant b$.

17. ¿Para qué valores de k, y a qué valor, converge la integral $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dA}{(x^2 + y^2)^k}$?

18. ¿Para qué valores de k, y a qué valor, converge la integral $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dA}{(1 + x^2 + y^2)^k}$?

19. Calcule $\displaystyle\iint_D xy\, dA$, siendo D la región plana que cumple $x \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant x$ y $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

20. Calcule $\displaystyle\iint_C y\, dA$, siendo C la mitad superior del disco cardioide $r \leqslant 1 + \cos\theta$.

21. Calcule el volumen que está comprendido entre los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $3z = 4 - x^2 - y^2$.

22. Calcule el volumen de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y del cilindro $x^2 + y^2 = ax$.

23. Calcule el volumen de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ y del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

24. Calcule el volumen de la región que está por encima del plano xy, en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y por debajo del plano $z = x + y + 4$.

***25.** Calcule el volumen de la región que está dentro de los tres cilindros circulares $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ y $y^2 + z^2 = a^2$. *Sugerencia*: Haga un buen dibujo de la parte de la región que está en el primer octante y utilice simetría siempre que sea posible.

26. Calcule el volumen de la región que está dentro del cilindro circular $x^2 + y^2 = 2y$ y el cilindro parabólico $z^2 = y$.

***27.** Se escogen aleatoriamente muchos puntos en el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Calcule el valor medio aproximado de la distancia de esos puntos al lado más cercano del cuadrado más pequeño que contiene a dicho disco.

***28.** Calcule el valor medio de x en el segmento del disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$ que está a la derecha de $x = 1$. ¿Cuál es el centroide del segmento?

29. Calcule el volumen encerrado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

30. Calcule el volumen de la región del primer octante que está por debajo del paraboloide

$$z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Sugerencia: Utilice el cambio de variables $x = au$, $y = bv$.

***31.** Calcule $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\leqslant a} e^{x+y}\, dA$.

32. Calcule $\displaystyle\iint_P (x^2 + y^2)\, dA$, siendo P el paralelogramo limitado por las rectas $x + y = 1$, $x + y = 2$, $3x + 4y = 5$ y $3x + 4y = 6$.

33. Calcule el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$ e $y = 2x$.

34. Calcule $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$, siendo R la región del primer cuadrante limitada por $y = 0$, $y = x$, $xy = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$.

$*$**35.** Sea T el triángulo cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (0, 1). Calcule la integral $\iint_T e^{(y-x)/(y+x)}\, dA$:

(a) Mediante transformación en coordenadas polares.

(b) Utilizando la transformación $u = y - x$, $v = y + x$.

36. Utilice el método del Ejemplo 7 para calcular el área de la región que está dentro de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ y por encima de la recta $2x + 3y = 6$.

$*$**37.** **(La función error)** La función error $\text{Erf}\,(x)$ se define para $x \geqslant 0$ como

$$\text{Erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Demuestre que $(\text{Erf}\,(x))^2 = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 - e^{-x^2/\cos^2\theta})\, d\theta$.

A partir de aquí, deduzca que $\text{Erf}\,(x) \geqslant \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

$*$**38.** **(Las funciones gamma y beta)** La función gamma $\Gamma(x)$ y la función beta $B(x, y)$ se definen como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \qquad (x > 0)$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt, \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

La función gamma cumple

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \qquad \text{y}$$

$$\Gamma(n + 1) = n!, \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Deduzca las siguientes propiedades de estas funciones:

(a) $\Gamma(x) = 2 \displaystyle\int_0^\infty s^{2x-1} e^{-s^2}\, ds, \qquad (x > 0)$

(b) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$

(c) Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \,\text{sen}^{2y-1}\theta\, d\theta$$

(d) $B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$

14.5 Integrales triples

Ahora que ya sabemos cómo extender la integración definida a dominios bidimensionales, la extensión a dominios de tres (o más) dimensiones es directa. Dada una función acotada $f(x, y, z)$ definida en una caja rectangular B $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1,\ y_0 \leqslant y \leqslant y_1,\ z_0 \leqslant z \leqslant z_1)$, la integral triple de f en B,

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV \qquad \text{o} \qquad \iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

se puede definir como un límite adecuado de sumas de Riemann correspondientes a particiones de B en subcajas utilizando planos paralelos a cada uno de los planos coordenados. Omitiremos los detalles. Las integrales triples en dominios más generales se definen extendiendo la función para que sea cero fuera del dominio e integrando en una caja rectangular que contenga al dominio.

Todas las propiedades de las integrales dobles mencionadas en la Sección 14.1 tienen sus propiedades análogas para integrales triples. En particular, una función continua es integrable en un dominio cerrado y acotado. Si $f(x, y, z) = 1$ en el dominio D, entonces la integral triple da el volumen de D:

$$\text{Volumen de } D = \iiint_D dV$$

La integral triple de una función positiva $f(x, y, z)$ se puede interpretar como el «hipervolumen» (es decir, el volumen tetradimensional) de una región del espacio de cuatro dimensiones que tiene como «base» el conjunto tridimensional D y como tope la hipersuperficie $w = f(x, y, z)$. Ésta no es una interpretación particularmente útil; en las aplicaciones surgen otras mucho más útiles. Por ejemplo, si $\delta(x, y, z)$ representa la densidad (masa por unidad de volumen) en la posición

(x, y, z) de una sustancia que ocupa un dominio D en el espacio tridimensional, entonces la masa m del sólido es la «suma» de los elementos de masa $dm = \delta(x, y, z)\,dV$ que ocupan los elementos de volumen dV:

$$\text{masa} = \iiint_D \delta(x, y, z)\,dV$$

Algunas integrales triples se pueden calcular por simple inspección, utilizando simetría y volúmenes conocidos.

Ejemplo 1 Calcule

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2} (2 + x - \operatorname{sen} z)\,dV$$

Solución El dominio de integración es la bola de radio a centrada en el origen. La integral de 2 en esta bola es dos veces el volumen de dicha bola, es decir, $8\pi a^3/3$. Las integrales de x y $\operatorname{sen} z$ en la bola son ambas cero, ya que las dos funciones son impares en sus variables, y el dominio es simétrico respecto a cada plano coordenado (por ejemplo, para cada elemento de volumen dV en la mitad de la bola donde $x > 0$, existe un elemento correspondiente en la otra mitad donde x tiene el mismo tamaño pero signo opuesto, de forma que las contribuciones de esos dos elementos se cancelan entre sí). Por tanto,

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2} (2 + x - \operatorname{sen} z)\,dV = \frac{8}{3}\pi a^3 + 0 + 0 = \frac{8}{3}\pi a^3$$

La mayoría de las integrales triples se evalúan mediante un procedimiento de iteración similar al utilizado para integrales dobles. Vamos trasladando en el dominio D secciones de un plano paralelo a uno de los planos coordenados, realizando la integral doble de la función con respecto a las dos variables de esa sección, y después integrando el resultado con respecto a la variable restante. Algunos ejemplos ayudarán a aclarar el procedimiento.

Ejemplo 2 Sea B la caja rectangular $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$. Calcule

$$I = \iiint_B (xy^2 + z^3)\,dV$$

Solución Como se indica en la Figura 14.35(a), tomaremos secciones con planos perpendiculares al eje z, de forma que la integral en z será la más externa en la iteración. Las secciones son rectángulos, por lo que las integrales dobles en ellos se pueden iterar también de forma inmediata. Escogeremos la integral externa en y, y la integral interna en x, como sugiere la recta que se muestra en la sección.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^c dz \int_0^b dy \int_0^a (xy^2 + z^3)\,dx \\
&= \int_0^c dz \int_0^b dy \left(\frac{x^2y^2}{2} + xz^3\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} \\
&= \int_0^c dz \int_0^b \left(\frac{a^2y^2}{2} + az^3\right) dy \\
&= \int_0^c dz \left(\frac{a^2y^3}{6} + ayz^3\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b} \\
&= \int_0^c \left(\frac{a^2b^3}{6} + abz^3\right) dz \\
&= \left(\frac{a^2b^3z}{6} + \frac{abz^4}{4}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=c} = \frac{a^2b^3c}{6} + \frac{abc^4}{4}
\end{aligned}$$

Figura 14.35
(a) La iteración del Ejemplo 2.
(b) La iteración del Ejemplo 3.

Ejemplo 3 Si T es el tetraedro cuyos vértices son (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), calcule

$$I = \iiint_T y\, dV$$

Solución La Figura 14.35(b) muestra el tetraedro. La sección plana en el plano normal al eje x en la posición x es el triángulo $T(x)$, que se muestra en dicha figura; en la sección, x es constante e y y z son variables. La doble integral de y en $T(x)$ es función de x. La calcularemos integrando primero en la dirección de z y después en la dirección de y, como sugiere la recta vertical que se muestra en la sección:

$$\begin{aligned}\iint_{T(x)} y\, dA &= \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} y\, dz \\ &= \int_0^{1-x} y(1-x-y)\, dy \\ &= \left((1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\bigg|_0^{1-x} = \frac{1}{6}(1-x)^3\end{aligned}$$

El valor de la integral triple I es la integral de esta expresión con respecto a la variable restante x, para sumar las contribuciones de todas las secciones entre $x = 0$ y $x = 1$:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{6}(1-x)^3\, dx = -\frac{1}{24}(1-x)^4\bigg|_0^1 = \frac{1}{24}$$

En la solución anterior hemos realizado la integración en dos pasos para mostrar claramente el procedimiento. En la práctica, las integrales triples se iteran en un paso, sin hacer mención explícita de la integral doble en la sección. Por tanto, utilizando la iteración sugerida por la Figura 14.35(b), podríamos escribir inmediatamente

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} y\, dz$$

El cálculo procede como antes, comenzando por la integral de la derecha (es decir, la interna), seguida por la integral del medio y después por la integral de la izquierda (exterior). La integral triple representa la «suma» de elementos $y\,dV$ en la región tridimensional T. La iteración anterior corresponde a «sumar» (es decir, integrar) primero a lo largo de una recta vertical (la integral en z), sumar después esas sumas unidimensionales en la dirección de y para obtener la suma doble de todos los elementos en el plano de la sección, y sumar finalmente esas sumas dobles en la

dirección de x para incorporar las contribuciones de todas las secciones. La iteración se puede realizar en otras direcciones; existen seis posibles iteraciones correspondientes a los órdenes diferentes de realización de las integrales en x, y y z. Las otras cinco son

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^{1-x-z} y\,dy$$

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int_0^{1-x-y} y\,dz$$

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int_0^{1-y-z} y\,dx$$

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-x-z} y\,dy$$

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} y\,dx$$

Es conveniente verificarlas dibujando diagramas análogos a la Figura 14.35(b). Por supuesto, las seis iteraciones producen el mismo resultado.

Algunas veces es difícil visualizar la región del espacio tridimensional donde se realiza una integral triple dada. En esas situaciones es útil intentar determinar la *proyección* de esa región en uno de los planos coordenados. Por ejemplo, si una región R está limitada por dos superficies con ecuaciones dadas, al combinar estas ecuaciones para eliminar una variable se llegará a la ecuación de un cilindro (no necesariamente circular) con ejes paralelos al eje de la variable eliminada. Este cilindro determinará entonces la proyección de R en el plano coordenado perpendicular a ese eje. El ejemplo que sigue ilustra el uso de esta técnica para calcular el volumen limitado por dos superficies. El volumen se expresa como una integral triple con integrando unidad.

Ejemplo 4 Calcule el volumen de la región R que está por debajo del plano $z = 3 - 2y$ y por encima del paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Solución La región R se muestra en la Figura 14.36. Las dos superficies que limitan a R se cortan en el cilindro vertical $x^2 + y^2 = 3 - 2y$, o $x^2 + (y + 1)^2 = 4$. Si D es el disco circular en el que el cilindro corta al plano xy, entonces la integración parcial produce

$$V = \iiint_R dV = \iint_D dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz$$

La Figura 14.36 muestra una sección de R correspondiente a una iteración posterior de la integral doble en D:

$$V = \int_{-3}^{1} dy \int_{-\sqrt{3-2y-y^2}}^{\sqrt{3-2y-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz$$

pero existe una forma más fácil de iterar la integral doble. Como D es un disco circular de radio 2 y centro $(0, -1)$, podemos utilizar coordenadas polares con centro en ese punto (es decir, $x = r\cos\theta$, $y = -1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta$). Así,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (3 - 2y - x^2 - y^2)\,dx\,dy \\ &= \iint_D (4 - x^2 - (y + 1)^2)\,dx\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2)r\,dr = 2\pi\left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 8\pi \text{ unidades al cubo} \end{aligned}$$

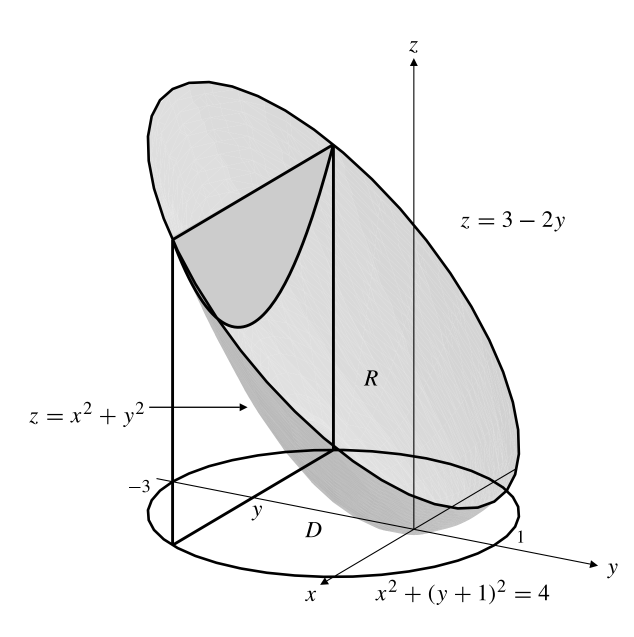


Figura 14.36 Volumen sobre un paraboloide y por debajo de un plano inclinado.

Como en el caso de integrales dobles, algunas veces es necesario reiterar una integral iterada dada, de forma que las iteraciones se realicen en un orden diferente. Esta tarea se realiza más fácilmente si podemos expresar la iteración dada en un dibujo en la región de integración. La capacidad de deducir la forma de la región a partir de los límites en la integral iterada es algo que se puede adquirir con un poco de práctica. Se debe determinar primero la proyección de la región en un plano coordenado, concretamente, el plano de las dos variables de las integrales externas de la iteración dada.

Es también posible reiterar una integral iterada en un orden diferente manejando algebraicamente los límites de integración. Ilustraremos ambos enfoques (gráfico y algebraico) en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5 Exprese la integral iterada

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 dz \int_0^z f(x, y, z)\, dx$$

como una integral triple y dibuje la región donde se realiza. Reitere la integral de forma que las interacciones se realicen en el orden: primero y, después z, después x (es decir, el orden opuesto a la iteración dada).

Solución Expresaremos I como una integral triple no iterada:

$$I = \iiint_R f(x, y, z)\, dV$$

La integral externa en la iteración dada muestra que la región R está entre los planos $y = 0$ e $y = 1$. Para cada valor de y, z debe estar entre y y 1. Por tanto, R está por debajo del plano $z = 1$ y por encima del plano $z = y$, y la proyección de R en el plano yz es un triángulo cuyos vértices son (0, 0, 0), (0, 0, 1) y (0, 1, 1). En cualquier punto $(0, y, z)$ del triángulo, una recta paralela al eje x corta a R entre $x = 0$ y $x = z$. Por tanto, el sólido está limitado por los cinco planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $y = z$ y $z = x$, como se puede ver en la Figura 14.37(a), donde se muestra una sección y la línea correspondiente a la iteración dada.

La iteración requerida corresponde a la sección y a la línea que se muestran en la Figura 14.37(b). Por tanto, es

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_0^z f(x, y, z)\, dy$$

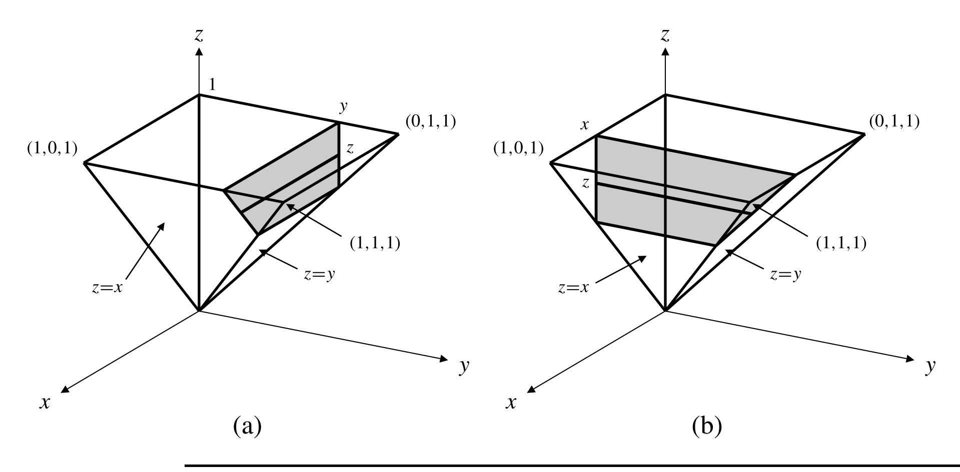


Figura 14.37
(a) La región sólida de la integral triple del Ejemplo 5 con una sección correspondiente a la iteración dada.
(b) El mismo sólido con una sección conforme a la iteración deseada.

Ejemplo 6 Utilice álgebra para expresar una iteración de la integral

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x, y, z)\, dz$$

con el orden de iteraciones invertido.

Solución A partir de la iteración dada podemos expresar tres conjuntos de inecuaciones satisfechas por la variable externa x, la variable intermedia y y la variable interna z. Las escribiremos en orden como sigue:

$$\begin{array}{ll} 0 \leqslant x \leqslant 1 & \text{inecuaciones para } x \\ x \leqslant y \leqslant 1 & \text{inecuaciones para } y \\ x \leqslant z \leqslant y & \text{inecuaciones para } z \end{array}$$

Nótese que los límites de cada variable pueden ser constantes o pueden depender solamente de variables cuyas inecuaciones estén por encima de la línea de esa variable (en este caso, los límites de x deben ser constantes, los de y pueden depender de x, y los de z pueden depender de x y de y). Esto es un requisito de las integrales iteradas. Las integrales externas no pueden depender de las variables de integración de las integrales internas.

Deseamos construir un conjunto equivalente de inecuaciones donde z esté en la línea superior, después estén las de y, y finalmente las de x en la línea inferior. Los límites de z deben ser constantes. A partir de las inecuaciones anteriores determinamos que $0 \leqslant x \leqslant z$ y $z \leqslant y \leqslant 1$. Por tanto, z debe cumplir $0 \leqslant z \leqslant 1$. Las inecuaciones de y pueden depender de z. Como $z \leqslant y$ e $y \leqslant 1$, tenemos que $z \leqslant y \leqslant 1$. Finalmente, los límites de x pueden depender de y y de z. Tenemos que $0 \leqslant x$, $x \leqslant y$ y $x \leqslant z$. Como ya hemos determinado que $z \leqslant y$, debemos tener que $0 \leqslant x \leqslant z$. Por tanto, las nuevas inecuaciones son

$$\begin{array}{ll} 0 \leqslant z \leqslant 1 & \text{inecuaciones para } z \\ z \leqslant y \leqslant 1 & \text{inecuaciones para } y \\ 0 \leqslant x \leqslant z & \text{inecuaciones para } x \end{array}$$

y la iteración pedida es

$$I = \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^z f(x, y, z)\, dx$$

Ejercicios 14.5

En los Ejercicios 1-12, calcule las integrales triples en las regiones indicadas. Esté atento a las simplificaciones y a los órdenes de integración favorables.

1. $\iiint_R (1 + 2x - 3y)\, dV$, en la caja $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-c \leqslant z \leqslant c$.

2. $\iiint_B xyz\,dV$, en la caja B dada por $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-2 \leqslant y \leqslant 0$, $1 \leqslant z \leqslant 4$.

3. $\iiint_D (3 + 2xy)\,dV$, sobre el domo hemisférico sólido D dado por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$ y $z \geqslant 0$.

4. $\iiint_R x\,dV$, en el tetraedro delimitado por los planos coordenados y el plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

5. $\iiint_R (x^2 + y^2)\,dV$, en el cubo $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$.

6. $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$, en el cubo del Ejercicio 5.

7. $\iiint_R (xy + z^2)\,dV$, en el conjunto $0 \leqslant z \leqslant 1 - |x| - |y|$.

8. $\iiint_R yz^2 e^{-xyz}\,dV$, en el cubo $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$.

9. $\iiint_R \operatorname{sen}(\pi y^3)\,dV$, en la pirámide cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(0, 1, 1)$.

10. $\iiint_R y\,dV$, en la parte del cubo $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$ que está por encima del plano $y + z = 1$ y por debajo del plano $x + y + z = 2$.

11. $\iiint_R \dfrac{1}{(x + y + z)^3}\,dV$, en la región limitada por los seis planos $z = 1$, $z = 2$, $y = 0$, $y = z$, $x = 0$ y $x = y + z$.

12. $\iiint_R \cos x \cos y \cos z\,dV$, en el tetraedro definido por $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ y $x + y + z \leqslant \pi$.

13. Calcule $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2 - 2y^2 - 3z^2}\,dV$. *Sugerencia*: Utilice el resultado del Ejemplo 4 de la Sección 14.4.

14. Calcule el volumen de la región que está dentro del cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$, por encima del plano xy y por debajo del plano $z = 2 + x$.

15. Calcule $\iiint_T x\,dV$, siendo T el tetraedro limitado por los planos $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ y $x + y + z = 2$.

16. Dibuje la región R en el primer octante del espacio tridimensional que tiene un volumen finito y está limitada por las superficies $x = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ y $z = y^2$. Escriba seis iteraciones diferentes de la integral triple de $f(x, y, z)$ en R.

En los Ejercicios 17-20, exprese las integrales iteradas dadas como integrales triples y dibuje la región donde se calculan. Vuelva a iterar las integrales, de forma que la integral más externa sea con respecto a x y la más interna con respecto a z.

***17.** $\displaystyle\int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^1 f(x, y, z)\,dx$

***18.** $\displaystyle\int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^y f(x, y, z)\,dx$

***19.** $\displaystyle\int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^{x-z} f(x, y, z)\,dy$

***20.** $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \int_{y^2+z^2}^1 f(x, y, z)\,dx$

21. Repita el Ejercicio 17 utilizando el método del Ejemplo 6.

22. Repita el Ejercicio 18 utilizando el método del Ejemplo 6.

23. Repita el Ejercicio 19 utilizando el método del Ejemplo 6.

24. Repita el Ejercicio 20 utilizando el método del Ejemplo 6.

25. Repita el Ejemplo 5 utilizando el método del Ejemplo 6.

26. Repita el Ejemplo 6 utilizando el método del Ejemplo 5.

En los Ejercicios 27 y 28, calcule las integrales iteradas dadas volviendo a iterarlas en un orden diferente (necesitará realizar un buen dibujo de la región).

***27.** $\displaystyle\int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^x e^{x^3}\,dy$

***28.** $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_y^1 \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z(2 - z)}\,dz$

29. Defina el valor medio de una función integrable $f(x, y, z)$ en una región R del espacio tridimensional. Calcule el valor medio de $x^2 + y^2 + z^2$ en el cubo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

***30.** Enuncie un Teorema del Valor Medio para integrales triples análogo al Teorema 3 de la Sección 14.3. Utilícelo para demostrar que si $f(x, y, z)$ es continua cerca del punto (a, b, c) y si $B_\epsilon(a, b, c)$ es la bola de radio ϵ centrada en (a, b, c), entonces

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \iiint_{B_\epsilon(a,b,c)} f(x, y, z)\,dV = f(a, b, c)$$

14.6 Cambio de variables en integrales triples

La fórmula del cambio de variables para integrales dobles se puede extender a integrales triples (y de orden superior). Consideremos la transformación

$$x = x(u, v, w)$$
$$y = y(u, v, w)$$
$$z = z(u, v, w)$$

donde x, y y z tienen derivadas parciales primeras continuas con respecto a u, v y w. Cerca de cualquier punto donde el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ sea distinto de cero, la transformación escala los elementos de volumen de acuerdo con la fórmula

$$dV = dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw$$

Por tanto, si la transformación es uno a uno de un dominio S en el espacio uvw en un dominio D en el espacio xyz, y si

$$g(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

entonces

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S g(u, v, w)\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw$$

La demostración es similar a la del caso bidimensional, dada en la Sección 14.4. *Véase* el Ejercicio 35 posterior.

Ejemplo 1 Mediante el cambio de variables $x = au$, $y = bv$, $z = cw$, con $a, b, c > 0$, el elipsoide sólido E dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

se transforma en la bola B dada por $u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1$. El jacobiano de esta transformación es

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

por lo que el volumen del elipsoide se expresa como

$$\begin{aligned} \text{Volumen de } E &= \iiint_E dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_B abc\,du\,dv\,dw = abc \times (\text{Volumen de } B) \\ &= \frac{4}{3}\pi abc \text{ unidades al cubo} \end{aligned}$$

■

Coordenadas cilíndricas

Entre las alternativas más útiles a las coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional están dos sistemas de coordenadas que generalizan las coordenadas polares en el plano. El más simple

de ellos es el sistema de **coordenadas cilíndricas**. En este sistema se utilizan coordenadas polares ordinarias en el plano xy, y se retiene la coordenada cartesiana z para medir distancias verticales. Por tanto, un punto en el espacio tridimensional tendrá coordenadas cilíndricas $[r, \theta, z]$, relacionadas con las coordenadas cartesianas (x, y, z) mediante la transformación

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z$$

La Figura 14.38 muestra un punto P localizado mediante sus coordenadas cilíndricas $[r, \theta, z]$ y también mediante sus coordenadas cartesianas (x, y, z). Nótese que la distancia a P desde el origen es

$$d = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ejemplo 2 El punto con coordenadas cartesianas $(1, 1, 1)$ tiene coordenadas cilíndricas $[\sqrt{2}, \pi/4, 1]$. El punto con coordenadas cartesianas $(0, 2, -3)$ tiene coordenadas cilíndricas $[2, \pi/2, -3]$. El punto con coordenadas cilíndricas $[4, -\pi/3, 5]$ tiene coordenadas cartesianas $(2, -2\sqrt{3}, 5)$.

Las superficies coordenadas en coordenadas cilíndricas son las superficies r (cilindros circulares verticales centrados en el eje z), las superficies θ (semiplanos verticales con límite en el eje z) y las superficies z (planos horizontales) (*véase* la Figura 14.39). Las coordenadas cilíndricas son adecuadas para representar dominios limitados por este tipo de superficies y, en general, en problemas con simetría axial (respecto al eje z).

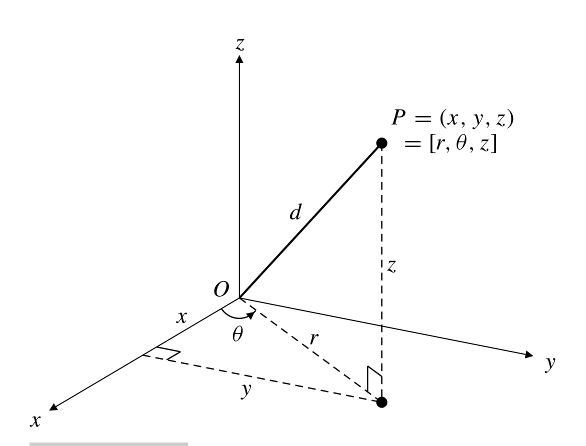


Figura 14.38 Coordenadas cilíndricas de un punto.

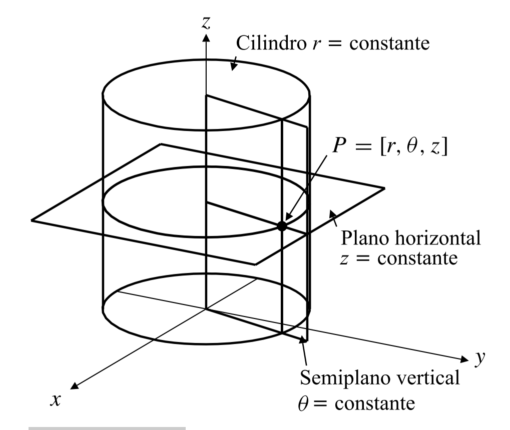


Figura 14.39 Superficies coordenadas en coordenadas cilíndricas.

El **elemento de volumen en coordenadas cilíndricas** es

$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

como se puede apreciar fácilmente examinando la «caja» infinitesimal limitada por las superficies coordenadas correspondientes a los valores r, $r + dr$, θ, $\theta + d\theta$, z y $z + dz$ (*véase* la Figura 14.40) o calculando el jacobiano

$$\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(r,\ \theta,\ z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

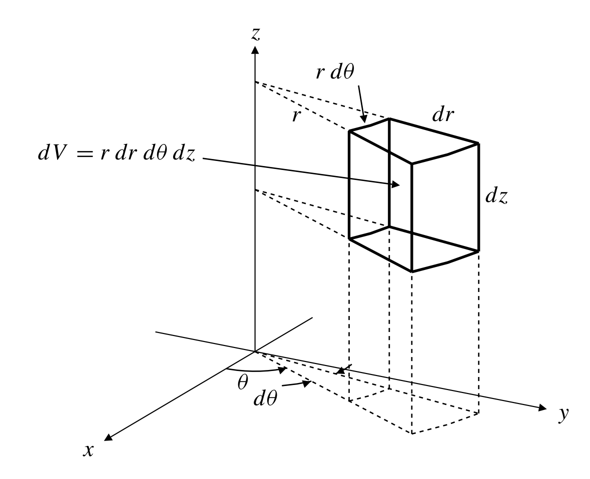


Figura 14.40 Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas.

Ejemplo 3 Calcule $\iiint_D (x^2 + y^2)\,dV$ en la región del primer octante limitada por los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$, y por los planos $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$ y $x = y$.

Solución En términos de coordenadas cilíndricas la región está acotada por $r = 1$, $r = 2$, $\theta = \pi/4$, $\theta = \pi/2$, $z = 0$ y $z = 1$ (*véase* la Figura 14.41). Es una caja coordenada rectangular en el espacio $r\theta z$. Como el integrando es $x^2 + y^2 = r^2$, la integral es

$$\iiint_D (x^2 + y^2)\,dV = \int_0^1 dz \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r^2 r\,dr$$
$$= (1 - 0)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) = \frac{15}{16}\,\pi$$

Esta integral habría sido mucho más difícil de calcular en coordenadas cartesianas. ■

Ejemplo 4 Utilice una integral triple para calcular el volumen de la región sólida que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y por encima del paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Solución La cuarta parte del volumen requerido está en el primer octante (*véase* la región R en la Figura 14.42). Las dos superficies se cortan en la superficie del cilindro vertical

$$6 - x^2 - y^2 = z^2 = (x^2 + y^2)^2$$

o, en términos de coordenadas cilíndricas, $6 - r^2 = r^4$, es decir,

$$r^4 + r^2 - 6 = 0$$
$$(r^2 + 3)(r^2 - 2) = 0$$

La única solución relevante a esta ecuación es $r = \sqrt{2}$. Por tanto, el volumen pedido está por encima del disco de radio $\sqrt{2}$, centrado en el origen, en el plano xy. El volumen total V de la región es

$$V = \iiint_R dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} dz$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (r\sqrt{6 - r^2} - r^3)\,dr$$
$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(6 - r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{4} \right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}}$$
$$= 2\pi \left[\frac{6\sqrt{6}}{3} - \frac{8}{3} - 1 \right] = \frac{2\pi}{3}(6\sqrt{6} - 11) \text{ unidades al cubo}$$

■

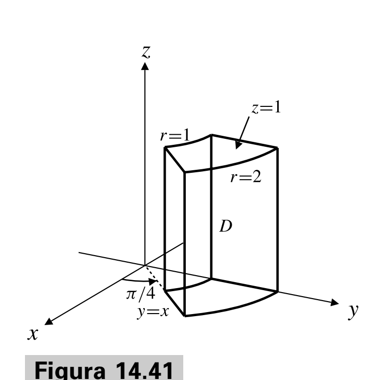


Figura 14.41

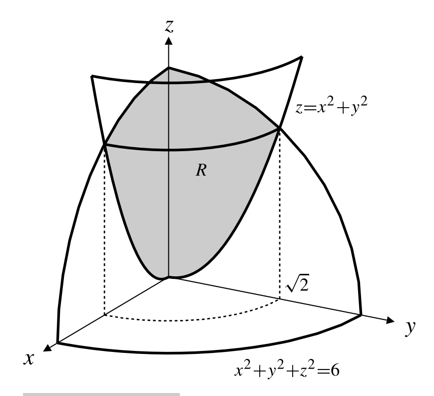


Figura 14.42

Coordenadas esféricas

En el sistema de **coordenadas esféricas** un punto P en el espacio tridimensional se representa por un triplete ordenado $[\rho, \phi, \theta]$, siendo ρ (letra griega «rho») la distancia desde P al origen, O, ϕ (letra griega «phi») es el ángulo que forma la recta radial OP con la dirección positiva del eje z, y θ es el ángulo que forman el plano que contiene a P y al eje z con el plano xz (*véase* la Figura 14.43). Por convenio, se restringen las coordenadas esféricas de forma que $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$ (o $-\pi < \theta \leqslant \pi$). Todo punto que no esté en el eje z tendrá una única representación en coordenadas esféricas y, por tanto, la transformación de coordenadas cartesianas (x, y, z) a coordenadas esféricas $[\rho, \phi, \theta]$ será uno a uno fuera del eje z. Utilizando los triángulos rectángulos que se muestran en la figura, podemos ver que esta transformación está dada por:

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$$

y que la coordenada r en coordenadas cilíndricas está relacionada con ρ y ϕ por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Por tanto, también tenemos

$$\tan \phi = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Si $\phi = 0$ o $\phi = \pi$, entonces $r = 0$, por lo que la coordenada θ es irrelevante en los puntos del eje z.

La Figura 14.44 muestra algunas superficies coordenadas en coordenadas esféricas. Las superficies ρ (ρ = constante) son esferas centradas en el origen; las superficies ϕ (ϕ = constante) son conos circulares cuyo eje es el eje z; las superficies θ (θ = constante) son semiplanos verticales con un extremo en el eje z. Si tomamos un sistema de coordenadas con origen en el centro de la tierra, el eje z que pase por el polo norte y el eje x que pase por la intersección del meridiano de Greenwich con el ecuador, entonces las intersecciones de la superficie de la tierra con las superficies ϕ son los *paralelos de latitud*, y las intersecciones con las superficies θ son los

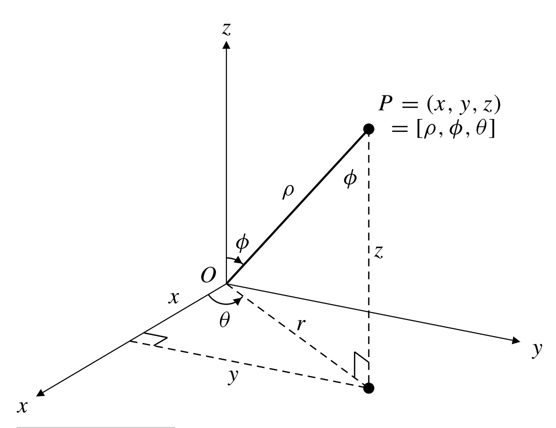


Figura 14.43 Coordenadas esféricas de un punto.

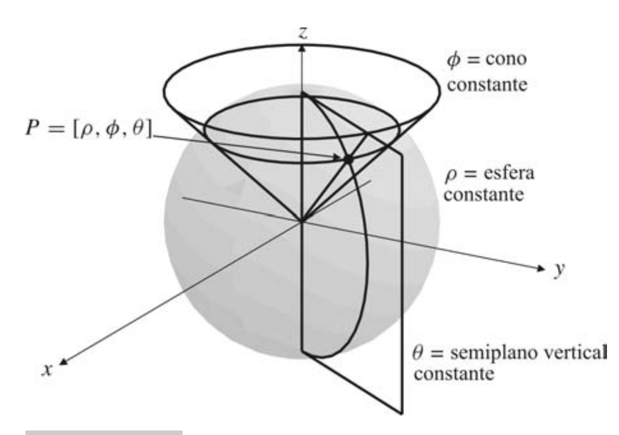


Figura 14.44 Superficies coordenadas en coordenadas esféricas.

meridianos de longitud. Como la latitud se mide desde 90º en el polo norte a −90º en el polo sur, y ϕ se mide desde cero en el polo norte hasta π (= 180º) en el polo sur, la coordenada ϕ se denomina frecuentemente coordenada de **colatitud**; θ es la coordenada de **longitud**. Obsérvese que θ tienen la misma significación en coordenadas esféricas que en coordenadas cilíndricas.

Ejemplo 5 Calcule:

(a) Las coordenadas cartesianas del punto P cuyas coordenadas esféricas son $[2, \pi/3, \pi/2]$.

(b) Las coordenadas esféricas del punto Q cuyas coordenadas cartesianas son $(1, 1, \sqrt{2})$.

Solución

(a) Si $\rho = 2$, $\phi = \pi/3$ y $\theta = \pi/2$, entonces

$$x = 2\,\mathrm{sen}\,(\pi/3)\cos(\pi/2) = 0$$
$$y = 2\,\mathrm{sen}\,(\pi/3)\,\mathrm{sen}\,(\pi/2) = \sqrt{3}$$
$$z = 2\cos(\pi/3) = 1$$

Las coordenadas cartesianas de P son $(0, \sqrt{3}, 1)$.

(b) Dado que

$$\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta = x = 1$$
$$\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta = y = 1$$
$$\rho\cos\phi = z = \sqrt{2}$$

calculamos que $\rho^2 = 1 + 1 + 2 = 4$, por lo que $\rho = 2$. Además, $r^2 = 1 + 1 = 2$, por lo que $r = \sqrt{2}$. Entonces, $\tan\phi = r/z = 1$, por lo que $\phi = \pi/4$. Además, $\tan\theta = y/x = 1$, por lo que $\theta = \pi/4$ o $5\pi/4$. Como $x > 0$, debemos tener $\theta = \pi/4$. Las coordenadas esféricas de Q son $[2, \pi/4, \pi/4]$.

■

Observación Podemos preguntarnos por qué las coordenadas esféricas se expresan en el orden ρ, ϕ, θ en vez de ρ, θ, ϕ. La razón, que veremos más clara en el Capítulo 16, es que la triada de vectores unitarios en cualquier punto P que apuntan en las direcciones de ρ, ϕ y θ crecientes forman una *base orientada a la derecha* en vez de orientada a la izquierda.

El **elemento de volumen en coordenadas esféricas** es

$$dV = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Para ver que esto es así, observemos que las dimensiones de la caja coordenada infinitesimal limitada por las superficies coordenadas correspondientes a los valores ρ, $\rho + d\rho$, ϕ, $\phi + d\phi$, θ y

$\theta + d\theta$ son $d\rho$, $\rho\, d\phi$ y $\rho \operatorname{sen} \phi\, d\theta$ (*véase* la Figura 14.45). También se puede calcular el jacobiano de la transformación:

$$\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(\rho,\ \phi,\ \theta)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\operatorname{sen}\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$+ \rho\operatorname{sen}\phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi(\rho^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi) + \rho\operatorname{sen}\phi(\rho\operatorname{sen}^2\phi)$$

$$= \rho^2\operatorname{sen}\phi$$

Las coordenadas esféricas son adecuadas en problemas con simetría esférica y, en particular, en regiones limitadas por esferas centradas en el origen, conos circulares cuyos ejes sean el eje z, y planos verticales que contengan al eje z.

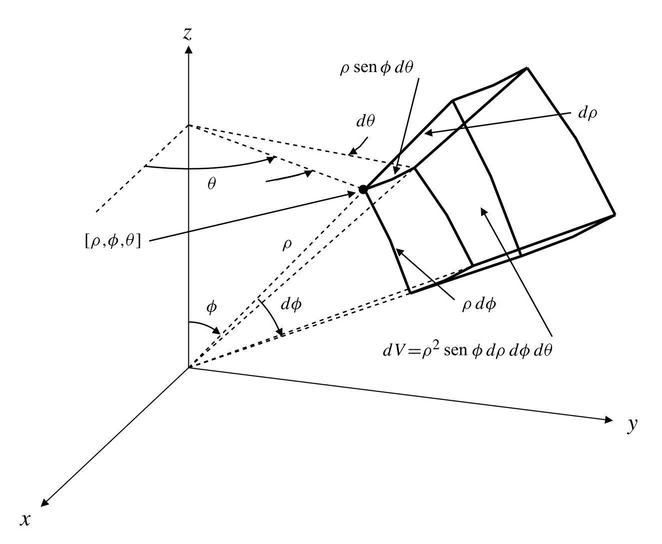


Figura 14.45 Elemento de volumen en coordenadas esféricas.

Ejemplo 6 Una semibola sólida H de radio a tiene una densidad que depende de la distancia ρ al centro del disco de su base. La densidad se expresa como $k(2a - \rho)$, siendo k una constante. Calcule la masa de la semibola.

Solución Eligiendo un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la base, y de forma que la semibola esté por encima del plano xy, podemos calcular la masa m pedida como sigue:

$$m = \iiint_H k(2a - \rho)\, dV = \iiint_H k(2a - \rho)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \int_0^a (2a - \rho)\rho^2\, d\rho$$

$$= 2k\pi \times 1 \times \left(\frac{2a}{3}\rho^3 - \frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^a = \frac{5}{6}\pi k a^4 \text{ unidades}$$

■

Observación En el ejemplo anterior, tanto el integrando como la región de integración tienen simetría esférica, por lo que la elección de coordenadas esféricas para realizar la integración era lo más apropiado. La masa se podría haber calculado también en coordenadas cilíndricas. La iteración en este caso sería

$$m = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\,dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} k(2a - \sqrt{r^2+z^2})\,dz$$

y es difícil de calcular. En coordenadas cartesianas es aún más difícil:

$$m = 4\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} k(2a - \sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dz$$

La elección del sistema de coordenadas puede afectar grandemente a la dificultad de cálculo de una integral múltiple.

En muchos problemas aparecerán elementos con simetría axial y esférica. En tales casos puede no estar claro si es mejor utilizar coordenadas esféricas o cilíndricas. En estos casos dudosos, el integrando es en general la mejor guía. Se utilizarán coordenadas cilíndricas o esféricas si el integrando depende, respectivamente, de $x^2 + y^2$ o $x^2 + y^2 + z^2$.

Ejemplo 7 El momento de inercia respecto al eje z de un sólido con densidad δ que ocupa la región R está dado por la integral (*véase* la Sección 14.7)

$$I = \iiint_R (x^2+y^2)\delta\,dV$$

Calcule el momento de inercia de un sólido de densidad unidad que ocupa la región en el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución *Véase* la Figura 14.46. Utilizando coordenadas esféricas el momento de inercia pedido es

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\,d\phi \int_{a/\operatorname{sen}\phi}^{2a} \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi\rho^2\,d\rho$$

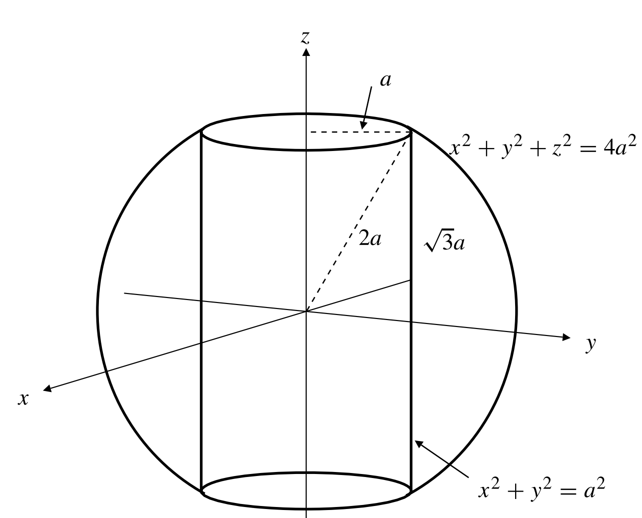


Figura 14.46 Una bola sólida con un agujero cilíndrico a través de ella.

Utilizando coordenadas cilíndricas es

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{2a} r\,dr \int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^2\,dz$$

La última fórmula parece algo más fácil de evaluar. Continuaremos con ella. Calculando las integrales en θ y en z, obtenemos

$$I = 4\pi \int_a^{2a} r^3\sqrt{4a^2 - r^2}\, dr$$

Haciendo el cambio $u = 4a^2 - r^2$, $du = -2r\,dr$, se llega a

$$I = 2\pi \int_0^{3a^2} (4a^2 - u)\sqrt{u}\, du = 2\pi \left(4a^2 \frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{5/2}}{5/2} \right)\Bigg|_0^{3a^2} = \frac{44}{5}\sqrt{3}\pi a^5$$

Ejercicios 14.6

1. Convierta las coordenadas esféricas $[4, \pi/3, 2\pi/3]$ en coordenadas cartesianas y en coordenadas cilíndricas.

2. Convierta las coordenadas cartesianas $(2, -2, 1)$ en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.

3. Convierta las coordenadas cilíndricas $[2, \pi/6, -2]$ en coordenadas cartesianas y en coordenadas esféricas.

4. Las coordenadas esféricas de un punto P son $[1, \phi, \theta]$ y sus coordenadas cilíndricas son $[r, \pi/4, r]$. Calcule las coordenadas cartesianas de dicho punto.

Describa los conjuntos de puntos del espacio tridimensional que satisfacen las ecuaciones de los Ejercicios 5-14. Aquí, r, θ, ρ y ϕ indican las coordenadas apropiadas cilíndricas o esféricas.

5. $\theta = \pi/2$

6. $\phi = 2\pi/3$

7. $\phi = \pi/2$

8. $\rho = 4$

9. $r = 4$

10. $\rho = z$

11. $\rho = r$

12. $\rho = 2x$

13. $\rho = 2\cos\phi$

14. $r = 2\cos\theta$

En los Ejercicios 15-23, calcule los volúmenes de las regiones indicadas.

15. En el interior del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

16. Por encima de la superficie $z = (x^2 + y^2)^{1/4}$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

17. Entre los paraboloides $z = 10 - x^2 - y^2$ y $z = 2(x^2 + y^2 - 1)$.

18. Dentro del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

19. Por encima del plano xy, y dentro del cono $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ y del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$.

20. Por encima del plano xy, y debajo del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y de la cuña $-x \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x$.

21. En el primer octante, entre los planos $y = 0$ e $y = x$ y dentro del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. *Sugerencia*: Utilice el cambio de variables sugerido en el Ejemplo 1.

∗22. Limitada por el hiperboloide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ y los planos $z = -c$ y $z = c$.

23. Por encima del plano xy y por debajo del paraboloide

$$z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

24. Calcule $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$, siendo R el cilindro $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

25. Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2)\, dV$, siendo B la bola dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$.

26. Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$, siendo B la bola del Ejercicio 25.

27. Calcule $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$, siendo R la región que está por encima del cono $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

28. Calcule $\iiint_R (x^2 + y^2)\, dV$ en la región R del Ejercicio 27.

29. Calcule $\iiint_R z\, dV$ en la región R que cumple $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

30. Calcule $\iiint_R x\, dV$ y $\iiint_R z\, dV$ en la parte de la semiesfera $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ está en el primer octante.

***31.** Calcule $\iiint_R x\,dV$ y $\iiint_R z\,dV$ en la parte del cono

$$0 \leqslant z \leqslant h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right)$$

que está en el primer octante.

***32.** Calcule el volumen de la región que está dentro del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ y por encima del plano $z = b - y$.

***33.** Demuestre que en coordenadas cilíndricas la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

se expresa como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

***34.** Demuestre que en coordenadas esféricas la ecuación de Laplace se expresa como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot\phi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

***35.** Si x, y y z son funciones de u, v y w con derivadas parciales primeras continuas y jacobiano no nulo en (u, v, w), demuestre que transforman un elemento de volumen infinitesimal en el espacio uvw, limitado por los planos coordenados u, $u + du$, v, $v + dv$, w y $w + dw$, en un «paralelepípedo» infinitesimal en el espacio xyz cuyo volumen es

$$dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw$$

Sugerencia: Adapte el argumento bidimensional dado en la Sección 14.4. ¿Qué tres vectores en el punto $P = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ generan el paralelepípedo?

14.7 Aplicaciones de las integrales múltiples

Cuando expresamos el volumen V de una región R en el espacio tridimensional mediante una integral,

$$V = \iiint_R dV$$

estamos considerando V como una «suma» de infinitos *elementos infinitesimales de volumen*, es decir, como el límite de la suma de volúmenes de subregiones no solapadas cada vez más pequeñas en las que subdividimos R. Esta idea de representar mediante integrales las sumas de elementos infinitesimales de magnitudes tiene muchas aplicaciones.

Por ejemplo, si un cuerpo rígido de densidad constante δ g/cm^3 ocupa un volumen V cm^3, entonces su masa es $m = \delta V$ g. Si la densidad no es constante sino que varía de forma continua en la región R del espacio tridimensional ocupada por el cuerpo rígido, es decir, $\delta = \delta(x, y, z)$, podemos considerar todavía que la densidad será constante en un elemento infinitesimal de R cuyo volumen sea dV. La masa de este elemento es, por tanto, $dm = \delta(x, y, z)\,dV$, y la masa del cuerpo completo se calcula integrando estos elementos de masa en R:

$$m = \iiint_R \delta(x, y, z)\,dV$$

Se aplican fórmulas similares cuando el cuerpo rígido es unidimensional o bidimensional, y su densidad se expresa en unidades de masa por unidad de longitud o por unidad de área. En estos casos son necesarias integrales simples o dobles para sumar los elementos individuales de masa. Todo esto funciona porque la masa es «aditiva», es decir, la masa de un objeto compuesto es la suma de las masas de las partes que componen el objeto. Las áreas superficiales, fuerzas gravitacionales, momentos y energías que consideraremos en esta sección tienen esta propiedad de aditividad.

Área de la superficie de una gráfica

Podemos emplear una integral doble en un dominio D del plano xy para sumar elementos de área de superficie y, por tanto, calcular el área total de la superficie $\mathcal{S}$ cuya ecuación es $z = f(x, y)$, definida para (x, y) en D. Suponemos que f tiene derivadas parciales primeras continuas en D, de forma que $\mathcal{S}$ es suave y tiene planos tangentes no verticales en $P = (x, y, f(x, y))$ para todo (x, y) en D. El vector

$$\mathbf{n} = -f_1(x, y)\mathbf{i} - f_2(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

es normal a $\mathcal{S}$ en P, y apunta hacia arriba. Un elemento de área dA situado en la posición (x, y) del plano xy tiene una *proyección vertical* en $\mathcal{S}$ cuya área dS es $\sec\gamma$ multiplicada por el área dA, siendo γ el ángulo que forman $\mathbf{n}$ y $\mathbf{k}$ (*véase* la Figura 14.47).

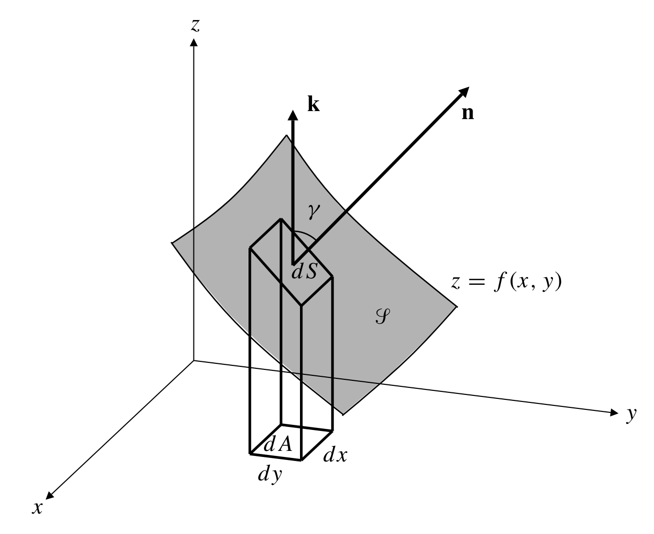


Figura 14.47 El elemento de área de superficie dS en la superficie $z = f(x, y)$ es $\sec\gamma$ multiplicado por su proyección vertical dA en el plano xy.

Como

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{n} \bullet \mathbf{k}}{|\mathbf{n}||\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1(x,\ y))^2 + (f_2(x,\ y))^2}}$$

tenemos

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Por tanto, el área de $\mathcal{S}$ es

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Ejemplo 1 Calcule el área de la parte del paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución Como $\partial z/\partial x = 2x$ y $\partial z/\partial y = -2y$, el elemento de área de superficie es

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA = \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

El área de la superficie requerida es la integral de dS en el disco $r \leqslant a$:

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr \qquad \text{Sea } u = 1 + 4r^2$$

$$= (2\pi)\, \frac{1}{8} \int_1^{1+4a^2} \sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{3}\right) u^{3/2} \Big|_1^{1+4a^2} = \frac{\pi}{6}\left((1 + 4a^2)^{3/2} - 1\right) \text{ unidades al cuadrado}$$

Atracción gravitatoria de un disco

La ley de la gravitación universal de Newton establece que dos masas puntuales m_1 y m_2, separadas por una distancia s, se atraen entre sí con una fuerza

$$F = \frac{km_1m_2}{s^2}$$

siendo k una constante universal. La fuerza sobre cada masa se dirige hacia la otra, en la recta que une las dos masas. Supongamos que un disco plano D de radio a, que ocupa la región $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ del plano xy, tiene una *densidad de área* constante σ (unidades de masa por unidad de área). Vamos a calcular la fuerza total de atracción que ejerce este disco sobre una masa m situada en el punto $(0, 0, b)$ en el eje z positivo. La fuerza total es una magnitud vectorial. Aunque los elementos de masa del disco están en direcciones diferentes respecto a la masa m, la simetría del problema nos indica que la fuerza neta actuará en la dirección que apunta hacia el centro del disco, es decir, hacia el origen. Por tanto, la fuerza total será $-F\mathbf{k}$, siendo F su módulo.

Calcularemos F integrando la componente vertical dF de la fuerza de atracción sobre m debida a la masa $\sigma\, dA$ en un elemento de área dA del disco. Si el elemento de área está en el punto cuyas coordenadas polares son $[r, \theta]$, y si la recta que va desde este punto $(0, 0, b)$ forma un ángulo ψ con el eje z, como se muestra en la Figura 14.48, entonces la componente vertical de la fuerza de atracción que ejerce el elemento de masa $\sigma\, dA$ sobre m es

$$dF = \frac{km\sigma\, dA}{r^2 + b^2} \cos\psi = km\sigma b\, \frac{dA}{(r^2 + b^2)^{3/2}}$$

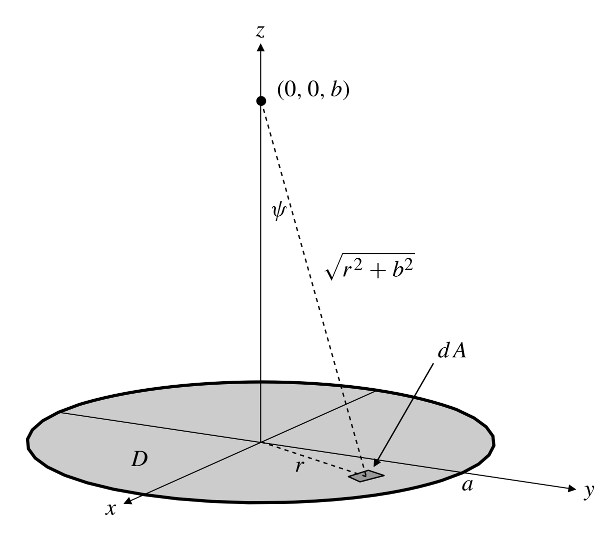


Figura 14.48 Cada elemento de masa $\sigma\, dA$ atrae a m en una dirección diferente.

De acuerdo con esto, la fuerza de atracción vertical total que ejerce el disco sobre m es

$$\begin{aligned} F &= km\sigma b \iint_D \frac{dA}{(r^2+b^2)^{3/2}} \\ &= km\sigma b \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r\,dr}{(r^2+b^2)^{3/2}} \qquad\qquad \text{Sea } u = r^2+b^2 \\ &= \pi km\sigma b \int_{b^2}^{a^2+b^2} u^{-3/2}\,du \\ &= \pi km\sigma b \left(\frac{-2}{\sqrt{u}}\right)\Bigg|_{b^2}^{a^2+b^2} = 2\pi km\sigma \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \end{aligned}$$

Observación Si hacemos que a tienda a infinito en la fórmula anterior, obtendremos la fórmula $F = 2\pi km\sigma$, que representa la fuerza de atracción de un plano con densidad de área σ sobre una masa m situada a una distancia b de dicho plano. Obsérvese que F no depende de b. Intente razonar en términos físicos por qué debe ser así.

Observación La fuerza de atracción sobre una masa puntual debida a objetos sólidos simétricos (como bolas, cilindros y conos) con densidad δ constante (unidades de masa por unidad de volumen) se puede obtener integrando las contribuciones de elementos de fuerza formados por secciones finas con forma de disco del sólido. *Véanse* los Ejercicios 14-17 posteriores.

Momentos y centros de masa

El centro de masa de un cuerpo rígido es aquel punto (fijo en el cuerpo) del que dicho cuerpo se puede suspender de forma que en presencia de un campo gravitatorio constante no experimentará torques debidos a desequilibrios que hagan que rote. Los torques experimentados por un elemento de masa dm del cuerpo se pueden expresar en función de los **momentos** de dm respecto a los tres planos coordenados. Si el cuerpo ocupa una región R en el espacio tridimensional, y tiene una densidad de volumen continua $\delta(x, y, z)$, entonces el elemento de masa $dm = \delta(x, y, z)\,dV$ que ocupa el elemento de volumen dV tiene **momentos** $(x - x_0)\,dm$, $(y - y_0)\,dm$ y $(z - z_0)\,dm$ con respecto a los planos $x = x_0$, $y = y_0$ y $z = z_0$, respectivamente. Por tanto, los momentos totales del cuerpo respecto a estos tres planos son

$$M_{x=x_0} = \iiint_R (x - x_0)\delta(x, y, z)\,dV = M_{x=0} - x_0 m$$

$$M_{y=y_0} = \iiint_R (y - y_0)\delta(x, y, z)\,dV = M_{y=0} - y_0 m$$

$$M_{z=z_0} = \iiint_R (z - z_0)\delta(x, y, z)\,dV = M_{z=0} - z_0 m$$

siendo $m = \iiint_R \delta\,dV$ la masa del cuerpo, y $M_{x=0}$, $M_{y=0}$ y $M_{z=0}$ los momentos respecto a los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, respectivamente. El **centro de masas** $\overline{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del cuerpo es el punto en el que $M_{x=\bar{x}}$, $M_{y=\bar{y}}$ y $M_{z=\bar{z}}$ son todos iguales a cero. Por tanto,

Centro de masas

El centro de masas de un sólido que ocupa la región R en el espacio tridimensional y que tiene una densidad continua $\delta(x, y, z)$ (unidades de masa por unidad de volumen) es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ cuyas coordenadas están dadas por

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\iiint_R x\delta\, dV}{\iiint_R \delta\, dV}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\iiint_R y\delta\, dV}{\iiint_R \delta\, dV},$$

$$\bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m} = \frac{\iiint_R z\delta\, dV}{\iiint_R \delta\, dV}$$

Estas fórmulas se pueden combinar en una única fórmula vectorial que exprese el vector de posición $\bar{\mathbf{r}} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}$ del centro de masas en función del vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ de un punto arbitrario de R,

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{M_{x=0}\mathbf{i} + M_{y=0}\mathbf{j} + M_{z=0}\mathbf{k}}{m} = \frac{\iiint_R \delta\, \mathbf{r}\, dV}{\iiint_R \delta\, dV}$$

donde la integral de la función vectorial $\delta\,\mathbf{r}$ debe entenderse como el vector cuyas componentes son las integrales de las componentes de $\delta\,\mathbf{r}$.

Observación Se pueden obtener expresiones similares para distribuciones de masas en regiones del plano o en intervalos de una recta. Se utilizan las densidades de área o lineal apropiadas e integrales dobles o simples.

Observación Si la densidad es constante, se cancela en las expresiones del centro de masa. En este caso, el centro de masa es una propiedad *geométrica* de la región R y se denomina **centroide** o **centro de gravedad** de dicha región.

Ejemplo 2 Calcule el centroide del tetraedro T limitado por los planos coordenados y por el plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Solución La densidad se supone constante, por lo que supondremos que es la unidad. La masa de T es, por tanto, igual a su volumen: $m = V = abc/6$. El momento de T con respecto al plano yz es (*véase* la Figura 14.49):

$$\begin{aligned} M_{x=0} &= \iiint_T x\, dV \\ &= \int_0^a x\, dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} dz \\ &= c\int_0^a x\, dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy \end{aligned}$$

$$= c \int_0^a x \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) y - \frac{y^2}{2b} \right] \Bigg|_{y=0}^{y=b(1-\frac{x}{a})} dx$$

$$= \frac{bc}{2} \int_0^a x \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx$$

$$= \frac{bc}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{a} + \frac{x^4}{4a^2} \right] \Bigg|_0^a = \frac{a^2bc}{24}$$

Por tanto, $\bar{x} = M_{x=0}/m = a/4$. Por simetría, el centroide de T es $\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right)$.

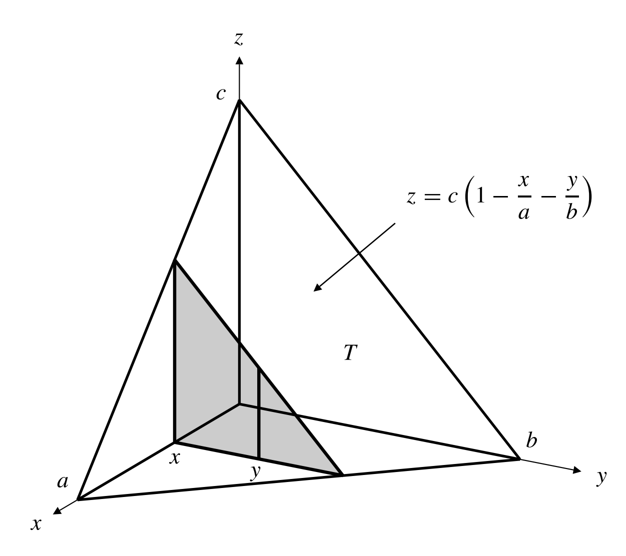


Figura 14.49 Diagrama de iteración de una integral triple en el tetraedro del Ejemplo 2.

Ejemplo 3 Calcule el centro de masa de un sólido que ocupa la región S que cumple $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, si la densidad a una distancia ρ del origen es $k\rho$.

Solución La masa del sólido se distribuye simétricamente en la parte del primer octante de la bola $\rho \leqslant a$, por lo que el centro de masas, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, debe cumplir $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$. La masa del sólido es

$$m = \iiint_S k\rho\, dV = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \int_0^a (k\rho)\rho^2\, d\rho = \frac{\pi k a^4}{8}$$

El momento respecto al plano xy es

$$M_{z=0} = \iiint_S zk\rho\, dV = \iiint_S (k\rho)\rho\cos\phi\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{k}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2\phi)\, d\phi \int_0^a \rho^4\, d\rho = \frac{k\pi a^5}{20}$$

Por consiguiente, $\bar{z} = \frac{k\pi a^5}{20} \bigg/ \frac{k\pi a^4}{8} = \frac{2a}{5}$ y el centro de masas es $\left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$.

Momento de inercia

La **energía cinética** de una partícula de masa m que se mueve con velocidad v es

$$\mathrm{KE} = \frac{1}{2}\, mv^2$$

La masa de la partícula mide su *inercia*, que es dos veces la energía que tiene cuando su velocidad es de una unidad.

Si la partícula se mueve siguiendo una circunferencia de radio D, su movimiento se puede describir en función de su **velocidad angular**, Ω, que se mide en radianes por unidad de tiempo. En una revolución la partícula recorre una distancia $2\pi D$ en un tiempo $2\pi/\Omega$. Por tanto, su velocidad v (de traslación) se relaciona con su velocidad angular mediante la expresión

$$v = \Omega D$$

Supongamos que un cuerpo rígido está girando con velocidad angular Ω con respecto a un eje L. Si (en algún instante) el cuerpo ocupa una región R cuya densidad es $\delta = \delta(x, y, z)$, entonces cada elemento de masa $dm = \delta\, dV$ del cuerpo tiene energía cinética

$$d\mathrm{KE} = \frac{1}{2}\, v^2\, dm = \frac{1}{2}\, \delta\Omega^2 D^2\, dV$$

siendo $D = D(x, y, z)$ la distancia perpendicular desde el elemento de volumen dV al eje de rotación L. La energía cinética total del cuerpo en rotación es, por tanto,

$$\mathrm{KE} = \frac{1}{2}\, \Omega^2 \iiint_R D^2 \delta\, dV = \frac{1}{2}\, I\Omega^2$$

siendo

$$I = \iiint_R D^2 \delta\, dV$$

I se denomina **momento de inercia** del cuerpo en rotación respecto al eje L. El momento de inercia tiene el mismo papel en la expresión de la energía cinética de rotación (en función de la velocidad angular) que la masa en la expresión de la energía cinética de traslación (en función de la velocidad lineal). El momento de inercia es dos veces la energía cinética del cuerpo cuando gira con velocidad angular unidad.

Si toda la masa del cuerpo en rotación estuviera concentrada a una distancia D_0 del eje de rotación, entonces su energía cinética sería $\frac{1}{2}\, mD_0^2\Omega^2$. El **radio de giro** $\bar{D}$ es el valor de D_0 para el que esta energía es igual a la energía cinética real $\frac{1}{2}\, I\Omega^2$ del cuerpo en rotación. Por tanto, $m\bar{D}^2 = I$, y el radio de giro es

$$\bar{D} = \sqrt{I/m} = \left(\frac{\displaystyle\iiint_R D^2 \delta\, dV}{\displaystyle\iiint_R \delta\, dV} \right)^{1/2}$$

Ejemplo 4 **(Aceleración de una bola que rueda)**

(a) Calcule el momento de inercia y el radio de giro de una bola sólida de radio a y densidad constante δ con respecto a un diámetro de dicha bola.

(b) ¿Con qué aceleración lineal rodará la bola (sin deslizamiento) por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal?

Solución

(a) Tomaremos el eje z como diámetro e integraremos en coordenadas cilíndricas en la bola B de radio a centrada en el origen. Como la densidad δ es constante, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \delta \iiint_B r^2\, dV \\ &= \delta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3\, dr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz \\ &= 4\pi\delta \int_0^a r^3\sqrt{a^2-r^2}\, dr \qquad \text{Sea } u = a^2 - r^2 \\ &= 2\pi\delta \int_0^{a^2} (a^2-u)\sqrt{u}\, du \\ &= 2\pi\delta \left(\frac{2}{3}\, a^2u^{3/2} - \frac{2}{5}\, u^{5/2}\right)\Bigg|_0^{a^2} = \frac{8}{15}\,\pi\delta a^5 \end{aligned}$$

Como la masa de la bola es $m = \frac{4}{3}\,\pi\delta a^3$, el radio de giro es

$$\bar{D} = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\, a$$

(b) Podemos determinar la aceleración de la bola utilizando la ley de la conservación de la energía total (cinética más potencial). Cuando la bola rueda por el plano con velocidad v, su centro se mueve con la misma velocidad v, y pierde altura con una velocidad de $v \operatorname{sen} \alpha$ (*véase* la Figura 14.50). Como la bola no se desliza, rota respecto a un eje horizontal que pasa por su centro con velocidad angular $\Omega = v/a$. Por consiguiente, su energía cinética (debida a la traslación y la rotación) es

$$\begin{aligned} \text{KE} &= \frac{1}{2}\, mv^2 + \frac{1}{2}\, I\Omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\, mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}\, ma^2\, \frac{v^2}{a^2} = \frac{7}{10}\, mv^2 \end{aligned}$$

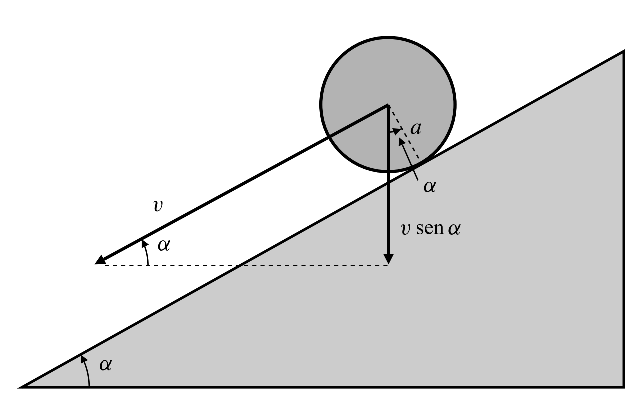


Figura 14.50 Velocidad real y velocidad vertical de una bola que rueda por un plano inclinado como en el Ejemplo 4.

Cuando el centro de la bola está a una altura h (por encima de la altura de referencia), la bola tiene una energía potencial (gravitatoria)

$$\text{PE} = mgh$$

Esta energía es el trabajo que se debe realizar contra la fuerza gravitatoria constante $F = mg$ para elevar la bola a una altura h. Como la energía total se conserva,

$$\frac{7}{10}\, mv^2 + mgh = \text{constante}$$

Diferenciando con respecto al tiempo t, se obtiene

$$0 = \frac{7}{10} m2v \frac{dv}{dt} + mg \frac{dh}{dt} = \frac{7}{5} mv \frac{dv}{dt} - mgv \operatorname{sen} \alpha$$

Por tanto, la bola rueda por el plano inclinado con aceleración $\frac{dv}{dt} = \frac{5}{7} g \operatorname{sen} \alpha$. ■

Ejercicios 14.7

Problemas de área de superficies

Utilice integrales dobles para calcular las áreas de las superficies en los Ejercicios 1-9.

1. La parte del plano $z = 2x + 2y$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

2. La parte del plano $5z = 3x - 4y$ que está dentro del cilindro elíptico $x^2 + 4y^2 = 4$.

3. El hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

4. La superficie semielipsoidal $z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

5. La superficie cónica $3z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$.

6. El paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ en el primer octante.

7. La parte de la superficie $z = y^2$ que está por encima del triángulo cuyos vértices son (0, 0), (0, 1) y (1, 1).

8. La parte de la superficie $z = \sqrt{x}$ que está por encima de la región $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

9. La parte de la superficie cilíndrica $x^2 + z^2 = 4$ que está por encima de la región $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant x$.

10. Demuestre que las partes de las superficies $z = 2xy$ y $z = x^2 + y^2$ que están en el mismo cilindro vertical tienen la misma área.

11. Demuestre que el área S de la parte del paraboloide $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ que está por encima del cuadrado $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ está dada por

$$S = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} (1 + \sec^2 \theta)^{3/2} \, d\theta - \frac{2\pi}{3}$$

y utilice métodos numéricos para calcular el área con tres cifras decimales de precisión.

***12.** El dosel que se muestra en la Figura 14.51 es la parte de la semiesfera de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen que está por encima del cuadrado $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Calcule su área. *Sugerencia*: Es posible obtener una solución exacta, calculando primero el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ que está por encima del plano $z = 1$. Si resuelve el problema directamente integrando el elemento de área de superficie que está por encima del cuadrado, puede obtener una integral que no se puede calcular de forma exacta, y tendrá que utilizar métodos numéricos.

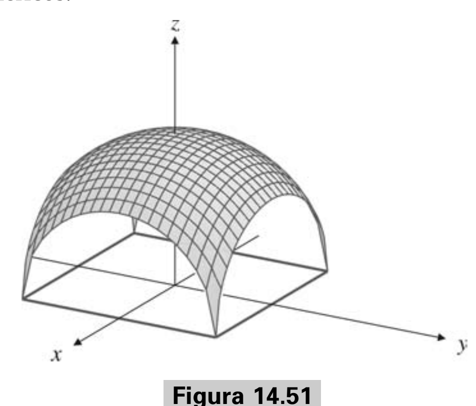


Figura 14.51

Masa y atracción gravitatoria

13. Calcule la masa de un planeta esférico de radio a cuya densidad a una distancia R del centro es $\delta = A/(B + R^2)$.

En los Ejercicios 14-17, calcule la atracción gravitatoria que los objetos dados ejercen sobre una masa m situada en la posición $(0, 0, b)$. Suponga que los objetos tienen una densidad constante δ. En cada caso se puede obtener la respuesta integrando las contribuciones hechas por discos de espesor dz, utilizando la fórmula de la atracción que ejerce el disco obtenida en el texto.

14. La bola $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, con $a < b$.

15. El cilindro $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, con $h < b$.

16. El cono $0 \leqslant z \leqslant b - (\sqrt{x^2 + y^2})/a$.

17. La semibola $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, con $a < b$.

Centros de masa y centroides

18. Calcule el centro de masa de un objeto que ocupa el cubo $0 \leqslant x, y, z \leqslant a$ y cuya densidad está dada por $\delta = x^2 + y^2 + z^2$.

Calcule los centroides de las regiones de los Ejercicios 19-22.

19. El prisma $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

20. La región no acotada $0 \leqslant z \leqslant e^{-(x^2+y^2)}$.

21. La parte del primer octante de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$.

22. La región que está dentro del cubo $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$ y por debajo del plano $x + y + z = 2$.

Momentos de inercia

23. Explique *en términos físicos* por qué la aceleración de la bola que rueda por el plano inclinado en el Ejemplo 4 no tiende a g (la aceleración debida a la gravedad) cuando el ángulo de inclinación α tiende a 90°.

Calcule los momentos de inercia y los radios de giro de los objetos sólidos de los Ejercicios 24-32. Suponga en todos los casos que la densidad es constante.

24. Un cilindro circular cuyo radio en la base es a y cuya altura es h, con respecto al eje del cilindro.

25. Un cilindro circular cuyo radio en la base es a y cuya altura es h, con respecto a un diámetro de su base.

26. Un cono circular recto cuyo radio en la base es a y cuya altura es h, con respecto a su eje.

27. Un cono circular recto cuyo radio en la base es a y cuya altura es h, con respecto a un diámetro de su base.

28. Un cubo de lado a con respecto a uno de sus lados.

29. Un cubo de lado a con respecto a la diagonal de una de sus caras.

30. Un cubo de lado a con respecto a su diagonal.

31. La caja rectangular $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-c \leqslant z \leqslant c$ con respecto al eje z.

32. La región entre los dos cilindros concéntricos $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$ (con $0 < a < b$) y entre $z = 0$ y $z = c$ sobre el eje z.

33. Una bola de radio a tiene densidad constante δ. Se realiza un agujero cilíndrico de radio $b < a$ a través del centro de la bola. Calcule la masa de la parte restante de la bola y su momento de inercia con respecto al eje del agujero.

34. ¿Con qué aceleración rodará (sin deslizamiento) un cilindro sólido con radio en la base a, altura h y densidad constante δ por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal?

35. Repita el Ejercicio 34 para la bola con el agujero cilíndrico del Ejercicio 33. Suponga que el eje del agujero permanece horizontal mientras la bola rueda.

$*$**36.** Un péndulo rígido de masa m oscila con respecto a un punto A en un eje horizontal. Su momento de inercia respecto a dicho eje es I. El centro de masa C del péndulo está a una distancia a de A. Cuando el péndulo cuelga en reposo, C está directamente debajo de A (¿por qué?). Suponga que el péndulo está oscilando. Sea $\theta = \theta(t)$ el desplazamiento angular de la recta AC con respecto a la vertical en el instante t ($\theta = 0$ cuando el péndulo está en su posición de reposo). Utilice un argumento basado en la ley de la conservación de la energía semejante al del Ejemplo 4 para demostrar que

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mga\cos\theta = \text{constante}$$

y, a partir de aquí, diferenciando con respecto a t, que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga}{I}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Ésta es una ecuación diferencial no lineal, y no es fácil de resolver. Sin embargo, para oscilaciones pequeñas ($|\theta|$ pequeño) podemos utilizar la aproximación $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$. En este caso la ecuación diferencial es la del movimiento armónico simple. ¿Cuál es el periodo?

$*$**37.** Sea L_0 una línea recta que pasa por el centro de masa de un cuerpo rígido B de masa m. Sea L_k una recta paralela a L_0 y a k unidades de distancia. Si I_0 e I_k son los momentos de inercia de B con respecto a L_0 y L_k, respectivamente, demuestre que $I_k = I_0 + k^2 m$. Teniendo esto en cuenta, podemos ver que un cuerpo siempre tendrá su momento de inercia mínimo respecto un eje que pase por su centro de masa. *Sugerencia*: Suponga que el eje z coincide con L_0 y L_k pasa por él $(k, 0, 0)$.

$*$**38.** Vuelva a obtener la expresión de la energía cinética total de la bola en rotación del Ejemplo 4, considerando que en cualquier instante la bola está rotando con respecto una recta horizontal que pasa por su punto de contacto con el plano inclinado. Utilice el resultado del Ejercicio 37.

$*$**39.** **(Productos de inercia)** Un cuerpo rígido con densidad δ se sitúa con su centro de masas en el origen y ocupa una región R del espacio tridimensional. Suponga que sus seis momentos segundos P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}, P_{xy}, P_{xz} y P_{yz} son conocidos, siendo

$$P_{xx} = \iiint_R x^2\delta\, dV, \qquad P_{xy} = \iiint_R xy\delta\, dV, \quad \ldots$$

Existen tablas que proporcionan estos seis momentos para cuerpos con muchas formas estándar. Se denominan productos de inercia. Demuestre cómo expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pasa por el origen en función de estos seis momentos segundos (si este resultado se combina con el del Ejercicio 37, se puede obtener el momento de inercia con respecto a *cualquier* eje).

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes expresiones?**
  - ◇ Suma de Riemann para $f(x, y)$ en $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$
  - ◇ $f(x, y)$ es integrable en $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$
  - ◇ Integral doble de $f(x, y)$ en $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$
  - ◇ Iteración de una integral doble
  - ◇ Valor medio de $f(x, y)$ en una región R
  - ◇ Elemento de área en coordenadas polares
  - ◇ Integral triple
  - ◇ Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas
  - ◇ Elemento de volumen en coordenadas esféricas
  - ◇ Área de la superficie de la gráfica $z = f(x, y)$
  - ◇ Momento de inercia de un sólido respecto a un eje
- **Explique cómo se cambian variables en una integral doble.**
- **¿Cómo se calcula el centroide de una región sólida?**
- **¿Cómo se calcula el momento de inercia de un sólido con respecto a un eje?**

Ejercicios de repaso

1. Calcule $\iint_R (x + y)\, dA$ en la región del primer cuadrante que está por debajo de $x = y^2$ y por encima de $y = x^2$.

2. Calcule $\iint_P (x^2 + y^2)\, dA$, siendo P el paralelogramo cuyos vértices son (0, 0), (2, 0), (3, 1) y (1, 1).

3. Calcule $\iint_S (y/x)\, dA$, siendo S la parte del disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$ que está en el primer cuadrante y por debajo de la recta $y = x$.

4. Considere la integral iterada

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{y/\sqrt{3}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-x^2-y^2}\, dx$$

(a) Exprese I como una integral doble $\iint_R e^{-x^2-y^2}\, dA$ y dibuje la región R donde se calcula la integral doble.

(b) Exprese I como una integral iterada con el orden de iteración inverso.

(c) Exprese I como una integral iterada en coordenadas polares.

(d) Calcule I.

5. Calcule el valor de la constante $k > 0$ tal que el volumen de la región que está en el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y por encima del cono $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ es la cuarta parte del volumen de la esfera total.

6. Vuelva a iterar la integral

$$I = \int_0^2 dy \int_0^y f(x, y)\, dx + \int_2^6 dy \int_0^{\sqrt{6-y}} f(x, y)\, dx$$

con la variable y en la integral interna.

7. Sea $J = \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y f(x, y, z)\, dx$. Exprese J como una integral iterada en la que la iteración se realizan en el siguiente orden: primero z, después y, después x.

8. Un objeto con forma de cono circular recto tiene una altura de 10 m y el radio de su base es de 5 m. Su densidad es proporcional al cuadrado de la distancia a la base y su valor es de 3000 kg/m^3 en su vértice.

(a) Calcule la masa del objeto.

(b) Exprese en forma de integral iterada el momento de inercia del objeto con respecto a su eje central.

9. Calcule el valor medio de $f(t) = \int_t^a e^{-x^2}\, dx$ en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant a$.

10. Calcule el valor medio de la función $f(x, y) = \lfloor x + y \rfloor$ en el cuarto de disco $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$ (recuérdese que $\lfloor x \rfloor$ indica el máximo entero menor o igual que x).

11. Sea D la menor de las dos regiones sólidas limitadas por las superficies

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a} \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6a^2$$

siendo a una constante positiva. Calcule

$$\iiint_D (x^2 + y^2)\, dV$$

12. Calcule el momento de inercia respecto al eje z de un sólido V de densidad 1 si dicho sólido está especificado por las inecuaciones $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 \leqslant 2ay$, siendo $a > 0$.

13. El sólido rectangular $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ está dividido en dos partes por el plano $2x + y + z = 2$. Sea D la parte que incluye al origen. Calcule el volumen de D y $\bar{z}$, la coordenada z del centroide de D.

14. Un sólido S está formado por los puntos $(x, y\ z)$ que están en el primer octante y satisfacen $x + y + 2z \leqslant 2$ e $y + z \leqslant 1$. Calcule el volumen de S y la coordenada x de su centroide.

15. Calcule $\iiint_S z\,dV$, siendo S la parte del primer octante que está por encima del plano $x + y - z = 1$ y por debajo del plano $z = 1$.

16. Calcule el área de la parte del plano $z = 2x$ que está en el interior del paraboloide $z = x^2 + y^2$.

17. Calcule el área de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está por debajo del plano $z = 2x$. Exprese la respuesta como una integral simple, y calcúlela con una precisión de 3 cifras decimales.

∗**18.** Calcule el volumen de la menor de las dos regiones en las que el plano $x + y + z = 1$ divide al elipsoide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$. *Sugerencia*: Realice primero un cambio de variables que transforme el elipsoide en una bola. Sustituya después el plano por otro plano con una ecuación más simple que pase a la misma distancia del origen.

Problemas avanzados

1. El plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ (siendo $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$) divide al elipsoide sólido

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

en dos partes desiguales. Calcule el volumen de la menor.

2. Calcule el área de la parte del plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ (siendo $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$) que está en el interior del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

3. (a) Desarrolle $1/(1 - xy)$ en forma de serie geométrica, y a partir de aquí, demuestre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(b) De forma similar, exprese como suma de series las siguientes integrales:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + xy}\,dx\,dy$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xyz}\,dx\,dy\,dz$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + xyz}\,dx\,dy\,dz$

4. Sea P el paralelepípedo limitado por las tres parejas de planos paralelos $\mathbf{a} \bullet \mathbf{r} = 0$, $\mathbf{a} \bullet \mathbf{r} = d_1 > 0$, $\mathbf{b} \bullet \mathbf{r} = 0$, $\mathbf{b} \bullet \mathbf{r} = d_2 > 0$, $\mathbf{c} \bullet \mathbf{r} = 0$ y $\mathbf{c} \bullet \mathbf{r} = d_3 > 0$, siendo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ vectores constantes, y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demuestre que

$$\iiint_P (\mathbf{a} \bullet \mathbf{r})(\mathbf{b} \bullet \mathbf{r})(\mathbf{c} \bullet \mathbf{r})\,dx\,dy\,dz = \frac{(d_1 d_2 d_3)^2}{8|\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}$$

Sugerencia: Utilice el cambio de variables $u = \mathbf{a} \bullet \mathbf{r}$, $v = \mathbf{b} \bullet \mathbf{r}$, $w = \mathbf{c} \bullet \mathbf{r}$.

5. Se realiza un agujero cuya sección cruzada es un cuadrado de lado 2 que atraviesa por el centro una bola de radio 2. Calcule el volumen de la parte de la bola que queda.

∗**6.** Calcule el volumen limitado por la superficie cuya ecuación es $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$.

∗**7.** Calcule el volumen limitado por la superficie $|x|^{1/3} + |y|^{1/3} + |z|^{1/3} = |a|^{1/3}$.



CAPÍTULO 15

Campos vectoriales

—Toma algo más de té —dijo muy seriamente la Liebre de Marzo a Alicia.

—No he tomado nada todavía —replicó Alicia en tono ofendido—, así que no puedo tomar más.

—Querrás decir que no puedes tomar menos —dijo el Sombrerero Loco—. Es muy fácil tomar más cuando no se ha tomado nada.

Lewis Carroll (Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898)
de *Alicia en el País de las Maravillas*

Introducción Este capítulo y el siguiente tratan de funciones vectoriales de variable vectorial, que generalmente serán funciones cuyos dominios y rangos estarán en el plano o en el espacio tridimensional. Estas funciones se denominan frecuentemente *campos vectoriales*. Entre las aplicaciones de los campos vectoriales se encuentran las integrales que se realizan, no en ejes ni en regiones del plano o del espacio tridimensional, sino en curvas o superficies. En este capítulo presentaremos las integrales realizadas en rectas y superficies. En el capítulo siguiente desarrollaremos versiones del Teorema Fundamental del Cálculo para integrales en campos vectoriales.

15.1 Campos escalares y vectoriales

Una función cuyo dominio y rango son subconjuntos del espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$ se denomina **campo vectorial**. Por lo tanto, un campo vectorial **F** asocia un vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ a cada punto (x, y, z) de su dominio. Las tres componentes de **F** son funciones escalares (reales) $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ y $F_3(x, y, z)$, y $\mathbf{F}(x, y, z)$ se puede expresar en función de la base estándar en $\mathbb{R}^3$ como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

Nótese que en este caso los subíndices representan *componentes* de un vector, *no* derivadas parciales. Si $F_3(x, y, z) = 0$ y F_1 y F_2 son independientes de z, entonces **F** se reduce a

$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$$

y se denomina **campo vectorial en el plano**, o campo vectorial en el plano xy. Utilizaremos con mucha frecuencia vectores de posición como argumentos de un campo vectorial. El vector de posición de (x, y, z) es $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y podemos expresar $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ como notación abreviada de $\mathbf{F}(x, y, z)$. En el contexto de campos vectoriales, una función escalar de una variable vector (es decir, una función de varias variables considerada en el contexto de los Capítulos 12-14) se denomina **campo escalar**. Por tanto, las componentes de un campo vectorial son campos escalares. Muchos resultados que demostraremos en el ámbito de los campos vectoriales requieren que los campos sean suaves en algún sentido. Diremos que un campo vectorial es **suave** siempre que sus campos esclares componentes tengan derivadas parciales continuas de todos los órdenes (sin embargo, en la mayor parte de los casos, será suficiente que sean continuas hasta segundo orden).

Los campos vectoriales aparecen en muchas áreas de las matemáticas aplicadas. Enumeraremos algunas:

(a) El campo gravitatorio $\mathbf{F}(x, y, z)$ de un objeto es la fuerza de atracción que dicho objeto ejerce sobre una masa unidad situada en la posición (x, y, z).

(b) La fuerza del campo electrostático $\mathbf{E}(x, y, z)$ debida a un objeto eléctricamente cargado es la fuerza que dicho objeto ejerce sobre una unidad de carga situada en la posición (x, y, z) (dicha fuerza puede ser de atracción o de repulsión).

(c) El campo de velocidades $\mathbf{v}(x, y, z)$ en un fluido (o sólido) en movimiento es la velocidad que tiene una partícula en la posición (x, y, z). Si el movimiento no es en «estado estacionario», entonces el campo de velocidades dependerá también del tiempo: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$.

(d) El gradiente $\nabla f(x, y, z)$ de cualquier campo escalar f proporciona la dirección y la magnitud de la máxima tasa de crecimiento de f en (x, y, z). En particular, un *gradiente de temperaturas*, $\nabla T(x, y, z)$, es un campo vectorial que da la dirección y la magnitud de la máxima tasa de incremento de temperatura T en el punto (x, y, z), en un medio conductor del calor. Los *gradientes de presión* proporcionan información similar sobre la variación de presión en un fluido como una masa de aire o un océano.

(e) Los vectores radial unitario y transversal unitario $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ son ejemplos de campos vectoriales en el plano xy. Ambos están definidos en todos los puntos del plano excepto en el origen.

Ejemplo 1 **(Campo gravitatorio de una masa puntual)** El campo gravitatorio que produce una masa puntual m situada en el punto P_0 con vector de posición $\mathbf{r}_0$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \frac{-km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\\ &= -km\,\frac{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

siendo $k > 0$ una constante. **F** apunta hacia el punto $\mathbf{r}_0$ y su módulo es

$$|\mathbf{F}| = km/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2$$

La Figura 15.1 muestra gráficamente algunos vectores en una sección plana del campo. Cada uno de ellos representa los valores del campo en la posición de sus orígenes. Las longitudes de los vectores indican que la fuerza del campo crece a medida que nos acercamos a P_0. ■

Observación El campo electrostático **F** que produce una carga puntual q situada en P_0 se expresa mediante la misma fórmula que el campo gravitatorio, con la excepción de que q sustituye a $-m$. La razón del cambio de signo es que las cargas iguales se repelen entre sí, mientras que las masas se atraen entre sí.

Ejemplo 2 El campo de velocidades de un sólido en rotación alrededor del eje z con velocidad angular $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$ es

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} = -\Omega y\mathbf{i} + \Omega x\mathbf{j}$$

Como tiene el mismo valor en todos los planos normales al eje z, **v** se puede ver como un campo vectorial en el plano. La Figura 15.2 muestra algunos vectores de este campo. ■

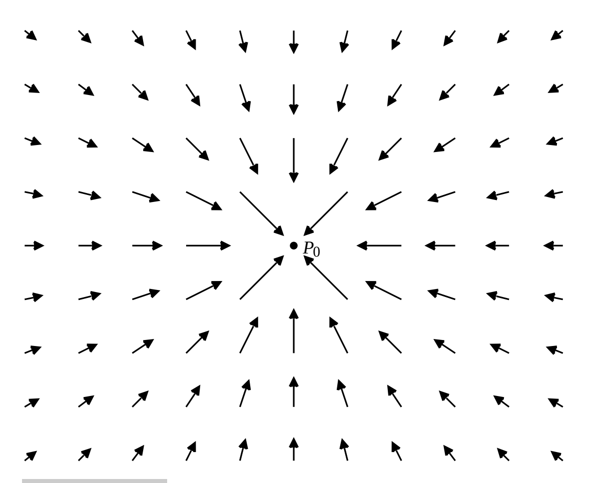


Figura 15.1 Campo gravitatorio de una masa puntual situada en P_0.

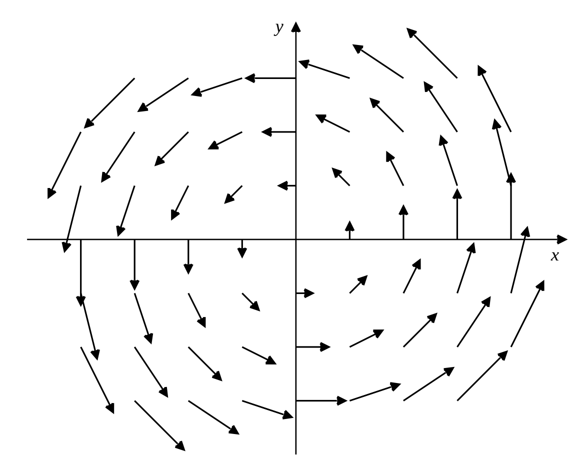


Figura 15.2 Campo de velocidades de un cuerpo rígido que gira alrededor del eje z.

Líneas de campo (curvas integrales)

Las representaciones gráficas de los campos vectoriales como las que se muestran en las Figuras 15.1 y 15.2, y el campo de velocidades del viento en una colina que se muestra en la Figura 15.3, sugieren un patrón de movimiento en el espacio o en el plano. Sea o no el campo un campo de velocidades, podemos interpretarlo de ese modo y preguntarnos qué camino seguiría una partícula, situada inicialmente en un punto, cuya velocidad estuviera dada por el campo. El camino sería una curva a la cual el campo sería tangente en cada uno de sus puntos. Estas curvas se denominan **líneas de campo** o **curvas integrales** para un campo vectorial dado. En el caso concreto en el que el campo vectorial represente la velocidad de flujo de un fluido, las líneas de campo se denominan **líneas de corriente** o **líneas de flujo** en dicho fluido. La Figura 15.3 muestra algunas de estas líneas para el flujo del aire. En el caso de un campo de fuerzas, las líneas de campo se denominan **líneas de fuerza**.

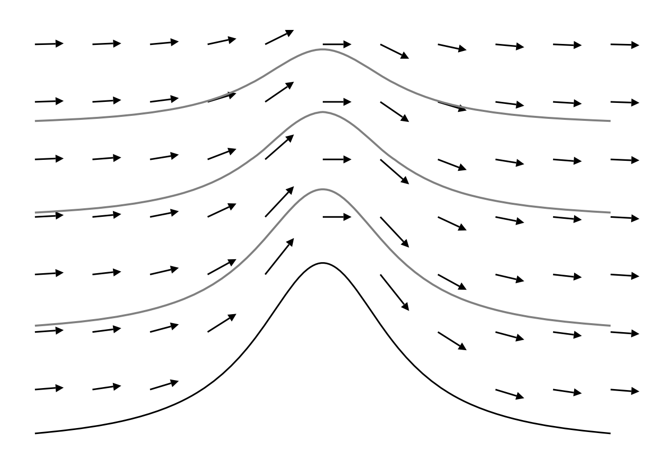


Figura 15.3 El campo de velocidades y algunas líneas de flujo del viento sobre una colina.

Las líneas de campo de **F** no dependen de su módulo en un punto dado, sino sólo de la dirección del campo. Si la línea de campo que pasa por un punto tiene como función paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, entonces su vector tangente $d\mathbf{r}/dt$ debe ser paralelo a $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ para todo t. Por consiguiente,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lambda(t)\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

En *algunos* campos vectoriales esta ecuación diferencial se puede integrar para obtener las líneas de campo. Si dividimos la ecuación en sus componentes,

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t)F_1(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda(t)F_2(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dt} = \lambda(t)F_3(x, y, z)$$

Se pueden obtener expresiones diferenciales equivalentes para $\lambda(t)\,dt$ y, a partir de aquí, se puede expresar la ecuación diferencial de las líneas de campo en la forma

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$$

Si al multiplicar estas ecuaciones diferenciales por alguna función se pueden expresar en la forma

$$P(x)\,dx = Q(y)\,dy = R(z)\,dz$$

entonces es posible integrar las tres expresiones para obtener las líneas de campo.

Ejemplo 3 Calcule las líneas de campo del campo gravitatorio del Ejemplo 1:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -km\,\frac{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}$$

Solución El vector en el numerador de la fracción da la dirección de **F**. Por tanto, las líneas de campo satisfacen el sistema

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0}$$

Integrando las tres expresiones se llega a

$$\ln|x - x_0| + \ln C_1 = \ln|y - y_0| + \ln C_2 = \ln|z - z_0| + \ln C_3$$

o, tomando exponenciales,

$$C_1(x - x_0) = C_2(y - y_0) = C_3(z - z_0)$$

Esto representa dos familias de planos que pasan por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Las líneas de campo son las intersecciones de los planos de cada una de las familias, por lo que son rectas que pasan por el punto P_0. Ésta es una familia de rectas de *dos parámetros*; cualquiera de las constantes C_i que sea distinta de cero se puede suprimir de las ecuaciones anteriores dividiéndolas por dicha constante. La naturaleza de las líneas de campo es clara observando la representación del campo vectorial en la Figura 15.1.

Ejemplo 4 Calcule las líneas de campo del campo de velocidades $\mathbf{v} = \Omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ del Ejemplo 2.

Solución Las líneas de campo satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$$

En esta ecuación podemos separar variables para obtener $x\,dx = -y\,dy$. Al integrar resulta, entonces, $x^2/2 = -y^2/2 + C/2$, o $x^2 + y^2$. Por tanto, las líneas de campo son circunferencias centradas en el origen del plano xy, como se puede ver en la representación del campo vectorial de la Figura 15.2. Si consideramos $\mathbf{v}$ como un campo vectorial en el espacio tridimensional, las líneas de campo son circunferencias horizontales centradas en el eje z:

$$x^2 + y^2 = C_1, \qquad z = C_2$$

La posibilidad de obtener líneas de campo depende de la capacidad de resolver ecuaciones diferenciales y, en el espacio tridimensional, sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 5 Calcule las líneas de campo de $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + 2x^2z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.

Solución Las líneas de campo cumplen $\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{2x^2z} = \dfrac{dz}{x^2}$, o, en otros términos,

$$dy = 2x\,dx \qquad \text{y} \qquad dy = 2z\,dz$$

Las líneas de campo son las curvas de intersección de las dos familias de cilindros parabólicos $y = x^2 + C_1$ e $y = z^2 + C_2$.

Campos vectoriales en coordenadas polares

Un campo vectorial en el plano se puede expresar en coordenadas polares en la forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \theta) = F_r(r, \theta)\hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r, \theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, definidos en todas partes excepto en el origen como

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$$

son vectores unitarios en la dirección de r y θ, crecientes en $[r, \theta]$. Nótese que $d\hat{\mathbf{r}}/d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, y que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es simplemente $\hat{\mathbf{r}}$ girado 90° en sentido contrario al de las agujas del reloj. Nótese también que estamos utilizando F_r y F_θ para indicar las componentes de $\mathbf{F}$ con respecto a la base $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\}$; los subíndices no indican derivadas parciales. $F_r(r, \theta)$ se denomina componente *radial* de $\mathbf{F}$, y $F_\theta(r, \theta)$ se denomina componente *transversal*.

Una curva cuya ecuación en polares es $r = r(\theta)$ se puede expresar en forma paramétrica vectorial,

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

como hicimos en la Sección 11.6. Esta curva es una línea de campo de **F** si su vector tangente diferencial

$$d\mathbf{r} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\,d\theta = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

es paralelo al vector del campo $\mathbf{F}(r,\ \theta)$ en todo punto excepto en el origen, es decir, si $r = f(\theta)$ cumple la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{F_r(r,\ \theta)} = \frac{r\,d\theta}{F_\theta(r,\ \theta)}$$

En casos específicos se pueden obtener las líneas de campo resolviendo esta ecuación.

Ejemplo 6 Represente el campo vectorial $\mathbf{F}(r,\ \theta) = \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}$ y calcule sus líneas de campo.

Solución En todo punto $[r,\ \theta]$, el campo vectorial es la bisectriz del ángulo que forman $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, y forma un ángulo de 45º con respecto a $\hat{\mathbf{r}}$ medido en sentido contrario al de las agujas del reloj. Todos los vectores del campo tienen la misma longitud, $\sqrt{2}$. La Figura 15.4(a) muestra algunos vectores del campo. La figura sugiere que las líneas de campo son espirales que parten del origen. Como $F_r(r,\ \theta) = F_\theta(r,\ \theta) = 1$ para este campo, las líneas de campo cumplirán $dr = r\,d\theta$, o, dividiendo por $d\theta$, $dr/d\theta = r$. Ésta es la ecuación diferencial del crecimiento exponencial y tiene como solución $r = Ke^{\theta}$, o, en otros términos, $r = e^{\theta + \alpha}$, siendo $\alpha = \ln K$ una constante. La Figura 15.4(b) muestra algunas de estas curvas.

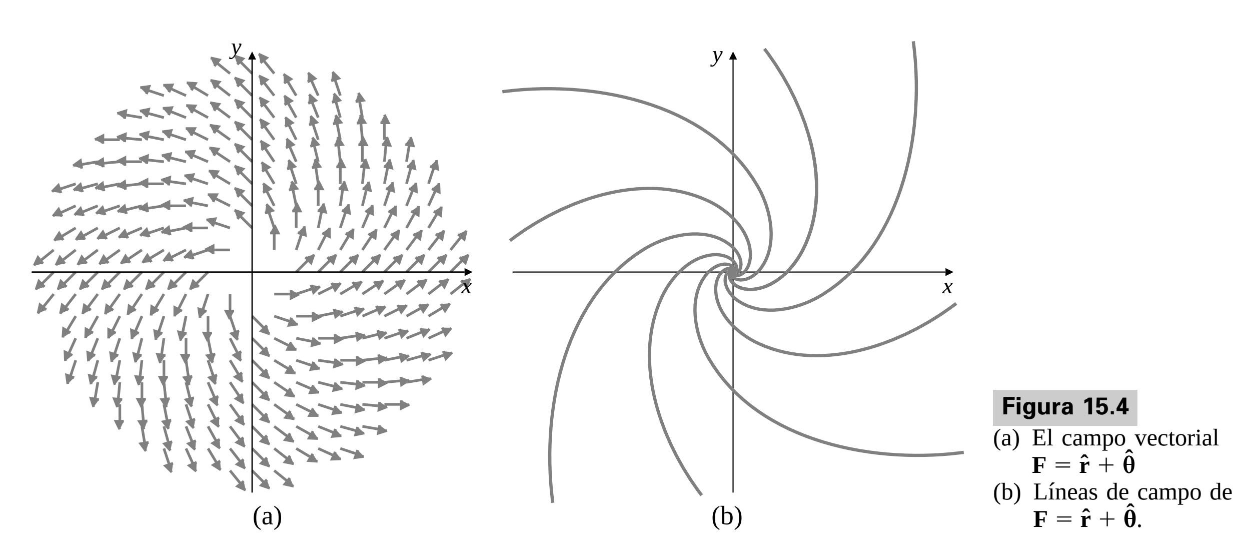


Figura 15.4
(a) El campo vectorial $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}$
(b) Líneas de campo de $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Ejercicios 15.1

En los Ejercicios 1-8, dibuje los campos de vectores en el plano dado y determine sus líneas de campo.

1. $\mathbf{F}(x,\ y) = x\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

2. $\mathbf{F}(x,\ y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x,\ y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x,\ y) = \mathbf{i} + \operatorname{sen} x\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x,\ y) = e^x\mathbf{i} + e^{-x}\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x,\ y) = \nabla(x^2 - y)$

7. $\mathbf{F}(x,\ y) = \nabla \ln(x^2 + y^2)$

8. $\mathbf{F}(x,\ y) = \cos y\,\mathbf{i} - \cos x\,\mathbf{j}$

En los Ejercicios 9-16, describa las líneas de corriente de los campos de velocidades dados.

9. $\mathbf{v}(x,\ y,\ z) = y\mathbf{i} - y\mathbf{j} - y\mathbf{k}$

10. $\mathbf{v}(x,\ y,\ z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x\mathbf{k}$

11. $\mathbf{v}(x,\ y,\ z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}$

12. $\mathbf{v}(x,\ y,\ z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{(1 + z^2)(x^2 + y^2)}$

13. $\mathbf{v}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

14. $\mathbf{v}(x, y, z) = e^{xyz}(x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

15. $\mathbf{v}(x, y) = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$

***16.** $\mathbf{v}(x, y) = x\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ *Sugerencia*: Sea $y = xv(x)$.

En los Ejercicios 17-20, determine las líneas de campo de los campos vectoriales dados en polares.

17. $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} + r\hat{\boldsymbol{\theta}}$

18. $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} + \theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$

19. $\mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{r}} + \theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$

20. $\mathbf{F} = r\hat{\mathbf{r}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}$

15.2 Campos conservativos

Como el gradiente de un campo escalar es un campo vectorial, resulta natural preguntarnos si todo campo vectorial será el gradiente de un campo escalar. Dado un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, deseamos saber si existe un campo escalar $\phi(x, y, z)$ tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

La respuesta general es negativa. Sólo se pueden expresar de esta forma campos vectoriales especiales.

DEFINICIÓN 1

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$ en un dominio D, entonces se dice que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial **conservativo** en D, y la función ϕ se denomina **potencial** (**escalar**) de $\mathbf{F}$ en D. En el plano o en el espacio de n dimensiones, las definiciones son similares.

Como las primitivas, los potenciales no están determinados de forma única; se les pueden añadir constantes arbitrarias. Nótese que $\mathbf{F}$ es **conservativo en un dominio** D si y sólo si $\mathbf{F} = \nabla\phi$ en *todo* punto de D; el potencial ϕ no puede tener puntos singulares en D.

La ecuación $F_1(x, y, z)\,dx + F_2(x, y, z)\,dy + F_3(x, y, z)\,dz = 0$ se denomina ecuación diferencial **exacta** si el miembro izquierdo es el diferencial de una función escalar $\phi(x, y, z)$:

$$d\phi = F_1(x, y, z)\,dx + F_2(x, y, z)\,dy + F_3(x, y, z)\,dz$$

En este caso, la ecuación diferencial tiene soluciones dadas por $\phi(x, y, z) = C$ (constante) (*véase* la Sección 17.3 donde se tratan las ecuaciones exactas en el plano). Obsérvese que la ecuación diferencial es exacta si y sólo si el campo vectorial $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ es conservativo y que ϕ es el potencial de $\mathbf{F}$.

Como son campos escalares en vez de campos vectoriales, los potenciales de campos vectoriales conservativos son más fáciles de manejar algebraicamente que los propios campos vectoriales. Por ejemplo, una suma de funciones potenciales es la función potencial de la suma de los correspondientes campos vectoriales. Un campo vectorial siempre se puede obtener a partir de su función potencial calculando el gradiente.

Ejemplo 1 **(El campo gravitatorio de una masa puntual es conservativo)** Demuestre que el campo gravitatorio $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -km(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3$ del Ejemplo 1 de la Sección 15.1 es conservativo donde está definido (es decir, en todo punto de $\mathbb{R}^3$ excepto en $\mathbf{r}_0$), demostrando que

$$\phi(x, y, z) = \frac{km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{km}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

es una función potencial de $\mathbf{F}$.

Solución Obsérvese que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-km(x - x_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} = \frac{-km(x - x_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = F_1(\mathbf{r})$$

y se pueden obtener fórmulas similares para las otras derivadas parciales de ϕ. Se deduce entonces que $\nabla\phi(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$ para $(x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$ y $\mathbf{F}$ es conservativo, excepto en $\mathbf{r}_0$. ■

Observación No es necesario escribir la expresión $km/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ en función de las componentes de $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, como hemos hecho en el Ejemplo 1, para calcular sus derivadas parciales. Presentamos a continuación una fórmula útil para obtener la derivada del módulo de una función vectorial $\mathbf{F}$ con respecto una variable x:

$$\frac{\partial}{\partial x}|\mathbf{F}| = \frac{\mathbf{F} \bullet \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{F}\right)}{|\mathbf{F}|}$$

Para ver que esto es así, expresamos $|\mathbf{F}| = \sqrt{\mathbf{F} \bullet \mathbf{F}}$ y calculamos su derivada utilizando la Regla de la Cadena y la Regla del Producto:

$$\frac{\partial}{\partial x}|\mathbf{F}| = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\mathbf{F} \bullet \mathbf{F}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{F} \bullet \mathbf{F}}}\, 2\mathbf{F} \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{F}\right) = \frac{\mathbf{F} \bullet \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{F}\right)}{|\mathbf{F}|}$$

Podemos comparar el resultado con la derivada del valor absoluto de una función de una variable:

$$\frac{d}{dx}|f(x)| = \operatorname{sgn}(f(x))f'(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}\, f'(x)$$

En el contexto del Ejemplo 1 tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{-km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}\frac{\partial}{\partial x}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \frac{-km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \bullet \mathbf{i}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{-km(x - x_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

con expresiones similares para las otras derivadas parciales de $km/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$.

Ejemplo 2 Demuestre que el campo de velocidades $\mathbf{v} = -\Omega y\mathbf{i} + \Omega x\mathbf{j}$, correspondiente a la rotación de un cuerpo rígido alrededor del eje z (*véase* el Ejemplo 2 de la Sección 15.1), no es conservativo si $\Omega \neq 0$.

Solución Hay dos formas de demostrar que no puede existir un potencial para $\mathbf{v}$. Una forma es intentar calcular un potencial $\phi(x, y)$ para el campo vectorial. Se requiere

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\Omega y \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Omega x$$

La primera de estas ecuaciones implica que $\phi(x, y) = -\Omega xy + C_1(y)$ (hemos integrado con respecto a x; el potencial puede depender todavía de y). De forma similar, la segunda ecuación implica que $\phi(x, y) = \Omega xy + C_2(x)$. Por tanto, debemos tener $-\Omega xy + C_1(y) = \Omega xy + C_2(x)$ o $2\Omega xy = C_1(x) - C_2(x)$ para todo (x, y). Esto no es posible para ninguna elección de las funciones de una variable $C_1(y)$ y $C_2(x)$, a menos que $\Omega = 0$.

De forma alternativa, si $\mathbf{v}$ tiene un potencial ϕ, entonces podemos formar las derivadas parciales mixtas de ϕ a partir de las dos ecuaciones anteriores y obtener

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = -\Omega \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \Omega$$

Esto no es posible si $\Omega \neq 0$ porque la suavidad de $\mathbf{v}$ implica que su potencial debe ser suave, por lo que las derivadas parciales mixtas deben ser iguales. Por tanto, no puede existir ϕ; $\mathbf{v}$ no es conservativo. ■

El Ejemplo 2 sugiere una condición que debe cumplir cualquier campo vectorial conservativo en el plano.

Condición necesaria para un campo vectorial conservativo en el plano

Si $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} = F_2(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo en un dominio D del plano xy, entonces la condición

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y)$$

se debe cumplir en todos los puntos de D.

¡¡ ATENCIÓN !!

No hay que confundir esta **condición necesaria** con una **condición suficiente** para garantizar que **F** es conservativo. Más adelante demostraremos que es necesario algo más que $\partial F_1/\partial y = \partial F_2/\partial x$ en D para garantizar que **F** es conservativo en D.

Para ver que esto es así, observemos que

$$F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} = \mathbf{F} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}$$

implica las dos ecuaciones escalares

$$F_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{y} \quad F_2 = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

y como las derivadas parciales mixtas de ϕ deben ser iguales,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Se obtiene una condición similar para campos vectoriales en el espacio tridimensional.

Condiciones necesarias para un campo vectorial conservativo en el espacio tridimensional

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ es un campo vectorial conservativo en un dominio D en el espacio tridimensional, entonces en todo punto de D se debe cumplir

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Superficies y curvas equipotenciales

Si $\phi(x, y, z)$ es una función potencial del campo vectorial conservativo **F**, entonces las *superficies de nivel* $\phi(x, y, z) = C$ de ϕ se denominan **superficies equipotenciales** de **F**. Como $\mathbf{F} = \nabla\phi$ es normal a estas superficies (allí donde no se anula), las líneas de campo de **F** siempre cortan a las superficies equipotenciales formando ángulos rectos. Por ejemplo, las superficies equipotenciales del campo de fuerzas gravitatorio creado por una masa puntual son esferas centradas en el punto donde está la masa; estas esferas son normales a las líneas de campo, que son rectas que pasan por el punto donde está la masa. De forma similar, para un campo vectorial conservativo

en el plano, las *curvas de nivel* de la función potencial se denominan **curvas equipotenciales** del campo vectorial. Son las **trayectorias ortogonales** a las líneas de campo; es decir, cortan a las líneas de campo formando ángulos rectos.

Ejemplo 3 Demuestre que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ es conservativo y calcule una función potencial de dicho campo. Describa las líneas de campo y las superficies equipotenciales.

Solución Como $\partial F_1/\partial y = 0 = \partial F_2/\partial x$ en todo punto de $\mathbb{R}^2$, podemos esperar que $\mathbf{F}$ sea conservativo. Cualquier función potencial ϕ debe cumplir

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 = x \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 = -y$$

La primera de estas ecuaciones permite obtener

$$\phi(x, y) = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1(y)$$

Obsérvese que, como la integral se toma con respecto a x, está permitido que la «constante» de integración dependa de la otra variable. Utilizamos ahora la segunda ecuación para obtener

$$-y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = C_1'(y) \quad \Rightarrow \quad C_1(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C_2$$

Por tanto, $\mathbf{F}$ es conservativo y, para cualquier constante C_2,

$$\phi(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + C_2$$

es una función potencial de $\mathbf{F}$. Las líneas de campo de $\mathbf{F}$ cumplen

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = -\ln|y| + \ln C_2 \quad \Rightarrow \quad xy = C_3$$

Las líneas de campo de $\mathbf{F}$ son, por tanto, hipérbolas rectangulares cuyas asíntotas son los ejes coordenados. Las curvas equipotenciales forman otra familia de hipérbolas rectangulares, $x^2 - y^2 = C_4$, cuyas asíntotas son las rectas $x = \pm y$. Las curvas de las dos familias se cortan formando ángulos rectos (*véase* la Figura 15.5). Nótese, sin embargo, que $\mathbf{F}$ no especifica una dirección en el origen y que la ortogonalidad se rompe allí; de hecho, ninguna familia tiene una única curva que pasa por ese punto.

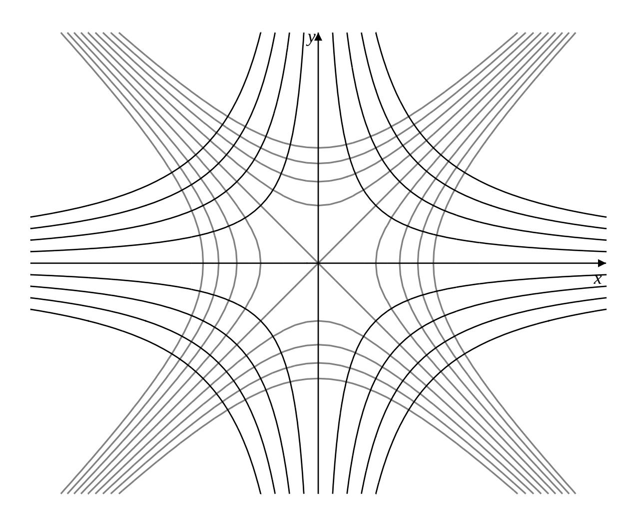


Figura 15.5 Líneas de campo (más oscuras) y curvas equipotenciales (más claras) del campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

Observación En el ejemplo anterior hemos obtenido el potencial ϕ integrando primero $\partial\phi/\partial x = F_1$. Podríamos haber empezado también integrando $\partial\phi/\partial y = F_2$, en cuyo caso la constante de integración habría dependido de x. Al final habríamos llegado al mismo valor de ϕ.

Ejemplo 4 Decida si el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (xy - \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)\mathbf{k}$$

es conservativo en $D = \{(x, y, z) : z \neq 0\}$, y calcule un potencial del mismo si lo es.

Solución Nótese que $\mathbf{F}$ no está definido cuando $z = 0$. Sin embargo, como

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = -\cos z = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{e^y}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

$\mathbf{F}$ puede ser todavía conservativo en dominios que no corten al plano xy en $z = 0$. Si esto se cumple, su potencial ϕ debe satisfacer

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = xy - \operatorname{sen} z, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{e^y}{z^2} - x\cos z \tag{*}$$

A partir de la primera ecuación de (*),

$$\phi(x, y, z) = \int (xy - \operatorname{sen} z)\,dx = \frac{1}{2}x^2 y - x\operatorname{sen} z + C_1(y, z)$$

Nótese de nuevo que la constante de integración puede ser una función de parámetros del integrando; sólo es constante con respecto a la variable de integración. Utilizando la segunda ecuación de (*), obtenemos

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\partial C_1(y,\ z)}{\partial y}$$

Así,

$$C_1(y, z) = -\int \frac{e^y}{z}\,dy = -\frac{e^y}{z} + C_2(z)$$

y

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 y - x\operatorname{sen} z - \frac{e^y}{z} + C_2(z)$$

Finalmente, utilizando la tercera ecuación de (*),

$$\frac{e^y}{z^2} - x\cos z = \frac{\partial\phi}{\partial z} = -x\cos z + \frac{e^y}{z^2} + C_2'(z)$$

Por tanto, $C_2'(z) = 0$ y $C_2(z) = C$ (una constante). De hecho, $\mathbf{F}$ es conservativo y, para cualquier constante C,

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 y - x\operatorname{sen} z - \frac{e^y}{z} + C$$

es una función potencial de $\mathbf{F}$ en el dominio dado D. C puede tener diferentes valores en las dos regiones $z > 0$ y $z < 0$, cuya unión constituye D. ■

Observación Si, en la solución anterior, en la ecuación diferencial de $C_1(y, z)$ hubiera intervenido x o si en la de $C_2(z)$ hubieran intervenido x o y, no habríamos podido calcular ϕ. Esto no ocurre debido a las tres condiciones sobre las derivadas parciales de F_1, F_2 y F_3 verificadas desde el principio.

Observación La existencia de un potencial para un campo vectorial depende de la *topología* del dominio del campo (es decir, si el dominio tiene *huecos* en su interior y qué clase de huecos), así como de la estructura de los componentes del propio campo. Aunque se cumplan las condiciones necesarias dadas anteriormente, un campo vectorial puede no ser conservativo en un dominio que tenga *huecos*. Volveremos sobre la naturaleza de los campos vectoriales conservativos en la Sección 15.4 y en el capítulo siguiente; demostraremos finalmente que las *condiciones necesarias* anteriores son también *suficientes* para garantizar que **F** es conservativo si el dominio de **F** cumple ciertas condiciones. Sin embargo, en este punto, sólo presentaremos un ejemplo en el que un campo vectorial plano no es conservativo en un dominio donde las condiciones necesarias, sin embargo, se cumplen.

Ejemplo 5 Para $(x, y) \neq (0, 0)$, se define un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y)$ y un campo escalar $\theta(x, y)$ como sigue:

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{j}$$

$\theta(x, y)$ es el ángulo en polares θ de (x, y) tal que $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

Por tanto, $x = r\cos\theta(x, y)$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta(x, y)$, con $r^2 = x^2 + y^2$. Verifique lo siguiente:

(a) $\dfrac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x} F_2(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.

(b) $\nabla\theta(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $0 < \theta < 2\pi$.

(c) **F** no es conservativo en todo el plano xy excluyendo el origen.

Solución

(a) Tenemos $F_1 = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ y $F_2 = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y)\end{aligned}$$

para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

(b) Diferenciamos implícitamente las ecuaciones $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ con respecto a x para obtener

$$1 = \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Eliminando $\partial r/\partial x$ de esta pareja de ecuaciones y despejando $\partial\theta/\partial x$ se llega a

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = F_1$$

De forma similar, la diferenciación con respecto a y produce

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = F_2$$

Estas fórmulas sólo se cumplen si $0 < \theta < 2\pi$; θ incluso no es continua en el eje x positivo; si $x > 0$, entonces

$$\lim_{y\to 0+} \theta(x, y) = 0 \qquad \text{pero} \qquad \lim_{y\to 0-} \theta(x, y) = 2\pi$$

Por tanto, $\nabla\theta = \mathbf{F}$ se cumple en todo punto del plano, excepto en los puntos $(x, 0)$ donde $x \geqslant 0$.

(c) Supongamos que **F** es conservativo en todo el plano excepto en el origen. Entonces $\mathbf{F} = \nabla\phi$ para alguna función escalar $\phi(x, y)$. Por tanto, $\nabla(\theta - \phi) = \mathbf{0}$ para $0 < \theta < 2\pi$, y $\theta - \phi = C$ (constante), o $\theta = \phi + C$. El miembro izquierdo de esta ecuación es discontinuo en el eje x positivo, pero el miembro derecho no lo es. Por tanto, los dos miembros no pueden ser iguales. Esta contradicción demuestra que **F** no puede ser conservativo en todo el plano excluyendo el origen.

Observación Obsérvese que en el ejemplo anterior el origen (0, 0) es un *hueco* en el dominio de **F**. Aunque **F** cumpla la condición necesaria para ser conservativo en todos los puntos excepto en este hueco, hay que eliminar del dominio de **F** unas semirrectas (rayos) o, de forma más general, una curva desde el origen hasta el infinito, para obtener la función potencial de **F**. **F** *no* es conservativo en ningún dominio que contenga una curva que rodee al origen. Los Ejercicios 22-24 de la Sección 15.4 arrojaran más luz sobre esta situación.

Fuentes, sumideros y dipolos

Imagine que el espacio tridimensional está relleno con un fluido incompresible emitido por una fuente puntual en el origen, con una velocidad de volumen de $dV/dt = 4\pi m$ (se dice que el origen es una **fuente** de fuerza m). Por simetría, el fluido fluye hacia afuera siguiendo líneas radiales desde el origen, con igual velocidad a igual distancia del origen en todas las direcciones, y el fluido emitido en el origen en algún instante $t = 0$ se habrá dispersado en el instante t sobre una superficie esférica de radio $r = r(t)$. Todo el fluido en el interior de esa esfera ha sido emitido en el intervalo temporal $[0, t]$, por lo que tenemos

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi m t$$

Diferenciando esta ecuación con respecto a t se obtiene $r^2(dr/dt) = m$, y la velocidad del fluido hacia el exterior a una distancia r del origen es $v(r) = m/r^2$. El campo de velocidades del fluido en movimiento es, por tanto,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v(r)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{m}{r^3}\mathbf{r}$$

Este campo de velocidades es conservativo (excepto en el origen) y su potencial es

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{m}{r}$$

Un **sumidero** es una fuente negativa. Un sumidero de fuerza m en el origen (que aniquila o absorbe fluido con una velocidad de $dV/dt = 4\pi m$) tiene un campo de velocidades y un potencial dados por

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r} \quad \text{y} \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{m}{r}$$

Los potenciales o los campos de velocidades de fuentes o sumideros localizados en otros puntos se obtienen por traslación de estas fórmulas; por ejemplo, el campo de velocidades de una fuente de fuerza m en un punto cuyo vector de posición es $\mathbf{r}_0$, es

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\nabla\left(\frac{m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}\right) = \frac{m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Es interesante comparar esto con el campo gravitatorio de una masa m situada en el origen. Las dos cosas son lo mismo, exceptuando un signo y una constante relacionada con las unidades de medida. Por esta razón, podemos ver una masa puntual como una fuente de su propio campo gravitatorio. De forma similar, el campo electrostático debido a una carga puntual q situada en $\mathbf{r}_0$

es el campo de una fuente (o sumidero si $q < 0$) de fuerza proporcional a q. Si se escogen las unidades de medida adecuadas tenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}\right) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

En general, las líneas de campo de un campo vectorial convergen a una fuente o sumidero de dicho campo.

Un **dipolo** es un sistema formado por una fuente y un sumidero de fuerzas iguales m separados una distancia corta ℓ. El producto $\mu = m\ell$ se denomina **momento dipolar**, y la recta que contiene la fuente y el sumidero se denomina **eje** del dipolo. Los dipolos físicos reales, como los imanes, se modelan frecuentemente como dipolos ideales, que son los límites de los dipolos reales cuando $m \to \infty$ y $\ell \to 0$, de forma que el momento dipolar μ permanece constante.

Ejemplo 6 Calcule el campo de velocidades, $\mathbf{v}(x, y, z)$, asociado a un dipolo de momento μ situado en el origen y cuyo eje coincide con el eje z.

Solución Comenzamos con una fuente de fuerza m en la posición $(0, 0, \ell/2)$ y un sumidero de fuerza m en $(0, 0, -\ell/2)$. El potencial de este sistema es

$$\phi(\mathbf{r}) = -m\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\,\ell\mathbf{k}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\,\ell\mathbf{k}|}\right)$$

El potencial del dipolo inicial es el límite del potencial de este sistema cuando $m \to \infty$ y $\ell \to 0$ de forma que $m\ell = \mu$:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}) &= \lim_{\substack{\ell\to 0\\ ml=\mu}} -m\left(\frac{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\,\ell\mathbf{k}| - |\mathbf{r} - \frac{1}{2}\,\ell\mathbf{k}|}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\,\ell\mathbf{k}|\,|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\,\ell\mathbf{k}|}\right)\\
&= -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^2}\lim_{\ell\to 0}\frac{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\,\ell\mathbf{k}| - |\mathbf{r} - \frac{1}{2}\,\ell\mathbf{k}|}{\ell}
\end{aligned}$$

Ahora utilizamos la Regla de l'Hôpital y la regla para diferenciar módulos de vectores:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mu}{|\mathrm{r}|^2}\lim_{\ell\to 0}\frac{\dfrac{(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\,\ell\mathrm{k})\bullet\frac{1}{2}\mathbf{k}}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\,\ell\mathbf{k}|} - \dfrac{(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\,\ell\mathrm{k})\bullet(-\frac{1}{2}\mathbf{k})}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\,\ell\mathbf{k}|}}{1}\\
&= -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^2}\lim_{\ell\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}\mathrm{z} + \frac{1}{4}\ell}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}|} + \frac{\frac{1}{2}\mathrm{z} - \frac{1}{4}\ell}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\ell\mathbf{k}|}\right)\\
&= -\frac{\mu z}{|\mathbf{r}|^3}
\end{aligned}$$

El campo de velocidades requerido es el gradiente de este potencial. Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{3\mu z}{|\mathbf{r}|^4}\,\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{i}}{|\mathbf{r}|} = \frac{2\mu xz}{|\mathbf{r}|^5}\\
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{3\mu yz}{|\mathbf{r}|^5}\\
\frac{\partial\phi}{\partial z} &= -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{3\mu z^2}{|\mathbf{r}|^5} = \frac{\mu(2z^2 - x^2 - y^2)}{|\mathbf{r}|^5}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{|\mathbf{r}|^5}\,(3xz\mathbf{i} + 3yz\mathbf{j} + (2z^2 - x^2 - y^2)\mathbf{k})$$

La Figura 15.6 muestra algunas líneas de corriente en una sección cruzada plana que contiene al eje z.

Figura 15.6 Líneas de corriente de un dipolo.

Ejercicios 15.2

En los Ejercicios 1-6, determine si los campos vectoriales dados son conservativos, y calcule un potencial si lo son.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ **4.** $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy - z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} - (2zx - y^2)\mathbf{k}$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}(xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$

7. Calcule el campo vectorial tridimensional cuyo potencial es

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}$$

8. Calcule $\nabla \ln|\mathbf{r}|$, siendo $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

9. Demuestre que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\,\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\,\mathbf{j} - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\,\mathbf{k}$$

es conservativo, y calcule su potencial. Describa las superficies equipotenciales. Calcule las líneas de campo de $\mathbf{F}$.

10. Repita el Ejercicio 9 para el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\,\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\,\mathbf{j} + \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)\mathbf{k}$$

11. Calcule el campo de velocidades debido a dos fuentes de fuerza m, una de ellas localizada en $(0, 0, \ell)$ y la otra en $(0, 0, -\ell)$. ¿Dónde se anula la velocidad? Calcule la velocidad en cualquier punto $(x, y, 0)$ del plano xy. ¿Dónde es máxima la velocidad en el plano xy?

∗**12.** Calcule el campo de velocidades de un sistema formado por una fuente de fuerza 2 en el origen y un sumidero de fuerza 1 en $(0, 0, 1)$. Demuestre que la velocidad es vertical en todos los puntos de una cierta esfera. Dibuje las líneas de corriente del flujo.

Los Ejercicios 13-18 presentan un análisis de fuentes y dipolos bidimensionales similar al realizado para tres dimensiones en el texto.

13. En un espacio tridimensional relleno con un fluido incompresible, se dice que el eje z es una **fuente de líneas** de fuerza m si todo intervalo Δz sobre ese eje emite fluido con una velocidad de volumen $dV/dt = 2\pi m\Delta z$. El fluido se expande de forma no simétrica en todas las direcciones perpendiculares al eje z. Demuestre que el campo de velocidades del flujo es

$$\mathbf{v} = \frac{m}{x^2 + y^2}\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

14. El flujo del Ejercicio 13 es bidimensional porque $\mathbf{v}$ depende sólo de x e y, y no tiene componente en la dirección de z. Considerado como un campo vectorial *plano*, es el campo de una fuente puntual tridimensional de fuerza m situada en el origen (es decir, el origen emite fluido con una velocidad de área $dA/dt = 2\pi m$). Demuestre que el campo vectorial es conservativo y calcule una función potencial $\phi(x, y)$ para dicho campo.

∗**15.** Calcule el potencial ϕ y el campo $\mathbf{F} = \nabla\phi$ de un dipolo bidimensional situado en el origen, cuyo eje

está en la dirección de y, y cuyo momento dipolar es μ. Este dipolo es el límite de un sistema formado por una fuente de fuerza m situada en $(0, \ell/2)$ y un sumidero de fuerza m situado en $(0, -\ell/2)$, cuando $\ell \to 0$ y $m \to \infty$ de forma que $m\ell = \mu$.

*16. Demuestre que las curvas equipotenciales del dipolo bidimensional del Ejercicio 15 son circunferencias tangentes al eje x en el origen.

*17. Demuestre que las líneas de corriente (líneas de campo) del dipolo bidimensional de los Ejercicios 15 y 16 son circunferencias tangentes al eje y en el origen. *Sugerencia*: Es posible demostrarlo geométricamente. Si se realiza planteando una ecuación diferencial, hay que encontrar el cambio de la variable dependiente

$$y = vx \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

adecuado para integrar la ecuación.

*18. Demuestre que el campo de velocidades de una fuente de líneas de fuerza $2m$ se puede obtener integrando en todo el eje z el campo de velocidades (tridimensional) de una fuente puntual de fuerza $m\,dz$ situada en $(0, 0, z)$. ¿Por qué corresponde la integral a una fuente lineal de fuerza $2m$ en vez de fuerza m? ¿Se puede obtener el potencial de la fuente lineal integrando los potenciales de las fuentes puntuales?

19. Demuestre que el gradiente de una función expresada en términos de coordenadas polares en el plano es

$$\nabla\phi(r, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Este ejercicio es una repetición del Ejercicio 16 en la Sección 12.7.

20. Utilice el resultado del Ejercicio 19 para demostrar que una condición necesaria para que el campo vectorial, expresado en coordenadas polares,

$$\mathbf{F}(r, \theta) = F_r(r, \theta)\hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r, \theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

sea conservativo es que

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - r\frac{\partial F_\theta}{\partial r} = F_\theta$$

21. Demuestre que $\mathbf{F} = r\,\mathrm{sen}\,2\theta\hat{\mathbf{r}} + r\cos 2\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es conservativo, y calcule un potencial del campo.

22. Calcule para qué valores de las constantes α y β es conservativo el campo vectorial

$$\mathbf{F} = r^2\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \alpha r^\beta\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Calcule un potencial de $\mathbf{F}$ si α y β tienen los valores calculados.

15.3 Integrales sobre curvas

La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ representa la *cantidad total* de una magnitud distribuida a lo largo del eje x, entre a y b, de acuerdo con un valor de *densidad lineal* $f(x)$ de dicha magnitud en el punto x. La cantidad de magnitud en un intervalo *infinitesimal* de longitud dx situado en x es $f(x)\,dx$, y la integral realiza las sumas de esas contribuciones (o *elementos*) infinitesimales, para obtener la cantidad total de magnitud. De forma similar, las integrales $\iint_D f(x, y)\,dA$ y $\iiint_R f(x, y, z)\,dV$ representan las cantidades totales de magnitudes distribuidas en regiones D del plano y R del espacio tridimensional, en función de las densidades de *área* o de *volumen* de esas magnitudes.

Puede ocurrir que una magnitud esté distribuida con una densidad lineal especificada en una *curva* en el plano o del espacio tridimensional, o con una densidad de área especificada en una *superficie* del espacio tridimensional. En estos casos es necesario utilizar *integrales sobre curvas* o *integrales sobre superficies* para sumar las contribuciones elementales y calcular la magnitud total. En esta sección y en la siguiente trataremos las integrales sobre curvas, y en las Secciones 15.5 y 15.6 las integrales sobre superficies.

Sea $\mathcal{C}$ una curva paramétrica continua y acotada en $\mathbb{R}^3$. Recuérdese (de la Sección 11.1) que $\mathcal{C}$ es una *curva suave* si tiene una parametrización de la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad t \text{ en el intervalo } I$$

con vector «velocidad» $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ continuo y distinto de cero. Denominaremos a $\mathcal{C}$ **arco suave** si es una curva suave con intervalo de parámetros *finito* $I = [a, b]$.

En la Sección 11.3 vimos cómo calcular la longitud de $\mathcal{C}$ subdividiéndola en arcos de corta longitud, utilizando los puntos correspondientes a los valores del parámetro

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

sumando las longitudes $|\Delta \mathbf{r}_i| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|$ de los segmentos lineales que unen estos puntos, y tomando el límite cuando la máxima distancia entre puntos adyacentes tiende a cero. La longitud se expresó como

$$\int_{\mathcal{C}} ds$$

y es un ejemplo especial de una integral sobre la curva $\mathcal{C}$ cuyo integrando es 1.

La integral sobre una curva de una función general $f(x, y, z)$ se puede definir de forma similar. Escogemos un punto (x_i^*, y_i^*, z_i^*) en el i-ésimo subarco y formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)|\Delta \mathbf{r}_i|$$

Si esta suma tiene un límite cuando $\max|\Delta \mathbf{r}_i| \to 0$, independiente de la elección particular de los puntos (x_i^*, y_i^*, z_i^*), entonces denominaremos a este límite **integral** de f sobre la curva $\mathcal{C}$ y la expresaremos como

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, ds$$

Si $\mathcal{C}$ es un arco suave y si f es continua en $\mathcal{C}$, entonces el límite existirá; su valor está dado por una integral definida de una función continua, como se demuestra en el párrafo siguiente. También existirá (para f continua) si $\mathcal{C}$ es **continua por tramos**, formada por un número finito de arcos suaves unidos por sus extremos; en este caso la integral de f sobre la curva $\mathcal{C}$ es la suma de las integrales de f sobre cada uno de los arcos suaves. Se pueden considerar también integrales impropias sobre curvas, cuando f tenga discontinuidades o cuando la longitud de una curva no sea finita.

Cálculo de integrales sobre curvas

La longitud de $\mathcal{C}$ se calculó expresando el elemento de longitud de arco $ds = |d\mathbf{r}/dt|\, dt$ en función de una parametrización $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$ de la curva, e integrando desde $t = a$ hasta $t = b$:

$$\text{longitud de } \mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$$

Las integrales sobre curvas más generales se pueden calcular de forma similar:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$$

Por supuesto, toda la exposición anterior se aplica de la misma forma en el caso de integrales de funciones $f(x, y)$ sobre curvas $\mathcal{C}$ en el plano xy.

Observación Hay que tener en cuenta que el valor de la integral de una función f sobre la curva $\mathcal{C}$ depende de f y de $\mathcal{C}$, pero no de la forma particular en la que $\mathcal{C}$ este parametrizada. Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(u)$, $\alpha \geqslant u \leqslant \beta$, es otra parametrización de la misma curva suave $\mathcal{C}$, entonces todo punto $\mathbf{r}(t)$ de $\mathcal{C}$ se puede expresar en función de la nueva parametrización como $\mathbf{r}^*(u)$, donde u depende de t: $u = u(t)$. Si $\mathbf{r}^*(u)$ recorre $\mathcal{C}$ en la misma dirección que $\mathbf{r}(t)$, entonces $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$ y

$du/dt \geqslant 0$; si $\mathbf{r}^*(u)$ recorre $\mathcal{C}$ en la dirección opuesta, entonces $u(a) = \beta$, $u(b) = \alpha$ y $du/dt \leqslant 0$. En cualquier caso,

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt = \int_a^b f(\mathbf{r}^*(u(t))) \left|\frac{d\mathbf{r}^*}{du}\,\frac{du}{dt}\right| dt = \int_\alpha^\beta f(\mathbf{r}^*(u)) \left|\frac{d\mathbf{r}^*}{du}\right| du$$

Por consiguiente, la integral sobre una curva es *independiente de la parametrización* de dicha curva $\mathcal{C}$. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 1 Una circunferencia de radio $a > 0$ está centrada en el origen del plano xy. Sea $\mathcal{C}$ la mitad de esta circunferencia que está en el semiplano $y \geqslant 0$. Utilice dos parametrizaciones diferentes de $\mathcal{C}$ para calcular el momento de $\mathcal{C}$ con respecto a $y = 0$.

Solución Se requiere calcular $\int_{\mathcal{C}} y\, ds$.

$\mathcal{C}$ se puede parametrizar como $\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$, $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$. Por tanto,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = a$$

y el momento de $\mathcal{C}$ con respecto a $y = 0$ es

$$\int_{\mathcal{C}} y\, ds = \int_0^\pi a\,\mathrm{sen}\,t\, a\, dt = -a^2 \cos t \Big|_0^\pi = 2a^2$$

$\mathcal{C}$ se puede parametrizar también como $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathbf{j}$, $(-a \leqslant x \leqslant a)$ y en este caso tenemos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dx} = \mathbf{i} - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathbf{j}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dx}\right| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Por tanto, el momento de $\mathcal{C}$ con respecto a $y = 0$ es

$$\int_{\mathcal{C}} y\, ds = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}\, \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = a \int_{-a}^a dx = 2a^2$$

Es reconfortante obtener el mismo resultado utilizando parametrizaciones diferentes. A diferencia de las integrales sobre curvas de campos vectoriales, que consideraremos en la sección siguiente, las integrales sobre curvas de campos escalares consideradas aquí no dependen de la dirección (orientación) de $\mathcal{C}$. Las dos parametrizaciones de la semicircunferencia eran en direcciones opuestas, pero se obtuvo el mismo resultado.

Las integrales sobre curvas dan lugar frecuentemente a integrales definidas que son muy difíciles o imposibles de calcular sin utilizar técnicas numéricas. Sólo las curvas muy simples o aquellas preparadas para llegar a expresiones simples de ds se pueden resolver calculando de forma exacta las integrales sobre ellas.

Ejemplo 2 Calcule el centroide de la hélice circular $\mathcal{C}$ dada por

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Solución Como se observó en el Ejemplo 5 de la Sección 11.3, en esta hélice $ds = \sqrt{a^2 + b^2}\,dt$. Sobre la hélice se tiene $z = bt$, por lo que su momento con respecto a $z = 0$ es

$$M_{z=0} = \int_{\mathcal{C}} z\, ds = b\sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} t\, dt = 2\pi^2 b\sqrt{a^2 + b^2}$$

Como la longitud de la hélice es $L = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$, la componente z de su centroide es $M_{z=0}/L = \pi b$. El momento de la hélice respecto a $x = 0$ es

$$M_{x=0} = \int_{\mathcal{C}} x\, ds = a\sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0$$

$$M_{y=0} = \int_{\mathcal{C}} y\, ds = a\sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\, dt = 0$$

Por tanto, el centroide es $(0, 0, \pi b)$. ■

Algunas veces la curva sobre la que se calcula una integral se especifica como la intersección de dos superficies con ecuaciones dadas. Normalmente es necesario parametrizar la curva para calcular una integral sobre ella. Recuérdese de la Sección 11.3 que si una de las superficies es un cilindro paralelo a uno de los ejes coordenados, en general es más fácil empezar parametrizando ese cilindro (o también combinar las ecuaciones para eliminar una variable y obtener así el cilindro sobre el que está la curva).

Ejemplo 3 Calcule la masa de un cable que recorre la parte del primer octante $\mathcal{C}$ de la curva intersección del paraboloide elíptico $z = 2 - x^2 - 2y^2$ y el cilindro parabólico $z = x^2$, entre $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$ (*véase* la Figura 15.7), si la densidad del cable en la posición (x, y, z) es $\delta(x, y, z) = xy$.

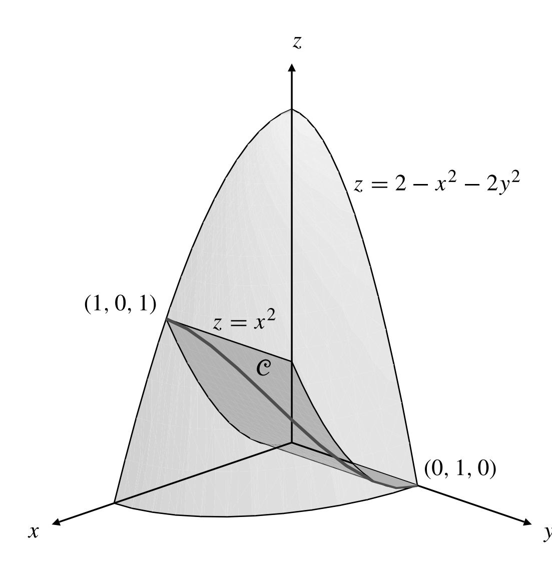


Figura 15.7 La curva de intersección de $z = x^2$ y $z = 2 - x^2 - 2y^2$.

Solución Necesitamos una parametrización adecuada de $\mathcal{C}$. Como la curva $\mathcal{C}$ está en el cilindro $z = x^2$, y x va de 0 a 1, podemos hacer $x = t$ y $z = t^2$. Por lo tanto, $2y^2 = 2 - x^2 - z = 2 - 2t^2$, por lo que $y^2 = 1 - t^2$. Como $\mathcal{C}$ está en el primer octante, se puede parametrizar como

$$x = t, \qquad y = \sqrt{1 - t^2}, \qquad z = t^2, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

Entonces, $dx/dt = 1$, $dy/dt = -t/\sqrt{1 - t^2}$ y $dz/dt = 2t$, por lo que

$$ds = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1 - t^2} + 4t^2}\, dt = \frac{\sqrt{1 + 4t^2 - 4t^4}}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$$

Por consiguiente, la masa del cable es

$$\begin{aligned}
m &= \int_{\mathcal{C}} xy\, ds = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,\frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \\
&= \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2-4t^4}\, dt \qquad \text{Sea } u = t^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+4u-4u^2}\, du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2-(2u-1)^2}\, du \qquad \text{Sea } v = 2u-1 \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^1 \sqrt{2-v^2}\, dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2-v^2}\, dv \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi+2}{8}
\end{aligned}$$

La integral final se calcula interpretándola como el área de parte un círculo. Se invita al lector a proporcionar los detalles. También se puede hacer mediante el cambio $v = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, w$. ■

Ejercicios 15.3

1. Demuestre que la curva $\mathcal{C}$ dada por

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathrm{sen}\, t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}^2 t\,\mathbf{j} + a\cos t\,\mathbf{k}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant \tfrac{\pi}{2})$$

está en la superficie de una esfera centrada en el origen. Calcule $\int_{\mathcal{C}} z\, ds$.

2. Sea $\mathcal{C}$ la hélice cónica cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t\cos t$, $y = t\,\mathrm{sen}\, t$, $z = t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Calcule $\int_{\mathcal{C}} z\, ds$.

3. Calcule la masa de un cable que sigue la curva

$$\mathbf{r} = 3t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

si la densidad en $\mathbf{r}(t)$ es de $1 + t$ g/unidad de longitud.

4. Demuestre que la curva $\mathcal{C}$ del Ejemplo 3 admite también una parametrización de la forma $x = \cos t$, $y = \mathrm{sen}\, t$, $z = \cos^2 t$, $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$, y recalcule la masa del cable de dicho ejemplo utilizando esta parametrización.

5. Calcule el momento de inercia respecto al eje z (es decir, el valor de $\delta \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\, ds$) de un cable de densidad constante δ que sigue la curva $\mathcal{C}$: $\mathbf{r} = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathrm{sen}\, t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$.

6. Calcule $\int_{\mathcal{C}} e^z\, ds$, siendo $\mathcal{C}$ la curva del Ejercicio 5.

7. Calcule $\int_{\mathcal{C}} x^2\, ds$ sobre la recta de intersección de los planos $x - y + z = 0$ y $x + y + 2z = 0$, desde el origen al punto $(3, 1, -2)$.

8. Calcule $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{1 + 4x^2z^2}\, ds$, siendo $\mathcal{C}$ la curva de intersección de las superficies $x^2 + z^2 = 1$ y $y = x^2$.

9. Calcule la masa y el centro de masa de un cable que tiene la forma de la hélice circular $x = \cos t$, $y = \mathrm{sen}\, t$, $z = t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, si la densidad lineal del cable es $\delta(x, y, z) = z$.

10. Repita el Ejercicio 9 para la parte de cable correspondiente a $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

11. Calcule el momento de inercia alrededor del eje y, es decir,

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + z^2)\, ds$$

de la curva $x = e^t$, $y = \sqrt{2}t$, $z = e^{-t}$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

12. Calcule el centroide de la curva del Ejercicio 11.

***13.** Calcule $\int_{\mathcal{C}} x\, ds$, en la parte del primer octante de la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $z = x$.

***14.** Calcule $\int_{\mathcal{C}} z\, ds$ en la parte de la curva $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y = 1$ con $z \geqslant 0$.

***15.** Calcule $\int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{(2y^2+1)^{3/2}}$, siendo $\mathcal{C}$ la parábola $z^2 = x^2 + y^2$, $x + z = 1$. *Sugerencia*: Utilice $y = t$ como parámetro.

16. Exprese como una integral definida, sin intentar calcularla, el valor de $\int_{\mathcal{C}} xyz\, ds$, siendo $\mathcal{C}$ la curva $y = x^2$, $z = y^2$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(2, 4, 16)$.

***17.** La función

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

se denomina **función integral elíptica de segunda clase**. La **integral elíptica completa** de segunda clase es la función $E(k) = E(k, \pi/2)$. Exprese mediante estas funciones la longitud de una revolución completa de la hélice elíptica

$$x = a\cos t, \qquad y = b \operatorname{sen} t, \qquad z = ct$$

siendo $0 < a < b$. ¿Cuál es la longitud de la parte de la hélice que está entre $t = 0$ y $t = T$, con $0 < T < \pi/2$?

***18.** Calcule $\int_L \frac{ds}{x^2 + y^2}$, siendo L la recta de ecuación $Ax + By = C$, $(C \neq 0)$. *Sugerencia*: Utilice la simetría de la integral para sustituir la recta por otra con una ecuación más simple, pero que no cambie el valor de la integral.

15.4 Integrales sobre curvas de campos vectoriales

En física elemental el **trabajo** realizado por una fuerza constante de módulo F al mover un objeto una distancia d se define como el producto de F y d: $W = Fd$. Existe, sin embargo, una salvedad: se supone que la fuerza se realiza en la dirección de movimiento del objeto. Si el objeto se mueve en una dirección diferente a la de la fuerza (debido a otras fuerzas que actúan sobre él), entonces el trabajo realizado por una fuerza particular es el producto de la distancia recorrida por la componente de la fuerza en la dirección del movimiento. Por ejemplo, el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad al deslizar un cajón de 10 kg una distancia de 5 m por una rampa con una inclinación de 45º respecto a la horizontal es $W = 50g/\sqrt{2}$ N · m (siendo $g = 9.8$ m/s^2), ya que la proyección escalar de la fuerza gravitatoria de $10g$ N sobre el cajón en la dirección de la rampa es $10g/\sqrt{2}$ N.

El trabajo realizado por una fuerza *variable* $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, que depende de forma continua de la posición, al mover un objeto por la curva suave $\mathcal{C}$, es la integral de los *elementos de trabajo* dW. El elemento dW correspondiente al elemento de longitud de arco ds en la posición $\mathbf{r}$ sobre $\mathcal{C}$ es ds veces la componente tangencial de la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ sobre $\mathcal{C}$ en la dirección del movimiento (*véase* la Figura 15.8). Como $\hat{\mathbf{T}} = d\mathbf{r}/ds$ es la tangente unidad a $\mathcal{C}$.

$$dW = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{T}}\, ds = \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

Por tanto, el trabajo total realizado por $\mathbf{F}$ al mover un objeto sobre $\mathcal{C}$ es

$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{T}}\, ds = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$$

en general, si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ es un campo vectorial continuo, y $\mathcal{C}$ es una curva suave orientada, entonces la **integral sobre la curva $\mathcal{C}$ de la componente tangencial de F** es

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{T}}\, ds$$
$$= \int_{\mathcal{C}} F_1(x, y, z)\, dx + F_2(x, y, z)\, dy + F_3(x, y, z)\, dz$$

Esta integral se denomina a veces, de forma algo inapropiada, integral de $\mathbf{F}$ sobre la curva $\mathcal{C}$ (no es una integral de $\mathbf{F}$ sobre una curva, que debería dar como resultado un vector, sino una integral

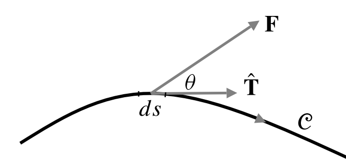


Figura 15.8 $dW = |\mathbf{F}| \cos\theta\, ds$
$= \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{T}}\, ds.$

sobre una curva de la *componente tangencial* de **F**, que es un valor escalar). A diferencia de la integral sobre una curva considerada en la sección anterior, esta integral depende de la dirección de la orientación de $\mathcal{C}$, y si se cambia la orientación de $\mathcal{C}$, la integral cambia de signo.

Si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada, la integral sobre dicha curva $\mathcal{C}$ de la componente tangencial de **F** se denomina **circulación** de **F** sobre $\mathcal{C}$. El hecho de que la curva es cerrada se suele indicar mediante una pequeña circunferencia dibujada sobre el signo integral;

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \text{ indica la circulación de } \mathbf{F} \text{ sobre la curva cerrada } \mathcal{C}$$

Como las integrales sobre curvas estudiadas en la sección anterior, una integral sobre una curva de un campo vectorial continuo se convierte en una integral definida ordinaria mediante una parametrización del camino de integración. Dado un arco suave $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $(a \leqslant t \leqslant b)$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F} \bullet \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt \\ &= \int_a^b \left[F_1(x(t), y(t), z(t))\, \frac{dx}{dt} + F_2(x(t), y(t), z(t))\, \frac{dy}{dt} \right. \\ &\qquad \left. + F_3(x(t), y(t), z(t))\, \frac{dz}{dt} \right] dt\end{aligned}$$

Aunque este tipo de integral sobre curvas cambia de signo si se invierte el sentido de recorrido de $\mathcal{C}$, por lo demás es independiente de la parametrización utilizada para $\mathcal{C}$. Se cumple también que una integral sobre una curva suave por tramos es la suma de las integrales sobre cada uno de los arcos suaves que forman la curva completa.

Ejemplo 1 Sea $\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$. Calcule la integral

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

desde (0, 0) hasta (1, 1) sobre las curvas:

(a) La recta $y = x$.
(b) La curva $y = x^2$.
(c) La curva suave por tramos formada por los segmentos de rectas desde (0, 0) hasta (0, 1) y desde (0, 1) hasta (1, 1).

Solución La Figura 15.9 muestra los tres caminos. El camino recto (a) se puede parametrizar como $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Por tanto, $d\mathbf{r} = dt\mathbf{i} + dt\mathbf{j}$ y

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = (t^2\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}) \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j})\, dt = 3t^2\, dt$$

Por tanto,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^1 3t^2\, dt = t^3 \Big|_0^1 = 1$$

Figura 15.9 Tres caminos desde (0, 0) hasta (1, 1).

El camino parabólico (b) se puede parametrizar como $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, por lo que $d\mathbf{r} = dt\mathbf{i} + 2t\,dt\mathbf{j}$. Entonces,

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = (t^4\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}) \bullet (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j})\,dt = 5t^4\,dt$$

y

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^1 5t^4\,dt = t^5\Big|_0^1 = 1$$

El tercer camino (c) está formado por dos segmentos, y parametrizaremos cada uno de ellos por separado. Utilizaremos y como parámetro del segmento vertical (con $x = 0$ y $dx = 0$), y x como parámetro del segmento horizontal (con $y = 1$ y $dy = 0$):

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}} y^2\,dx + 2xy\,dy \\ &= \int_0^1 (0)\,dy + \int_0^1 (1)\,dx = 1\end{aligned}$$

En vista de estos resultados, podríamos preguntarnos si $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ vale lo mismo siguiendo *cualquier* camino desde (0, 0) hasta (1, 1).

Ejemplo 2 Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. Calcule $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ desde (1, 0) hasta (0, −1) por:

(a) El segmento recto que une esos puntos.
(b) Los tres cuartos de circunferencia de radio unidad centrada en el origen que se recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Solución La Figura 15.10 muestra los dos caminos. El camino recto (a) se puede parametrizar como

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{i} - t\mathbf{j}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Por tanto, $d\mathbf{r} = -dt\mathbf{i} - dt\mathbf{j}$ y

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^1 ((-t)(-dt) - (1 - t)(-dt)) = \int_0^1 dt = 1$$

El camino circular (b) se puede parametrizar como

$$\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

por lo que $d\mathbf{r} = -\operatorname{sen} t\,dt\mathbf{i} + \cos t\,dt\mathbf{j}$. Entonces,

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -\operatorname{sen}^2 t\,dt - \cos^2 t\,dt = -dt$$

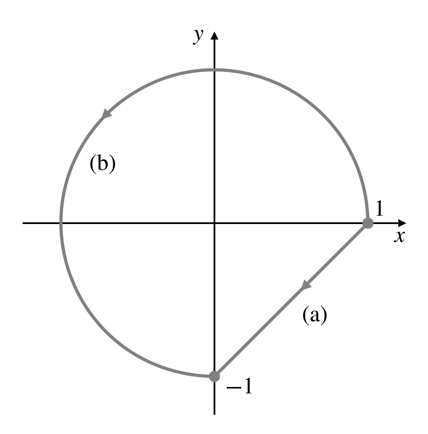


Figura 15.10 Dos caminos desde (1, 0) hasta (0, −1).

y tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -\int_0^{3\pi/2} dt = -\frac{3\pi}{2}$$

En este caso la integral sobre la curva depende del camino seguido desde (1, 0) hasta (0, −1) por el que se realiza la integral.

Algunos lectores habrán notado que en el Ejemplo 1 anterior el campo vectorial **F** es conservativo, mientras que en el Ejemplo 2 no lo es. El Teorema 1 posterior confirma la relación existente entre *independencia del camino* en una integral sobre una curva de la componente tangencial de un campo vectorial y la existencia de una función potencial asociada a dicho campo. Este teorema y los posteriores requieren suposiciones específicas sobre la naturaleza del dominio del campo vectorial **F**, por lo que necesitamos formular algunas definiciones topológicas.

Dominios conexos y simplemente conexos

Recordemos que un conjunto S en el plano (en el espacio tridimensional) es abierto si todo punto de S en el centro de un disco (o bola) con radio positivo suficientemente pequeño está contenido en S. Si S es abierto y B es un conjunto (que puede ser vacío) de puntos en la frontera de S, entonces el conjunto $D = S \cup B$ se denomina **dominio**. Un dominio no puede contener puntos aislados. Puede ser cerrado, pero debe tener puntos interiores cerca de cualquier punto frontera (*véase* la Sección 10.1, donde se presentan los conjuntos abiertos y cerrados, y los puntos interiores y frontera).

DEFINICIÓN 2

Se dice que un dominio D es **conexo** si toda pareja de puntos P y Q pertenecientes a D se puede unir mediante una curva suave por tramos que está contenida en D.

Por ejemplo, el conjunto de puntos (x, y) del plano que cumplen $x > 0$, $y > 0$ y $x^2 + y^2 \leqslant 4$ es un dominio conexo, pero el conjunto de puntos que cumplen $|x| > 1$ no es conexo (no hay un camino desde $(-2, 0)$ hasta $(2, 0)$ que esté completamente contenido en $|x| > 1$). El conjunto de puntos (x, y, z) en el espacio tridimensional que cumplen $0 < z < 1$ es un dominio conexo, pero el conjunto de puntos que cumplen $z \neq 0$ no lo es.

Se dice que una curva cerrada es **simple** si no tiene intersecciones consigo misma excepto en su punto de comienzo y de final (por ejemplo, una circunferencia es una curva cerrada simple). Imaginemos una banda elástica que se adapta a una curva de este tipo. Si la banda es infinitamente compresible, se puede contraer hasta un único punto.

DEFINICIÓN 3

Un **dominio** D **simplemente conexo** es un dominio conexo en el que toda *curva cerrada simple* se puede contraer hasta un solo punto de D sin que en ningún momento ninguna parte de dicha curva se salga de D.

La Figura 15.11 muestra un dominio simplemente conexo en el plano. La Figura 15.12 muestra un dominio conexo, pero no simplemente conexo (una curva cerrada que rodee al hueco no se puede contraer en un punto sin salirse de D). El dominio de la Figura 15.13 es no conexo. Está formado por dos *componentes*, y los puntos de componentes diferentes no se pueden unir por una curva contenida completamente en D.

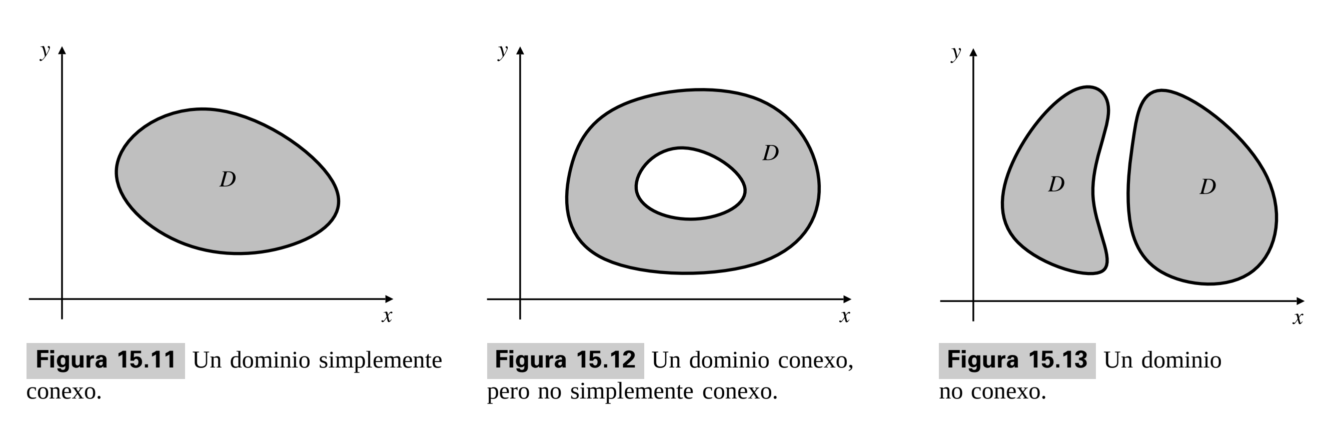


Figura 15.11 Un dominio simplemente conexo.

Figura 15.12 Un dominio conexo, pero no simplemente conexo.

Figura 15.13 Un dominio no conexo.

En el plano, un dominio D simplemente conexo no puede contener huecos, ni siquiera un hueco formado por un único punto. El interior de toda curva cerrada que no se corte a sí misma en un dominio D de este tipo pertenece a dicho dominio. Por ejemplo, el dominio de la función $1/(x^2 + y^2)$ no es simplemente conexo porque el origen no le pertenece (el origen es un «hueco» en ese dominio). En el espacio tridimensional, un dominio simplemente conexo puede tener huecos. El conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ diferentes del origen es simplemente conexo, como también lo es el exterior de una bola. Pero el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^3$ que cumplen $x^2 + y^2 > 0$ no es simplemente conexo. Tampoco lo es el interior de un dónut (un *toro*). En general, las condiciones siguientes caracterizan dominios D simplemente conexos:

(i) Cualquier curva cerrada simple en D es la frontera de una «superficie» contenida en D.
(ii) Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son dos curvas en D con los mismos extremos, entonces $\mathcal{C}_1$ se puede deformar de forma continua hasta hacerla coincidir con $\mathcal{C}_2$, permaneciendo en D durante todo el proceso de deformación.

Independencia del camino

TEOREMA 1 **Independencia del camino**

Sea D un dominio abierto y conexo, y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial suave definido en D. Entonces las siguientes afirmaciones son *equivalentes* en el sentido de que, si una de ellas es cierta, también lo son las otras dos:

(a) $\mathbf{F}$ es conservativo en D.

(b) $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0$ para toda curva $\mathcal{C}$ cerrada y suave en D.

(c) Dados dos puntos cualesquiera P_0 y P_1, pertenecientes a D, $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ tiene el mismo valor para todas las curvas suaves por tramos en D que empiecen en P_0 y terminen en P_1.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos que (a) implica (b), que (b) implica (c), y que (c) implica (a). Eso querrá decir entonces que cada una de ellas implica las otras dos.

Supongamos que (a) es cierta. Entonces $\mathbf{F} = \nabla\phi$ para alguna función potencial escalar ϕ definida en D. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \bullet (dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,dz = d\phi\end{aligned}$$

Si $\mathcal{C}$ es cualquier curva cerrada y suave por tramos, parametrizada, por ejemplo, como $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$, entonces $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ y

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d\phi(\mathbf{r}(t))}{dt}\,dt = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) = 0$$

Por tanto, (a) implica (b).

Supongamos ahora que (b) es cierta. Sean P_0 y P_1 dos puntos en D, y sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos curvas suaves por tramos en D que van desde P_0 hasta P_1. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ la curva cerrada que va desde P_0 hasta P_1 por $\mathcal{C}_1$ y vuelve después a P_0 por $\mathcal{C}_2$ en la dirección opuesta (*véase* la Figura 15.14). Como estamos suponiendo que (b) es cierta, tenemos que

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

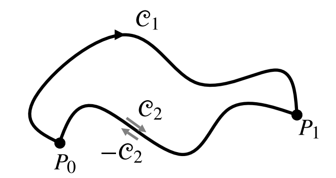


Figura 15.14 $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 + (-\mathcal{C}_2)$ es una curva cerrada.

Por tanto,

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

y hemos demostrado que (b) implica (c).

Finalmente, supongamos que (c) es cierta. Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo en el dominio D, y sea $P = (x, y, z)$ un punto arbitrario en dicho dominio. Definamos una función ϕ como

$$\phi(x, y, z) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

siendo $\mathcal{C}$ alguna curva suave por tramos en D desde P_0 hasta P (bajo las hipótesis del teorema tal curva existe y, como estamos suponiendo que (c) es cierta, la integral tiene el mismo valor en todas esas curvas; por lo tanto, ϕ está bien definida en D). Demostraremos que $\nabla\phi = \mathbf{F}$, y por tanto que $\mathbf{F}$ es conservativo y tiene potencial ϕ.

Es suficiente demostrar que $\partial\phi/\partial x = F_1(x, y, z)$, ya que las otras dos componentes se tratan de forma similar. Como D es abierto, existe una bola de radio positivo centrada en P y contenida en D. Seleccionemos un punto de esta bola (x_1, y, z) con $x_1 < x$. Nótese que la recta que va de este punto a P es paralela al eje x. Como somos libres de elegir la curva $\mathcal{C}$

en la integral de definición de ϕ, elegiremos una formada por dos segmentos: $\mathcal{C}_1$, que es suave por tramos, y va de (x_0, y_0, z_0) a (x_1, y, z), y $\mathcal{C}_2$, un segmento de recta desde (x_1, y, z) hasta (x, y, z) (*véase* la Figura 15.15). Entonces,

$$\phi(x, y, z) = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

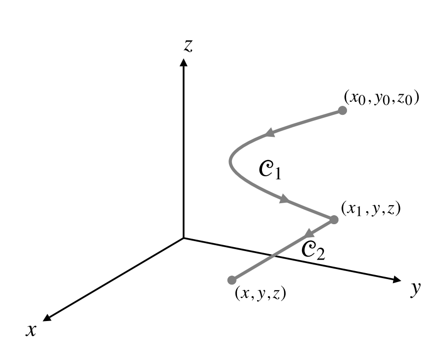


Figura 15.15 Un camino especial de P_0 a P_1.

La primera integral no depende de x, por lo que su derivada con respecto a x es cero. El camino recto de la segunda integral se parametriza como $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, con $x_1 \leqslant t \leqslant x$, por lo que $d\mathbf{r} = dt\mathbf{i}$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^{x} F_1(t, y, z)\, dt = F_1(x, y, z)$$

que es lo que queríamos demostrar. Por tanto, $\mathbf{F} = \nabla\phi$ es conservativo, y (c) implica (a).

Observación Es muy fácil calcular la integral sobre una curva $\mathcal{C}$ de la componente tangencial de un campo vectorial *conservativo* cuando se conoce un potencial de $\mathbf{F}$. Si $\mathbf{F} = \nabla\phi$ y $\mathcal{C}$ va desde P_0 a P_1, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} d\phi = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

Como se indicó anteriormente, el valor de la integral depende sólo de los extremos de $\mathcal{C}$.

Observación En el capítulo siguiente añadiremos otra condición a la lista de condiciones equivalentes de Teorema 1, suponiendo que el dominio D es *simplemente conexo*. Dado un dominio de este tipo, cada una de las tres condiciones del teorema equivale a

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Ya sabemos que estas ecuaciones se cumplen en un dominio donde $\mathbf{F}$ sea conservativo. El Teorema 4 de la Sección 16.2 indica que, si se cumplen las tres ecuaciones anteriores en un dominio simplemente conexo, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo en dicho dominio.

Ejemplo 3 Indique para qué valor de las constantes A y B es conservativo el campo vectorial

$$\mathbf{F} = Ax\,\mathrm{sen}\,(\pi y)\mathbf{i} + (x^2 \cos(\pi y) + Bye^{-z})\mathbf{j} + y^2 e^{-z}\mathbf{k}$$

Para ese valor de A y B, calcule $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, siendo $\mathcal{C}$:

(a) La curva $\mathbf{r} = \cos t\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,2t\mathbf{j} + \mathrm{sen}^2 t\mathbf{k}$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.
(b) La curva de intersección del paraboloide $z = x^2 + 4y^2$ y el plano $z = 3x - 2y$, de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1/2, 2)$.

Solución $\mathbf{F}$ no puede ser conservativo a menos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

es decir, a menos que

$$A\pi x \cos(\pi y) = 2x \cos(\pi y), \qquad 0 = 0 \quad \text{y} \quad -Bye^{-z} = 2ye^{-z}$$

Por tanto, se requiere que $A = 2/\pi$ y $B = -2$. En este caso, se puede comprobar fácilmente que

$$\mathbf{F} = \nabla\phi, \quad \text{siendo } \phi(x, y, z) = \frac{x^2 \operatorname{sen}(\pi y)}{\pi} - y^2 e^{-z}$$

Para la curva (a), tenemos que $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} = \mathbf{r}(2\pi)$, por lo que se trata de una curva cerrada, y

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} \nabla\phi \bullet d\mathbf{r} = 0$$

Como la curva (b) empieza en (0, 0, 0) y termina en (1, 1/2, 2), tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \left(\frac{x^2 \operatorname{sen}(\pi y)}{\pi} - y^2 e^{-z}\right)\Bigg|_{(0,0,0)}^{(1,1/2,1)} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4e^2}$$

El ejemplo que sigue muestra cómo explotar el hecho de que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

se calcula fácilmente en el caso de $\mathbf{F}$ conservativo incluso si el campo $\mathbf{F}$ que deseamos integrar no es conservativo.

Ejemplo 4 Calcule $I = \oint_{\mathcal{C}} (e^x \operatorname{sen} y + 3y)\,dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\,dy$ en sentido contrario al de las agujas del reloj por la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

Solución $I = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F}$ el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (e^x \operatorname{sen} y + 3y)\mathbf{i} + (e^x \cos y + 2x - 2y)\mathbf{j}$$

Este campo vectorial no es conservativo, pero lo sería si el término $3y$ en F_1 fuera $2y$; concretamente, si

$$\phi(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + 2xy - y^2$$

entonces $\mathbf{F} = \nabla\phi + y\mathbf{i}$, la suma de una parte conservativa y una parte no conservativa. Por tanto, tenemos

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \nabla\phi \bullet d\mathbf{r} + \oint_{\mathcal{C}} y\,dx$$

La primera integral es cero ya que $\nabla\phi$ es conservativo y $\mathcal{C}$ es una curva cerrada. Para resolver la segunda integral, parametrizamos $\mathcal{C}$ como $x = \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, con lo que se obtiene

$$I = \oint_{\mathcal{C}} y\,dx = -2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt = -2\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2}\,dt = -2\pi$$

Ejercicios 15.4

En los Ejercicios 1-6, calcule la integral de la componente tangencial de los campos vectoriales dados sobre las curvas dadas.

1. $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$ sobre $y = x^2$, desde (0, 0) hasta (1, 1).

2. $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$ sobre $y = \operatorname{sen} x$, desde (0, 0) hasta $(\pi, 0)$.

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k}$ sobre la recta que va desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, 1).

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k}$ sobre la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, 1).

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ desde $(-1, 0, 0)$ hasta (1, 0, 0), sobre las dos direcciones de la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = y$.

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}$ sobre el camino poligonal que va desde (0, 0, 0), pasando por (1, 0, 0) y por (1, 1, 0), hasta (1, 1, 1).

7. Calcule el trabajo realizado por el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (z - y)\mathbf{k}$$

al mover un objeto desde $(1, 0, -1)$ hasta $(0, -2, 3)$ siguiendo una curva suave.

8. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} x^2y^2\,dx + x^3y\,dy$ sobre el cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (1, 0), (1, 1) y (0, 1) en sentido contrario al de las agujas del reloj.

9. Calcule

$$\int_{\mathcal{C}} e^{x+y}\operatorname{sen}(y+z)\,dx + e^{x+y}(\operatorname{sen}(y+z) + \cos(y+z))\,dy + e^{x+y}\cos(y + z)\,dz$$

sobre el segmento recto que va desde (0, 0, 0) hasta $(1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

10. El campo $\mathbf{F} = (axy + z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (bx + 2z)\mathbf{k}$ es conservativo. Calcule a y b, y un potencial de $\mathbf{F}$. Calcule también $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, siendo $\mathcal{C}$ la curva, desde (1, 1, 0) hasta (0, 0, 3), que es la intersección de las superficies $2x + y + z = 3$ y $9x^2 + 9y^2 + 2z^2 = 18$, en el octante $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

11. Determine los valores de A y B para los que el campo vectorial

$$\mathbf{F} = Ax\ln z\,\mathbf{i} + By^2z\,\mathbf{j} + \left(\frac{x^2}{z} + y^3\right)\mathbf{k}$$

es conservativo. Si $\mathcal{C}$ es la recta que va desde (1, 1, 1) hasta (2, 1, 2), calcule

$$\int_{\mathcal{C}} 2x\ln z\,dx + 2y^2z\,dy + y^3\,dz$$

12. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza

$$\mathbf{F} = (y^2\cos x + z^3)\mathbf{i} + (2y\operatorname{sen} x - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$$

al mover una partícula por la curva $x = \operatorname{sen}^{-1} t$, $y = 1 - 2t$, $z = 3t - 1$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

13. Si $\mathcal{C}$ es la intersección de $z = \ln(1 + x)$ e $y = x$, desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, ln 2), calcule

$$\int_{\mathcal{C}} (2x\operatorname{sen}(\pi y) - e^z)\,dx + (\pi x^2\cos(\pi y) - 3e^z)\,dy - xe^z\,dz$$

14. ¿Es un dominio alguno de los conjuntos siguientes? ¿Es un dominio simplemente conexo?

(a) El conjunto de puntos (x, y) del plano tales que $x > 0$ e $y \geqslant 0$.

(b) El conjunto de puntos (x, y) del plano tales que $x = 0$ e $y \geqslant 0$.

(c) El conjunto de puntos (x, y) del plano tales que $x \neq 0$ e $y > 0$.

(d) El conjunto de puntos (x, y, z) del espacio tridimensional tales que $x^2 > 1$.

(e) El conjunto de puntos (x, y, z) del espacio tridimensional tales que $x^2 + y^2 > 1$.

(f) El conjunto de puntos (x, y, z) del espacio tridimensional tales que $x^2 + y^2 + z^2 > 1$.

En los Ejercicios 15-19, calcule las integrales sobre curvas cerradas

(a) $\oint_{\mathcal{C}} x\,dy$, (b) $\oint_{\mathcal{C}} y\,dx$

siguiendo las curvas dadas, todas en sentido contrario al de las agujas del reloj.

15. La circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

16. La elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

17. La frontera del semidisco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $y \geqslant 0$.

18. La frontera del cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (1, 0), (1, 1) y (0, 1).

19. El triángulo cuyos vértices son (0, 0), $(a, 0)$ y $(0, b)$.

20. Sobre la base de los resultados obtenidos en los Ejercicios 15-19, plantee cuáles pueden ser los valores de las integrales sobre curvas cerradas

(a) $\oint_{\mathcal{C}} x\,dy$, (b) $\oint_{\mathcal{C}} y\,dx$

para toda curva cerrada que no se corta a sí misma en el plano xy. Demuestre su respuesta en el caso de que $\mathcal{C}$ limite una región del plano que sea simple en x y en y. (*Véase* la Sección 14.2)

21. Si f y g son campos escalares con derivadas parciales primeras continuas en un dominio conexo D, demuestre que

$$\int_{\mathcal{C}} f\nabla g \bullet d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}} g\nabla f \bullet d\mathbf{r} = f(Q)g(Q) - f(P)g(P)$$

para toda curva suave por tramos en D desde P hasta Q.

22. Calcule

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

(a) Sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.
(b) Sobre el cuadrado de vértices $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$ y $(1, -1)$, en el sentido de las agujas del reloj.
(c) Sobre la frontera de la región $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, $y \geqslant 0$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

23. Revise el Ejemplo 5 de la Sección 15.2, en el que se demostró que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. ¿Por qué este resultado, junto con el del Ejercicio 22, no contradicen la observación que se presenta tras demostrar el Teorema 1?

***24. (Número de vueltas)** Sea $\mathcal{C}$ una curva suave por tramos en el plano xy que no pasa por el origen. Sea $\theta = \theta(x, y)$ la coordenada polar angular del punto $P = (x, y)$, donde $\mathcal{C}$ no está limitado a un intervalo de longitud 2π, sino que varía de forma continua a medida que P se mueve desde un extremo de $\mathcal{C}$ al otro. Como en el Ejemplo 5 de la Sección 15.2, sucede que

$$\nabla\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$$

Si además $\mathcal{C}$ es una curva cerrada, demuestre que

$$w(\mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

tiene un valor entero, w, que se denomina **número de vueltas** de $\mathcal{C}$ alrededor del origen.

15.5 Superficies e integrales de superficie

Esta sección y la siguiente están dedicadas a las integrales de funciones definidas sobre superficies en el espacio tridimensional. Antes de empezar, es necesario precisar más el significado del término «superficie». Hasta ahora hemos considerado las superficies de una forma intuitiva, bien como gráficas de funciones $f(x, y)$ o bien como gráficas de ecuaciones $f(x, y, z) = 0$.

Una curva suave es un objeto *unidimensional*, porque los puntos sobre ella se sitúan proporcionando *una coordenada* (por ejemplo, la distancia a uno de sus extremos). Por tanto, la curva se puede definir como el rango de función vectorial de una variable real. Una superficie es un objeto *bidimensional*. Los puntos sobre ella se localizan utilizando *dos coordenadas*, y se puede definir como el rango de una función vectorial de dos variables reales. Denominaremos a ciertas funciones de ese tipo superficies paramétricas.

Superficies paramétricas

DEFINICIÓN 4

Una **superficie paramétrica** en el espacio tridimensional es una función continua $\mathbf{r}$ definida en algún rectángulo R dado por $a \leqslant u \leqslant b$, $c \leqslant v \leqslant d$ en el plano uv y cuyos valores en el espacio tridimensional están dados por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \qquad (u, v) \text{ en } R$$

Realmente, es el *rango* de la función $\mathbf{r}(u, v)$ la superficie paramétrica. Es un conjunto $\mathcal{S}$ de puntos (x, y, z) en el espacio tridimensional cuyos vectores de posición son los vectores $\mathbf{r}(u, v)$, con (u, v) en R (*véase* la Figura 15.16). Si $\mathbf{r}$ es uno a uno, entonces la superficie no se corta a sí misma. En este caso $\mathbf{r}$ transforma la frontera del rectángulo R (los cuatro bordes) en una curva

Figura 15.16
Una superficie paramétrica $\mathcal{S}$ definida en una región R de los parámetros. Las *curvas de contorno* de $\mathcal{S}$ corresponden a la rejilla en R.

en el espacio tridimensional, que denominaremos **frontera de la superficie paramétrica**. El requisito de que R sea un rectángulo es sólo a efectos de simplificar la presentación. En realidad puede ser cualquier conjunto conexo, cerrado y acotado en el plano uv, con área bien definida, y formado por un conjunto abierto junto con sus puntos frontera. Así, consideraremos por ejemplo superficies paramétricas sobre discos cerrados, triángulos u otros dominios en el plano uv. Como es el rango de una función continua definida en un conjunto cerrado y acotado, una superficie paramétrica está siempre acotada en el espacio tridimensional.

Ejemplo 1 La gráfica de $z = (x, y)$, donde el dominio de f es el rectángulo R se puede representar como la superficie paramétrica

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k}$$

con (u, v) en R. Sus ecuaciones paramétricas escalares son

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = f(u, v), \qquad (u, v) \text{ en } R$$

Para estas gráficas es conveniente identificar el plano uv con el plano xy y expresar la ecuación de la superficie en la forma

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}, \qquad (x, y) \text{ en } R$$

■

Ejemplo 2 Describa la superficie

$$\mathbf{r} = a\cos u \operatorname{sen} v\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + a\cos v\,\mathbf{k}, \qquad (0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi/2)$$

siendo $a > 0$. ¿Cuál es su frontera?

Solución Obsérvese que si $x = a\cos u \operatorname{sen} v$, $y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ y $z = a\cos v$, entonces $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Así, la superficie paramétrica dada está sobre una esfera de radio a centrada en el origen (obsérvese que u y v son las coordenadas esféricas de θ y ϕ sobre la esfera). Las restricciones sobre u y v permiten que (x, y) sea cualquier punto del disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, pero fuerzan a que $z \geqslant 0$. Por tanto, la superficie es la *mitad superior* de la esfera. La parametrización dada es uno a uno en el rectángulo abierto $0 < u < 2\pi$, $0 < v < \pi/2$, pero no en el rectángulo cerrado, ya que los bordes $u = 0$ y $u = 2\pi$ se transforman en los mismos puntos, y el borde $v = 0$ colapsa a un solo punto. La frontera de la superficie está en la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, y corresponde al borde $v = \pi/2$ del rectángulo.

■

Observación Las parametrizaciones de superficies que son uno a uno sólo en el interior del dominio de parámetros R son todavía representaciones razonables de la superficie. Sin embargo, como en el Ejemplo 2, la frontera de la superficie se puede obtener a partir sólo de parte de la frontera de R, o puede no existir frontera en absoluto, en cuyo caso la superficie se denomina

superficie cerrada. Por ejemplo, si el dominio de $\mathbf{r}$ en el Ejemplo 2 se amplía para incluir $0 \leqslant v \leqslant \pi$, entonces la superficie se convierte en la esfera completa de radio a centrada en el origen. La esfera es una superficie cerrada, sin puntos frontera.

Observación Como en el caso de parametrizaciones de curvas, las parametrizaciones de superficies no son únicas. La semiesfera del Ejemplo 2 se puede parametrizar también como

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}\,\mathbf{k} \qquad \text{para} \qquad u^2 + v^2 \leqslant a^2$$

En este caso, el dominio de $\mathbf{r}$ es un disco cerrado de radio a.

Ejemplo 3 **(Un tubo alrededor de una curva)** Si $\mathbf{r} = \mathbf{F}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ es una curva paramétrica $\mathcal{C}$ en el espacio tridimensional con normal unitaria $\hat{\mathbf{N}}(t)$ y binormal $\hat{\mathbf{B}}(t)$, entonces la superficie paramétrica

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}(u) + s\cos v\,\hat{\mathbf{N}}(u) + s\,\mathrm{sen}\,v\,\hat{\mathbf{B}}(u), \qquad a \leqslant u \leqslant b, \qquad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$$

es una superficie con forma de tubo de radio s, cuyo eje es la curva $\mathcal{C}$ (¿por qué?). La Figura 15.17 muestra un tubo de este tipo, con radio $s = 0.25$, alrededor de la curva

$$\mathbf{r} = (1 + 0.3\cos(3t))(\cos(2t)\mathbf{i} + \mathrm{sen}(2t)\mathbf{j}) + 0.35\,\mathrm{sen}(3t)\mathbf{k}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Esta curva cerrada se conoce con el nombre de **nudo de trébol**.

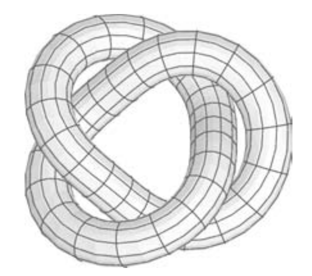


Figura 15.17 Tubo con forma de un nudo de trébol.

■

Superficies compuestas

Si se unen dos superficies paramétricas en parte o en la totalidad de sus curvas frontera, el resultado se denomina **superficie compuesta** o, pensando en términos geométricos, simplemente **superficie**. Por ejemplo, una esfera se puede obtener uniendo dos semiesferas por sus circunferencias frontera. En general, se pueden obtener superficies frontera uniendo en parejas por sus bordes un número finito de superficies paramétricas. La superficie de un cubo está formada por seis caras cuadradas unidas en parejas por sus aristas. Esta superficie es cerrada, ya que no existen bordes sin unir que formen su frontera. Si se elimina el cuadrado de la cara superior, las cinco caras restantes forman una caja cúbica sin tapa. Los bordes superiores de las cuatro caras laterales forman ahora la frontera de esta superficie compuesta (*véase* la Figura 15.18).

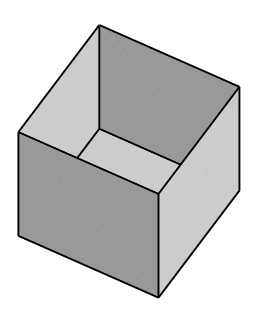


Figura 15.18 Una superficie compuesta obtenida uniendo en parejas cinco superficies paramétricas suaves (cuadrados) por sus bordes. Los cuatro bordes superiores sueltos de las caras laterales forman la frontera de la superficie compuesta.

Integrales de superficie

Para definir integrales de funciones definidas sobre una superficie como límites de sumas de Riemann necesitamos considerar *áreas* de regiones de la superficie. Es más difícil definir el área de una superficie curva que definir la longitud de una curva. Sin embargo, es probable que tengamos una idea de lo que significa el área de una región en un plano, y en la Sección 14.7 examinamos brevemente el problema de calcular el área de la gráfica de una función $f(x, y)$. Evitaremos dificultades suponiendo que todas las superficies que vamos a encontrar son lo «suficientemente suaves» para que puedan subdividirse en pequeñas partes aproximadamente planas. Después aproximaremos el área de cada parte mediante un área plana y sumaremos las aproximaciones para obtener una aproximación en forma de suma de Riemann al área de la superficie completa. Más adelante en esta sección daremos una definición más precisa de «superficie suave» y de «área de superficie». Por el momento, supondremos que el lector tiene una idea intuitiva de lo que significan.

Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave de área finita en $\mathbb{R}^3$, y sea $f(x, y, z)$ una función acotada definida en todos los puntos de $\mathcal{S}$. Si se subdivide $\mathcal{S}$ en pequeñas partes no solapadas, por ejemplo $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, ..., $\mathcal{S}_n$, siendo $\mathcal{S}_i$ el área de ΔS_i (*véase* la Figura 15.19), podemos formar una **suma de Riemann** R_n para f en $\mathcal{S}$, escogiendo puntos arbitrarios (x_i, y_i, z_i) en $\mathcal{S}_i$ y haciendo

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

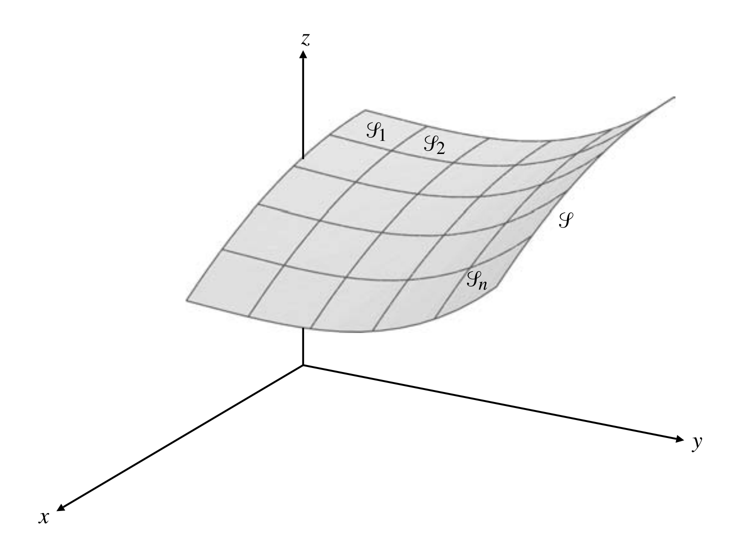


Figura 15.19 Partición de una superficie paramétrica en muchas partes no solapadas.

Si estas sumas de Riemann tienen un límite único cuando los diámetros de todas las partes $\mathcal{S}_i$ tienden a cero, independientemente de cómo se escojan los puntos (x_i, y_i, z_i), entonces se dice que f es **integrable** en $\mathcal{S}$ y el límite se denomina **integral de superficie** de f en $\mathcal{S}$, y se expresa como

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS$$

Superficies suaves, normales y elementos de área

Una superficie es suave si tiene un único plano tangente en todo punto P que no sea de su frontera. Un vector **n** distinto de cero que sea normal al plano tangente en P se dice que es un vector normal a la superficie en P. La siguiente definición, algo más técnica, precisa este concepto.

DEFINICIÓN 5

Se dice que un conjunto $\mathcal{S}$ en el espacio tridimensional es una **superficie suave** si todo punto P en $\mathcal{S}$ tiene un entorno N (una bola abierta de radio positivo centrada en P) que es el dominio de una función suave $g(x, y, z)$ que cumple:

(i) $N \cap S = \{Q \in N : g(Q) = 0\}$ y

(ii) $\nabla g(Q) \neq \mathbf{0}$, si Q está en $N \cap S$.

Por ejemplo, el cono $x^2 + y^2 = z^2$, sin el origen, es una superficie suave. Obsérvese que $\nabla(x^2 + y^2 - z^2) = \mathbf{0}$ en el origen, y el cono no es suave en dicho punto, ya que no tiene un único plano tangente.

Una superficie paramétrica no puede cumplir las condiciones de suavidad en sus puntos frontera, pero se denominará **suave** si cumple la condición en todos sus puntos no frontera.

Se puede obtener la normal a una superficie paramétrica suave definida en un dominio de parámetros R como sigue. Si (u_0, v_0) es un punto en el interior de R, entonces $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ son dos curvas de $\mathcal{S}$ que se cortan en $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ y que tienen, en ese punto, vectores tangentes (*véase* la Figura 15.20)

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|_{(u_0, v_0)} \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|_{(u_0, v_0)}$$

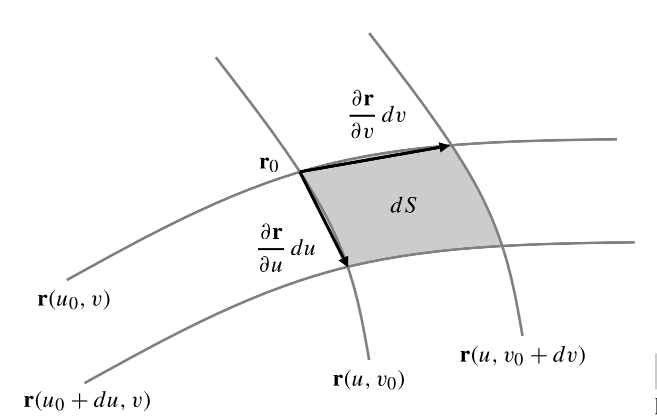


Figura 15.20 Un elemento de área dS en una superficie paramétrica.

respectivamente. Suponiendo que estos dos vectores tangentes no son paralelos, su producto vectorial $\mathbf{n}$, que será distinto de cero, es *normal* a $\mathcal{S}$ en $\mathbf{r}_0$. Además, el *elemento de área* de $\mathcal{S}$, limitado por las cuatro curvas $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0 + du, v)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0 + dv)$, es un paralelogramo infinitesimal generado por los vectores $(\partial \mathbf{r}/\partial u)\,du$ y $(\partial \mathbf{r}/\partial v)\,dv$ (en (u_0, v_0)) y, por consiguiente, su área es

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Expresemos el vector normal $\mathbf{n}$ y el elemento de área dS en función de las componentes de $\mathbf{r}$. Como

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

el **vector normal** a $\mathcal{S}$ en $\mathbf{r}(u, v)$ es

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{k}$$

Además, el **elemento de área** en un punto $\mathbf{r}(u, v)$ de la superficie está dado por

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\, dv = \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2}\, du\, dv$$

El área de la propia superficie es la «suma» de estos elementos de área:

$$\text{Área de } \mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} dS$$

Ejemplo 4 La gráfica $z = g(x, y)$ de una función g con derivadas parciales primeras continuas en un dominio D del plano xy se puede ver como una superficie paramétrica $\mathcal{S}$ con parametrización

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = g(u, v), \qquad (u, v) \text{ en } D$$

En este caso,

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = -g_1(u, v), \qquad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = -g_2(u, v) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$$

y, como la región paramétrica coincide con el dominio D de g, la integral de superficie de $f(x, y, z)$ sobre $\mathcal{S}$ se puede expresar como una integral doble sobre D:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS = \iint_{D} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + (g_1(x, y))^2 + (g_2(x, y))^2}\, dx\, dy$$

Como se observó en la Sección 14.7, esta fórmula también se puede justificar geométricamente. El vector $\mathbf{n} = -g_1(x, y)\mathbf{i} - g_2(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ es normal a $\mathcal{S}$ y forma un ángulo γ con el eje z positivo, siendo

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{n} \bullet \mathbf{k}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_1(x, y))^2 + (g_2(x, y))^2}}$$

El elemento de área de superficie dS debe tener un área que es $1/\cos\gamma$ veces el área $dx\, dy$ de su proyección perpendicular en el plano xy (*véase* la Figura 15.21).

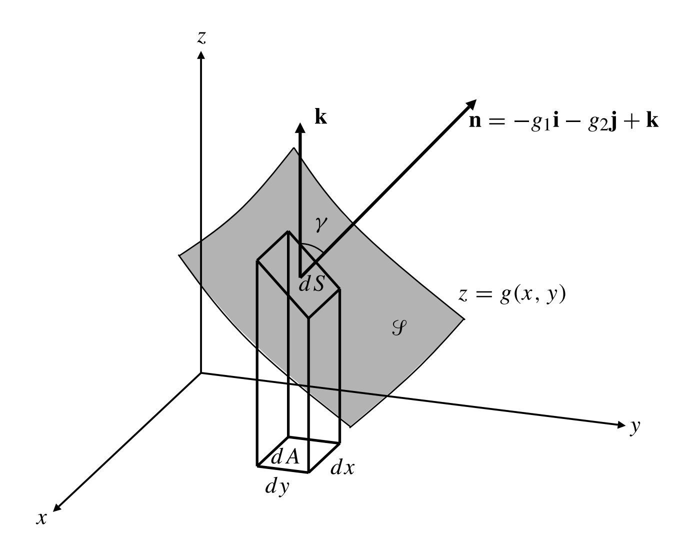


Figura 15.21 El elemento de área de superficie dS y su proyección en el plano xy.

Cálculo de integrales de superficie

Ilustraremos el uso de las fórmulas de dS en el cálculo de integrales de superficie.

Ejemplo 5 Calcule $\iint_{\mathcal{S}} z\,dS$ sobre la superficie cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, entre $z = 0$ y $z = 1$.

Solución Como $z^2 = x^2 + y^2$ en la superficie $\mathcal{S}$, tenemos que $\partial z/\partial x = x/z$ y $\partial z/\partial y = y/z$. Por tanto,

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\,dx\,dy = \sqrt{\frac{z^2 + z^2}{z^2}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy$$

Nótese que podríamos haber anticipado este resultado, ya que la normal al cono siempre forma un ángulo de $\gamma = 45^{\mathrm{o}}$ con el eje z positivo; *véase* la Figura 15.22. Por tanto, $dS = dx\,dy/\cos 45^{\mathrm{o}} = \sqrt{2}\,dx\,dy$. Como $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ sobre la superficie cónica, es más fácil realizar la integración en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} z\,dS &= \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} z\,dx\,dy \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2\,dr = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\end{aligned}$$

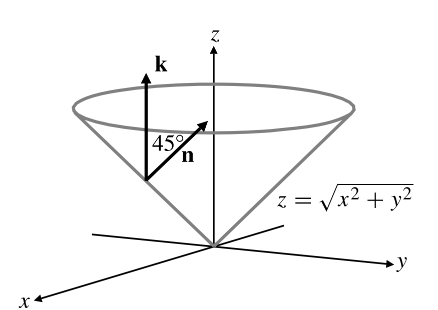


Figura 15.22 $dS = \sqrt{2}\,dx\,dy$ en este cono.

Ejemplo 6 Calcule el momento de inercia respecto al eje z de la superficie paramétrica $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$, con $u^2 + v^2 \leqslant 1$.

Solución Se pide calcular $\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\, dS$. Tenemos que

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} 2v & 2u \\ 2u & -2v \end{vmatrix} = -4(u^2 + v^2)$$

$$\frac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 - v^2)$$

$$\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = 8uv$$

Por tanto, el elemento de área de superficie sobre $\mathcal{S}$ está dado por

$$\begin{aligned} dS &= 4\sqrt{(u^2 + v^2)^2 + (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2}\, du\, dv \\ &= 4\sqrt{2(u^4 + v^4 + 2u^2v^2)}\, du\, dv = 4\sqrt{2}(u^2 + v^2)\, du\, dv \end{aligned}$$

Como $x^2 + y^2 = 4u^2v^2 + (u^2 - v^2)^2 = (u^2 + v^2)^2$, resulta

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\, dS &= \iint_{u^2+v^2 \leqslant 1} (u^2 + v^2)^2 4\sqrt{2}(u^2 + v^2)\, du\, dv \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^6\, r\, dr \qquad \text{(utilizando coordenadas polares)} \\ &= \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Éste es el momento de inercia pedido. ■

Aunque la mayor parte de las superficies que encontremos se puedan parametrizar fácilmente, en general es posible obtener el elemento de área de superficie dS geométricamente en vez de emplear la fórmula paramétrica. Como hemos visto anteriormente, si una superficie tiene una proyección uno a uno sobre una región en el plano xy, entonces el elemento de área dS sobre la superficie se puede expresar como

$$dS = \left|\frac{1}{\cos\gamma}\right| dx\, dy = \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{n} \bullet \mathbf{k}|}\, dx\, dy$$

siendo γ el ángulo que forman el vector normal $\mathbf{n}$ a $\mathcal{S}$ y el eje z positivo. Esta fórmula es útil independientemente de cómo se obtenga $\mathbf{n}$.

Consideremos una superficie $\mathcal{S}$ cuya ecuación adopta la forma $G(x, y, z) = 0$. Como vimos en la Sección 12.7, si G tiene derivadas parciales primeras continuas que no se anulan en un punto (x, y, z) de $\mathcal{S}$, entonces el vector no nulo

$$\mathbf{n} = \nabla G(x, y, z)$$

es normal a $\mathcal{S}$ en dicho punto. Como $\mathbf{n} \bullet \mathbf{k} = G_3(x, y, z)$ si $\mathcal{S}$ tiene una proyección uno a uno en el dominio D del plano xy, entonces

$$dS = \left|\frac{\nabla G(x,\ y,\ z)}{G_3(x,\ y,\ z)}\right| dx\, dy$$

y la integral de superficie de $f(x, y, z)$ sobre $\mathcal{S}$ se puede expresar como una integral doble en el dominio D:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \left|\frac{\nabla G(x,\ y,\ z)}{G_3(x,\ y,\ z)}\right| dx\, dy$$

Por supuesto, existen fórmulas análogas para los elementos de área de superficies (integrales sobre superficies) con proyecciones uno a uno en el plano xz o en el plano yz. G_3 se sustituye por G_2 y G_1, respectivamente.

Ejemplo 7 Calcule el momento respecto a $z = 0$, es decir, $\iint_{\mathcal{S}} z\,dS$, siendo $\mathcal{S}$ el cuenco hiperbólico $z^2 = 1 + x^2 + y^2$, entre los planos $z = 1$ y $z = \sqrt{5}$.

Solución $\mathcal{S}$ está dado por $G(x, y, z) = 0$, siendo $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 1$. Está por encima del disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$ en el plano xy. Tenemos que $\nabla G = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ y $G_3 = -2z$. Por consiguiente, sobre $\mathcal{S}$, tenemos

$$z\,dS = z\,\frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z}\,dx\,dy = \sqrt{1 + 2(x^2 + y^2)}\,dx\,dy$$

y el momento pedido es

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} z\,dS &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt{1 + 2(x^2 + y^2)}\,dx\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{1 + 2r^2}\,r\,dr = \frac{\pi}{3}\,(1 + 2r^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{26\pi}{3}\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo ilustra una técnica que puede reducir a menudo el esfuerzo necesario para integrar sobre una superficie cilíndrica.

Ejemplo 8 Calcule el área de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$.

Solución Un cuarto del área requerida está en el primer octante (*véase* la Figura 15.23). Como el cilindro está generado por rectas verticales, podemos expresar un elemento de área dS sobre dicho cilindro en función del elemento de longitud ds sobre la curva $\mathcal{C}$ en el plano xy, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 2ay$:

$$dS = z\,ds = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,ds$$

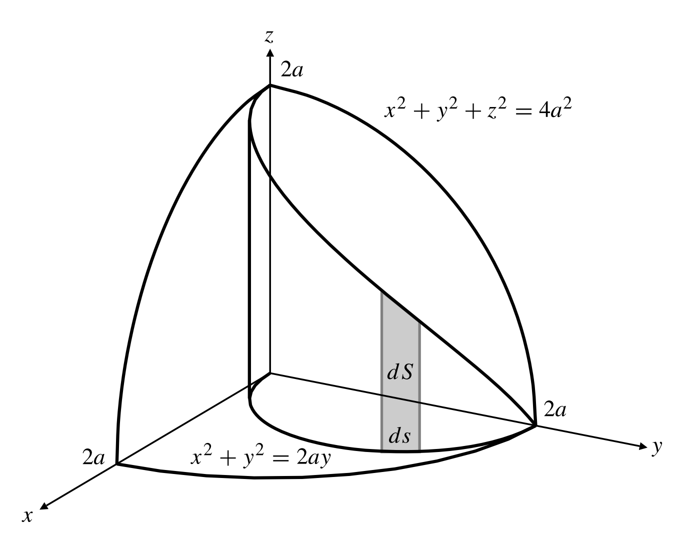


Figura 15.23 Un elemento de área sobre un cilindro. La coordenada z ya ha sido integrada.

Al expresar dS de esta forma, ya hemos integrado dz, por lo que sólo es necesaria una integral para sumar estos elementos de área. Es conveniente de nuevo utilizar coordenadas polares en el

plano xy. En función de dichas coordenadas polares, la ecuación de la curva $\mathcal{C}$ es $r = 2a \operatorname{sen} \theta$. Por tanto, $dr/d\theta = 2a \cos\theta$ y $ds = \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\, d\theta = 2a\, d\theta$. Entonces, el área total de la superficie de la parte del cilindro que está dentro de la esfera está dada por

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4a^2 - r^2}\; 2a\, d\theta \\ &= 8a \int_0^{\pi/2} \sqrt{4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta \\ &= 16a^2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = 16a^2 \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

■

Observación El área calculada en el Ejemplo 8 se puede calcular también proyectando la superficie del cilindro de la Figura 15.23 en el plano yz (éste es el único plano coordenado que se puede utilizar; ¿por qué?). *Véase* el Ejercicio 6 posterior.

En coordenadas esféricas, ϕ y θ se pueden utilizar como parámetros sobre la superficie esférica $\rho = a$. El elemento de área sobre esa superficie se puede expresar, por tanto, en función de estas coordenadas:

Elemento de área sobre la esfera $\rho = a$: $\quad dS = a^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$

Véase la Figura 14.43 en la Sección 14.6 y el Ejercicio 2 posterior.

Ejemplo 9 Calcule $\iint_{\mathcal{S}} z^2\, dS$ sobre el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Solución Como $z = a\cos\phi$ y el hemisferio corresponde a $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, y $0 \leqslant \phi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} z^2\, dS &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2\phi\, a^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi \\ &= 2\pi a^4 \left(-\frac{1}{3}\cos^3\phi \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2\pi a^4}{3} \end{aligned}$$

■

Finalmente, si una superficie compuesta $\mathcal{S}$ está formada por *superficies paramétricas suaves* unidas por parejas por sus bordes, entonces $\mathcal{S}$ se puede denominar **superficie suave por tramos**. La integral de superficie de una función f sobre una superficie suave por tramos $\mathcal{S}$ es la suma de las integrales de superficie de f sobre las superficies suaves individuales que forman $\mathcal{S}$. En la siguiente sección encontraremos un ejemplo de esto.

Atracción de una corteza esférica

En la Sección 14.7 calculamos la atracción gravitatoria que ejercía un disco en el plano xy sobre una masa m situada en la posición $(0, 0, b)$ en el eje z. Ahora realizaremos un cálculo similar de la fuerza de atracción ejercida sobre m por una corteza esférica de radio a y densidad de área σ (unidades de masa por unidad de área), centrada en el origen. Este cálculo sería más difícil si intentáramos realizarlo integrando la componente vertical de la fuerza sobre m, como hicimos en la Sección 14.7. Se simplifica mucho si, en vez de eso, utilizamos una integral para calcular el potencial gravitatorio total $\Phi(0, 0, z)$ debido a la esfera en la posición $(0, 0, z)$, y calculamos después la fuerza sobre m como $\mathbf{F} = m\nabla\Phi(0, 0, b)$.

Por el Teorema del Coseno, la distancia desde el punto con coordenadas esféricas $[a, \phi, \theta]$ al punto $(0, 0, z)$ en el eje z positivo (*véase* la Figura 15.24) es

$$D = \sqrt{a^2 + z^2 - 2az\cos\phi}$$

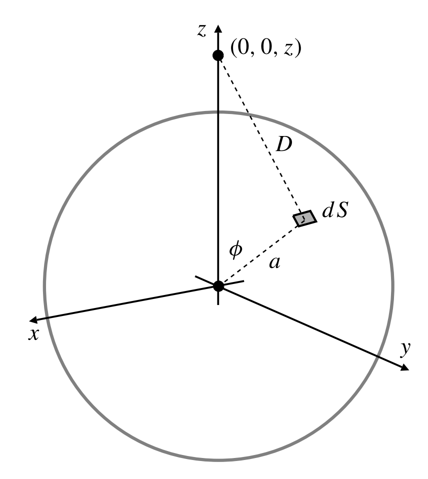


Figura 15.24 Atracción de una esfera.

El elemento de área $dS = a^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$ en $[a, \phi, \theta]$ tiene masa $dm = \sigma\, dS$, y su potencial gravitatorio en $(0, 0, z)$ (*véase* el Ejemplo 1 en la Sección 15.2) es

$$d\Phi(0, 0, z) = \frac{k\,dm}{D} = \frac{k\sigma a^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az\cos\phi}}$$

Para obtener el potencial total en $(0, 0, z)$ debido a la esfera, integraremos $d\Phi$ sobre la superficie de dicha esfera. Realizando el cambio de variables $u = a^2 + z^2 - 2az\cos\phi$, $du = 2az\operatorname{sen}\phi\, d\phi$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\Phi(0, 0, z) &= k\sigma a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\phi\, d\phi}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az\cos\phi}} \\
&= 2\pi k\sigma a^2 \int_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} \frac{1}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{2az} \\
&= \frac{2\pi k\sigma a}{z}\sqrt{u}\,\Big|_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} \\
&= \frac{2\pi k\sigma a}{z}(z + a - |z - a|) = \begin{cases} 4\pi k\sigma a^2/z & \text{si} \quad z > a \\ 4\pi k\sigma a & \text{si} \quad z < a \end{cases}
\end{aligned}$$

El potencial es constante dentro de la esfera y decrece proporcionalmente a $1/z$ en el exterior. La fuerza sobre una masa m localizada en $(0, 0, b)$ es, por tanto,

$$\mathbf{F} = m\nabla\Phi(0, 0, b) = \begin{cases} -(4\pi k m\sigma a^2/b^2)\mathbf{k} & \text{si} \quad b > a \\ \mathbf{0} & \text{si} \quad b < a \end{cases}$$

Hemos llegado al resultado algo sorprendente de que, si la masa m está en el interior de la esfera, la fuerza de atracción neta sobre ésta es cero. Esto es lo que se esperaría en el centro de la esfera, pero fuera del centro parece que las fuerzas debidas a la parte de la esfera que están más cerca de m se cancelan exactamente con las fuerzas menores debidas a las partes de la esfera que están más lejos; estas partes más alejadas tienen área mayor y, por tanto, masa total mayor. Si m está fuera de la esfera, ésta la atrae con una fuerza de magnitud

$$F = \frac{kmM}{b^2}$$

siendo $M = 4\pi\sigma a^2$ la masa total de la esfera. Ésta es la misma fuerza que ejercería una masa puntual con la misma masa de la esfera, localizada en el centro de ésta.

Observación Una bola sólida de densidad constante, o densidad que depende sólo de la distancia a su centro (por ejemplo, un planeta), se puede considerar como si estuviera formada por elementos de masa que fueran esferas concéntricas de densidad constante. Por tanto, la atracción que ejerce dicha bola sobre una masa m localizada en su exterior será también la misma que si toda la masa de la bola estuviera concentrada en su centro. Sin embargo, la atracción sobre una masa m situada en el interior de la bola será la producida solamente por la parte de la bola que esté más cerca del centro que m. La máxima fuerza de atracción se producirá cuando m está sobre la superficie de la bola. Si la densidad es constante, el módulo de la fuerza crece linealmente con la distancia al centro (¿por qué?) hasta la superficie, y después decrece con el cuadrado de la distancia, cuando m se aleja de la bola (*véase* la Figura 15.25).

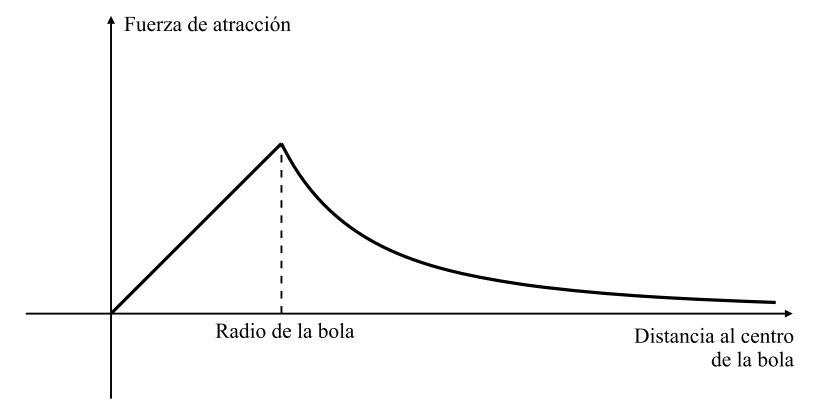


Figura 15.25 Fuerza de atracción de una bola sólida homogénea sobre una partícula localizada a una distancia variable de su centro.

Observación Toda la presentación anterior se aplica también al caso de la atracción o repulsión electrostática de una carga puntual por una densidad de carga uniforme sobre una cáscara esférica, que también está gobernada por la ley del inverso del cuadrado. En particular, no hay fuerza electrostática neta si la carga está situada dentro de la cáscara.

Ejercicios 15.5

1. Verifique que, sobre la curva cuya ecuación en polares es $r = g(\theta)$, el elemento de longitud de arco está dado por

$$ds = \sqrt{(g(\theta))^2 + (g'(\theta))^2}\, d\theta$$

¿Cuál es el elemento de área sobre el cilindro vertical, expresado en función de coordenadas cilíndricas como $r = g(\theta)$?

2. Verifique que, sobre la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, el elemento de área se expresa en función de coordenadas esféricas como $dS = a^2 \operatorname{sen} \phi\, d\phi\, d\theta$.

3. Calcule el área de la parte del plano $Ax + By + Cz = D$ que está dentro del cilindro elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4. Calcule el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$.

5. Plantee fórmulas para los elementos de área de superficie dS, para una superficie cuya ecuación $F(x, y, z) = 0$ sea válida para el caso en el que la superficie tenga una proyección uno a uno sobre (a) el plano xz y (b) el plano yz.

6. Repita el cálculo de áreas del Ejemplo 8 proyectando la parte de la superficie que se muestra en la Figura 15.23 en el plano yz, y utilizando la fórmula del Ejercicio 5(b).

7. Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} x\, dS$ sobre la parte del cilindro parabólico $z = x^2/2$ situada dentro de la parte que está en el primer octante del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

8. Calcule el área de la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$.

9. Calcule el área de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$ que está fuera del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

10. Calcule el área de la parte del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$.

11. Un cilindro circular de radio a está circunscrito por una esfera de radio a, de forma que el cilindro es tangente a la esfera en su ecuador. Dos planos, ambos perpendiculares al eje del cilindro, cortan a la esfera y al cilindro formando circunferencias. Demuestre que el área de la parte de la esfera que está entre los dos planos es igual al área de la parte del cilindro que está entre los dos planos. Por tanto, el área de la parte de una esfera que está entre dos planos paralelos que se cortan depende sólo del radio de la esfera y de la distancia entre los planos, y no de la posición particular de los planos.

12. Sea $0 < a < b$. A partir de las funciones integrales elípticas definidas en el Ejercicio 17 de la Sección 15.3, calcule el área de la parte de cada uno de los cilindros $x^2 + z^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = b^2$ que está dentro del otro cilindro.

13. Calcule $\iint_{\mathscr{S}} y\,dS$, siendo $\mathscr{S}$ la parte del plano $z = 1 + y$ está dentro del cono $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

14. Calcule $\iint_{\mathscr{S}} y\,dS$, siendo $\mathscr{S}$ la parte del cono $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ que está por debajo del plano $z = 1 + y$.

15. Calcule $\iint_{\mathscr{S}} xz\,dS$, siendo $\mathscr{S}$ la parte de la superficie $z = x^2$ que está en el primer octante del espacio tridimensional, y dentro del paraboloide $z = 1 - 3x^2 - y^2$.

16. Calcule la masa de la parte de la superficie $z = \sqrt{2xy}$ que está por encima de la región $0 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, si la densidad de área de dicha superficie es $\sigma(x, y, z) = kz$.

17. Calcule la carga total de la superficie

$$\mathbf{r} = e^u \cos v\,\mathbf{i} + e^u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}, \quad (0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi)$$

si la densidad de carga de la superficie es $\delta = \sqrt{1 + e^{2u}}$.

Los Ejercicios 18 y 19 consideran **esferoides**, que son elipsoides con dos de sus tres semiejes iguales, por ejemplo, $a = b$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

∗18. Calcule el área de la superficie de un **esferoide prolado**, con $0 < a < c$. Un esferoide prolado tiene sus dos semiejes menores iguales, como un balón de rugby americano.

∗19. Calcule el área de la superficie de un **esferoide oblado**, con $0 < c < a$. Un esferoide oblado tiene sus dos semiejes mayores iguales, como la tierra.

20. Describa la superficie paramétrica

$$x = au\cos v, \qquad y = au \operatorname{sen} v, \qquad z = bv$$

$(0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi)$, y calcule su área.

∗21. Calcule $\displaystyle\iint_{\mathscr{P}} \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, siendo $\mathscr{P}$ el plano cuya ecuación es $Ax + By + Cz = D$, $(D \neq 0)$.

22. Una cáscara esférica de radio a está centrada en el origen. Calcule el centroide de la parte de la esfera que está en el primer octante.

23. Calcule el centro de masas de una cáscara cónica circular recta, cuyo radio en la base es a, cuya altura es h, y que tiene una densidad de área constante σ.

∗24. Calcule la atracción gravitatoria que ejerce una cáscara hemisférica de radio a y densidad de área constante σ, sobre una masa m situada en el centro de la base del hemisferio.

∗25. Calcule la atracción gravitatoria que ejerce una cáscara cilíndrica circular de radio a, altura h y densidad de área constante σ, sobre una masa m situada en el eje del cilindro y a b unidades sobre la base.

En los Ejercicios 26-28, calcule el momento de inercia y el radio de giro de los objetos dados respecto a los ejes dados. Suponga densidades de área σ constantes en cada caso.

26. Una cáscara cilíndrica de radio a y altura h, con respecto al eje del cilindro.

27. Una cáscara esférica de radio a con respecto a un diámetro.

28. Una cáscara cónica circular recta, cuyo radio en la base es a y cuya altura es h, con respecto al eje del cono.

29. ¿Con qué aceleración la cáscara esférica del Ejercicio 27 girará por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal? (Compare su resultado con el del Ejemplo 4(b) de la Sección 16.7).

15.6 Superficies orientadas e integrales de flujo

Las integrales de superficie de las componentes normales de campos vectoriales tienen un papel muy importante en cálculo vectorial, similar al que tienen las integrales sobre curvas de las componentes tangenciales de campos vectoriales.

Superficies orientadas

Una superficie suave $\mathcal{S}$ en el espacio tridimensional se denomina **orientable** si existe un *campo de vectores unitarios* $\hat{\mathbf{N}}(P)$, definido sobre $\mathcal{S}$, que varía de forma continua cuando P se mueve por $\mathcal{S}$ y que es normal a todo punto de $\mathcal{S}$. Un campo vectorial $\hat{\mathbf{N}}(P)$ de este tipo determina una **orientación** de $\mathcal{S}$. La superficie debe tener dos lados, ya que $\hat{\mathbf{N}}(P)$ sólo puede tomar un valor en cada punto de P. El lado al que apunta $\hat{\mathbf{N}}$ se denomina **lado positivo**, y el otro lado, **lado negativo**. Una **superficie orientada** consiste en una superficie suave, junto con una elección particular de campo vectorial unitario normal $\hat{\mathbf{N}}(P)$.

Por ejemplo, si se define $\hat{\mathbf{N}}$ sobre la superficie suave $z = f(x, y)$ como

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{-f_1(x, y)\mathbf{i} - f_2(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + (f_1(x, y))^2 + (f_2(x, y))^2}}$$

entonces la parte superior de la superficie es el lado positivo (*véase* la Figura 15.26).

Una superficie suave, o suave por tramos, puede ser **cerrada** (es decir, sin frontera), o puede tener una o más curvas frontera (no es necesario que el campo vectorial unitario normal $\hat{\mathbf{N}}(P)$ esté definido en los puntos frontera).

Una superficie orientada $\mathcal{S}$ **induce una orientación** en cualquiera de sus curvas frontera $\mathcal{C}$; si nos situamos en el lado positivo de la superficie $\mathcal{S}$ y recorremos $\mathcal{C}$ en la dirección de su orientación, entonces $\mathcal{S}$ quedará a nuestra izquierda (*véase* la Figura 15.26(a) y (b)).

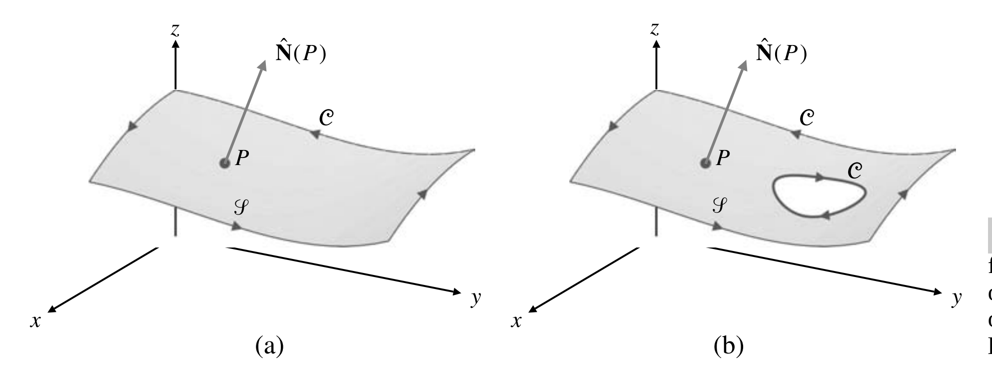


Figura 15.26 Las curvas frontera de una superficie orientada están a su vez orientadas de forma que dejan la superficie a su izquierda.

Una superficie *suave por tramos* es **orientable** si, siempre que dos de sus superficies suaves componentes se unen por una curva común $\mathcal{C}$, inducen orientaciones *opuestas* sobre $\mathcal{C}$. Esto fuerza a las normales $\hat{\mathbf{N}}$ a estar en el mismo lado en dichas superficies adyacentes. Por ejemplo, la superficie de un cubo es una superficie cerrada suave por tramos, formada por seis superficies suaves (los cuadrados de sus caras), unidas por sus aristas (*véase* la Figura 15.27). Si todas las caras están orientadas de forma que sus normales $\hat{\mathbf{N}}$ apunten hacia el exterior del cubo (o hacia el interior del cubo), entonces la propia superficie del cubo está orientada.

No toda superficie puede ser orientada, incluso siendo suave. Una superficie orientable debe tener dos caras. Por ejemplo, una **cinta de Möbius**, que consiste en una cinta de papel con sus extremos unidos para formar un lazo cerrado, pero de forma que a uno de sus extremos se le da media vuelta antes de unirlos, sólo tiene un lado (podemos fabricar una para comprobarlo), por lo que no puede ser orientada (*véase* la Figura 15.28). Si un vector distinto de cero se desplaza

por la cinta, de forma que siempre es normal a la superficie, volverá a su posición inicial apuntando en la dirección opuesta.

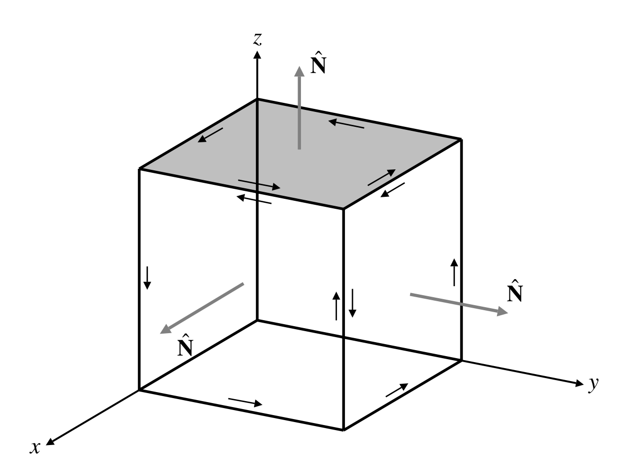


Figura 15.27 La superficie del cubo es orientable; las caras adyacentes producen orientaciones opuestas en su arista común.

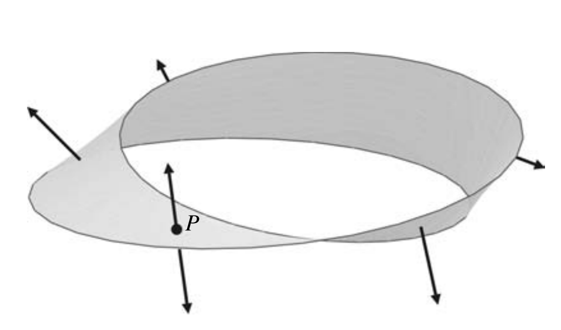


Figura 15.28 La cinta de Möbius no es orientable; tiene sólo una «cara».

Flujo de un campo vectorial por una superficie

Supongamos que el espacio tridimensional estuviera lleno de un fluido incompresible con un campo de velocidades **v**. Sea $\mathcal{S}$ una superficie imaginaria, suave y orientada, en dicho espacio tridimensional (decimos que $\mathcal{S}$ es *imaginaria* porque no impide el movimiento del fluido; está fija en el espacio y el fluido puede atravesarla libremente). Calcularemos la velocidad de flujo del fluido por $\mathcal{S}$. Sea dS un pequeño elemento de área situado en un punto P de la superficie. El fluido que cruza ese elemento entre los instantes t y $t + dt$ ocupa un cilindro con base de área dS y altura $|\mathbf{v}(P)|\,dt\cos\theta$, siendo θ el ángulo que forman $\mathbf{v}(P)$ y la normal $\hat{\mathbf{N}}(P)$ (*véase* la Figura 15.29). Este cilindro tiene un volumen (con signo) de $\mathbf{v}(P) \bullet \hat{\mathbf{N}}(P)\,dS\,dt$. La velocidad a la que el fluido cruza dS es $\mathbf{v}(P) \bullet \hat{\mathbf{N}}(P)\,dS$, y la velocidad total a la que el fluido cruza $\mathcal{S}$ se obtiene mediante la integral de superficie

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS \quad \text{o} \quad \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \bullet d\mathbf{S}$$

donde se utiliza $d\mathbf{S}$ para representar el vector elemento de área de superficie $\hat{\mathbf{N}}\,dS$.

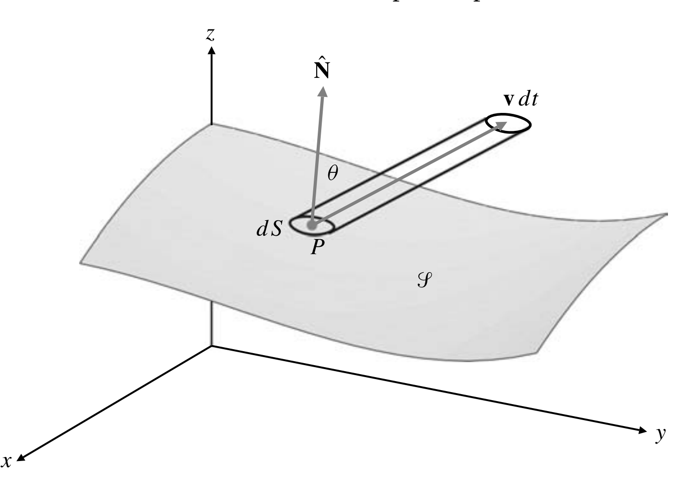


Figura 15.29 El fluido que cruza dS durante un tiempo dt llena el tubo.

DEFINICIÓN 6 **Flujo de un campo vectorial por una superficie orientada**

Dado un campo vectorial continuo **F**, el **flujo** de **F** por la superficie orientable $\mathcal{S}$ es la integral sobre $\mathcal{S}$ de la componente normal de **F**.

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS \quad \text{o} \quad \iint_{\mathcal{S}} F \bullet d\mathbf{S}$$

Cuando la superficie es cerrada, la integral de flujo se escribe

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS \quad \text{o} \quad \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$$

En este caso se dice que el flujo de **F** es *hacia el exterior* de $\mathcal{S}$ si $\hat{\mathbf{N}}$ es el vector normal unitario *exterior*, y *hacia el interior* de $\mathcal{S}$ si $\hat{\mathbf{N}}$ es el vector normal *interior*.

Ejemplo 1 Calcule el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ hacia el exterior de una esfera $\mathcal{S}$ de radio a centrada en el origen ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$).

Solución Como **F** es el campo asociado con una fuente de fuerza m situada en el origen (que produce $4\pi m$ unidades de fluido por unidad de tiempo), la respuesta debe ser $4\pi m$. De todas formas, vamos a calcularla. Utilizaremos coordenadas esféricas. En un punto **r** de la esfera, cuyas coordenadas esféricas son $[a, \phi, \theta]$, la normal unitaria hacia fuera es $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Como el campo vectorial sobre la esfera es $\mathbf{F} = m\hat{\mathbf{r}}/a^2$, y como $dS = a^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$ es un elemento de área, el flujo de **F** hacia el exterior de la esfera es

$$\oiint_{\mathcal{S}} \left(\frac{m}{a^2}\hat{\mathbf{r}}\right) \bullet \hat{\mathbf{r}} a^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = m \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi = 4\pi m$$

Ejemplo 2 Calcule el flujo total de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia el exterior a través de la superficie del cilindro sólido $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $-h \leqslant z \leqslant h$.

Solución La Figura 15.30 muestra el cilindro. Su superficie está formada por los discos de la tapa y de la base, y por la pared lateral cilíndrica. Calcularemos el flujo de **F** a través de cada una de ellas. Naturalmente, utilizaremos coordenadas cilíndricas. En la tapa del disco tenemos $z = h$, $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$ y $dS = r\, dr\, d\theta$. Por tanto, $\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = hr\, dr\, d\theta$ y

$$\iint_{\text{tapa}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = h \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} r\, dr = \pi a^2 h$$

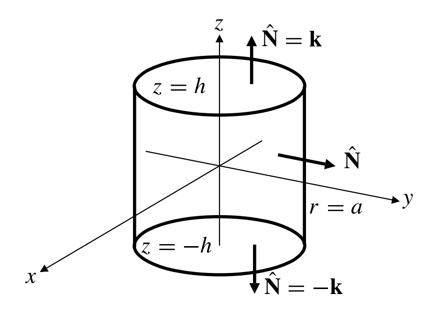


Figura 15.30 Las tres componentes de la superficie de un cilindro sólido, con sus normales hacia fuera.

En el disco de la base tenemos $z = -h$, $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$ y $dS = r\, dr\, d\theta$. Por tanto, $\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = hr\, dr\, d\theta$ y

$$\iint_{\text{base}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{\text{tapa}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \pi a^2 h$$

En la pared cilíndrica, $\mathbf{F} = a\cos\theta\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\hat{\mathbf{N}} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$ y $dS = a\,d\theta\,dz$. Por consiguiente, $\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS = a^2\,d\theta\,dz$ y

$$\iint_{\text{paredcil}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS = a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h}^{h} dz = 4\pi a^2 h$$

El flujo total de **F** hacia el exterior de la superficie $\mathscr{S}$ del cilindro es la suma de estas tres contribuciones:

$$\oint\!\!\!\oint_{\mathscr{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS = 6\pi a^2 h$$

Sea $\mathscr{S}$ una superficie suave orientada, con una proyección uno a uno sobre un dominio D del plano xy, y cuya ecuación es de la forma $G(x, y, z) = 0$. En la Sección 15.5 demostramos que el elemento de área de superficie sobre $\mathscr{S}$ se puede expresar de la forma

$$dS = \left|\frac{\nabla G}{G_3}\right| dx\,dy$$

y, por tanto, las integrales de superficie sobre $\mathscr{S}$ se pueden reducir a integrales dobles sobre el dominio D. Las integrales de flujo se pueden tratar de la misma forma. Dependiendo de la orientación de $\mathscr{S}$, la normal unitaria $\hat{\mathbf{N}}$ se puede expresar como

$$\hat{\mathbf{N}} = \pm\frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

Por tanto, el vector elemento de área $d\mathbf{S}$ se puede escribir

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\,dS = \pm\frac{\nabla G(x, y, z)}{G_3(x, y, z)}\,dx\,dy$$

El signo debe escogerse para que $\mathscr{S}$ tenga la orientación apropiada. Si $G_3 > 0$, y queremos que el lado positivo de $\mathscr{S}$ esté hacia arriba, debemos utilizar el signo $+$. Por supuesto, se aplican fórmulas similares para superficies con proyecciones uno a uno en los otros planos coordenados.

Ejemplo 3 Calcule el flujo hacia el exterior de $z\mathbf{i} + x^2\mathbf{k}$ a través de la parte de la superficie $z = x^2 + y^2$ que está por encima del cuadrado R definido por $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Solución Para $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ tenemos $\nabla F = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $F_3 = 1$. Por tanto,

$$d\mathbf{S} = (-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dx\,dy$$

y el flujo pedido es

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{S}} (z\mathbf{i} + x^2\mathbf{k}) \bullet d\mathbf{S} &= \iint_R (-2x(x^2 + y^2) + x^2)\,dx\,dy \\ &= \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 - 2xy^2)\,dy \\ &= \int_{-1}^{1} 2x^2\,dx = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Dos de los tres términos de la integral doble valen cero debido a la simetría.

Dada una superficie $\mathcal{S}$ cuya ecuación es $z = f(x, y)$, tenemos

$$\hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{y}$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

de forma que el vector elemento de área sobre $\mathcal{S}$ está dado por

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\, dS = \pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\, dy$$

De nuevo, el signo $+$ corresponde a una normal hacia arriba.

Dada una superficie paramétrica general $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, la normal unitaria $\hat{\mathbf{N}}$ y el elemento de área dS se calcularon en la Sección 15.5:

$$\hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}, \qquad dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\, dv$$

Por tanto, el vector elemento de área es

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\, dS = \pm\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du\, dv$$

Ejemplo 4 Calcule el flujo en dirección ascendente de $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ a través de $\mathcal{S}$, siendo $\mathcal{S}$ la parte de la superficie $z = 1 - x^2 - y^2$ que está en el primer octante del espacio tridimensional.

Solución El vector elemento de área correspondiente a la norma hacia arriba sobre $\mathcal{S}$ es

$$d\mathbf{S} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\, dy = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy$$

La proyección de $\mathcal{S}$ en el plano xy es el cuarto de disco Q dado por $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$ y $y \geqslant 0$. Por tanto, el flujo de $\mathbf{F}$ hacia arriba a través de $\mathcal{S}$ es

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} &= \iint_Q (2xy - 2xy + 4)\, dx\, dy \\ &= 4 \times (\text{área de } Q) = \pi\end{aligned}$$

■

Ejemplo 5 Calcule el flujo en dirección descendente de $\mathbf{F} = \dfrac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{x^2 + y^2} + \mathbf{k}$ a través de la superficie $\mathcal{S}$ definida paramétricamente como

$$\mathbf{r} = u \cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}, \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi)$$

Solución Primero calculamos $d\mathbf{S}$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \cos v\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u \operatorname{sen} v\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -2u^2\cos v\,\mathbf{i} - 2u^2 \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

Como $u \geqslant 0$ sobre $\mathcal{S}$, la última expresión es una normal hacia arriba. Deseamos una normal hacia abajo, por lo que utilizamos

$$d\mathbf{S} = (2u^2\cos v\,\mathbf{i} + 2u^2 \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} - u\mathbf{k})\,du\,dv$$

Sobre $\mathcal{S}$ tenemos

$$\mathbf{F} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{x^2 + y^2} + \mathbf{k} = \frac{2u\cos v\,\mathbf{i} + 2u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j}}{u^2} + \mathbf{k}$$

por lo que el flujo de $\mathbf{F}$ en sentido descendente a través de $\mathbf{F}$ es

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (4u - u)\,du = 3\pi$$

■

Ejercicios 15.6

1. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j}$ hacia el exterior del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$.

2. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia el exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

3. Calcule el flujo del campo vectorial del Ejercicio 2 hacia el exterior de la superficie de la caja $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$.

4. Calcule el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ hacia el exterior de la frontera del cono sólido $0 \leqslant z \leqslant 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia arriba a través de la parte de la superficie $z = a - x^2 - y^2$ que está por encima del plano $z = b < a$.

6. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ hacia arriba a través de la parte de la superficie $z = x^2 - y^2$ que está en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

7. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ hacia abajo a través de la parte de la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$ que está por encima del plano $z = 2x + 1$.

8. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = z^2\mathbf{k}$ hacia arriba a través de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está en el primer octante del espacio tridimensional.

9. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ hacia arriba a través de la parte de la superficie $z = 2 - x^2 - 2y^2$ que está por encima del plano xy.

10. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ hacia arriba a través de la superficie $\mathbf{r} = u^2v\mathbf{i} + uv^2\mathbf{j} + v^3\mathbf{k}$, $(0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1)$.

11. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ hacia arriba a través de la superficie $u\cos v\,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, $(0 \leqslant u \leqslant 2,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi)$.

12. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ hacia arriba a través de la superficie $\mathbf{r} = e^u\cos v\,\mathbf{i} + e^u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, con $0 \leqslant u \leqslant 1$ y $0 \leqslant v \leqslant \pi$.

13. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ hacia el exterior de la superficie del cubo $-a \leqslant x, y, z \leqslant a$.

*14. Calcule el flujo del campo vectorial del Ejercicio 13 hacia el exterior de la caja $1 \leqslant x, y, z \leqslant 2$. *Nota*: Este problema se puede resolver de manera muy sencilla utilizando del Teorema de la Divergencia de la Sección 16.4; el flujo que se pide es, de hecho, cero. Sin embargo, el objetivo aquí es hacerlo por cálculo directo de las integrales de superficie que intervienen, y así es bastante difícil. Por simetría, es suficiente calcular el flujo neto hacia el exterior del cubo definido por cualquiera de las tres parejas de caras opuestas; es decir, se debe calcular solamente el flujo a través de dos caras, por ejemplo $z = 1$ y $z = 2$. Tenga en cuenta que deberá trabajar mucho para calcular estas integrales. Tras resolverlas observará que las igualdades $2\arctan a = \arctan(2a/(1 - a^2))$ y $\arctan a + \arctan(1/a)\pi/2$ son de utilidad para demostrar el flujo neto es cero.

15. Defina el flujo de un campo vectorial en el *plano* a través de una *curva* suave por tramos. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ hacia el exterior a través de:

(a) La circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

(b) La frontera del cuadrado $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$.

16. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = -(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$ *hacia el interior* a través de cada una de las dos curvas del ejercicio anterior.

17. Si $\mathcal{S}$ es una superficie orientada y suave en el espacio tridimensional, y $\hat{\mathbf{N}}$ es el campo vectorial unitario que determina la orientación de $\mathcal{S}$, demuestre que el flujo de $\hat{\mathbf{N}}$ a través de $\mathcal{S}$ es el área de $\mathcal{S}$.

*__18.__ El Teorema de la Divergencia, que se presentará en la Sección 16.4, implica que el flujo de un campo vectorial constante a través de cualquier superficie cerrada suave por tramos y orientada es cero. Demuéstrelo ahora para el caso de (a) una caja rectangular y (b) una esfera.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan los siguientes términos y frases?**
  - ◇ Campo vectorial
  - ◇ Campo escalar
  - ◇ Línea de campo
  - ◇ Campo conservativo
  - ◇ Potencial escalar
  - ◇ Equipotencial
  - ◇ Fuente
  - ◇ Dipolo
  - ◇ Dominio conexo
  - ◇ Simplemente conexo
  - ◇ Superficie paramétrica
  - ◇ Superficie orientable
  - ◇ Integral sobre la curva $\mathcal{C}$ de f
  - ◇ Integral sobre la curva $\mathcal{C}$ de la componente tangencial de $\mathbf{F}$
  - ◇ Flujo de un campo vectorial a través de una superficie
- **¿Cómo son las integrales sobre curvas de un campo conservativo en relación con sus curvas o superficies equipotenciales?**
- **¿Cómo se calcula la integral sobre una curva de un campo escalar?**
- **¿Cómo se calcula la integral sobre una curva de la componente tangencial de un campo vectorial?**
- **¿Cuándo es independiente la integral sobre una curva entre dos puntos del camino que une dichos puntos?**
- **¿Cómo se calcula la integral de superficie de un campo escalar?**
- **¿Cómo se calcula el flujo de un vector a través de una superficie?**

Ejercicios de repaso

1. Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{y}\, ds$, siendo $\mathcal{C}$ la curva

$$x = t, \qquad y = 2e^t, \qquad z = e^{2t}, \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1)$$

2. Sea $\mathcal{C}$ la parte de la curva de intersección de las superficies $z = x + y^2$ e $y = 2x$ que van del origen al punto (2, 4, 18). Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} 2y\, dx + x\, dy + 2\, dz$.

3. Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} x\, dS$, siendo $\mathcal{S}$ la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está en la región $0 \leqslant x \leqslant 1 - y^2$.

4. Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} xyz\, dS$ en la parte del plano $x + y + z = 1$ que está en el primer octante.

5. Calcule el flujo de $x^2y\mathbf{i} - 10xy^2\mathbf{j}$ hacia arriba a través de la superficie $z = xy$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

6. Calcule el flujo de $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia abajo a través de la parte del plano $x + 2y + 3z = 6$ que está en el primer octante.

7. Una cuenta de masa m se desliza por un hilo cuya forma es la de la curva $x = a \operatorname{sen} t$, $y = a \cos t$, $z = bt$, con $0 \leqslant t \leqslant 6\pi$.

(a) ¿Cuál es el trabajo hecho por la fuerza gravitatoria $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$ sobre la cuenta durante su descenso?

(b) ¿Cuál es el trabajo hecho contra una resistencia de magnitud constante R que se opone directamente al movimiento de la cuenta durante su descenso?

8. ¿Para qué valores de las constantes a, b y c se puede determinar el valor de la integral I de la componente tangencial de $\mathbf{F} = (axy + 3yz)\mathbf{i} + (x^2 + 3xz + by^2z)\mathbf{j} + (bxy + cy^3)\mathbf{k}$, sobre la curva que va desde $(0, 1, -1)$ hasta $(2, 1, 1)$ sin conocer exactamente dicha curva? ¿Cuál es el valor de la integral?

9. Sea $\mathbf{F} = (x^2/y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(a) Calcule la línea de campo de $\mathbf{F}$ que pasa por $(1, 1, 0)$ y demuestre que pasa también por $(e, e, 1)$.

(b) Calcule $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, siendo $\mathcal{C}$ la parte de la línea de campo del apartado (a) que va desde $(1, 1, 0)$ hasta $(e, e, 1)$.

10. Considere los campos vectoriales

$$\mathbf{F} = (1 + x)e^{x+y}\mathbf{i} + (xe^{x+y} + 2y)\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{G} = (1 + x)e^{x+y}\mathbf{i} + (xe^{x+y} + 2z)\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$$

(a) Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo y calcule un potencial del campo.

(b) Calcule $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \bullet d\mathbf{r}$, con $\mathcal{C}$ dada por

$$\mathbf{r} = (1 - t)e^t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

aprovechando la similitud entre $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$.

11. Calcule un campo vectorial en el plano $\mathbf{F}(x, y)$ que cumpla las siguientes condiciones:

(i) Las líneas de campo de $\mathbf{F}$ son las curvas $xy = C$.

(ii) $|\mathbf{F}(x, y)| = 1$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

(iii) $\mathbf{F}(1, 1) = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

(iv) $\mathbf{F}$ es continuo excepto en $(0, 0)$.

12. Sea $\mathcal{S}$ la parte de la superficie del cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que está en el primer octante, y entre los planos $x = 0$ y $x = 5$. Calcule el flujo de $3z^2x\mathbf{i} - x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ a través de $\mathcal{S}$ alejándose del eje x.

Problemas avanzados

***1.** Calcule el centroide de la superficie

$$\mathbf{r} = (2 + \cos v)(\cos u\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} u\,\mathbf{j}) + \operatorname{sen} v\,\mathbf{k}$$

con $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant v \leqslant \pi$. Describa esta superficie.

***2.** Una superficie suave $\mathcal{S}$ se expresa paramétricamente como

$$\mathbf{r} = (\cos 2u)(2 + v\cos u)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 2u)(2 + v\cos u)\mathbf{j} + v\operatorname{sen} u\,\mathbf{k}$$

con $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ y $-1 \leqslant v \leqslant 1$. Demuestre que para *todo* campo vectorial suave $\mathbf{F}$ sobre $\mathcal{S}$,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0$$

siendo $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{N}}(u, v)$ un campo vectorial normal unitario sobre $\mathcal{S}$ que depende de forma continua de (u, v). ¿Cómo se explica esto? *Sugerencia*: Intente describir cómo es la superficie $\mathcal{S}$.

***3.** Vuelva a calcular la fuerza gravitatoria que ejerce una esfera de radio a y densidad de área σ centrada en el origen sobre una masa puntual situada en $(0, 0, b)$, integrando directamente la componente vertical de la fuerza debida al elemento de área dS, en vez de integrar el potencial como hicimos en la última parte de la Sección 15.5. Tendrá que ser bastante creativo para resolver la integral resultante.



CAPÍTULO 16

Cálculo vectorial

Los matemáticos son como los franceses: siempre que les dices algo, lo traducen a su propio idioma, y a menudo resulta algo completamente diferente.

Johann Wolfgang von Goethe (1749-1832)
de *Maxims and Reflections, 1829*

Introducción En este capítulo vamos a desarrollar analogías tridimensionales al Teorema Fundamental del Cálculo en una dimensión. Estas analogías (Teorema de Green, Teorema de la Divergencia de Gauss y Teorema de Stokes) son de gran importancia, tanto en teoría como en aplicaciones. Se expresan en términos de ciertos operadores diferenciales, divergencia y rotacional, que están relacionados con el operador gradiente que presentamos en la Sección 12.7. Las Secciones 16.1 y 16.2 presentan los operadores y sus propiedades. El resto del capítulo trata de la generalización del Teorema Fundamental del Cálculo y sus aplicaciones.

16.1 Gradiente, divergencia y rotacional

La información de primer orden sobre la tasa de cambio de un campo escalar tridimensional, $f(x, y, z)$, está contenida en las tres derivadas parciales primeras $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$. El gradiente,

$$\mathbf{grad}\ f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

reúne la información en un único vector «derivada» de f. Vamos a desarrollar formas similares de representar la información de la tasa de cambio de campos vectoriales.

La información de primer orden sobre la tasa de cambio del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

está contenida en nueve derivadas parciales primeras, tres para cada una de las tres componentes del campo vectorial $\mathbf{F}$:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z} \end{matrix}$$

Resaltamos de nuevo que F_1, F_2 y F_3 indican las componentes de $\mathbf{F}$, no derivadas parciales. Dos combinaciones especiales de estas derivadas organizan esta información de formas particularmente útiles, como el caso del gradiente para campos escalares. Son la **divergencia** de $\mathbf{F}$ (**div F**) y el **rotacional** de $\mathbf{F}$ (**rot F**), que se definen como sigue:

Divergencia y rotacional

$$\mathbf{div\ F} = \nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{rot\ F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Nótese que la divergencia de un campo vectorial es un campo escalar, mientras que el rotacional es otro campo vectorial. Obsérvese también la notación $\nabla \bullet \mathbf{F}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$, que utilizaremos algunas veces en vez de **div F** y **rot F**. Esta notación utiliza el *operador diferencial vector*

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

que se denomina frecuentemente *nabla*. De la misma forma que el gradiente de un campo escalar f se puede ver como la *multiplicación escalar formal* de ∇ y f, también la divergencia y el rotacional de $\mathbf{F}$ se pueden ver como un *producto escalar formal* y un *producto vectorial formal* de ∇ con $\mathbf{F}$. Al utilizar ∇, el orden de los «factores» es importante; las magnitudes sobre las que actúa ∇ deben aparecer a la derecha de ∇. Por ejemplo, $\nabla \bullet \mathbf{F}$ y $\mathbf{F} \bullet \nabla$ no significan lo mismo; el primero es un campo escalar y el segundo es un operador diferencial escalar:

$$\mathbf{F} \bullet \nabla = F_1 \frac{\partial}{\partial x} + F_2 \frac{\partial}{\partial y} + F_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

¡¡ ATENCIÓN !! No hay que confundir el campo escalar $\nabla \bullet \mathbf{F}$ con el operador diferencial escalar $\mathbf{F} \bullet \nabla$. Son objetos bastante diferentes.

Ejemplo 1 Calcule la divergencia y el rotacional del campo vectorial

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

Solución Tenemos

$$\mathbf{div\ F} = \nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = y + 2y + y = 4y$$

$$\mathbf{rot\ F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & y^2 - z^2 & yz \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - z^2)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xy) - \frac{\partial}{\partial x}(yz)\right]\mathbf{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right]\mathbf{k} = 3z\mathbf{i} - x\mathbf{k}$$

■

Se pueden definir también la divergencia y el rotacional de un campo vectorial bidimensional; si $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{div\ F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

$$\mathbf{rot\ F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Nótese que el rotacional de un campo vectorial bidimensional es un vector tridimensional perpendicular al plano del campo. Aunque **div** y **grad** están definidas para todas las dimensiones, **rot** sólo está definido en tres dimensiones y en el plano (suponiendo que admitimos valores en tres dimensiones).

Ejemplo 2 Calcule la divergencia y el rotacional de $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} - ye^x\mathbf{j}$.

Solución Tenemos

$$\mathbf{div}\ \mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y) + \frac{\partial}{\partial y}(-ye^x) = e^y - e^x$$

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\ \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(-ye^x) - \frac{\partial}{\partial y}(xe^y)\right)\mathbf{k} \\ &= -(ye^x + xe^y)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Interpretación de la divergencia

El valor de la divergencia de un campo vectorial **F** en un punto P es, en términos generales, una medida de la tasa con la que el campo «diverge» o «se extiende» desde P. Esta extensión se puede medir mediante el flujo hacia afuera de una pequeña superficie cerrada que rodea a P. Por ejemplo, **div F**(P) es el límite del *flujo por unidad de volumen* hacia el exterior de esferas cada vez más pequeñas centradas en P.

TEOREMA 1 **Divergencia como densidad de flujo**

Si $\hat{\mathbf{N}}$ es la normal unitaria hacia el exterior sobre la esfera $\mathcal{S}_\epsilon$ de radio ϵ centrada en el punto P, y si **F** es un campo vectorial tridimensional suave, entonces

$$\mathbf{div}\ \mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

DEMOSTRACIÓN Sin pérdida de generalidad supondremos que P está en el origen. Deseamos desarrollar $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ en serie de Taylor alrededor del origen (una serie de Maclaurin). Como se demostró en la Sección 12.9 en el caso de una función de dos variables, la serie de Maclaurin de una función escalar de tres variables toma la forma

$$f(x, y, z) = f(0, 0, 0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0,0)} x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0,0)} y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(0,0,0)} z + \cdots$$

donde «⋯» representa los términos de grados segundo y superiores en x, y y z. Si aplicamos esta fórmula a las componentes de **F**, obtenemos

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{x0}\,x + \mathbf{F}_{y0}\,y + \mathbf{F}_{z0}\,z + \cdots$$

siendo

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_0 &= \mathbf{F}(0, 0, 0) \\ \mathbf{F}_{x0} &= \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\right|_{(0,0,0)} = \left.\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\mathbf{k}\right)\right|_{(0,0,0)} \\ \mathbf{F}_{y0} &= \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\right|_{(0,0,0)} = \left.\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\mathbf{k}\right)\right|_{(0,0,0)} \\ \mathbf{F}_{z0} &= \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\right|_{(0,0,0)} = \left.\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right|_{(0,0,0)}\end{aligned}$$

Para no confundir derivadas parciales con componentes de vectores, aquí estamos utilizando subíndices $x0$, $y0$ y $z0$ para indicar los valores de las derivadas parciales primeras de $\mathbf{F}$ en (0, 0, 0).

de nuevo, «$\cdots$» representa los términos de grados segundo y superior en x, y y z. La normal unitaria sobre $\mathcal{S}_\epsilon$ es $\hat{\mathbf{N}} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\epsilon$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\epsilon}\,(&\mathbf{F}_0 \bullet \mathbf{i}x + \mathbf{F}_0 \bullet \mathbf{j}y + \mathbf{F}_0 \bullet \mathbf{k}z \\ &+ \mathbf{F}_{x0} \bullet \mathbf{i}x^2 + \mathbf{F}_{x0} \bullet \mathbf{j}xy + \mathbf{F}_{x0} \bullet \mathbf{k}xz \\ &+ \mathbf{F}_{y0} \bullet \mathbf{i}xy + \mathbf{F}_{y0} \bullet \mathbf{j}y^2 + \mathbf{F}_{y0} \bullet \mathbf{k}yz \\ &+ \mathbf{F}_{z0} \bullet \mathbf{i}xz + \mathbf{F}_{z0} \bullet \mathbf{j}yz + \mathbf{F}_{z0} \bullet \mathbf{k}z^2 + \cdots)\end{aligned}$$

Integramos cada término dentro de los paréntesis sobre $\mathcal{S}_\epsilon$. Por simetría,

$$\oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} x\,dS = \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} y\,dS = \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} z\,dS = 0$$

$$\oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} xy\,dS = \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} xz\,dS = \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} yz\,dS = 0$$

También por simetría,

$$\begin{aligned}\oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} x^2\,dS &= \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} y^2\,dS = \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} z^2\,dS \\ &= \frac{1}{3}\oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} (x^2 + y^2 + z^2)\,dS = \frac{1}{3}(\epsilon^2)(4\pi\epsilon^2) = \frac{4}{3}\pi\epsilon^4\end{aligned}$$

y los términos de grado superior tienen integrales de superficie en ϵ^5 y potencias superiores. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{3}{4\pi\epsilon^3}\oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS &= \mathbf{F}_{x0} \bullet \mathbf{i} + \mathbf{F}_{y0} \bullet \mathbf{j} + \mathbf{F}_{z0} \bullet \mathbf{k} + \epsilon(\cdots) \\ &= \nabla \bullet \mathbf{F}(0, 0, 0) + \epsilon(\cdots) \\ &\to \nabla \bullet \mathbf{F}(0, 0, 0)\end{aligned}$$

cuando $\epsilon \to 0^+$. Esto es lo que queríamos demostrar.

Observación Las esferas $\mathcal{S}_\epsilon$ en el teorema anterior se pueden sustituir por la contracción de otras familias de superficies suaves por tramos. Por ejemplo, si B es la superficie de una caja rectangular de dimensiones Δx, Δy y Δz que contiene a P, entonces

$$\mathbf{div}\ \mathbf{F}(P) = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \oiint_B \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS$$

Véase el Ejercicio 12 posterior.

Observación En dos dimensiones, el valor de **div** $\mathbf{F}(P)$ representa el límite del *flujo por unidad de área* hacia el exterior de pequeñas superficies cerradas, que no se cruzan entre sí y que encierran a P. *Véase* el Ejercicio 13 al final de esta sección.

Volvamos ahora a la interpretación de un campo vectorial como un campo de velocidades de un fluido incompresible en movimiento. Si el flujo total hacia fuera del campo de velocidades a través de la superficie límite de un dominio es positivo (negativo), entonces se debe producir (o eliminar) fluido dentro de ese dominio.

El campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ del Ejemplo 2 de la Sección 15.6 tiene una divergencia constante $\nabla \bullet \mathbf{F} = 3$. En ese ejemplo demostramos que el flujo de **F** hacia el exterior de cierto cilindro con radio en la base a y altura $2h$ es $6\pi a^2 h$, que es tres veces el volumen del cilindro. Los Ejercicios 2 y 3 de la Sección 15.6 confirman resultados similares para el flujo de **F** hacia el exterior de otros dominios. Esto da lugar a otra interpretación de la divergencia: **div F**(P) es la *fuerza de la fuente* de **F** *por unidad de volumen* en P. Con esta interpretación, debemos esperar, incluso en el caso de un campo vectorial **F** cuya divergencia no sea constante, que el flujo total de **F** hacia el exterior de la superficie $\mathcal{S}$ de un dominio D sea igual a la fuerza total de la fuente de **F** dentro de D, es decir,

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_D \nabla \bullet \mathbf{F}\, dV$$

Éste es el **Teorema de la Divergencia**, que demostraremos en la Sección 16.4.

Ejemplo 3 Verifique que el campo vectorial $\mathbf{F} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, debido a una fuente de fuerza m en $(0, 0, 0)$, tiene divergencia cero en todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ excepto el origen. ¿Qué se puede esperar del flujo total de **F** hacia el exterior a través de la superficie límite de un dominio D si el origen está fuera de D? ¿Y si el origen está dentro de D?

Solución Como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{m}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}), \qquad \text{siendo} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

y como $\partial r/\partial x = x/r$, tenemos

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = m\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = m\frac{r^3 - 3xr^2\left(\frac{x}{r}\right)}{r^6} = m\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

De forma similar,

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = m\frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F_3}{\partial z} = m\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

Sumando sus términos, obtenemos $\nabla \bullet \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ si $r > 0$.

Si el origen está fuera del dominio D, entonces la densidad de la fuente de **F** en D es cero, por lo que puede esperarse que el flujo total de **F** hacia el exterior de D sea cero. Si el origen está en el interior de D, entonces D contiene una fuente de fuerza m (que produce $4\pi m$ unidades al cubo de fluido por unidad de tiempo), por lo que el flujo del exterior de D será $4\pi m$. *Véase* el Ejemplo 1 de la Sección 15.6, y también los Ejercicios 9 y 10 de esa sección, donde se presentan ejemplos concretos. ■

Distribuciones y funciones delta

Si $\ell(x)$ representa la densidad lineal (masa por unidad de longitud) de una masa distribuida en el eje x, entonces la masa total distribuida es

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\, dx$$

Supongamos ahora que la única masa en el eje es una «masa puntual» $m = 1$ situada en el origen. Entonces, en todos los puntos $x \neq 0$, la densidad es $\ell(x) = 0$, pero debe cumplirse todavía que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\, dx = m = 1$$

por lo que $\ell(0)$ debe ser infinito. Esto es una situación ideal, un modelo matemático. Ninguna *función* real $\ell(x)$ puede tener estas propiedades; si una función es cero en todas partes excepto en un único punto, entonces cualquier integral de esa función será cero (¿por qué?). Además, ninguna masa real puede ocupar un único punto. No obstante, es muy útil modelar masas reales y aisladas como masas puntuales y para modelar sus densidades se utilizan **funciones generalizadas** (también denominadas **distribuciones**).

Podemos ver la densidad de una masa puntual de valor 1 situada en $x = 0$ como el límite de densidades mayores concentradas en intervalos cada vez más pequeños. Por ejemplo, si

$$d_n(x) = \begin{cases} n/2 & \text{si} \quad |x| \leqslant 1/n \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1/n \end{cases}$$

(*véase* la Figura 16.1), entonces, para cualquier función suave $f(x)$ definida en $\mathbb{R}$, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_n(x) f(x)\, dx = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} f(x)\, dx$$

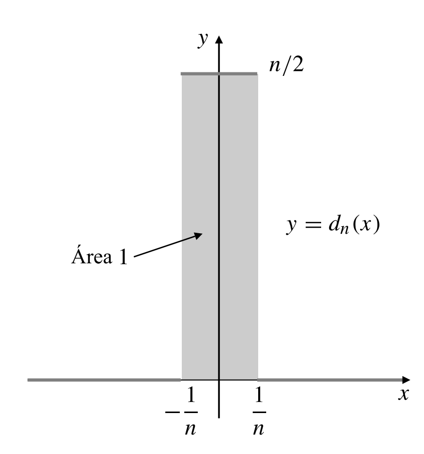


Figura 16.1 La función $d_n(x)$ converge a $\delta(x)$ cuando $n \to \infty$.

Sustituyendo $f(x)$ en la integral de la derecha por su desarrollo en serie de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \cdots$$

Como

$$\int_{-1/n}^{1/n} x^k\, dx = \begin{cases} 2/((k+1)n^{k+1}) & \text{si} \quad k \text{ es par} \\ 0 & \text{si} \quad k \text{ es impar} \end{cases}$$

podemos tomar el límite cuando $n \to \infty$ y obtener

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d_n(x) f(x)\, dx = f(0)$$

DEFINICIÓN 1

La **distribución de Dirac** $\delta(x)$ (también denominada **función delta de Dirac**, aunque no es realmente una función) es el «límite» de la secuencia $d_n(x)$ cuando $n \to \infty$. Se define mediante la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$$

para toda función suave $f(x)$.

Un cambio formal de variable permite demostrar que la función delta también cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - t) f(t)\, dt = f(x)$$

Ejemplo 4 En vista del hecho de que $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ cumple $\mathbf{div}\ \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, pero produce un flujo de $4\pi m$ hacia el exterior de cualquier esfera centrada en el origen, podemos ver $\mathbf{div}\ \mathbf{F}(x, y, z)$ como una distribución

$$\mathbf{div}\ \mathbf{F}(x, y, z) = 4\pi m \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

En particular, integrando esta distribución con $f(x, y, z) = 1$ en $\mathbb{R}^3$, tenemos

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{div}\ \mathbf{F}(x, y, z)\, dV &= 4\pi m \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\, dz \\ &= 4\pi m\end{aligned}$$

La integral se puede realizar igualmente sobre *cualquier dominio* de $\mathbb{R}^3$ que contenga al origen en su interior, y el resultado será el mismo. Si el origen está fuera del dominio, el resultado será cero. Volveremos sobre esta situación tras considerar el Teorema de la Divergencia en la Sección 16.4. ■

Un estudio formal sobre distribuciones está fuera del alcance de este libro; puede encontrarse en libros más avanzados sobre ecuaciones diferenciales o matemáticas para ingeniería.

Interpretación del rotacional

En términos generales, $\mathbf{rot}\ \mathbf{F}(P)$ mide la cantidad en la que el campo vectorial $\mathbf{F}$ «gira» alrededor de P.

Ejemplo 5 Considere el campo de velocidades

$$\mathbf{v} = -\Omega y \mathbf{i} + \Omega x \mathbf{j}$$

de un sólido en rotación alrededor del eje z con velocidad angular Ω, es decir, con vector velocidad angular $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$ (*véase* la Figura 15.2 en la Sección 15.1). Calcule la circulación de este campo sobre una circunferencia $\mathcal{C}_\epsilon$ en el plano xy, centrada en un punto (x_0, y_0), de radio ϵ, en sentido contrario al de las agujas del reloj. ¿Cuál es la relación entre la circulación y el rotacional de $\mathbf{v}$?

Solución La parametrización de la circunferencia indicada es

$$\mathbf{r} = (x_0 + \epsilon \cos t)\mathbf{i} + (y_0 + \epsilon \operatorname{sen} t)\mathbf{j}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

y la circulación de **v** sobre ella es

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{v} \bullet d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (-\Omega(y_0 + \epsilon \operatorname{sen} t)(-\epsilon \operatorname{sen} t) + \Omega(x_0 + \epsilon \cos t)(\epsilon \cos t))\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\Omega\epsilon(y_0 \operatorname{sen} t + x_0 \cos t) + \Omega\epsilon^2)\, dt \\ &= 2\Omega\pi\epsilon^2\end{aligned}$$

Como

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\Omega x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\Omega y)\right)\mathbf{k} = 2\Omega\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\Omega}$$

la circulación es el producto de $(\mathbf{rot}\ \mathbf{v}) \bullet \mathbf{k}$ y el área encerrada por $\mathcal{C}_\epsilon$. Nótese que esta circulación es constante para circunferencias de radio fijo; no depende de la posición de su centro. ■

Los cálculos del ejemplo anterior sugieren que el rotacional de un campo vectorial es una medida de la *circulación por unidad de área* en planos normales a dicho rotacional. El Teorema 2 posterior establece una versión más precisa de esta conjetura. No demostraremos este teorema ahora, porque la demostración en este momento sería muy complicada (*véase*, sin embargo, el Ejercicio 14, donde se presenta un caso especial). Una demostración más sencilla se basa en el Teorema de Stokes; *véase* el Ejercicio 13 de la Sección 16.5.

TEOREMA 2 **El rotacional como densidad de circulación**

Si **F** es un campo vectorial suave y $\mathcal{C}_\epsilon$ es una circunferencia de radio ϵ centrada en el punto P, que limita a un disco $\mathcal{S}_\mathcal{C}$ con normal unitaria $\hat{\mathbf{N}}$ y orientación heredada de $\mathcal{C}_\epsilon$ (*véase* la Figura 16.2), entonces

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{N}} \bullet \operatorname{rot} \mathrm{F}(P)$$

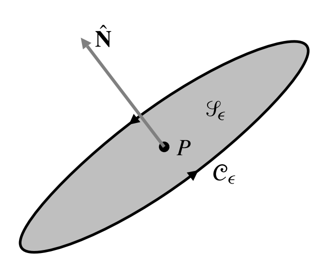


Figura 16.2

El Ejemplo 5 sugiere también la siguiente definición de velocidad angular *local* de un fluido en movimiento:

> La **velocidad angular local** de un punto P en un fluido en movimiento con un campo de velocidades $\mathbf{v}(P)$ está dada por
>
> $$\boldsymbol{\Omega}(P) = \frac{1}{2}\, \mathbf{rot}\ \mathbf{v}(P)$$

El Teorema 2 indica que la velocidad angular local $\boldsymbol{\Omega}(P)$ es aquel vector cuya componente en la dirección de cualquier vector unitario $\hat{\mathbf{N}}$ es la mitad de la circulación límite por unidad de área

alrededor de las circunferencias frontera (orientadas) de pequeños discos circulares centrados en P y con normal $\hat{\mathbf{N}}$.

No todos los campos vectoriales con rotacional distinto de cero *parecen* circular. El campo de velocidades del cuerpo rígido en rotación considerado en el Ejemplo 5 parece circular alrededor del eje de rotación, pero la circulación sobre una circunferencia situada en un plano perpendicular a ese eje será independiente de la posición de dicha circunferencia, y dependerá sólo de su área. Ni siquiera es necesario que la circunferencia contenga al eje de rotación. El ejemplo que sigue considera un campo de velocidades de un fluido cuyas líneas de corriente son *rectas*, pero cuyo rotacional es distinto de cero y constante, y tiene, por tanto, velocidad angular local constante.

Ejemplo 6 Considere el campo de velocidades $\mathbf{v} = x\mathbf{j}$ de un fluido en movimiento en el plano xy. Evidentemente, las partículas del fluido se mueven siguiendo líneas paralelas al eje y. Sin embargo, $\mathbf{rot}\ \mathbf{v}(x, y) = \mathbf{k}$ y $\mathbf{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2}\mathbf{k}$. Una pequeña «rueda con palas» de radio ϵ (*véase* la Figura 16.3), situada con su centro en la posición (x, y) del fluido, será desplazada por dicho fluido con velocidad $x\mathbf{j}$, pero también girará con velocidad angular $\mathbf{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2}\mathbf{k}$, independientemente de su posición. Esta velocidad angular es debida al hecho de que la velocidad del fluido en el lado derecho de la rueda es superior a la del lado izquierdo.

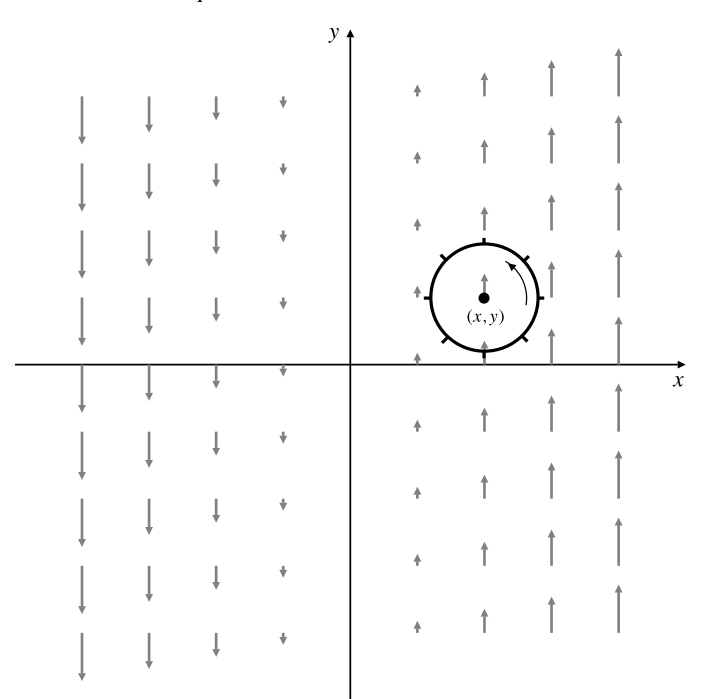


Figura 16.3 La rueda de palas no sólo es desplazada por el flujo, sino que también gira.

■

Ejercicios 16.2

En los Ejercicios 1-11, calcule **div F** y **rot F** para los campos vectoriales dados.

1. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

2. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

4. $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x\mathbf{k}$

6. $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$

7. $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$

8. $\mathbf{F} = f(z)\mathbf{i} - f(z)\mathbf{j}$

9. $\mathbf{F}(r, \theta) = r\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$, siendo (r, θ) las coordenadas polares en el plano.

10. $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$

11. $\mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$

∗12. Sea **F** un campo vectorial tridimensional suave. Si $B_{a,b,c}$ es la superficie de la caja $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-c \leqslant z \leqslant c$, con normal hacia el exterior $\hat{\mathbf{N}}$, demuestre que

$$\lim_{a,b,c\to 0^+} \frac{1}{8abc} \oiint_{B_{a,b,c}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \nabla \bullet \mathbf{F}(0, 0, 0)$$

∗13. Sea **F** un campo vectorial bidimensional suave. Si $\mathcal{C}_\epsilon$ es una circunferencia de radio ϵ centrada en el origen, y $\hat{\mathbf{N}}$ es la normal unitaria hacia el exterior de $\mathcal{C}_\epsilon$, demuestre que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, ds = \mathbf{div}\ \mathbf{F}(0, 0)$$

∗14. Demuestre el Teorema 2 en el caso especial de que $\mathcal{C}_\epsilon$ sea la circunferencia en el plano *xy* cuya parametrización es $x = \epsilon \cos\theta$, $y = \epsilon\,\mathrm{sen}\,\theta$, $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$. En este caso $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$. *Sugerencia*: desarrolle $\mathbf{F}(x, y, z)$ mediante un desarrollo en serie de Taylor vectorial alrededor del origen, como en la demostración del Teorema 1, y calcule la circulación sobre $\mathcal{C}_\epsilon$ de los términos individuales.

16.2 Algunas identidades con el gradiente, la divergencia y el rotacional

Existen numerosas identidades con las funciones

$$\mathbf{grad}\ f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{div}\ \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \bullet \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

y el **operador Laplaciana**, $\nabla^2 = \nabla \bullet \nabla$, definido para un campo escalar ϕ como

$$\nabla^2\phi = \nabla \bullet \nabla\phi = \mathbf{div\ grad}\ \phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

y para un campo vectorial $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ como

$$\nabla^2\mathbf{F} = (\nabla^2 F_1)\mathbf{i} + (\nabla^2 F_2)\mathbf{j} + (\nabla^2 F_3)\mathbf{k}$$

El operador Laplaciana, $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2)$, se indica como Δ en algunos textos. Recuérdese que una función ϕ se denomina **armónica** en un dominio D si $\nabla^2\phi = 0$ en dicho dominio D (*véase* la Sección 12.4).

Reuniremos las identidades más importantes en el teorema que sigue. La mayoría de ellas son diversas formas de la Regla del Producto. Demostraremos algunas para ilustrar las técnicas que se utilizan (la mayoría de las veces cálculo directo) y dejaremos el resto como ejercicios. Nótese que en dos de las identidades intervienen magnitudes como $(\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$; esto representa el vector que se obtiene aplicando el operador diferencial escalar $\mathbf{G} \bullet \nabla$ al campo vectorial **F**:

$$(\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} = G_1\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + G_2\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + G_3\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}$$

TEOREMA 3 **Identidades diferenciales vectoriales**

Sean ϕ y ψ campos escalares, y **F** y **G** campos vectoriales, y supongamos que todos son suficientemente suaves, de forma que todas las derivadas parciales en las identidades son continuas. Entonces, se cumple lo siguiente:

(a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

(b) $\nabla \bullet (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \bullet \mathbf{F} + \phi(\nabla \bullet \mathbf{F})$

(c) $\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F})$

(d) $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{G} - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$

(e) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \bullet \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \bullet \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G}$

(f) $\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$

(g) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ (**div rot** = 0)

(h) $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$ (**rot grad** = **0**)

(i) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \bullet \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

(**rot rot** = **grad div** − Laplaciana)

Las identidades (a)-(f) son versiones de la Regla del Producto y son identidades de primer orden en las que sólo interviene una aplicación de ∇. Las identidades (g)-(i) son identidades de segundo orden. Las identidades (g) y (h) son equivalentes a la igualdad de las derivadas parciales mixtas y son especialmente importantes en la comprensión de **div** y **rot**.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos sólo las identidades (c), (e) y (g). Las demostraciones restantes son similares a éstas.

(c) La primera componente (componente **i**) de $\nabla \times (\phi\mathbf{F})$ es

$$\frac{\partial}{\partial y}(\phi F_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi F_2) = \frac{\partial\phi}{\partial y}F_3 - \frac{\partial\phi}{\partial z}F_2 + \phi\frac{\partial F_3}{\partial y} - \phi\frac{\partial F_2}{\partial z}$$

Los dos primeros términos de la derecha forman la primera componente de $(\nabla\phi) \times \mathbf{F}$, y los dos últimos términos forman la primera componente de $\phi(\nabla \times \mathbf{F})$. Por tanto, las primeras componentes de los dos miembros de identidad (c) son iguales. La igualdad de los otros componentes se deduce de forma similar.

(e) De nuevo, es suficiente demostrar que las primeras componentes de los vectores de ambos miembros de la identidad son iguales. Para calcular la primera componente de $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$, necesitamos las componentes segunda y tercera de $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$, que son

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})_2 = F_3G_1 - F_1G_3 \quad \text{y} \quad (\mathbf{F} \times \mathbf{G})_3 = F_1G_2 - F_2G_1$$

La primera componente de $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$ es, por tanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}(F_1G_2 - F_2G_1) - \frac{\partial}{\partial z}(F_3G_1 - F_1G_3) \\
&\qquad = \frac{\partial F_1}{\partial y}G_2 + F_1\frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial y}G_1 - F_2\frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial z}G_1 \\
&\qquad\quad - F_3\frac{\partial G_1}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial z}G_3 + F_1\frac{\partial G_3}{\partial z}
\end{aligned}$$

Las primeras componentes de los cuatro términos del miembro derecho de la igualdad (e) son

$$((\nabla \bullet \mathbf{G})\mathbf{F})_1 = F_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} + F_1 \frac{\partial G_2}{\partial y} + F_1 \frac{\partial G_3}{\partial z}$$

$$((\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F})_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} G_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y} G_2 + \frac{\partial F_1}{\partial z} G_3$$

$$-((\nabla \bullet \mathbf{F})\mathbf{G})_1 = -\frac{\partial F_1}{\partial x} G_1 - \frac{\partial F_2}{\partial y} G_1 - \frac{\partial F_3}{\partial z} G_1$$

$$-((\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G})_1 = -F_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} - F_2 \frac{\partial G_1}{\partial y} - F_3 \frac{\partial G_1}{\partial z}$$

Cuando sumamos todos los términos de esas cuatro expresiones, algunos se cancelan y quedan los mismos términos en la primera componente de $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.

(g) Éste es un cálculo directo en el que interviene la igualdad de las derivadas parciales mixtas:

$$\begin{aligned}
\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Observación Las identidades del *producto triple* de vectores se presentaron previamente en los Ejercicios 18 y 23 de la Sección 10.3:

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \bullet (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathrm{c} \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Aunque se trata de identidades útiles, *no se pueden* utilizar para proporcionar demostraciones más simples de las identidades del Teorema 3 sustituyendo alguno de los vectores por ∇ (¿por qué?).

Potencial escalar y potencial vector

Se utilizan dos términos especiales para describir campos vectoriales en los que o bien la divergencia o bien el rotacional son nulos.

DEFINICIÓN 2 **Campos vectoriales solenoidales e irrotacionales**

Un campo vectorial **F** se denomina **solenoidal** en un dominio D si **div F** $= 0$ en dicho dominio.
Un campo vectorial **F** se denomina **irrotacional** en un dominio D si **rot F** $= \mathbf{0}$ en dicho dominio.

El apartado (h) del Teorema 3 dice que $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\,\phi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Por tanto,

Todo campo vectorial conservativo es irrotacional

El apartado (g) del Teorema 3 dice que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{div}\,\mathbf{F} = 0$. Por tanto,

El rotacional de todo campo vectorial es solenoidal

Las afirmaciones *contrarias* de las anteriores son verdaderas si el dominio de **F** cumple ciertas condiciones.

TEOREMA 4 Si **F** es un campo vectorial irrotacional y suave en un dominio simplemente conexo D, entonces $\mathbf{F} = \nabla\phi$ para alguna función potencial escalar definida en D, por lo que **F** es conservativo.

TEOREMA 5 Si **F** es un campo vectorial solenoidal y suave en un dominio D, con la propiedad de que toda superficie cerrada en dicho dominio contiene a un dominio contenido a su vez en D, entonces $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$ para algún campo vectorial **G** definido en D. Dicho campo vectorial **G** se denomina **potencial vector** del campo vectorial **F**.

En este momento no podemos demostrar estos resultados de forma completamente general. Sin embargo, ambos teoremas tienen demostraciones simples en el caso especial de que el dominio D sea de **tipo estrella**. Un dominio tipo estrella es aquel en el que existe un punto P_0 tal que el segmento que va desde P_0 hasta cualquier punto P de dicho dominio está contenido completamente en D (*véase* la Figura 16.4). Ambas demostraciones son *constructivas* en el sentido de que indican cómo calcular un potencial.

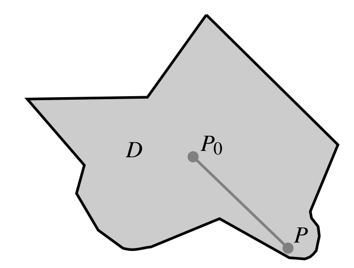


Figura 16.4 El segmento que va desde P_0 a todo punto de D está contenido en D.

Demostración del Teorema 4 para dominios tipo estrella Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que P_0 es el origen. Si $P = (x, y, z)$ es cualquier punto del dominio D, entonces el segmento recto

$$\mathbf{r}(t) = tx\,\mathbf{i} + ty\,\mathbf{j} + tz\,\mathbf{k}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

desde P_0 hasta P está en D. Definamos la función ϕ en el dominio D como

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt \\ &= \int_0^1 (xF_1(\xi, \eta, \zeta) + yF_2(\xi, \eta, \zeta) + zF_3(\xi, \eta, \zeta))\,dt\end{aligned}$$

con $\xi = tx$, $\eta = ty$ y $\zeta = tz$. Calculemos $\partial\phi/\partial x$ utilizando el hecho de que **rot F** $= \mathbf{0}$, para sustituir $(\partial/\partial\xi)F_2(\xi, \eta, \zeta)$ por $(\partial/\partial\eta)F_1(\xi, \eta, \zeta)$ y $(\partial/\partial\xi)F_3(\xi, \eta, \zeta)$ por $(\partial/\partial\zeta)F_1(\xi, \eta, \zeta)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \int_0^1 \left(F_1(\xi, \eta, \zeta) + tx\,\frac{\partial F_1}{\partial\xi} + ty\,\frac{\partial F_2}{\partial\xi} + tz\,\frac{\partial F_3}{\partial\xi}\right)dt \\ &= \int_0^1 \left(F_1(\xi, \eta, \zeta) + tx\,\frac{\partial F_1}{\partial\xi} + ty\,\frac{\partial F_1}{\partial\eta} + tz\,\frac{\partial F_1}{\partial\zeta}\right)dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\,(tF_1(\xi, \eta, \zeta))\,dt \\ &= (tF_1(tx, ty, tz))\Big|_0^1 = F_1(x, y, z)\end{aligned}$$

De forma similar, $\partial\phi/\partial y = F_2$ y $\partial\phi/\partial z = F_3$. Por tanto, $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

Los detalles de la demostración del Teorema 5 para dominios tipo estrella son similares a los del Teorema 4, y dejaremos la demostración para el Ejercicio 18 posterior.

Nótese que los potenciales vector, cuando existen, *no son en absoluto* únicos. Como **rot grad** ϕ es idénticamente nulo (Teorema 3(h)), se puede sumar a **G** cualquier campo conservativo arbitrario sin cambiar el valor de **rot G**. El ejemplo siguiente ilustra la libertad que tenemos para hacer hipótesis simplificadoras al calcular un potencial vector.

Ejemplo 1 Demuestre que el campo vectorial $\mathbf{F} = (x^2 + yz)\mathbf{i} - 2y(x + z)\mathbf{j} + (xy + z^2)\mathbf{k}$ es solenoidal en $\mathbb{R}^3$ y calcule un potencial vector para dicho campo.

Solución Como **div F** $= 2x - 2(x + z) + 2z = 0$ en $\mathbb{R}^3$, **F** es solenoidal. Un potencial vector **G** para **F** debe cumplir **rot G** $=$ **F**, es decir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} &= x^2 + yz \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} &= -2xy - 2yz \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= xy + z^2\end{aligned}$$

Las tres componentes de **G** tienen nueve derivadas parciales primeras independientes, por lo que hay nueve «grados de libertad» en su determinación. Las tres ecuaciones anteriores usan tres de esos nueve grados de libertad. Esto deja seis. Intentaremos calcular una solución **G** en la que $G_2 = 0$. Esto significa que las tres derivadas parciales primeras de G_2 son cero, por lo que hemos utilizado otros tres grados de libertad al realizar esta hipótesis. Nos quedan tres. La primera ecuación implica ahora que

$$G_3 = \int (x^2 + yz)\,dy = x^2y + \frac{1}{2}\,y^2z + M(x, z)$$

Como estamos integrando con respecto a y, la constante de integración puede depender todavía de x y z. Realizaremos una segunda hipótesis simplificadora: que $M(x, z) = 0$. Esto utiliza dos grados más de libertad, dejando uno. De la segunda ecuación tenemos

$$\frac{\partial G_1}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial x} - 2xy - 2yz = 2xy - 2xy - 2yz = -2yz$$

por lo que

$$G_1 = -2\int yz\,dz = -yz^2 + N(x, y)$$

No podemos suponer que $N(x, y) = 0$, porque eso requeriría dos grados de libertad y solamente tenemos uno. Sin embargo, la tercera ecuación implica que

$$xy + z^2 = -\frac{\partial G_1}{\partial y} = z^2 - \frac{\partial N}{\partial y}$$

Así, $(\partial/\partial y)N(x, y) = -xy$; obsérvese que los términos en los que interviene z se cancelan. Esto sucede porque **div F** $= 0$. Si **F** no hubiera sido solenoidal, no podríamos haber determinado N como función de x e y a partir sólo de la ecuación anterior. Sin embargo, como lo es, tenemos que

$$N(x, y) = -\int xy\,dy = -\frac{1}{2}xy^2 + P(x)$$

Podemos utilizar nuestro último grado de libertad para escoger $P(x)$ idénticamente nula y obtener, por tanto,

$$\mathbf{G} = -\left(yz^2 + \frac{xy^2}{2}\right)\mathbf{i} + \left(x^2y + \frac{y^2z}{2}\right)\mathbf{k}$$

como el potencial vector de **F** pedido. Podemos comprobar que **rot G** = **F**. Por supuesto, otras hipótesis simplificadoras pueden conducir a funciones **G** muy diferentes, que serían igualmente correctas. ■

Cálculos con Maple

El paquete **VectorCalculus** de Maple define rutinas para crear un campo vectorial, y para calcular el gradiente de un campo escalar y las divergencias y el rotacional de un campo vectorial. También calcula la Laplaciana de un campo escalar o vectorial, y permite utilizar el operador «del» (grad) en productos escalares y vectoriales. Algunas de estas funcionalidades están restringidas a campos vectoriales tridimensionales. Empecemos por cargar el paquete y declarar el tipo de sistema de coordenadas que utilizaremos, y los nombres de las coordenadas:

```
> with(VectorCalculus) :
> SetCoordinates('cartesian' [x, y, z]) ;
```

$$cartesian_{x,y,z}$$

Al establecer las coordenadas al principio no tendremos que hacerlo cada vez que llamemos a uno de los procedimientos para manejar campos vectoriales, como el procedimiento `Gradient`, que se ilustra al final de la Sección 12.7. Para calcular el gradiente de una expresión escalar en las variables x, y y z, basta con introducir

```
> f := x^2+x*y-z^3; G := Gradient(f) ;
```

$$f := x^2 + xy - z^3$$

$$G := (2x + y)\bar{e}_x + x\bar{e}_y - 3z^2\bar{e}_z$$

Maple muestra que el resultado G es un *campo vectorial* en vez de simplemente un *vector*, poniendo barras sobre los vectores de la base. Maple trata los campos vectoriales y los vectores como tipos de objetos diferentes; por ejemplo, se pueden sumar dos campos vectoriales o dos vectores, pero no se puede sumar un vector a un campo vectorial. Un campo vectorial es una función de una variable vectorial que toma valores vectoriales. Para calcular el valor de un campo vectorial en un vector particular, se utiliza el procedimiento `evalVF`:

```
> evalVF(G, <1, 1, 1>) ;
```

$$3e_x + e_y - 3e_z$$

Se puede definir un campo vectorial **F** mediante el procedimiento `VectorField`:

```
> F := VectorField(<x*y, 2*y*z, 3*x*z>) ;
```

$$F := xy\bar{e}_x + 2yz\bar{e}_y + 3xz\bar{e}_z$$

Después podemos calcular la divergencia o el rotacional de **F** utilizando los procedimientos `Divergence` o `Curl`, o bien mediante productos escalares o vectoriales con el operador `Del`:

```
> Divergence(F) ; Del.F;
```

$$y + 2z + 3x$$

$$y + 2z + 3x$$

```
> Curl (F) ; Del &x F;
```

$$-2y\bar{e}_x - 3z\bar{e}_y - x\bar{e}_z$$

$$-2y\bar{e}_x - 3z\bar{e}_y - x\bar{e}_z$$

Podemos verificar las identidades del Teorema 3 utilizando campos vectoriales y escalares arbitrarios:

```
> H := VectorField(<u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)>) ;
```

$$H := u(x, y, z)\bar{e}_x + v(x, y, z)\bar{e}_y + w(x, y, z)\bar{e}_z$$

```
> Divergence(Curl(H)) ; Curl(Gradient(u(x, y, z)) ;
```

$$0$$

$$0\bar{e}_x$$

$0\bar{e}_x$ es la forma de indicar en VectorCalculus el campo vectorial cero.

```
> Curl(Curl(H)) – Gradient(Divergence(H)) + Laplacian(H) ;
```

$$0\bar{e}_x$$

VectorCalculus tiene también procedimientos para calcular el potencial escalar de un campo vectorial irrotacional y el potencial vector de un campo vectorial solenoidal:

```
> ScalarPotential(VectorField(<x, y, z>)) ;
```

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$$

```
> VectorPotential(VectorField(<x^2, –x*y, –x*z>)) ;
```

$$-xyz\bar{e}_x - x^2z\bar{e}_y$$

Ningún procedimiento generará ninguna salida si no se le introduce un campo vectorial que cumpla la condición apropiada (irrotacional o solenoidal).

Finalmente, nótese que VectorCalculus trabaja muy bien con sistemas de coordenadas diferentes de `'cartesian' [x, y, z]`. Por ejemplo,

```
> SetCoordinates('cylindrical' [r, theta, z]) ;
```

$$cylindrical_{r,\theta,z}$$

```
> Laplacian(u(r, theta, z)) ;
```

$$\frac{\left(\frac{\partial}{\partial r}\ u(r,\ \theta,\ z)\right) + r\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\ u(r,\ \theta,\ z)\right) + \frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\ u(r,\ \theta,\ z)}{r} + r\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ u(r,\ \theta,\ z)\right)}{r}$$

cuya expresión no es tan simple como nos gustaría, pero es correcta. De forma similar, podemos utilizar los sistemas de coordenadas `'spherical' [rho, phi, theta]` en el espacio tridimensional y también `'polar'[r, theta]` en el plano.

Ejercicios 16.2

1. Demuestre el apartado (a) del Teorema 3.

2. Demuestre el apartado (b) del Teorema 3.

3. Demuestre el apartado (d) del Teorema 3.

4. Demuestre el apartado (f) del Teorema 3.

5. Demuestre el apartado (h) del Teorema 3.

6. Demuestre el apartado (i) del Teorema 3.

* **7.** Sabiendo que las líneas de campo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ son rectas paralelas, ¿se puede concluir algo respecto a **div F** y **rot F**?

8. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sea $\mathbf{c}$ un vector constante. Demuestre que $\nabla \bullet (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 0$, $\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{c}$ y $\nabla(\mathbf{c} \bullet \mathbf{r}) = \mathbf{c}$.

9. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sea $r = |\mathbf{r}|$. Si f es una función diferenciable de una variable, demuestre que

$$\nabla \bullet (f(r)\mathbf{r}) = rf'(r) + 3f(r)$$

Calcule $f(r)$ si $f(r)\mathbf{r}$ es solenoidal para $r \neq 0$.

10. Si el campo vectorial suave $\mathbf{F}$ es irrotacional y solenoidal en $\mathbb{R}^3$, demuestre que sus tres componentes y su potencial escalar son funciones armónicas en $\mathbb{R}^3$.

11. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\mathbf{F}$ es suave, demuestre que

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) = \mathbf{F} - (\nabla \bullet \mathbf{F})\mathbf{r} + \nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{r}) - \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{F})$$

En particular, si $\nabla \bullet \mathbf{F} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) = \mathbf{F} + \nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{r})$$

12. Si ϕ y ψ son funciones armónicas, demuestre que $\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi$ es solenoidal.

13. Si ϕ y ψ son campos escalares suaves, demuestre que

$$\nabla \times (\phi\nabla\psi) = -\nabla \times (\psi\nabla\phi) = \nabla\phi \times \nabla\psi$$

14. Verifique la identidad

$$\nabla \bullet (f(\nabla g \times \nabla h)) = \nabla f \bullet (\nabla g \times \nabla h)$$

para campos escalares suaves f, g y h.

15. Si los campos vectoriales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son suaves y conservativos, demuestre que $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ es solenoidal. Calcule un potencial vector de $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$.

16. Calcule un potencial vector de $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

17. Demuestre que $\mathbf{F} = xe^{2z}\mathbf{i} + ye^{2z}\mathbf{j} - e^{2z}\mathbf{k}$ es un campo vectorial solenoidal, y calcule un potencial vector del mismo.

* **18.** Suponga que $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = 0$ en un dominio D en el que todo punto P perteneciente al mismo se puede unir al origen con un segmento recto incluido completamente en D. Sea $\mathbf{r} = tx\mathbf{i} + ty\mathbf{j} + tz\mathbf{k}$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, una parametrización del segmento desde el origen a (x, y, z) en D. Si

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \int_0^1 t\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$$

demuestre que $\mathbf{rot}\,\mathbf{G} = \mathbf{F}$ en D. *Sugerencia*: Es suficiente comprobar las primeras componentes de **rot G** y **F**. Proceda de forma similar a la demostración del Teorema 4.

19. Utilice el paquete VectorCalculus de Maple para verificar las identidades (a)-(f) del Teorema 3. *Sugerencia*: En las expresiones de la forma $(\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G}$ habrá que utilizar

```
> F[1]*diff(G, x)+F[2]*diff(G, y)
> +F[3]*diff(G, z)
```

porque `Del` no se puede aplicar a un campo vectorial excepto vía un producto escalar o vectorial.

16.3 El Teorema de Green en el plano

El Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

expresa la integral, tomada sobre el intervalo $[a, b]$, de la derivada de una función de una variable, f, como una *suma* de los valores de esa función en la frontera orientada del intervalo $[a, b]$,

es decir, en los dos extremos a y b, donde el primero proporciona una contribución *negativa* y el segundo una *positiva*. La integral sobre una curva $\mathcal{C}$ de un campo vectorial conservativo desde A hasta B,

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \bullet d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

tiene una interpretación similar; $\nabla\phi$ es una derivada, y la curva $\mathcal{C}$, aunque está en un espacio bidimensional o tridimensional, es intrínsecamente un objeto unidimensional, y los puntos A y B constituyen su frontera.

El Teorema de Green es una versión bidimensional del Teorema Fundamental del Cálculo. Expresa la *integral doble* de una cierta clase derivada de un campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$, concretamente, la componente $\mathbf{k}$ de **rot F**, sobre una región R del plano xy como una integral (es decir, una «suma») sobre una curva $\mathcal{C}$ que es la frontera orientada de R, de la componente tangencial de $\mathbf{F}$:

$$\iint_R \mathbf{rot\ F} \bullet \mathbf{k}\, dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

o, de forma más explícita,

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_{\mathcal{C}} F_1(x, y)\, dx + F_2(x, y)\, dy$$

Para que esta fórmula se cumpla, $\mathcal{C}$ debe ser la frontera orientada de R considerada como una superficie con una orientación proporcionada por $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$. Así, $\mathcal{C}$ está orientada con R a su izquierda cuando nos movemos por $\mathcal{C}$ en la dirección de su orientación. Diremos en este caso que la curva está orientada positivamente con respecto a R. En particular, si $\mathcal{C}$ es una curva simple cerrada que limita a R, entonces $\mathcal{C}$ está orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj. Por supuesto, R puede tener huecos, y las fronteras de los huecos estarán orientadas en el sentido de las agujas del reloj. En cualquier caso, la tangente unitaria $\hat{\mathbf{T}}$ y la normal exterior unitaria $\hat{\mathbf{N}}$ (que apunta hacia el exterior de R) sobre $\mathcal{C}$ cumplen $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{T}} \times \mathbf{k}$. *Véase* la Figura 16.5.

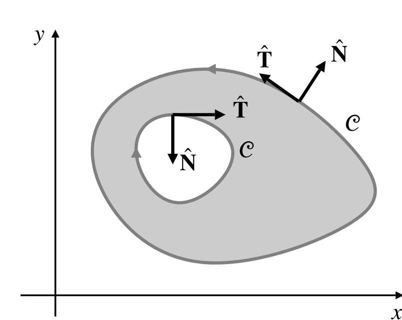


Figura 16.5 Un dominio en el plano con frontera orientada positivamente.

TEOREMA 6 **Teorema de Green**

Sea R una región cerrada y regular en el plano xy cuya frontera, $\mathcal{C}$, está formada por una o más curvas cerradas, suaves por tramos, y que no se cortan a sí mismas, positivamente orientadas con respecto a R. Si $\mathbf{F} = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial suave en R, entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x, y)\, dx + F_2(x, y)\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

DEMOSTRACIÓN Recuérdese que una región regular se puede dividir en subregiones no solapadas que son simples en x y simples en y (*véase* la Sección 14.2). Cuando dos de esas regiones comparten una curva frontera común, inducen orientaciones opuestas sobre dicha curva, por lo que la suma de las integrales sobre las fronteras de las subregiones es simplemente la integral sobre la frontera de la región completa (*véase* la Figura 16.6). Las integrales dobles sobre las subregiones también se suman para dar la integral doble sobre la región completa. Por tanto, es suficiente demostrar que la fórmula se cumple para una región R que sea simple en x y simple en y.

Como R es simple en y, está especificada por inecuaciones de la forma $a \leqslant x \leqslant b$, $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$, con la frontera inferior $y = f(x)$ orientada de izquierda a derecha y la frontera superior $y = g(x)$ orientada de derecha a izquierda (*véase* la Figura 16.7). Entonces,

$$-\iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dy$$

$$= \int_a^b (-F_1(x, g(x)) + F_1(x, f(x)))\,dx$$

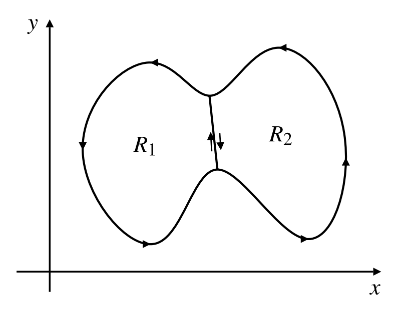


Figura 16.6 El Teorema de Green se cumple para la unión de R_1 y R_2 si se cumple para cada una de esas regiones.

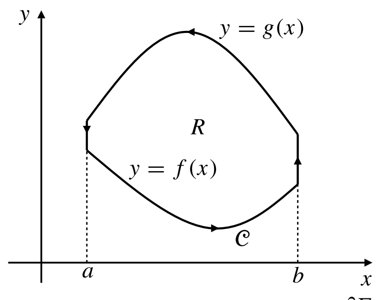


Figura 16.7 $\oint_{\mathcal{C}} F_1\,dx = -\iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dA$ para esta región R simple en y.

Por otra parte, como $dx = 0$ en los lados verticales de R, y la frontera superior se recorre desde b hasta a, tenemos

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x, y)\,dx = \int_a^b (F_1(x, f(x)) - F_1(x, g(x)))\,dx = \iint_R -\frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy$$

De forma similar, como R es simple en x, $\oint_{\mathcal{C}} F_2\,dy = \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx\,dy$, por lo que

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x, y)\,dx + F_2(x, y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

Ejemplo 1 **(Área encerrada por una curva cerrada simple)** Para los tres campos vectoriales

$$\mathbf{F} = x\mathbf{j}, \qquad \mathbf{F} = -y\mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

se cumple que $(\partial F_2/\partial x) - (\partial F_1/\partial y) = 1$. Si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple, suave por tramos y orientada positivamente que delimita una región R del plano, entonces, por el Teorema de Green,

$$\oint_{\mathcal{C}} x\,dy = -\oint_{\mathcal{C}} y\,dx = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} x\,dy - y\,dx = \iint_R 1\,dA = \text{área de } R$$

Ejemplo 2 Calcule $I = \oint_{\mathcal{C}} (x - y^3)\,dx + (y^3 + x^3)\,dy$, siendo $\mathcal{C}$ la frontera orientada positivamente del cuarto de disco Q: $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Solución Utilizaremos el Teorema de Green para calcular I:

$$\begin{aligned} I &= \iint_Q \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^3 + x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(x - y^3)\right) dA \\ &= 3\iint_Q (x^2 + y^2)\,dA = 3\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r^3\,dr = \frac{3}{8}\pi a^4 \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple, orientada positivamente en el plano xy, que delimita una región R y que no pasa por el origen. Demuestre que

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0 & \text{si el origen está en } R \\ 2\pi & \text{si el origen está fuera de } R \end{cases}$$

Solución Primero, si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces, por cálculo directo,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = 0$$

Si el origen no está en R, entonces el Teorema de Green implica que

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)\right] dx\,dy = 0$$

Supongamos ahora que el origen está en R. Como se supone que la curva $\mathcal{C}$ no pasa por el origen, éste debe ser un punto interior de R. El interior de R es abierto, por lo que existe un $\epsilon > 0$ tal que la circunferencia $\mathcal{C}_\epsilon$, de radio ϵ y centrada en el origen, está en el interior de R. Sea $\mathcal{C}_\epsilon$ una circunferencia orientada negativamente (en el sentido de las agujas del reloj). Por cálculo directo (*véase* el Ejercicio 22(a) de la Sección 15.4), se demuestra fácilmente que

$$\oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = -2\pi$$

$\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_\epsilon$ forman en conjunto la frontera orientada positivamente de una región R_1 que excluye al origen (*véase* la Figura 16.8). Por tanto, por el Teorema de Green,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} + \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$$

de donde se deduce el resultado deseado:

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = -\oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = -(-2\pi) = 2\pi$$

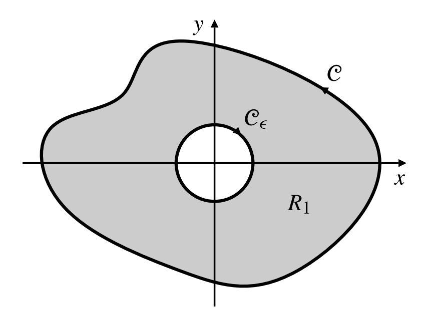


Figura 16.8

El Teorema de la Divergencia en dos dimensiones

El siguiente teorema es una formulación alternativa del Teorema Fundamental del Cálculo. En este caso expresaremos la integral doble de **div F** (una derivada de **F**) sobre R como una integral simple de la componente normal hacia el exterior de **F** sobre la frontera $\mathcal{C}$ de R.

TEOREMA 7 **El Teorema de la Divergencia en el plano**

Sea R una región regular y cerrada en el plano xy, cuya frontera $\mathcal{C}$ está formada por una o más curvas cerradas, que no se cortan a sí mismas y suaves por tramos. Sea $\hat{\mathbf{N}}$ la normal unitaria hacia fuera (desde R) sobre $\mathcal{C}$. Si $\mathbf{F} = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial suave en R, entonces

$$\iint_R \mathbf{div}\, \mathbf{F}\, dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, ds$$

DEMOSTRACIÓN Como se comentó en el segundo párrafo de esta sección, $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{T}} \times \mathbf{k}$, donde $\hat{\mathbf{T}}$ es el campo tangente unitario en la dirección positiva de $\mathcal{C}$. Si $\hat{\mathbf{T}} = T_1\mathbf{i} + T_2\mathbf{j}$, entonces $\hat{\mathbf{N}} = T_2\mathbf{i} - T_1\mathbf{j}$ (*véase* la Figura 16.9). Sea ahora **G** el campo vectorial cuyas componentes son $G_1 = -F_2$ y $G_2 = F_1$. Entonces $\mathbf{G} \bullet \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}$ y, por el Teorema de Green,

$$\begin{aligned}\iint_R \mathbf{div}\, \mathbf{F}\, dA &= \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dA \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) dA \\ &= \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \bullet d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \bullet \hat{\mathbf{T}}\, ds = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, ds\end{aligned}$$

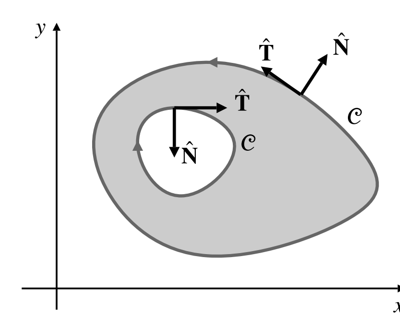


Figura 16.9 $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{T}} \times \mathbf{k}$.

Ejercicios 16.3

1. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} (\operatorname{sen} x + 3y^2)\,dx + (2x - e^{-y^2})\,dy$, siendo $\mathcal{C}$ la frontera del semidisco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $y \geqslant 0$, orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj.

2. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} (x^2 - xy)\,dx + (xy - y^2)\,dy$, en el sentido de las agujas del reloj por el triángulo cuyos vértices son (0, 0), (1, 1) y (2, 0).

3. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} (x \operatorname{sen}(y^2) - y^2)\,dx + (x^2 y \cos(y^2) + 3x)\,dy$, siendo $\mathcal{C}$ la frontera en sentido contrario al de las agujas del reloj del trapezoide cuyos vértices son $(0, -2)$, $(1, -1)$, (1, 1) y (0, 2).

4. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} x^2 y\,dx - xy^2\,dy$, siendo $\mathcal{C}$ la frontera en el sentido de las agujas del reloj de la región $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9 - x^2}$.

5. Utilice una integral sobre una curva para calcular el área plana encerrada por la curva $\mathbf{r} = a\cos^3 t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j}$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

6. Hemos deducido el Teoremas de la Divergencia en dos dimensiones a partir del Teorema de Green. Invierta el argumento y utilice el Teorema de la Divergencia en dos dimensiones para demostrar el Teorema de Green.

7. Dibuje la curva plana $\mathcal{C}$: $\mathbf{r} = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{j}$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, con $\mathbf{F} = ye^{x^2}\mathbf{i} + x^3 e^y \mathbf{j}$.

8. Si $\mathcal{C}$ es la frontera orientada positivamente de una región plana R que tiene área A y centroide $(\bar{x}, \bar{y})$, interprete geométricamente la integral sobre una curva $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, con (a) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{j}$, (b) $\mathbf{F} = xy\mathbf{i}$ y (c) $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j}$.

***9.** **(Valores medios de funciones armónicas)** Si $u(x, y)$ es armónica en un dominio que contiene a un disco de radio r con frontera C_r, entonces el valor medio de u sobre la circunferencia es el valor de u en su centro. Pruebe esto demostrando que la derivada del valor medio con respecto a r es cero (utilice el Teorema de la Divergencia y el hecho de que u es armónica) y que el límite del valor medio cuando $r \to 0$ es el valor de u en el centro.

16.4 El Teorema de la Divergencia en el espacio tridimensional

El **Teorema de la Divergencia** (denominado también **Teorema de Gauss**) es una de las dos versiones del Teorema Fundamental del Cálculo en $\mathbb{R}^3$ (la otra es el Teorema de Stokes, que se presenta en la sección siguiente).

En el Teorema de la Divergencia, la integral de la *derivada* $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F}$ sobre un dominio en el espacio tridimensional se expresa como el flujo de **F** hacia el exterior de la superficie de ese dominio. Esto se parece mucho a la versión bidimensional, Teorema 7, presentada en la sección anterior. El teorema se cumple para una clase general de dominios en $\mathbb{R}^3$ limitados por superficies cerradas suaves por tramos. Sin embargo, restringiremos nuestro planteamiento y demostración a dominios de un tipo especial. Ampliando el concepto de dominio simple en x en el plano definido en la Sección 14.2, se dice que un dominio tridimensional D es **simple** en x si está limitado por una superficie suave por tramos $\mathcal{S}$ y si toda recta paralela al eje x que pase por un punto interior de D corta a $\mathcal{S}$ exactamente en dos puntos. Se pueden dar definiciones semejantes para los casos de simple en y, y de simple en z. Diremos que un dominio D es **regular** si es una unión finita de subdominios no solapados, todos los cuales son simples en x, en y y en z.

TEOREMA 8 **El Teorema de la Divergencia (Teorema de Gauss)**

Sea D un dominio regular, tridimensional, cuya frontera $\mathcal{S}$ es una superficie cerrada y orientada con campo normal unitario $\hat{\mathbf{N}}$ que apunta hacia el exterior de D. Si **F** es un campo vectorial suave definido sobre D, entonces

$$\iiint_D \mathbf{div}\,\mathbf{F}\,dV = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS$$

DEMOSTRACIÓN Como el dominio D es una unión finita de dominios no solapados que son simples en x, simples en y y simples en z, es suficiente con demostrar el teorema para un subdominio D con esta propiedad. Para ver que esto es así supongamos, por ejemplo, que D y $\mathcal{S}$ están divididos en dos partes, D_1 y D_2, y $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, por una superficie $\mathcal{S}^*$ (*véase* la Figura 16.10). $\mathcal{S}^*$ pertenece a la frontera de D_1 y D_2, pero las normales hacia el exterior, $\hat{\mathbf{N}}_1$ y $\hat{\mathbf{N}}_2$, de los dos subdominios apuntan en direcciones opuestas a cada lado de $\mathcal{S}^*$. Si la fórmula del teorema se cumple en ambos subdominios,

$$\iiint_{D_1} \mathbf{div}\, \mathbf{F}\, dV = \oiint_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}^*} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}_1\, dS$$

$$\iiint_{D_2} \mathbf{div}\, \mathbf{F}\, dV = \oiint_{\mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}^*} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}_2\, dS$$

entonces, sumando ambas ecuaciones, se obtiene

$$\iiint_{D} \mathbf{div}\, \mathbf{F}\, dV = \oiint_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

Las contribuciones de $\mathcal{S}^*$ se anulan entre sí porque sobre esa superficie $\hat{\mathbf{N}}_2 = -\hat{\mathbf{N}}_1$.

Para el resto de la demostración supondremos, por tanto, que D es simple en x, y y z. Como D es simple en z, estará entre las gráficas de dos funciones definidas en una región R del plano xy; si (x, y, z) pertenece a D, entonces (x, y) está en R y $f(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y)$ (*véase* la Figura 16.11). Tenemos

$$\begin{aligned}\iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV &= \iint_R dx\, dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dz \\ &= \iint_R (F_3(x, y, g(x, y)) - F_3(x, y, f(x, y)))\, dx\, dy\end{aligned}$$

Así pues,

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \oiint_{\mathcal{S}} (F_1 \mathbf{i} \bullet \hat{\mathbf{N}} + F_2 \mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{N}} + F_3 \mathbf{k} \bullet \hat{\mathbf{N}})\, dS$$

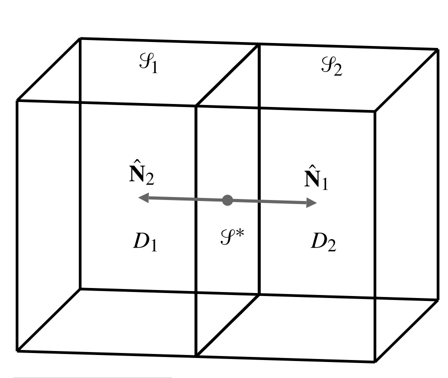


Figura 16.10 Unión de dominios colindantes.

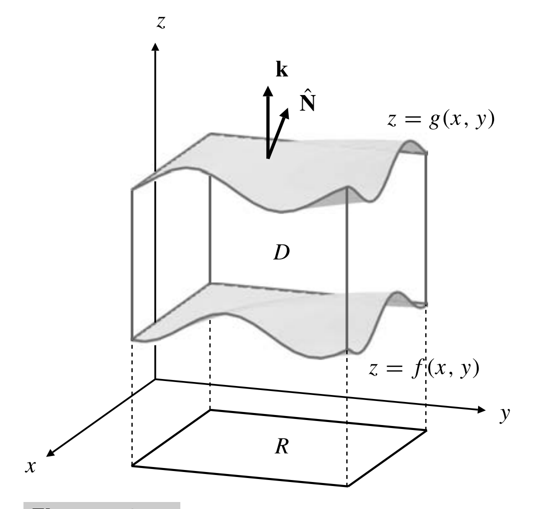


Figura 16.11 Dominio simple en z.

F_3 interviene sólo en el último término, y se puede descomponer en tres integrales, sobre la superficie superior, $z = g(x, y)$, sobre la superficie inferior, $z = f(x, y)$, y sobre la pared vertical que está por encima de la frontera de R:

$$\oiint_{\mathcal{S}} F_3(x, y, z)\mathbf{k} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \left(\iint_{\text{tope}} + \iint_{\text{fondo}} + \iint_{\text{pared}} \right) F_3(x, y, z)\mathbf{k} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

Sobre la pared lateral, $\mathbf{k} \bullet \hat{\mathbf{N}} = 0$, por lo que la integral es cero. En la superficie superior, $z = g(x, y)$, y el vector elemento de área es

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx\, dy$$

De acuerdo con esto,

$$\iint_{\text{tope}} F_3(x, y, z)\mathbf{k} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_R F_3(x, y, g(x, y))\, dx\, dy$$

De forma similar, tenemos

$$\iint_{\text{fondo}} F_3(x, y, z)\mathbf{k} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = -\iint_R F_3(x, y, f(x, y))\, dx\, dy$$

donde el signo negativo se produce porque en la parte inferior $\hat{\mathbf{N}}$ apunta hacia abajo en vez de hacia arriba. Hemos demostrado, por tanto, que

$$\iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} F_3\mathbf{k} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

De forma análoga, como D es también simple en x y simple en y,

$$\iiint_D \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} F_1\mathbf{i} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

$$\iiint_D \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} F_2\mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

Sumando los tres resultados obtenemos

$$\iiint_D \mathbf{div}\, \mathbf{F}\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

El Teorema de la Divergencia se puede utilizar en ambos sentidos para simplificar cálculos explícitos de integrales de superficie o volúmenes. Presentaremos ejemplos de cada caso.

Ejemplo 1 Sea $\mathbf{F} = bxy^2\mathbf{i} + bx^2y\mathbf{j} + (x^2 + y^2)z^2\mathbf{k}$, y sea $\mathcal{S}$ la superficie cerrada que limita al cilindro sólido R definido por $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, y $0 \leqslant z \leqslant b$. Calcule $\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$.

Solución Por el Teorema de la Divergencia,

$$\begin{aligned}\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} &= \iiint_R \mathbf{div}\, \mathbf{F}\, dV = \iiint_R (x^2 + y^2)(b + 2z)\, dV \\ &= \int_0^b (b + 2z)\, dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2\, r\, dr \\ &= (b^2 + b^2)2\pi(a^4/4) = \pi a^4 b^2\end{aligned}$$

Ejemplo 2 Calcule $\oiint_{\mathscr{S}} (x^2 + y^2)\, dS$, siendo $\mathscr{S}$ la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Utilice el Teorema de la Divergencia.

Solución En $\mathscr{S}$ tenemos

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{r}}{a} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}$$

Es conveniente escoger $\mathbf{F}$ de forma que $\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} = x^2 + y^2$. Obsérvese que $\mathbf{F} = a(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ sirve. Si B es la bola limitada por $\mathscr{S}$, entonces

$$\begin{aligned}\oiint_{\mathscr{S}} (x^2 + y^2)\, dS &= \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_B \mathbf{div}\, \mathbf{F}\, dV \\ &= \iiint_B 2a\, dV = (2a)\, \frac{4}{3}\, \pi a^3 = \frac{8}{3}\, \pi a^4\end{aligned}$$

Ejemplo 3 Utilizando el Teorema de la Divergencia con $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcule el volumen de un cono con área de base A y altura h. La base puede ser cualquier región plana limitada suavemente.

Solución Supongamos que el vértice del cono está en el origen y que la base es el plano $z = h$, como se muestra en la Figura 16.12. La superficie del cono sólido C consta de dos partes: la pared cónica $\mathscr{S}$ y la región de la base D, cuya área es A. Como $\mathbf{F}(x, y, z)$ apunta directamente en dirección contraria al origen en todo punto $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, tenemos que $\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} = 0$ en $\mathscr{S}$. Sobre D, tenemos $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$ y $z = h$, por lo que $\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} = z = h$ en la base del cono. Como $\mathbf{div}\, \mathbf{F}(x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3$, tenemos, por el Teorema de la Divergencia,

$$\begin{aligned}3V = \iiint_C \mathbf{div}\, \mathbf{F}\, dV &= \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_D \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS \\ &= 0 + h \iint_D dS = Ah\end{aligned}$$

Por consiguiente, $V = \frac{1}{3} Ah$, la fórmula conocida del volumen de un cono.

Ejemplo 4 Sea $\mathscr{S}$ la superficie de un dominio arbitrario regular D en el espacio tridimensional que contiene al origen en su interior. Calcule

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

siendo $\mathbf{F(r)} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, y $\hat{\mathbf{N}}$ la normal unitaria hacia el exterior sobre $\mathscr{S}$ (*véase* la Figura 16.13).

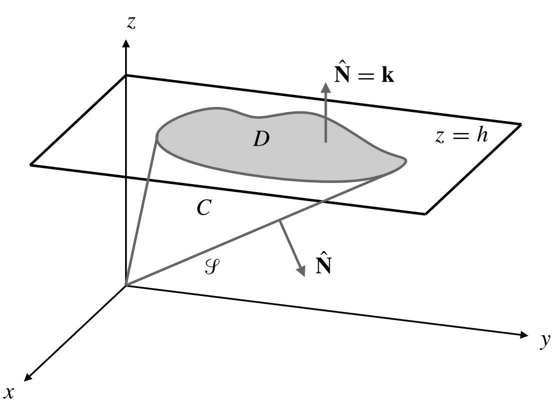


Figura 16.12 Un cono con forma de su base arbitraria.

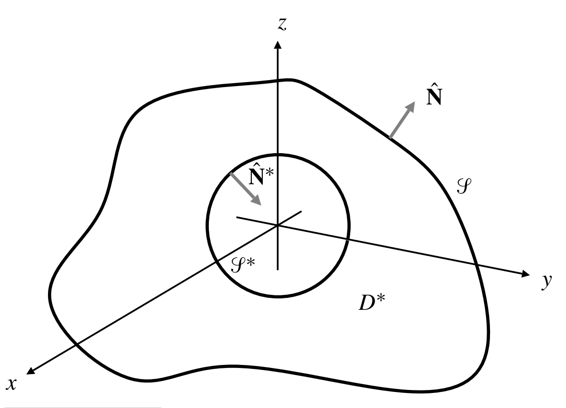


Figura 16.13 Un dominio sólido con una cavidad esférica.

Solución Como **F** y, por tanto, **div F** no están definidos en el origen, no podemos aplicar directamente el Teorema de la Divergencia. Para solucionar este problema utilizaremos un pequeño truco. Sea $\mathcal{S}^*$ una pequeña esfera centrada en el origen que limita a una bola contenida completamente en D (*véase* la Figura 16.13). Sea $\hat{\mathbf{N}}^*$ la normal unitaria sobre $\mathcal{S}^*$ que apunta *hacia el interior* de la esfera, y sea D^* la parte de D que está fuera de $\mathcal{S}^*$. Como se demuestra en el Ejemplo 3 de la Sección 16.1, $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = 0$ sobre D^*. Además,

$$\oiint_{\mathcal{S}^*} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}^* \, dS = -4\pi m$$

es el flujo de **F** *hacia el interior* a través de la esfera $\mathcal{S}^*$ (*véase* el Ejemplo 1 de la Sección 15.6). Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 = \iiint_{D^*} \mathbf{div}\,\mathbf{F} \, dV &= \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS + \oiint_{\mathcal{S}^*} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}^* \, dS \\ &= \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS - 4\pi m \end{aligned}$$

por lo que $\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS = 4\pi m.$

Ejemplo 5 Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia arriba a través de la parte del primer octante $\mathcal{S}$ de la superficie cilíndrica $x^2 + z^2 = a^2$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

Solución $\mathcal{S}$ es una de las cinco superficies que forman la frontera de la región sólida D que se muestra en la Figura 16.14. Las otras cuatro superficies son planas: $\mathcal{S}_1$ está en el plano $z = 0$, $\mathcal{S}_2$ está en el plano $x = 0$, $\mathcal{S}_3$ está en el plano $y = 0$ y $\mathcal{S}_4$ está en el plano $y = b$. Orientemos todas estas superficies con su normal $\hat{\mathbf{N}}$ apuntando hacia el exterior de D. Sobre $\mathcal{S}_1$ tenemos $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$, por lo que $\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} = -z = 0$ sobre $\mathcal{S}_1$. De forma similar, $\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} = 0$ sobre $\mathcal{S}_2$ y $\mathcal{S}_3$. Sobre $\mathcal{S}_4$, $y = b$ y $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{j}$, por lo que $\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} = y^2 = b^2$ allí. Si $\mathcal{S}_{\text{tot}}$ indica la frontera total de D, entonces

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{S}_{\text{tot}}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS + 0 + 0 + 0 + \iint_{\mathcal{S}_4} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS + \frac{\pi a^2 b^2}{4} \end{aligned}$$

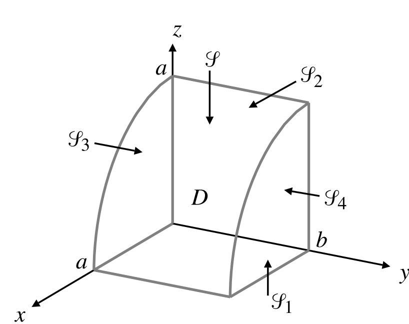


Figura 16.14 La frontera del dominio D tiene cinco caras, una de ellas curva y las otras cuatro planas.

Por otra parte, por el Teorema de la Divergencia,

$$\oiint_{\mathcal{S}_{\text{tot}}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iiint_D \mathbf{div}\,\mathbf{F} \, dV = \iiint_D (2 + 2y) \, dV = 2V + 2V\bar{y}$$

siendo $V = \pi a^2 b/4$ el volumen de D, e $\bar{y} = b/2$ la coordenada y del centroide de D. Combinando estos resultados, el flujo de **F** hacia arriba a través de $\mathcal{S}$ es

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS = \frac{2\pi a^2 b}{4}\left(1 + \frac{b}{2}\right) - \frac{\pi a^2 b^2}{4} = \frac{\pi a^2 b}{2}$$

Entre los ejemplos anteriores, el Ejemplo 4 es el más significativo y el que mejor representa cómo se usa en la práctica el Teorema de la Divergencia. Se trata en general de una herramienta teórica, más que una herramienta de cálculo. En la Sección 16.6 presentaremos algunas aplicaciones.

Variantes del Teorema de la Divergencia

Se pueden obtener otras versiones del Teorema Fundamental del Cálculo partiendo del Teorema de la Divergencia. Dos de ellas se presentan en el siguiente teorema:

TEOREMA 9 Si D satisface las condiciones del Teorema de la Divergencia y su superficie es $\mathcal{S}$, $\mathbf{F}$ es un campo vectorial suave y ϕ es un campo escalar suave, entonces

(a) $$\iiint_D \textbf{rot}\, \mathbf{F}\, dV = -\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

(b) $$\iiint_D \textbf{grad}\, \phi\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \phi \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

DEMOSTRACIÓN Obsérvese que ambas fórmulas son ecuaciones de *vectores*. Se obtienen aplicando el Teorema de la Divergencia a $\mathbf{F} \times \mathbf{c}$ y $\phi\mathbf{c}$, respectivamente, siendo $\mathbf{c}$ un vector constante arbitrario. Daremos los detalles de la fórmula (a) y dejaremos la (b) como ejercicio.

Utilizando el Teorema 3(d), calculamos

$$\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{c}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{c} - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{c}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{c}$$

Además, utilizando la identidad del producto escalar triple (*véase* el Ejercicio 18 de la Sección 10.3),

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{c}) \bullet \hat{\mathbf{N}} = (\hat{\mathbf{N}} \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{c} = -(\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{N}}) \bullet \mathbf{c}$$

Por tanto,

$$\left(\iiint_D \textbf{rot}\, \mathbf{F}\, dV + \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{N}}\, dS\right) \bullet \mathbf{c}$$
$$= \iiint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{c}\, dV - \oiint_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \times \mathbf{c}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$
$$= \iiint_D \textbf{div}\, (\mathbf{F} \times \mathbf{c})\, dV - \oiint_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \times \mathbf{c}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0$$

Como $\mathbf{c}$ es arbitraria, el vector del interior de los paréntesis grandes debe ser nulo (si $\mathbf{c} \bullet \mathbf{a} = 0$ para todo vector $\mathbf{c}$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{0}$). Esto nos lleva a la fórmula (a).

Ejercicios 16.4

En los Ejercicios 1-4, utilice el Teorema de la Divergencia para calcular el flujo de los campos vectoriales dados hacia el exterior de la esfera $\mathcal{S}$ cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, con $a > 0$.

1. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ **2.** $\mathbf{F} = ye^z\mathbf{i} + x^2e^z\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

3. $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

4. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + 3yz^2\mathbf{j} + (3y^2z + x^2)\mathbf{k}$

En los Ejercicios 5-8, calcule el flujo de $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ hacia el exterior a través de la frontera de las regiones sólidas dadas.

5. La bola $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 3)^2 \leqslant 9$

6. El elipsoide sólido $x^2 + y^2 + 4(z - 1)^2 \leqslant 4$

7. El tetraedro $x + y + z \leqslant 3$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$

8. El cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 2y$, $0 \leqslant z \leqslant 4$

9. Sea A el área de la región D que forma parte de la superficie de una esfera de radio R centrada en el origen, y sea V el volumen del cono sólido C formado por todos los puntos de los segmentos que unen el centro de la esfera con los puntos de D. Demuestre que

$$V = \frac{1}{3}AR$$

aplicando el Teorema de la Divergencia a $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

10. Sea $\phi(x, y, z) = xy + z^2$. Calcule el flujo de $\nabla\phi$ hacia arriba a través de la superficie plana triangular $\mathcal{S}$ cuyos vértices son $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$.

11. Un dominio cónico cuyo vértice es $(0, 0, b)$ y cuyo eje coincide con el eje z tiene como base un disco de radio a en el plano xy. Calcule el flujo de

$$\mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (3x^2y + y^3 - x^3)\mathbf{j} + (z + 1)\mathbf{k}$$

hacia arriba través de la parte cónica de la superficie del dominio.

12. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = (y + xz)\mathbf{i} + (y + yz)\mathbf{j} - (2x + z^2)\mathbf{k}$ hacia arriba a través de la parte del primer octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

13. Sea D la región $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4a^2$, $x^2 + y^2 \geqslant a^2$. La superficie $\mathcal{S}$ de D está formada por una parte cilíndrica, $\mathcal{S}_1$, y una parte esférica, $\mathcal{S}_2$. Calcule el flujo de

$$\mathbf{F} = (x + yz)\mathbf{i} + (y - xz)\mathbf{j} + (z - e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{k}$$

hacia el exterior de D a través de (a) la superficie completa $\mathcal{S}$, (b) la superficie $\mathcal{S}_1$ y (c) la superficie $\mathcal{S}_2$.

14. Calcule $\iint_{\mathcal{S}}$ ([illegible]$\mathbf{i} - x\mathbf{j} - y\mathbf{k}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$, siendo $\mathcal{S}$ la parte del cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está en el primer octante y entre los planos $x = 0$ y $x = 1$.

15. Una región sólida R tiene volumen V y su centroide está en el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Calcule el flujo de

$$\mathbf{F} = (x^2 - x - 2y)\mathbf{i} + (2y^2 + 3y - z)\mathbf{j} - (z^2 - 4z + xy)\mathbf{k}$$

hacia el exterior de R a través de esta superficie.

16. El plano $x + y + z = 0$ divide al cubo $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$ en dos partes. Sea D la parte inferior (uno de cuyos vértices es el punto $(-1, -1, -1)$). Dibuje D. Nótese que tiene siete caras, y una de ellas es hexagonal. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia el exterior de D a través de cada una de sus caras.

17. Sea $\mathbf{F} = (x^2 + y + 2 + z^2)\mathbf{i} + (e^{x^2} + y^2)\mathbf{j} + (3 + x)\mathbf{k}$. Sea $a > 0$ y sea $\mathcal{S}$ la parte de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2az + 3a^2$ que está por encima del plano xy. Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ hacia el exterior a través de $\mathcal{S}$.

18. Una pila de arena húmeda cuyo volumen total es de 5π cubre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 0$. El momento del vapor de agua está dado por $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\,\phi + \mu\,\mathbf{rot}\,\mathbf{G}$, siendo $\phi = x^2 - y^2 + z^2$ la concentración de agua, $\mathbf{G} = \frac{1}{3}(-y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k})$ y μ una constante. Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ hacia arriba a través de la superficie superior de la pila de arena.

En los Ejercicios 19-29, D es un dominio tridimensional que satisface las condiciones del Teorema de la Divergencia, y $\mathcal{S}$ es su superficie. $\hat{\mathbf{N}}$ es el campo normal unitario hacia fuera (desde D) sobre $\mathcal{S}$. Las funciones ϕ y ψ son campos escalares suaves sobre D. Además, $\partial\phi/\partial n$ indica la derivada direccional primera de ϕ en la dirección de $\hat{\mathbf{N}}$ en cualquier punto de $\mathcal{S}$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi \bullet \hat{\mathbf{N}}$$

19. Demuestre que $\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}\,\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0$, siendo $\mathbf{F}$ un campo vectorial arbitrario suave.

20. Demuestre que el volumen V de D está dado por

$$V = \frac{1}{3}\oiint_{\mathcal{S}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

21. Si el volumen de D es V, demuestre que

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{2V}\oiint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2)\hat{\mathbf{N}}\, dS$$

es el vector de posición del centro de gravedad de D.

22. Demuestre que $\oiint_{\mathcal{S}} \nabla\phi \times \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0.$

23. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial suave sobre D, demuestre que

$$\iiint_D \phi\, \mathbf{div}\, \mathbf{F}\, dV + \iiint_D \nabla\phi \bullet \mathbf{F}\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \phi \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

Sugerencia: Utilice el Teorema 3(b) de la Sección 16.2.

Propiedades del operador Laplaciana

24. Si $\nabla^2\phi = 0$ en D y $\phi(x, y, z) = 0$ en $\mathcal{S}$, demuestre que $\phi(x, y, z) = 0$ en D. *Sugerencia*: Haga $\mathbf{F} = \nabla\phi$ en el Ejercicio 23.

25. **(Unicidad del problema de Dirichlet)** El problema de Dirichlet para el operador Laplaciana es el problema de condiciones de contorno

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y, z) = f(x, y, z) & \text{en } D \\ u(x, y, z) = g(x, y, z) & \text{en } \mathcal{S} \end{cases}$$

siendo f y g funciones dadas definidas sobre D y $\mathcal{S}$, respectivamente. Demuestre que este problema puede tener como mucho una solución $u(x, y, z)$. *Sugerencia*: Suponga que existen dos soluciones, u y v, y aplique el Ejercicio 24 a su diferencia $\phi = u - v$.

26. **(El problema de Neumann)** Si $\nabla^2\phi = 0$ en D y $\partial\phi/\partial n = 0$ sobre $\mathcal{S}$, demuestre que $\nabla\phi(x, y, z) = 0$ sobre D. El problema de Neumann para el operador Laplaciana es el problema de condiciones de contorno

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y, z) = f(x, y, z) & \text{en } D \\ \dfrac{\partial}{\partial n} u(x, y, z) = g(x, y, z) & \text{en } \mathcal{S} \end{cases}$$

siendo f y g funciones dadas definidas sobre D y $\mathcal{S}$, respectivamente. Demuestre que, si D es conexo, entonces dos soluciones cualesquiera del problema de Neumann en D sólo se pueden diferenciar en una constante.

27. Verifique que $\displaystyle\iiint_D \nabla^2\phi\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS.$

28. Verifique que

$$\iiint_D (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) dS$$

29. Aplicando el Teorema de la Divergencia a $\mathbf{F} = \phi\mathbf{c}$, siendo $\mathbf{c}$ un vector constante arbitrario, demuestre que

$$\iiint_D \nabla\phi\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \phi\hat{\mathbf{N}}\, dS$$

***30.** Sea P_0 un punto fijo y para todo $\epsilon > 0$ sea D_ϵ un dominio cuya frontera $\mathcal{S}_\epsilon$ satisface las condiciones del Teorema de la Divergencia. Suponga que la máxima distancia desde P_0 a puntos P de D_ϵ tiende a cero cuando $\epsilon \to 0^+$. Si D_ϵ tiene volumen $\mathrm{vol}(D_\epsilon)$, demuestre que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{vol}(D_\epsilon)} \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \mathbf{div}\, \mathbf{F}(P_0)$$

Esto generaliza el Teorema 1 de la Sección 16.1.

16.5 El Teorema de Stokes

Si vemos una región R en el plano xy como una superficie en el espacio tridimensional con campo normal $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$, la fórmula del Teorema de Green se puede expresar de la forma

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \mathbf{rot}\, \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

El **Teorema de Stokes**, que se presenta a continuación, generaliza esta idea a superficies no planas.

TEOREMA 10 **Teorema de Stokes**

Sea $\mathcal{S}$ una superficie en el espacio tridimensional orientada y suave por tramos, con campo normal unitario $\hat{\mathbf{N}}$ y frontera $\mathcal{C}$, formada por una o más curvas cerradas, suaves por tramos, y con orientación heredada de $\mathcal{S}$. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial suave definido en un conjunto abierto que contiene a $\mathcal{S}$, entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}\, \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

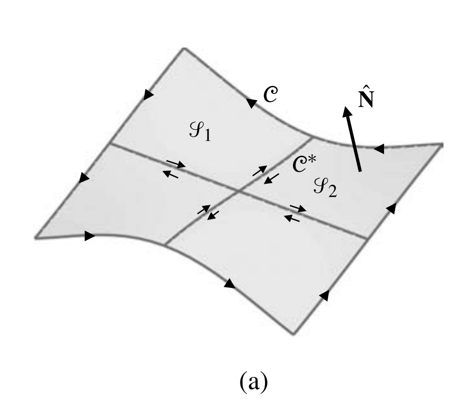
DEMOSTRACIÓN Un argumento similar a los presentados en las demostraciones del Teorema de Green y del Teorema de la Divergencia permite demostrar que, si $\mathcal{S}$ se descompone en un número finito de subsuperficies no solapadas, entonces es suficiente demostrar que la fórmula anterior se cumple en cada una de ellas (si las subsuperficies $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tienen como frontera común la curva $\mathcal{C}^*$, entonces $\mathcal{C}^*$ hereda orientaciones opuestas como parte de las fronteras de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, por lo que las integrales sobre $\mathcal{C}^*$ se cancelan entre sí; *véase* la Figura 16.15(a)). Podemos subdividir $\mathcal{S}$ en suficientes subsuperficies suaves de forma que cada una de ellas tenga una proyección normal uno a uno sobre un plano coordenado. Plantearemos la fórmula para una de estas subsuperficies, que denominaremos $\mathcal{S}$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{S}$ tiene una proyección normal uno a uno sobre el plano xy, y que su campo normal $\hat{\mathbf{N}}$ apunta hacia arriba. Por tanto, sobre $\mathcal{S}$, z es una función suave de x e y, por ejemplo $z = g(x, y)$, definida para (x, y) perteneciente a una región R del plano xy. Las fronteras $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{C}^*$ de R están ambas orientadas en sentido contrario al de las agujas del reloj vistas desde un punto situado sobre el eje z positivo (*véase* la Figura 16.15(b)). El campo normal sobre $\mathcal{S}$ es

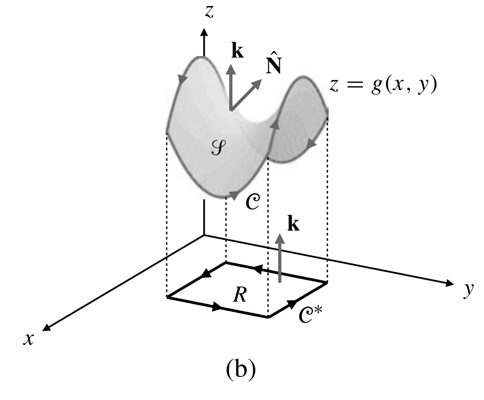
$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

y el elemento de área de superficie sobre $\mathcal{S}$ se expresa en función del elemento de área $dA = dx\,dy$ en el plano xy como

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dA$$



(a)



(b)

Figura 16.15
(a) El Teorema de Stokes se cumple en una superficie compuesta de subsuperficies no solapadas si se cumple en cada una de éstas.
(b) Una superficie con una proyección uno a uno sobre el plano *xy*.

Por tanto,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}\ \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_R \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right] dA$$

Como $z = g(x, y)$ sobre $\mathcal{C}$, tenemos que $dz = \dfrac{\partial g}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}\,dy$. Por tanto,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}^*} \bigg[F_1(x, y, z)\,dx + F_2(x, y, z)\,dy + F_3(x, y, z)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy\right)\bigg]$$

$$= \oint_{\mathcal{C}^*} \left(\left[F_1(x, y, z) + F_3(x, y, z)\,\frac{\partial g}{\partial x}\right]dx + \left[F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z)\,\frac{\partial g}{\partial y}\right]dy\right)$$

Aplicamos ahora el Teorema de Green en el plano xy para obtener

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z)\,\frac{\partial g}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[F_1(x, y, z) + F_3(x, y, z)\,\frac{\partial g}{\partial x}\right]\right)dA$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\,\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\,\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\,\frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial g}{\partial y} + F_3\,\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\,\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\,\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial z}\,\frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{\partial g}{\partial x} - F_3\,\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}\right)dA$$

Obsérvese que cuatro términos del integrando final se cancelan, y los restantes términos son iguales a los términos de la expresión de $\iint_{\mathcal{S}}$ **rot F** $\bullet\,\hat{\mathbf{N}}\,dS$ calculados anteriormente. Por tanto, la demostración está completa.

Observación Si **rot F** $= \mathbf{0}$ sobre un dominio D con la propiedad de que toda curva cerrada, suave por tramos, y que no se cruza consigo misma en D es la frontera de una superficie suave por tramos en D, entonces el Teorema de Stokes nos asegura que $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0$ para *toda* curva de ese tipo $\mathcal{C}$; por tanto, **F** debe ser conservativo. Un dominio D simplemente conexo tiene la propiedad especificada anteriormente. No daremos aquí una prueba formal de este hecho topológico, pero debe parecernos verosímil si recordamos la definición de conectividad simple. Una curva cerrada $\mathcal{C}$ en un dominio simplemente conexo D se debe poder reducir hasta un punto en D sin salirse fuera de D. Al reducirse, traza una superficie en D. Ésta es la razón por la que el Teorema 4 de la Sección 16.2 es válido para dominios simplemente conexos.

Ejemplo 1 Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$ y $\mathcal{C}$ la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $2x + 2y + z = 3$, orientada de forma que tiene una proyección en sentido contrario al de las agujas del reloj sobre el plano xy.

Solución $\mathcal{C}$ es la frontera orientada de un disco elíptico $\mathcal{S}$ que está en el plano $2x + 2y + z = 3$, y su proyección sobre el plano xy es el disco circular R: $x^2 + y^2 \leqslant 1$ (*véase* la Figura 16.16). Sobre $\mathcal{S}$ tenemos

$$\hat{\mathbf{N}}\,dS = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dx\,dy$$

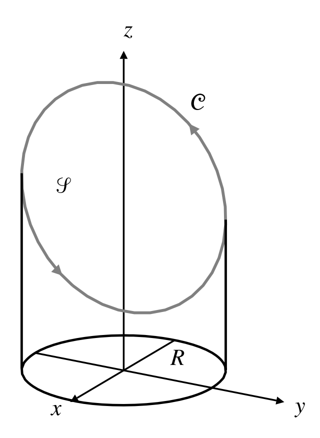


Figura 16.16

Además,

$$\textbf{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = 3(x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

Entonces, por el Teorema de Stokes,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \textbf{rot } \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$
$$= \iint_R 3(x^2 + y^2)\, dx\, dy = 2\pi \int_0^1 3r^2\, r\, dr = \frac{3\pi}{2}$$

Como en el caso del Teorema de la Divergencia, la importancia principal del Teorema de Stokes es como herramienta teórica. Sin embargo, se puede utilizar también para simplificar el cálculo de integrales de circulación como la del ejemplo anterior. No es difícil imaginar integrales que serían imposibles de calcular sin el uso del Teorema de Stokes o del Teorema de la Divergencia. En el ejemplo que sigue utilizaremos el Teorema de Stokes dos veces, pero el resultado se podría haber obtenido también fácilmente utilizando el Teorema de la Divergencia.

Ejemplo 2 Calcule $I = \iint_{\mathcal{S}} \textbf{rot } \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$, donde $\mathcal{S}$ es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ que está por encima del plano xy, $\hat{\mathbf{N}}$ es el campo unitario normal hacia fuera sobre $\mathcal{S}$, y

$$\mathbf{F} = y^2 \cos xz\,\mathbf{i} + x^3 e^{yz}\mathbf{j} - e^{-xyz}\mathbf{k}$$

Solución La frontera $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy, orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj vista desde el eje z positivo (*véase* la Figura 16.17). Esta curva es también la frontera orientada del disco plano D: $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $z = 0$, con campo normal $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$. Por tanto, aplicando dos veces el Teorema de Stokes se obtiene

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \textbf{rot } \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_D \textbf{rot } \mathbf{F} \bullet \mathbf{k}\, dA$$

Sobre D tenemos

$$\textbf{rot } \mathbf{F} \bullet \mathbf{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 e^{yz}) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 \cos xz) \right)\bigg|_{z=0}$$
$$= 3x^2 - 2y$$

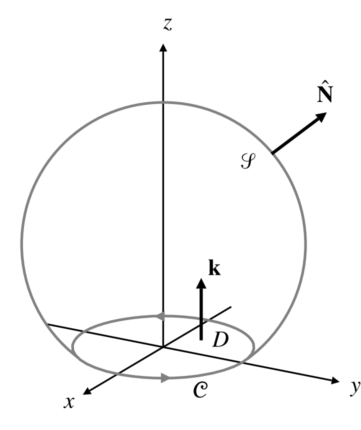


Figura 16.17 Parte de una esfera y un disco con la misma frontera.

Por simetría, $\iint_D y\,dA = 0$, por lo que

$$I = 3\iint_D x^2\,dA = 3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^2 r^3\,dr = 12\pi$$

Observación Una superficie $\mathcal{S}$ que cumpla las condiciones del Teorema de Stokes puede dejar de cumplirlas si se elimina un simple punto de ella. Un punto frontera aislado en una superficie no es una curva orientada, y por tanto el Teorema de Stokes puede fallar en este caso. Consideremos, por ejemplo, el campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$$

que está definido en el *disco perforado D* que cumple $0 < x^2 + y^2 \leqslant a^2$ (*véase* el Ejemplo 3 de la Sección 16.3). Si D está orientada con normal $\mathbf{k}$ hacia arriba, entonces su frontera está formada por la curva cerrada suave y orientada $\mathcal{C}$ dada por $x = a\cos\theta$, $y = a\,\mathrm{sen}\,\theta$, $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, y el punto aislado $(0, 0)$. Tenemos

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{-\,\mathrm{sen}\,\theta}{a}\mathbf{i} + \frac{\cos\theta}{a}\mathbf{j}\right)\bullet(-a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + a\cos\theta\,\mathbf{j})\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = 2\pi$$

Sin embargo,

$$\mathbf{rot\ F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

idénticamente sobre D. Por consiguiente,

$$\iint_D \mathbf{rot\ F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = 0$$

y la conclusión del Teorema de Stokes no se cumple en este caso.

Ejercicios 16.5

1. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$ por el triángulo de vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), con orientación en el sentido de las agujas del reloj vista desde el punto (1, 1, 1).

2. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} y\,dx - x\,dy + z^2\,dz$ por la curva $\mathcal{C}$ que es la intersección de los cilindros $z = y^2$ y $x^2 + y^2 = 4$, con orientación en sentido contrario al de las agujas del reloj desde un punto situado en el lado positivo del eje z.

3. Calcule $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot\,F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS$, siendo $\mathcal{S}$ el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$ con normal hacia fuera, y $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + (x^2 - y^2)\mathbf{k}$.

4. Calcule $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot\,F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS$, siendo $\mathcal{S}$ la superficie $x^2 + y^2 + 2(z-1)^2 = 6$, $z \geqslant 0$, $\hat{\mathbf{N}}$ es la normal unitaria hacia fuera (alejándose del origen) sobre $\mathcal{S}$, y

$$\mathbf{F} = (xz - y^3\cos z)\mathbf{i} + x^3e^z\mathbf{j} + xyze^{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}$$

5. Utilice el Teorema de Stokes para demostrar que

$$\oint_{\mathcal{C}} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \sqrt{3}\,\pi a^2$$

siendo $\mathcal{C}$ la intersección orientada adecuadamente de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x + y + z = 0$.

6. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ por la curva

$$\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

siendo

$$\mathbf{F} = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (e^y + x^3)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$$

Sugerencia: Demuestre que $\mathcal{C}$ está sobre la superficie $z = 2xy$.

7. Calcule la circulación de $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ por la frontera orientada de la parte del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está por encima del plano xy y tiene un campo normal apuntando hacia arriba.

8. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, siendo

$$\mathbf{F} = ye^x\mathbf{i} + (x^2 + e^x)\mathbf{j} + z^2e^z\mathbf{k}$$

y $\mathcal{C}$ la curva

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\mathbf{i} + (1 + \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (1 - \cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$$

para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. *Sugerencia*: Utilice el Teorema de Stokes, observando que $\mathcal{C}$ está en un cierto plano y tiene una circunferencia como proyección sobre el plano xy. La integral también se puede calcular utilizando las técnicas de la Sección 15.4.

9. Sea $\mathcal{C}_1$ la recta que une el punto $(-1, 0, 0)$ con el punto (1, 0, 0), y sea $\mathcal{C}_2$ la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $y \geqslant 0$. Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave que une $\mathcal{C}_1$ con $\mathcal{C}_2$, con normal hacia arriba, y sea

$$\mathbf{F} = (\alpha x^2 - z)\mathbf{i} + (xy + y^3 + z)\mathbf{j} + \beta y^2(z+1)\mathbf{k}$$

Calcule los valores de α y β para los que $I = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$ es independiente de la elección de $\mathcal{S}$, y calcule el valor de I para estos valores de α y β.

10. Sea $\mathcal{C}$ la curva $(x-1)^2 + 4y^2 = 16$, $2x + y + z = 3$, orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj cuando se observa desde un punto situado en la parte positiva del eje z. Sea

$$\mathbf{F} = (z^2 + y^2 + \operatorname{sen} x^2)\mathbf{i} + (2xy + z)\mathbf{j} + (xz + 2yz)\mathbf{k}$$

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$.

11. Si $\mathcal{C}$ es la frontera orientada de la superficie $\mathcal{S}$, y ϕ y ψ son campos escalares suaves arbitrarios, demuestre que

$$\oint_{\mathcal{C}} \phi\nabla\psi \bullet d\mathbf{r} = -\oint_{\mathcal{C}} \psi\nabla\phi \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla\phi \times \nabla\psi) \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS$$

¿Es $\nabla\phi \times \nabla\psi$ solenoidal? Calcule un vector potencial de este campo.

12. Sea $\mathcal{C}$ una curva plana suave por tramos, cerrada y que no se corta a sí misma, que está en un plano con normal unitaria $\hat{\mathbf{N}} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ y cuya orientación está heredada de la del plano. Demuestre que el área plana encerrada por $\mathcal{C}$ es

$$\frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} (bz - cy)\,dx + (cx - az)\,dy + (ay - bx)\,dz$$

13. Utilice el Teorema de Stokes para demostrar el Teorema 2 de la Sección 16.1.

16.6 Algunas aplicaciones en Física del cálculo vectorial

En esta sección mostraremos cómo se puede utilizar la teoría desarrollada en este capítulo para modelar problemas concretos de matemática aplicada. Consideraremos dos áreas de aplicación: dinámica de fluidos y electromagnetismo, y desarrollaremos algunas de las ecuaciones vectoriales fundamentales de estas disciplinas. Nuestro propósito es ilustrar las técnicas de cálculo vectorial en contextos aplicados, y no proporcionar introducciones completas, ni tan siquiera coherentes, a las propias disciplinas.

Dinámica de fluidos

Supongamos que una región del espacio tridimensional está llena con un fluido (líquido o gas) en movimiento. Se pueden utilizar dos enfoques para describir el movimiento. Podríamos intentar determinar la posición $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$ en cualquier instante t, de una «partícula» de fluido localizada en el punto (a, b, c) en el instante $t = 0$. Éste es el enfoque de Lagrange. También, podríamos intentar determinar la velocidad, $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, la densidad, $\delta(x, y, z, t)$ y otras variables físicas como la presión, $p(x, y, z, t)$, en cualquier instante t y en todo punto (x, y, z) de la región ocupada por el fluido. Éste es el enfoque de Euler.

Examinaremos el último método y describiremos cómo se puede utilizar el Teorema de la Divergencia para transformar algunas leyes físicas fundamentales en ecuaciones matemáticas equivalentes. Supondremos que la velocidad, la densidad y la presión varían de forma suave en todas sus variables y que el fluido es un *fluido ideal*, es decir, no viscoso (no se pega consigo mismo), homogéneo e isotrópico (tiene las mismas propiedades en todos los puntos y en todas las direcciones). Estas propiedades no son siempre las de los fluidos reales, por lo que estamos considerando un modelo matemático simplificado, que no siempre se corresponde exactamente con el comportamiento de los fluidos reales.

Consideremos una superficie cerrada imaginaria $\mathcal{S}$ en el fluido, que limita a un dominio D. Podemos decir que $\mathcal{S}$ es «imaginaria» porque no es una barrera que impida de modo alguno el flujo del fluido; es sólo una manera de centrar nuestra atención en una parte particular del fluido. Está fija en el espacio y no se mueve con el fluido. Supongamos que el fluido no se crea ni se destruye en ningún sitio (en particular, no hay fuentes ni sumideros), por lo que la **ley de conservación de masas** nos indica que la velocidad de cambio de la masa de fluido en D es igual a la velocidad a la que entra fluido a través de $\mathcal{S}$.

La masa de fluido en el elemento de volumen dV localizado en la posición (x, y, z) en el instante t es $\delta(x, y, z, t)\, dV$, por lo que la masa en D en el instante t es $\iiint_D \delta\, dV$. Esta masa cambia con una velocidad

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_D \delta\, dV = \iiint_D \frac{\partial \delta}{\partial t}\, dV$$

Como indicamos en la Sección 15.6, el volumen de fluido que *sale* de D a través del elemento de área dS situado en la posición (x, y, z) en el intervalo temporal que va desde t hasta $t + dt$ está dado por $\mathbf{v}(x, y, z, t) \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS\, dt$, siendo $\hat{\mathbf{N}}$ la normal unitaria en (x, y, z) sobre $\mathcal{S}$ que apunta hacia el exterior de D. Por tanto, la masa que cruza dS hacia el exterior en ese intervalo temporal es $\delta\mathbf{v} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS\, dt$ y la *velocidad* a la que fluye la masa hacia el exterior desde D a través de $\mathcal{S}$ en el instante t es

$$\oiint_{\mathcal{S}} \delta\mathbf{v} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

La velocidad a la que fluye la masa hacia el *interior* de D es el negativo de la magnitud anterior. Como la masa se conserva, debe cumplirse

$$\iiint_D \frac{\partial \delta}{\partial t}\, dV = -\oiint_{\mathcal{S}} \delta\mathbf{v} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = -\iiint_D \mathbf{div}\,(\delta\mathbf{v})\, dV$$

donde hemos utilizado el Teorema de la Divergencia para sustituir la integral de superficie por una integral de volumen. Entonces,

$$\iiint_D \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{div}\,(\delta \mathbf{v})\right) dV = 0$$

Esta ecuación debe cumplirse para *todo* dominio D en el fluido.

Si una función continua f cumple $\iiint_D f(P)\,dV = 0$ para todo dominio D, entonces $f(P) = 0$ en todos los puntos P, porque si hubiera un punto P_0 en el que $f(P_0) \neq 0$ (por ejemplo, $f(P_0) > 0$), entonces, por continuidad, f sería positiva en todos los puntos de alguna bola suficientemente pequeña B centrada en P_0, y $\iiint_B f(P)\,dV$ sería mayor que 0. Aplicando este principio, debemos tener

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{div}\,(\delta \mathbf{v}) = 0$$

a través del fluido. Esta ecuación se denomina **ecuación de continuidad** del fluido. Es equivalente a la ley de conservación de masas. Obsérvese que, si el fluido es **incompresible**, entonces δ es constante, independientemente del tiempo y de la posición espacial. En este caso, $\partial \delta / \partial t = 0$ y $\mathbf{div}\,(\delta \mathbf{v}) = \delta\, \mathbf{div}\, \mathbf{v}$. Por tanto, la ecuación de continuidad en el caso de un fluido incompresible es simplemente

$$\mathbf{div}\, \mathbf{v} = 0$$

El movimiento del fluido está gobernado por la Segunda Ley de Newton, que indica que la velocidad de cambio del momento de cualquier parte del fluido es igual a la suma de las fuerzas que se aplican a dicha parte. Consideremos de nuevo la parte del fluido contenida en un dominio D. En cualquier instante t su momento es $\iiint_D \delta \mathbf{v}\,dV$ y está cambiando con una velocidad

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t}\,(\delta \mathbf{v})\,dV$$

Este cambio es debido parcialmente al momento que cruza $\mathcal{S}$ hacia el interior o el exterior de D (el momento del fluido que atraviesa $\mathcal{S}$), parcialmente a la presión ejercida sobre el fluido que hay en D por el fluido exterior, y parcialmente a fuerzas externas (como las fuerzas gravitatorias o electromagnéticas) que actúan sobre el fluido. Examinemos sucesivamente cada una de estas causas.

El momento se transfiere a D a través de $\mathcal{S}$ con velocidad

$$-\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(\delta \mathbf{v} \bullet \hat{\mathbf{N}})\,dS$$

La presión sobre el fluido en D es ejercida a través de $\mathcal{S}$ en la dirección de la normal hacia el interior $-\hat{\mathbf{N}}$. Por tanto, esta parte de la fuerza sobre el fluido en D es

$$-\oiint_{\mathcal{S}} p\hat{\mathbf{N}}\,dS$$

Las fuerzas externas que actúan se expresan mejor utilizando la *densidad de fuerza* (fuerza por unidad de masa), $\mathbf{F}$. El total de las fuerzas externas sobre el fluido es, por tanto,

$$\iiint_D \delta \mathbf{F}\,dV$$

Ahora, la Segunda Ley de Newton implica que

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t}(\delta \mathbf{v})\,dV = -\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(\delta\mathbf{v} \bullet \hat{\mathbf{N}})\,dS - \oiint_{\mathcal{S}} p\hat{\mathbf{N}}\,dS + \iiint_D \delta\mathbf{F}\,dV$$

De nuevo, es conveniente transformar las integrales de superficie en integrales triples sobre D. Si utilizamos los resultados del Ejercicio 29 de la Sección 16.4 y del Ejercicio 2 posterior, tenemos

$$\oiint_{\mathcal{S}} p\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_D \nabla p\,dV$$

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(\delta\mathbf{v} \bullet \hat{\mathbf{N}})\,dS = \iiint_D (\delta(\mathbf{v} \bullet \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}\,\mathbf{div}\,(\delta\mathbf{v}))\,dV$$

De acuerdo con esto,

$$\iiint_D \left(\delta\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{v}\,\mathbf{div}\,(\delta\mathbf{v}) + \delta(\mathbf{v} \bullet \nabla)\mathbf{v} + \nabla p - \delta\mathbf{F}\right)dV = \mathbf{0}$$

Los términos segundo y tercero del integrando se cancelan en virtud de la ecuación de continuidad. Como D es arbitrario, debemos tener, por tanto,

$$\delta\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \delta(\mathbf{v} \bullet \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \delta\mathbf{F}$$

Ésta es la **ecuación del movimiento** del fluido. Obsérvese que no es una ecuación diferencial *lineal* en derivadas parciales, ya que el segundo término de la izquierda no es lineal en $\mathbf{v}$.

Electromagnetismo

En el espacio tridimensional se definen dos campos vectoriales que determinan las fuerzas eléctricas y magnéticas experimentadas por una carga unidad en un punto concreto si dicha carga se mueve con velocidad unidad. Estos campos vectoriales se encuentran determinados por las cargas y corrientes eléctricas presentes en el espacio. Una carga q_0 en la posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}_0$ experimenta una fuerza eléctrica $q_0\,\mathbf{E}(\mathbf{r})$, siendo $\mathbf{E}$ el **campo eléctrico**, y una fuerza magnética $\mu_0 q_0 \mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}(\mathbf{r})$, siendo $\mathbf{H}$ el **campo magnético** y $\mu_0 \approx 1.26 \times 10^{-6}$ N/amperio^2 una constante física denominada **permeabilidad del espacio libre**. Examinaremos brevemente estos campos, aunque inicialmente sólo consideraremos situaciones *estáticas*. Los campos eléctricos producidos por distribuciones estáticas de carga y los campos magnéticos producidos por corrientes eléctricas estáticas no dependen del tiempo. Posteriormente consideraremos la interacción entre los dos campos cuando varían con el tiempo.

Electrostática

La evidencia experimental muestra que el valor del campo eléctrico en un punto $\mathbf{r}$ es el vector suma de los campos causados por los elementos de carga situados en el espacio tridimensional. Una «carga puntual» q situada en la posición $\mathbf{s} = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$ genera el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \qquad \text{(Ley de Coulomb)}$$

siendo $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}$ culombios^2/N $\cdot$ m^2 una constante física denominada **permisividad del espacio libre**. Éste es exactamente el campo debido a una fuente puntual de fuerza $q/4\pi\epsilon_0$ situada en **s**. Excepto en $\mathbf{r} = \mathbf{s}$, el campo es conservativo, y su potencial es

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}$$

por lo que para $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$ tenemos $\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = \mathbf{0}$. Además $\mathbf{div}\ \mathbf{E} = 0$, excepto en $\mathbf{r} = \mathbf{s}$, donde es infinita; en términos de la distribución de Dirac, $\mathbf{div}\ \mathbf{E} = (q/\epsilon_0)\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta(z - \zeta)$ (*véase* la Sección 16.1). El flujo de **E** hacia el exterior a través de la superficie $\mathcal{S}$ de cualquier región R que contenga a q es

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

por analogía con el Ejemplo 4 de la Sección 16.4.

Dada una *distribución de carga* de densidad $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ en el espacio tridimensional (de forma que la carga en el elemento de volumen $dV = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ en **s** es $dq = \rho\, dV$), el flujo de **E** hacia el exterior de $\mathcal{S}$ debido a la carga en R es

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_R dq = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_R \rho\, dV$$

Si aplicamos el Teorema de la Divergencia a la integral de superficie, obtenemos

$$\iiint_R \left(\mathbf{div}\,\mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}\right) dV = 0$$

y como R es una región arbitraria,

$$\mathbf{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ésta es la forma diferencial de la Ley de Gauss (*véase* el Ejercicio 3 posterior).

El potencial debido a la distribución de carga de densidad $\rho(\mathbf{s})$ en la región R es

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_R \frac{\rho(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}\, dV \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_R \frac{\rho(\xi,\ \eta,\ \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}}\end{aligned}$$

Si ρ es continua y se anula en el exterior de una región acotada, la integral triple converge en todas partes (*véase* el Ejercicio 4 posterior), por lo que $\mathbf{E} = \nabla\phi$ es conservativo en el espacio tridimensional. Por tanto, en todos los puntos,

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{div}\ \mathbf{E} = \mathbf{div}\ \nabla\phi = \nabla^2\phi$, el potencial ϕ satisface la **Ecuación de Poisson**.

$$\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

En particular, ϕ es armónico en las regiones del espacio donde no haya distribuciones de carga.

Magnetostática

Los campos magnéticos están producidos por cargas en movimiento, es decir, por corrientes. Supongamos que una corriente eléctrica constante, I, fluye por un filamento siguiendo la curva $\mathcal{F}$. Se ha determinado experimentalmente que los campos magnéticos producidos en la posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ por los elementos de corriente $dI = I\,ds$ a lo largo del filamento se suman vectorialmente y que un elemento situado en la posición $\mathbf{s} = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$ produce el campo

$$d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi}\frac{d\mathbf{s}\times(\mathbf{r}-\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} \qquad \text{(Ley de Biot-Savart)}$$

siendo $d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{T}}\,ds$, y $\hat{\mathbf{T}}$ la tangente unitaria a $\mathcal{F}$ en la dirección de la corriente. Partiendo del supuesto razonable de que la carga no se crea ni se destruye en ninguna parte, el filamento $\mathcal{F}$ debe formar un circuito cerrado, y el campo magnético total en $\mathbf{r}$ debido a la corriente que circula por el circuito es

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_{\mathcal{F}}\frac{d\mathbf{s}\times(\mathbf{r}-\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3}$$

Sea $\mathbf{A}$ el campo vectorial definido por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi}\oint_{\mathcal{F}}\frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}$$

para todo $\mathbf{r}$ no perteneciente al filamento $\mathcal{F}$. Si utilizamos el hecho de que

$$\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}\right) = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3}$$

y la identidad vectorial $\nabla\times(\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{F} + \phi(\nabla\times\mathbf{F})$ (siendo $\mathbf{F}$ el vector $d\mathbf{s}$, que no depende de $\mathbf{r}$), podemos calcular el rotacional de $\mathbf{A}$:

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{\mathrm{I}}{4\pi}\oint_{\mathcal{F}}\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}\right)\times d\mathbf{s} = \frac{I}{4\pi}\oint_{\mathcal{F}} -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3}\times d\mathbf{s} = \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

Por tanto, $\mathbf{A}$ es un potencial vector de $\mathbf{H}$, y $\mathbf{div}\ \mathbf{H} = 0$ en los puntos que no pertenecen al filamento. También podemos verificar esto calculando que $\mathbf{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{0}$ en el exterior del filamento (*véanse* los Ejercicios 9-11 posteriores).

Imaginemos un circuito formado por un filamento recto a lo largo del eje z que se extiende una distancia infinita. El campo $\mathbf{H}$ en un punto finito será entonces el debido a la corriente que circula por el eje z, donde podemos suponer que dicha corriente I fluye en la dirección de $\mathbf{k}$. Las corrientes de todos los elementos $d\mathbf{s}$ producen, en $\mathbf{r}$, campos en la misma dirección, normales al plano que contiene a $\mathbf{r}$ y al eje z (*véase* la Figura 16.18). Por tanto, la intensidad del campo $H = |\mathbf{H}|$ a una distancia a del eje z se obtiene integrando los elementos

$$dH = \frac{I}{4\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta\,d\zeta}{a^2+(\zeta-z)^2} = \frac{I}{4\pi}\frac{a\,d\zeta}{(a^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{Ia}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{(a^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}} \qquad (\text{sea } \zeta - z = a\tan\phi) \\ &= \frac{I}{4\pi a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi\,d\phi = \frac{I}{2\pi a} \end{aligned}$$

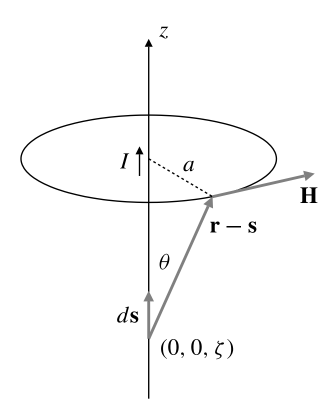


Figura 16.18

Las líneas de campo de **H** son evidentemente circunferencias horizontales centradas en el eje z. Si $\mathcal{C}_a$ es una de estas circunferencias de radio a, entonces la circulación de **H** por $\mathcal{C}_a$ es

$$\oint_{\mathcal{C}_a} \mathbf{H} \bullet d\mathbf{r} = \frac{I}{2\pi a}\, 2\pi a = I$$

Obsérvese que la circulación calculada anteriormente es independiente de a. De hecho, si $\mathcal{C}$ es cualquier curva cerrada que encierre una sola vez al eje z, en sentido contrario al de las agujas del reloj (vista desde arriba), entonces $\mathcal{C}$ y $-\mathcal{C}_a$ forman la frontera orientada de una superficie con forma de anillo $\mathcal{S}$ con un hueco por el que pasa el filamento. Como $\mathbf{rot\ H} = \mathbf{0}$ sobre $\mathcal{S}$, el Teorema de Stokes garantiza que

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \bullet d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}_a} \mathbf{H} \bullet d\mathbf{r} = I$$

Además, cuando $\mathcal{C}$ es muy pequeña (y, por tanto, muy cercana al filamento), la mayor parte de la contribución a la circulación de **H** por la curva proviene de la parte del filamento que está muy cercana a $\mathcal{C}$. No importa, por tanto, si el filamento es recto ni infinitamente largo. En cualquier filamento que forme un circuito cerrado por el que circule una corriente, la circulación del campo magnético por la frontera orientada de una superficie a través de la cual pase el filamento es igual a la corriente que fluye por el circuito. Ésta es la **Ley Circuital de Ampère**. La superficie está orientada de forma que su normal apunta en el sentido en el que circula la corriente.

Sustituyamos ahora el filamento por una corriente más general especificada por un vector densidad **J**. Esto significa que en cualquier punto **s** la corriente fluye en la dirección **J**(**s**), y que la corriente que atraviesa un elemento de área dS con normal unitaria $\hat{\mathbf{N}}$ es $\mathbf{J} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$. La circulación de **H** por la frontera $\mathcal{C}$ de la superficie $\mathcal{S}$ es igual a la corriente total que circula a través de $\mathcal{S}$; por tanto,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

Utilizando el Teorema de Stokes, podemos sustituir la integral sobre la curva por otra integral de superficie, y obtener así

$$\iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{rot\ H} - \mathbf{J}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0$$

Como $\mathcal{S}$ es arbitraria, debemos tener, en todos los puntos,

$$\mathbf{rot\ H} = \mathbf{J}$$

que es la versión de puntos de la Ley Circuital de Ampère. Se puede comprobar fácilmente que si

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_R \frac{\mathbf{J}(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \, dV$$

entonces $\mathbf{H} = \mathbf{rot}\ \mathbf{A}$ (de forma que $\mathbf{A}$ es un vector potencial del campo magnético $\mathbf{H}$). En este caso, R es la región del espacio tridimensional donde $\mathbf{J}$ es distinto de cero. Si $\mathbf{J}$ es continuo y se anula en el exterior de un conjunto acotado, entonces la integral triple converge para todo $\mathbf{r}$ (*véase* el Ejercicio 4 posterior), y $\mathbf{H}$ es solenoidal en todas partes:

$$\mathbf{div}\ \mathbf{H} = 0$$

Ecuaciones de Maxwell

Las cuatro ecuaciones obtenidas anteriormente para campos eléctricos y magnéticos estáticos,

$$\mathbf{div}\ \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad \mathbf{div}\ \mathbf{H} = 0$$
$$\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

requieren alguna modificación si los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ varían con el tiempo. La Ley de Gauss $\mathbf{div}\ \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ sigue siendo válida, y también $\mathbf{div}\ \mathbf{H} = 0$, que expresa el hecho de que no hay *fuentes* ni *sumideros* magnéticos *conocidos* (es decir, *monopolos* magnéticos). Las líneas de campo de $\mathbf{H}$ deben ser curvas cerradas.

Michael Faraday observó que la circulación de un campo eléctrico por una curva cerrada simple $\mathscr{C}$ corresponde a un cambio en el flujo magnético

$$\Phi = \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{H} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

a través de cualquier superficie orientada a $\mathscr{S}$ con frontera $\mathscr{C}$, de acuerdo con la fórmula

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \oint_{\mathscr{C}} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{r}$$

Aplicando el Teorema de Stokes a la integral sobre la curva, se obtiene

$$\iint_{\mathscr{S}} \mathbf{rot}\ \mathbf{E} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS = \oint_{\mathscr{C}} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{r} = -\mu_0 \frac{d}{dt} \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{H} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS = -\mu_0 \iint_{\mathscr{S}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

Como $\mathscr{S}$ es arbitraria, se obtiene la forma diferencial de la Ley de Faraday:

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

El campo eléctrico es irrotacional sólo si el campo magnético es constante con el tiempo.

La forma diferencial de la Ley de Ampère, $\mathbf{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{J}$, también requiere modificación. Si el campo eléctrico depende del tiempo, entonces también lo hará la densidad de corriente $\mathbf{J}$. Suponiendo conservación de la carga (es decir que las cargas no se producen ni se destruyen), podemos demostrar, mediante un argumento idéntico al utilizado anteriormente en esta sección para obtener la ecuación de continuidad del movimiento de fluidos, que la velocidad de cambio de la densidad de carga cumple

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{div}\ \mathbf{J}$$

Véase el Ejercicio 5 posterior. Esto es incongruente con la Ley de Ampère porque **div rot H** $= 0$, mientras que **div J** $\neq 0$ cuando ρ depende del tiempo. Nótese, sin embargo, que $\rho = \epsilon_0 \mathbf{div}\,\mathbf{E}$ implica que

$$-\,\mathbf{div}\ \mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \mathbf{div}\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

por lo que **div** $(\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t) = 0$. Esto sugiere que, en el caso no estático, la ley de Ampère se convierte en

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

que indica (tal como descubrió Maxwell) que los campos magnéticos no sólo son producidos por corrientes, sino también por campos eléctricos variantes.

El conjunto de las cuatro ecuaciones

$$\mathbf{div}\ \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad \mathbf{div}\ \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \mathbf{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

se conoce con el nombre de **ecuaciones de Maxwell**. Gobiernan la forma en que la presencia de cargas y corrientes en el espacio tridimensional produce campos eléctricos y magnéticos.

Ejercicios 16.6

1. (Principio de Arquímedes) Un sólido que ocupa una región R con superficie $\mathcal{S}$ se sumerge en un líquido de densidad constante δ. La presión del líquido a una profundidad h es δgh, por lo que la presión cumple $\nabla p = \delta \mathbf{g}$, siendo $\mathbf{g}$ la aceleración (vector) constante ante la gravedad. La presión del fluido ejerce en cada elemento de superficie dS de $\mathcal{S}$ una fuerza $-p\hat{\mathbf{N}}\,dS$ sobre el sólido.

(a) Demuestre que la «fuerza de flotabilidad» sobre el sólido es

$$\mathbf{B} = -\iiint_R \delta \mathbf{g}\, dV$$

Por tanto, la fuerza de flotabilidad tiene el mismo módulo, y dirección opuesta, que el peso del líquido desplazado por el sólido. Éste es el principio de Arquímedes.

(b) Amplíe el resultado anterior al caso en que el sólido está sólo parcialmente sumergido en el fluido.

2. Descomponiendo el vector $\mathbf{F}(\mathbf{G} \bullet \hat{\mathbf{N}})$ en sus componentes y aplicando el Teorema de la Divergencia a cada una de ellas por separado, demuestre que

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(\mathbf{G} \bullet \hat{\mathbf{N}})\, dS = \iiint_D (\mathbf{F}\ \mathbf{div}\,\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F})\, dV$$

siendo $\hat{\mathbf{N}}$ la normal unitaria hacia el exterior de la superficie $\mathcal{S}$ del dominio D.

3. (Ley de Gauss) Demuestre que el flujo del campo eléctrico $\mathbf{E}$ hacia el exterior a través de una superficie cerrada $\mathcal{S}$ en el espacio tridimensional es $1/\epsilon_0$ multiplicado por la carga total encerrada por $\mathcal{S}$.

4. Si $\mathbf{s} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k}$ y $f(\xi, \eta, \zeta)$ es continuo en $\mathbb{R}^3$, y se anula en el exterior de una región acotada, demuestre que, para todo $\mathbf{r}$ fijo,

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\xi, \eta, \zeta)|}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \leqslant \text{constante}$$

Esto demuestra que los potenciales de los campos eléctricos y magnéticos correspondientes a densidades de carga y corriente continua que se anulan en el exterior de regiones acotadas existen en todos los puntos de $\mathbb{R}^3$. *Sugerencia*: Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, y utilizar coordenadas esféricas.

5. La densidad de carga eléctrica, ρ, en el espacio tridimensional depende del tiempo y de la posición si la carga está en movimiento. Dicho movimiento se describe mediante la densidad de corriente $\mathbf{J}$. Obtenga la **ecuación de continuidad**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\,\mathbf{div}\ \mathbf{J}$$

a partir del hecho de que la carga se conserva.

6. Si **b** es un vector constante, demuestre que

$$\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}\right) = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{b}}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3}$$

7. Si **a** y **b** son vectores constantes, demuestre que, para $\mathbf{r} \neq \mathbf{b}$,

$$\mathbf{div}\left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{b}}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3}\right) = 0$$

Sugerencia: Utilice las identidades (d) y (h) del Teorema 3 de la Sección 16.2.

8. Utilice el resultado del Ejercicio 7 para ofrecer una demostración alternativa de que

$$\mathbf{div} \oint_{\mathcal{F}} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r}-\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} = 0$$

Nótese que **div** se refiere a la variable **r**.

9. Si **a** y **b** son vectores constantes, demuestre que, para $\mathbf{r} \neq \mathbf{b}$,

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{b}}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3}\right) = -(\mathbf{a} \bullet \nabla)\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{b}}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|^3}$$

Sugerencia: Utilice la identidad (e) del Teorema 3 de la Sección 16.2.

10. Si **F** es cualquier campo vectorial suave, demuestre que

$$\oint_{\mathcal{F}} (d\mathbf{s} \bullet \nabla)\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$$

por cualquier curva cerrada a $\mathcal{F}$. *Sugerencia*: Los gradientes de las componentes de **F** son conservativos.

11. Verifique que si **r** no está en $\mathcal{F}$, entonces

$$\mathbf{rot} \oint_{\mathcal{F}} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r}-\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} = \mathbf{0}$$

En este caso, **rot** se toma con respecto a la variable **r**.

12. Verifique la fórmula $\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{H}$, siendo **A** el potencial vector magnético definido en función de la densidad de corriente en estado estacionario **J**.

13. Si **A** es el potencial vector del campo magnético producido por una densidad de corriente estacionaria en un filamento cerrado, demuestre que en el exterior del filamento $\mathbf{div}\,\mathbf{A} = 0$.

14. Si **A** es el potencial vector del campo magnético producido por una densidad de corriente continua en estado estacionario, demuestre que $\mathbf{div}\,\mathbf{A} = 0$ en todas partes. A partir de aquí, demuestre que **A** cumple la ecuación vectorial de Poisson $\nabla^2\mathbf{A} = -\mathbf{J}$.

15. Demuestre que en una región del espacio que no contenga cargas ($\rho = 0$) y sin corrientes ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$), tanto $\mathbf{U} = \mathbf{E}$ como $\mathbf{U} = \mathbf{H}$ satisfacen la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\mathbf{U}$$

siendo $c = \sqrt{1/(\epsilon_0\mu_0)} \approx 3 \times 10^8$ m/s.

∗16. (Flujo de calor en el espacio tridimensional) El calor contenido en un elemento de volumen dV dentro de un sólido homogéneo es $\delta c T\,dV$, siendo δ y c constantes (la densidad y el calor específico del material sólido), y $T = T(x, y, z, t)$ la temperatura en el instante t en la posición (x, y, z) en el sólido. El calor siempre fluye en la dirección del gradiente de temperatura negativo, con una velocidad proporcional al tamaño de dicho gradiente. Por tanto, la velocidad de flujo de la energía calorífica a través del elemento de superficie dS con normal $\hat{\mathbf{N}}$ es $-k\nabla T \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS$, siendo k también una constante que depende del material del sólido (el coeficiente de conductividad térmica). Utilice «la conservación de la energía calorífica» para demostrar que para cualquier región R con superficie $\mathcal{S}$ dentro del sólido

$$\delta c \iiint_R \frac{\partial T}{\partial t}\,dV = k \oiint_{\mathcal{S}} \nabla T \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS$$

siendo $\hat{\mathbf{N}}$ la normal unitaria hacia el exterior sobre $\mathcal{S}$. A partir de aquí, demuestre que el flujo de calor dentro del sólido está gobernado por la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\delta c}\,\nabla^2 T = \frac{k}{\delta c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

16.7 Coordenadas curvilíneas ortogonales

En esta sección opcional, obtendremos fórmulas del gradiente de un campo escalar y de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial en términos de sistemas de coordenadas más generales que el sistema de coordenadas cartesianas utilizado en las secciones anteriores de este capítulo. En particular, expresaremos estas magnitudes en términos de los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas presentados en la Sección 14.6.

Denominaremos espacio xyz al sistema de coordenadas cartesianas habitual (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$. Se puede definir un sistema de coordenadas diferentes $[u, v, w]$ en el espacio xyz mediante una transformación continua de la forma

$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w)$$

Si la transformación es uno a uno, de una región D en el espacio uvw en una región R en el espacio xyz, entonces un punto P en R se puede representar mediante una tripleta $[u, v, w]$, las coordenadas cartesianas del punto único Q en el espacio uvw correspondiente a la transformación de P. En este caso, diremos que la transformación define un **sistema de coordenadas curvilíneas** en R y denominaremos $[u, v, w]$ a las **coordenadas curvilíneas** de P con respecto a ese sistema. Nótese que $[u, v, w]$ son coordenadas cartesianas en su propio espacio (el espacio uvw); son coordenadas curvilíneas en el espacio xyz.

En general, relajaremos el requisito de que la transformación que define un sistema de coordenadas curvilíneas sea uno a uno, es decir, que todo punto P de R deba tener un único conjunto de coordenadas curvilíneas. Es razonable requerir sólo que la transformación sea *uno a uno localmente*. Por tanto, puede haber más de un punto Q en el que se transforme un determinado punto P, pero solamente será uno en cualquier subregión adecuadamente pequeña de D. Por ejemplo, en el sistema de coordenadas polares del plano

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

la transformación es localmente uno a uno desde D, la mitad del plano $r\theta$ donde $0 < r < \infty$ en la región R formada por todos los puntos del plano xy excepto el origen. Aunque, por ejemplo, $[1, 0]$ y $[1, 2\pi]$ son las coordenadas polares del mismo punto en el plano xy, no están cercanas en D. Obsérvese, sin embargo, que existe todavía un problema con el origen, que se puede representar como $[0, \theta]$ para *cualquier* θ. Como la transformación no es localmente uno a uno en $r = 0$, consideraremos al origen del plano xy como un **punto singular** del sistema de coordenadas polares en el plano.

Ejemplo 1 El **sistema de coordenadas cilíndricas** $[r, \theta, z]$ en $\mathbb{R}^3$ se define mediante la transformación

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z$$

con $r \geqslant 0$ (*véase* la Sección 14.6). Esta transformación hace corresponder el semiespacio D dado por $r > 0$ en todo el plano xyz excluyendo al eje z, y es uno a uno localmente. Consideraremos $[r, \theta, z]$ como las coordenadas polares cilíndricas en todo el espacio xyz, pero diremos que los puntos del eje z son puntos singulares del sistema ya que los puntos $[0, \theta, z]$ son idénticos para todo θ. ■

Ejemplo 2 El **sistema de coordenadas esféricas** $[\rho, \phi, \theta]$ está definido por la transformación

$$x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

con $\rho \geqslant 0$ y $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ (*véase* la Sección 14.6). La transformación hace corresponder la región D del espacio $\rho\phi\theta$ dado por $\rho > 0$, $0 < \phi < \pi$ de forma uno a uno localmente en el espacio xyz, excluido el eje z. El punto de coordenadas cartesianas $(0, 0, z)$ se puede representar mediante las coordenadas esféricas $[0, \phi, \theta]$ para ϕ y θ arbitrarios si $z = 0$, mediante $[z, 0, \theta]$ para θ arbitrario si $z > 0$, y mediante $[|z|, \pi, \theta]$ para θ arbitrario si $z < 0$. Por tanto, todos los puntos del eje z son puntos singulares del sistema de coordenadas esféricas. ■

Curvas coordenadas y superficies coordenadas

Sea $[u, v, w]$ un sistema de coordenadas curvilíneas en el espacio xyz, y sea P_0 un punto no singular del sistema. Entonces, la transformación

$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w)$$

es localmente uno a uno cerca de P_0. Sea P_0 un punto con coordenadas curvilíneas $[u_0, v_0, w_0]$. El plano cuya ecuación es $u = u_0$ en el espacio uvw se transforma en una superficie en el espacio xyz que pasa por P_0. Esta superficie se denomina superficie u y nos referiremos a ella mediante la ecuación $u = u_0$; sus ecuaciones paramétricas son

$$x = x(u_0, v, w), \qquad y = y(u_0, v, w), \qquad z = z(u_0, v, w)$$

con parámetros v y w. De forma similar, la superficie v, $v = v_0$, y la superficie w, $w = w_0$, pasan por P_0; son las imágenes de los planos $v = v_0$ y $w = w_0$ en el espacio uvw.

Coordenadas curvilíneas ortogonales

Se dice que $[u, v, w]$ es un **sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales** en el espacio xyz si, para todo punto no singular P_0 en el espacio xyz, las tres **superficies coordenadas** $u = u_0$, $v = v_0$ y $w = w_0$ se cruzan entre sí en P_0 formando ángulos rectos.

Se asume tácitamente que las superficies coordenadas son suaves en todos los puntos no singulares, de forma que estamos suponiendo realmente que sus vectores normales son mutuamente perpendiculares. La Figura 16.19 muestra las superficies coordenadas que pasan por P_0 en un sistema típico de coordenadas curvilíneas ortogonales.

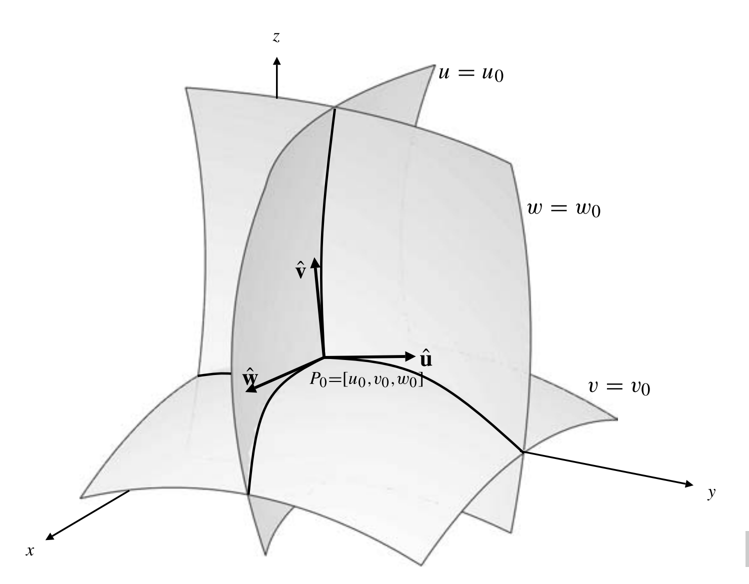


Figura 16.19 Superficies coordenadas u, v y w.

Las parejas de superficies coordenadas que pasan por un punto se cortan formando una **curva coordenada** que pasa por dicho punto. Por ejemplo, las superficies coordenadas $v = v_0$ y $w = w_0$ se cortan formando la **curva** u cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = x(u, v_0, w_0), \qquad y = y(u, v_0, w_0), \qquad z = z(u, v_0, w_0)$$

siendo u el parámetro. Un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ tangente a la curva u en P_0 es normal a la superficie coordenada $u = u_0$ en dicho punto. Lo mismo ocurre para los vectores unitarios $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$. En un

sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, los tres vectores $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$ forman una base de vectores unitarios mutuamente perpendiculares en cualquier punto no singular P_0 (*véase* la Figura 16.19). Esta base se denomina **base local** en P_0.

Ejemplo 3 En el sistema de coordenadas cilíndricas (*véase* la Figura 16.20), las superficies coordenadas son:

Cilindros circulares cuyo eje coincide con el eje z	(superficies r).
Semiplanos verticales que radian desde el eje z	(superficies θ).
Planos horizontales	(superficies z).

Las curvas coordenadas son:

Semirrectas horizontales que radian desde el eje z	(curvas r).
Circunferencias horizontales centradas en el eje z	(curvas θ).
Rectas verticales	(curvas z).

Ejemplo 4 En el sistema de coordenadas esféricas (*véase* la Figura 16.21), las superficies coordenadas son:

Esferas centradas en el origen	(superficies ρ).
Conos circulares verticales con vértices en el origen	(superficies ϕ).
Semiplanos verticales que radian desde el eje z	(superficies θ).

Las curvas coordenadas son:

Semirrectas que radian desde el origen	(curvas ρ).
Semicircunferencias verticales centradas en el origen	(curvas ϕ).
Circunferencias horizontales centradas en el eje z	(curvas θ).

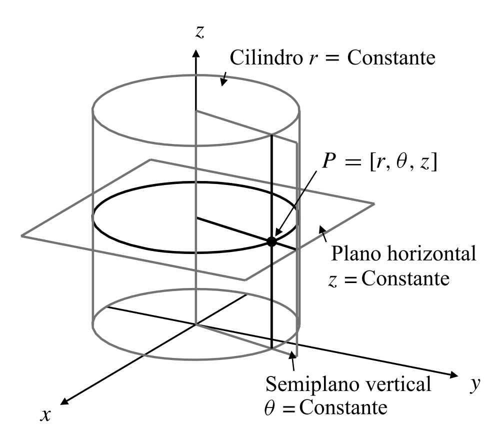


Figura 16.20 Superficies coordenadas en coordenadas cilíndricas.

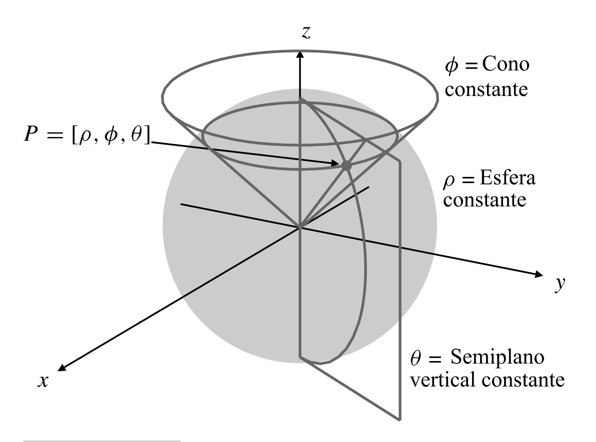


Figura 16.21 Superficies coordenadas en coordenadas esféricas.

Factores de escala y elementos diferenciales

En el resto de esta sección supondremos que $[u, v, w]$ son coordenadas curvilíneas **ortogonales** en el espacio xyz definidas mediante la transformación

$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w)$$

Supondremos también que las superficies coordenadas son suaves en todo punto no singular y que los vectores de la base local $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$ en todo punto no singular forman un triedro orientado

a la derecha. Esto se cumple en coordenadas cilíndricas y esféricas. En el caso de coordenadas esféricas, ésta es la razón por la que se escoge el orden de las coordenadas como $[\rho, \phi, \theta]$, en vez de $[\rho, \theta, \phi]$.

El **vector de posición** de un punto P en el espacio xyz se puede expresar en función de las coordenadas curvilíneas:

$$\mathbf{r} = x(u, v, w)\mathbf{i} + y(u, v, w)\mathbf{j} + z(u, v, w)\mathbf{k}$$

Si se mantienen fijas $v = v_0$ y $w = w_0$, y hacemos variar u, entonces $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0, w_0)$ define una curva u en el espacio xyz. En cualquier punto P de esta curva, el vector

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

es tangente a la curva u en P. En general, los tres vectores

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

son tangentes, respectivamente, a las curvas u, v y w que pasan por P. Son también normales, respectivamente, a las superficies u, v y w que pasan por P, por lo que son mutuamente perpendiculares (*véase* la Figura 16.19). Las longitudes de estos vectores tangentes se denominan *factores de escala* del sistema de coordenadas.

Los **factores de escala** del sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales $[u, v, w]$ son las tres funciones

$$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|, \qquad h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|, \qquad h_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|$$

Los factores de escala son distintos de cero en todo punto no singular P del sistema de coordenadas, por lo que la base local en P se puede obtener dividiendo los vectores tangentes a las curvas coordenadas por sus longitudes. Como se hizo notar anteriormente, denominaremos a los vectores de la base local $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$. Por consiguiente,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = h_u\hat{\mathbf{u}}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = h_v\hat{\mathbf{v}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = h_w\hat{\mathbf{w}}$$

Los vectores de la base $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$ formarán un triedro orientado a la derecha suponiendo que escogemos el orden adecuado para las coordenadas u, v y w.

Ejemplo 5 En coordenadas cilíndricas tenemos $\mathbf{r} = r\cos\theta\mathbf{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, por lo que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos\theta\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{i} + r\cos\theta\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$$

Por tanto, los factores de escala en el sistema de coordenadas cilíndricas se expresan como

$$h_r = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right| = 1, \qquad h_\theta = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| = r \quad \text{y} \quad h_z = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right| = 1$$

y la base local está formada por los vectores

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j}, \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}, \qquad \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{k}$$

Véase la Figura 16.22. La base local está orientada a la derecha.

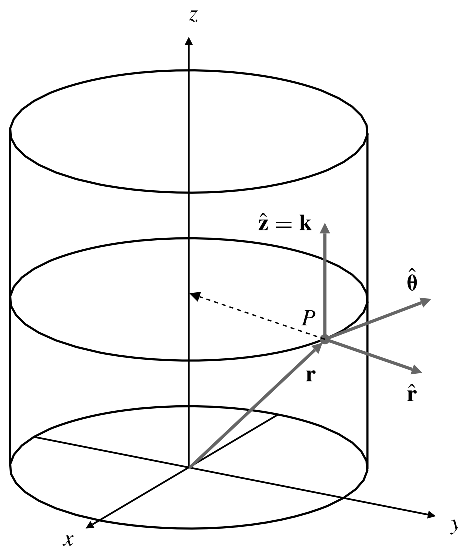




Figura 16.22 La base local en coordenadas cilíndricas.

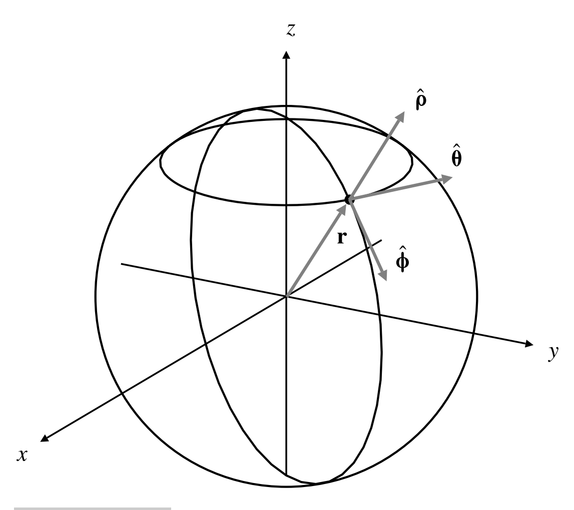


Figura 16.23 La base local en coordenadas esféricas.

Ejemplo 6 En coordenadas esféricas tenemos

$$\mathbf{r} = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i} + \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + \rho \cos \phi \mathbf{k}$$

Por tanto, los vectores tangentes a las curvas coordenadas son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i} + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \rho \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} - \rho \operatorname{sen} \phi \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{j}$$

y los factores de escala están dados por

$$h_\rho = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right| = 1, \qquad h_\phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = \rho \quad \text{y} \quad h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = \rho \operatorname{sen} \phi$$

La base local está formada por los vectores

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i} + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + \cos \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} - \operatorname{sen} \phi \mathbf{k}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

Véase la Figura 16.23. La base local está orientada a la derecha. ■

El elemento de volumen en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales es el volumen de una *caja coordenada* infinitesimal limitada por parejas de superficies u, v y w correspondientes a los valores u y $u + du$, v y $v + dv$, y w y $w + dw$, respectivamente. *Véase* la Figura 16.24. Como estas superficies coordenadas se suponen suaves, y como se cortan formando ángulos rectos, la caja coordenada es rectangular, y está generada por los vectores

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du = h_u \, du \, \hat{\mathbf{u}}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv = h_v \, dv \, \hat{\mathbf{v}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw = h_w \, dw \, \hat{\mathbf{w}}$$

Por tanto, el elemento de volumen está dado por

$$dV = h_u h_v h_w \, du \, dv \, dw$$

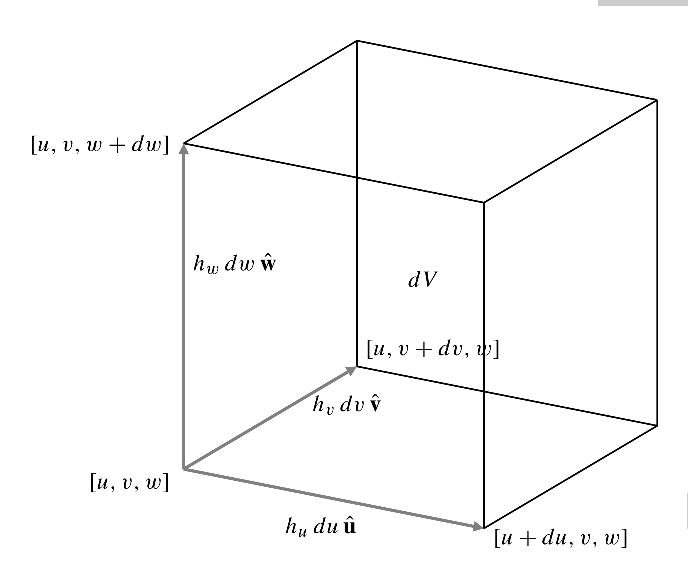


Figura 16.24 Elemento de volumen en coordenadas curvilíneas ortogonales.

Además, los elementos de área de superficie sobre las superficies u, v y w son las áreas de las caras apropiadas de la caja coordenada:

Elementos de área sobre superficies coordenadas

$$dS_u = h_v h_w \, dv \, dw, \qquad dS_v = h_u h_w \, du \, dw, \qquad dS_w = h_u h_v \, du \, dv$$

Los elementos de longitud de arco sobre las curvas coordenadas u, v y w son las aristas de la caja coordenada:

Elementos de longitud de arco sobre curvas coordenadas

$$ds_u = h_u \, du, \qquad ds_v = h_v \, dv, \qquad ds_w = h_w \, dw$$

Ejemplo 7 Para coordenadas cilíndricas, el elemento de volumen, como se muestra en la Sección 14.6, es

$$dV = h_r h_\theta h_z \, dr \, d\theta \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz$$

Los elementos de área de superficie en el cilindro $r =$ constante, el semiplano $\theta =$ constante y el plano $z =$ constantes son, respectivamente,

$$dS_r = r \, d\theta \, dz, \qquad dS_\theta = dr \, dz \qquad \text{y} \qquad dS_z = r \, dr \, d\theta$$

Ejemplo 8 En coordenadas esféricas, el elemento de volumen, como se vio en la Sección 14.6, es

$$dV = h_\rho h_\phi h_\theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

El elemento de área en la esfera $\rho =$ constante es

$$dS_\rho = h_\phi h_\theta \, d\phi \, d\theta = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$

El elemento de área en el cono ϕ = constante es

$$dS_\phi = h_\rho h_\theta \, d\rho \, d\theta = \rho \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta$$

El elemento de área en el semiplano θ = constante es

$$dS_\theta = h_\rho h_\phi \, d\rho \, d\phi = \rho \, d\rho \, d\phi$$

Grad, div y rot en coordenadas curvilíneas ortogonales

El gradiente ∇f de un campo escalar f se puede expresar en función de la base local en cualquier punto P con coordenadas curvilíneas $[u, v, w]$ en la forma

$$\nabla f = f_u \hat{\mathbf{u}} + f_v \hat{\mathbf{v}} + f_w \hat{\mathbf{w}}$$

Para determinar los coeficientes f_u, f_v y f_w en esta fórmula, compararemos dos expresiones de la derivada direccional de f en una curva arbitraria en el espacio xyz.

Si la curva $\mathcal{C}$ tiene una parametrización $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ en función de la longitud de arco, entonces la derivada direccional de f en la curva $\mathcal{C}$ está dada por

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{ds}$$

Por otra parte, esta derivada direccional está también dada por $df/ds = \nabla f \bullet \hat{\mathbf{T}}$, siendo $\hat{\mathbf{T}}$ el vector tangente unitaria a $\mathcal{C}$. Tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\frac{dw}{ds} \\ &= h_u \frac{du}{ds}\,\hat{\mathbf{u}} + h_v \frac{dv}{ds}\,\hat{\mathbf{v}} + h_w \frac{dw}{ds}\,\hat{\mathbf{w}} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \bullet \hat{\mathbf{T}} = f_u h_u \frac{du}{ds} + f_v h_v \frac{dv}{ds} + f_w h_w \frac{dw}{ds}$$

Comparando estas dos expresiones para df/ds en la curva $\mathcal{C}$, vemos que

$$f_u h_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad f_v h_v = \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad f_w h_w = \frac{\partial f}{\partial w}$$

Por tanto, hemos demostrado que

El gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{\mathbf{w}}$$

Ejemplo 9 En coordenadas cilíndricas, el gradiente del campo escalar $f(r, \theta, z)$ es

$$\nabla f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Ejemplo 10 En coordenadas esféricas, el gradiente del campo escalar $f(\rho, \phi, \theta)$ es

$$\nabla f(\rho, \phi, \theta) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Consideremos ahora un campo vectorial **F** expresado en coordenadas curvilíneas:

$$\mathbf{F}(u, v, w) = F_u(u, v, w)\hat{\mathbf{u}} + F_v(u, v, w)\hat{\mathbf{v}} + F_w(u, v, w)\hat{\mathbf{w}}$$

El flujo de **F** hacia el exterior de la caja coordenada infinitesimal de la Figura 16.24 es la suma de los flujos de **F** hacia el exterior de las tres parejas de superficies opuestas de la caja. El flujo hacia el exterior de las superficies u correspondientes a u y $u + du$ es

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}(u + du, v, w) \bullet \hat{\mathbf{u}}\, dS_u - \mathbf{F}(u, v, w) \bullet \hat{\mathbf{u}}\, dS_u \\
&\quad = (F_u(u + du, v, w)h_v(u + du, v, w)h_w(u + du, v, w) \\
&\qquad - F_u(u, v, w)h_v(u, v, w)h_w(u, v, w))\, dv\, dw \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w F_u)\, du\, dv\, dw
\end{aligned}$$

Se obtienen expresiones similares para los flujos hacia el exterior de las otras parejas de superficies coordenadas.

La divergencia de **F** en P es el flujo *por unidad de volumen* hacia el exterior de la caja coordenada infinitesimal situada en P. Por tanto, está dada por

La divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}\ \mathbf{F}(u, v, w) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\bigg[&\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w F_u(u, v, w)) \\
&+ \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w F_v(u, v, w)) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w(u, v, w))\bigg]
\end{aligned}$$

Ejemplo 11 En coordenadas cilíndricas, $h_r = h_z = 1$ y $h_\theta = r$. Por consiguiente, la divergencia de $\mathbf{F} = F_r\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_z\mathbf{k}$ es

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}\ \mathbf{F} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}F_\theta + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right] \\
&= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

Ejemplo 12 En coordenadas esféricas, $h_\rho = 1$, $h_\phi = \rho$ y $h_\theta = \rho \operatorname{sen} \phi$. La divergencia del campo vectorial $\mathbf{F} = F_p\hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + F_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}\ \mathbf{F} &= \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \phi}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \operatorname{sen} \phi F_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \operatorname{sen} \phi F_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho F_\theta)\right] \\
&= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\operatorname{sen} \phi F_\phi) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho}F_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\cot \phi}{\rho}F_\phi + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

Para calcular el rotacional de un campo vectorial expresado en coordenadas curvilíneas ortogonales podemos utilizar algunas identidades vectoriales obtenidas previamente. Obsérvese en primer lugar que el gradiente del campo escalar $f(u, v, w) = u$ es $\hat{\mathbf{u}}/h_u$, por lo que $\hat{\mathbf{u}} = h_u \nabla u$. De forma similar, $\hat{\mathbf{v}} = h_v \nabla v$ y $\hat{\mathbf{w}} = h_w \nabla w$. Por tanto, el campo vectorial

$$\mathbf{F} = F_u \hat{\mathbf{u}} + F_v \hat{\mathbf{v}} + F_w \hat{\mathbf{w}}$$

se puede expresar de la forma

$$\mathbf{F} = F_u h_u \nabla u + F_v h_v \nabla v + F_w h_w \nabla w$$

Utilizando la identidad $\mathbf{rot}(f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g$ (*véase* el Ejercicio 13 de la Sección 16.2), podemos calcular el rotacional de cada uno de los términos de la expresión anterior. Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}(F_u h_u \nabla u) &= \nabla(F_u h_u) \times \nabla u \\
&= \left[\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_u)\hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}(F_u h_u)\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}(F_u h_u)\hat{\mathbf{w}}\right] \times \frac{\hat{\mathbf{u}}}{h_u} \\
&= \frac{1}{h_u h_w}\frac{\partial}{\partial w}(F_u h_u)\hat{\mathbf{v}} - \frac{1}{h_u h_v}\frac{\partial}{\partial v}(F_u h_u)\hat{\mathbf{w}} \\
&= \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(F_u h_u)(h_v \hat{\mathbf{v}}) - \frac{\partial}{\partial v}(F_u h_u)(h_w \hat{\mathbf{w}})\right]
\end{aligned}$$

Para obtener el resultado anterior hemos utilizado que $\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{w}}$ y $\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}}$. Por eso hemos supuesto que el sistema de coordenadas curvilíneas está orientado hacia la derecha.

Se pueden calcular las expresiones correspondientes para los otros dos términos de la fórmula de **rot F**. Combinando los tres términos, llegamos a la conclusión de que el rotacional de

$$\mathbf{F} = F_u \hat{\mathbf{u}} + F_v \hat{\mathbf{v}} + F_w \hat{\mathbf{w}}$$

está dado por

El rotacional en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{F}(u, v, w) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u \hat{\mathbf{u}} & h_v \hat{\mathbf{v}} & h_w \hat{\mathbf{w}} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

Ejemplo 13 En coordenadas cilíndricas, el rotacional de $\mathbf{F} = F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + F_z \mathbf{k}$ está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}\ \mathbf{F} &= \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \frac{F_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 14 En coordenadas esféricas, el rotacional de $\mathbf{F} = F_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ está dado por

$$\begin{aligned}
\textbf{rot F} &= \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\phi} \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} & \rho\hat{\boldsymbol{\phi}} & \rho \operatorname{sen}\phi\, \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ F_\rho & \rho F_\phi & \rho \operatorname{sen}\phi\, F_\theta \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\left[\frac{\partial}{\partial \phi}(\operatorname{sen}\phi\, F_\theta) - \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} \\
&\qquad + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} - \operatorname{sen}\phi \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\theta)\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
&\qquad + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\phi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\left[(\cos\phi) F_\theta + (\operatorname{sen}\phi)\frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} \\
&\qquad + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} - (\operatorname{sen}\phi) F_\theta - (\rho \operatorname{sen}\phi)\frac{\partial F_\theta}{\partial \rho}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
&\qquad + \frac{1}{\rho}\left[F_\phi + \rho\frac{\partial F_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}$$

■

Ejercicios 16.7

En los Ejercicios 1 y 2, calcule los gradientes de los campos escalares dados, expresados en coordenadas cilíndricas o esféricas.

1. $f(r, \theta, z) = r\theta z$ **2.** $f(\rho, \phi, \theta) = \rho\phi\theta$

En los Ejercicios 3-8, calcule **div F** y **rot F** para los campos vectoriales dados expresados en coordenadas cilíndricas o esféricas.

3. $\mathbf{F}(r, \theta, z) = r\hat{\mathbf{r}}$ **4.** $\mathbf{F}(r, \theta, z) = r\hat{\boldsymbol{\theta}}$

5. $\mathbf{F}(\rho, \phi, \theta) = \operatorname{sen}\phi\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$ **6.** $\mathbf{F}(\rho, \phi, \theta) = \rho\hat{\boldsymbol{\phi}}$

7. $\mathbf{F}(\rho, \phi, \theta) = \rho\hat{\boldsymbol{\theta}}$ **8.** $\mathbf{F}(\rho, \phi, \theta) = \rho^2\hat{\boldsymbol{\rho}}$

9. Sea $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ la definición de un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales (u, v) en el plano xy. Calcule los factores de escala, los vectores de la base local y el elemento de área del sistema de coordenadas (u, v).

10. Continuando con el Ejercicio 9, exprese el gradiente de un campo escalar $f(u, v)$, y la divergencia y el rotacional de un campo vectorial $\mathbf{F}(u, v)$ en función de las coordenadas curvilíneas.

11. Exprese el gradiente del campo escalar $f(r, \theta)$ y la divergencia y el rotacional de un campo vectorial $\mathbf{F}(r, \theta)$ en función de las coordenadas polares del plano (r, θ).

12. La transformación

$$x = a \cosh u \cos v, \qquad y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v$$

define **coordenadas elípticas** en el plano xy. Este sistema de coordenadas tiene puntos singulares en $x = \pm a$, $y = 0$.

(a) Demuestre que las curvas v, u = constante son elipses cuyos focos son los puntos singulares.

(b) Demuestre que las curvas u, v = constante son hipérbolas cuyos focos son los puntos singulares.

(c) Demuestre que las curvas u y v que pasan por un punto no singular se cortan formando ángulos rectos.

(d) Calcule los factores de escala h_u y h_v y el elemento de área dA del sistema de coordenadas elípticas.

13. Describa las superficies coordenadas y las curvas coordenadas del sistema de coordenadas cilíndricas elípticas en el espacio xyz definido por

$$x = a \cosh u \cos v, \qquad y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \qquad z = z$$

14. La Laplaciana $\nabla^2 f$ de un campo escalar f se puede calcular como **div** ∇f. Utilice este método para calcular la Laplaciana de la función $f(r, \theta, z)$ expresada en coordenadas cilíndricas (esto repite el Ejercicio 33 de la Sección 14.6).

15. Calcule la Laplaciana $\nabla^2 f = \mathbf{div}\, \nabla f$ de la función $f(\rho, \phi, \theta)$, expresada en coordenadas esféricas (esto repite el Ejercicio 34 de la Sección 14.6, pero ahora es mucho más fácil).

16. Calcule la Laplaciana $\nabla^2 f = \mathbf{div}\, \nabla f$ de una función $f(u, v, w)$ expresada en coordenadas curvilíneas ortogonales arbitrarias (u, v, w).

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes expresiones?**
  - ◇ Divergencia de un campo vectorial **F**
  - ◇ Rotacional de un campo vectorial **F**
  - ◇ **F** es solenoidal
  - ◇ **F** es irrotacional
  - ◇ Potencial escalar
  - ◇ Potencial vector
  - ◇ Coordenadas curvilíneas ortogonales
- **Enuncie los siguientes teoremas:**
  - ◇ Teorema de la Divergencia
  - ◇ Teorema de Green
  - ◇ Teorema de Stokes

Ejercicios de repaso

1. Si $\mathbf{F} = x^2 z\mathbf{i} + (y^2 z + 3y)\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$, calcule el flujo de **F** a través de la parte del elipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$, con $z \geqslant 0$, orientada con normal hacia arriba.

2. Sea $\mathcal{S}$ la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ que está entre los planos horizontales $z = 0$ y $z = b$, con $b > 0$. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + \cos(z^2)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$ a través de $\mathcal{S}$, hacia el exterior.

3. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} (3y^2 + 2xe^{y^2})\, dx + (2x^2 y e^{y^2})\, dy$ en sentido contrario al de las agujas del reloj por la frontera del paralelogramo cuyos vértices son (0, 0), (2, 0), (3, 1) y (1, 1).

4. Si $\mathbf{F} = -z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, ¿cuáles son los posibles valores de $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ sobre circunferencias de radio a en el plano $2x + y + 2z = 7$?

5. Sea **F** un campo vectorial suave en el espacio tridimensional, y suponga que, para todo $a > 0$, el de **F** hacia el exterior de la esfera de radio a centrada en el origen es $\pi(a^3 + 2a^4)$. Calcule la divergencia de **F** en el origen.

6. Sea $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\cos(1 - x^2 - y^2)\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. Calcule el flujo de **rot F** hacia arriba, a través de una superficie cuya frontera es la curva $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$.

7. Sea $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r^\lambda \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = |\mathbf{r}|$. ¿Para qué valor o valores de λ es **F** solenoidal en un subconjunto abierto del espacio tridimensional? ¿Es **F** solenoidal en todo el espacio tridimensional para algún valor de λ?

8. Sabiendo que **F** cumple que $\mathbf{rot\, F} = \mu\mathbf{F}$ en el espacio tridimensional, siendo μ una constante distinta de cero, demuestre que $\nabla^2\mathbf{F} + \mu^2\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

9. Sea P un poliedro en el espacio tridimensional con n caras planas, $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Sea $\mathbf{N}_i$ la normal a F_i con dirección hacia fuera desde P, y sea $\mathbf{N}_i$ un vector de longitud igual al área de la cara F_i. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i = \mathbf{0}$$

Obtenga además una versión de este resultado para el caso de un polígono P en el plano.

10. Indique alrededor de qué curva cerrada y simple C en el plano xy el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (2y^3 - 3y + xy^2)\mathbf{i} + (x - x^3 + x^2 y)\mathbf{j}$$

tiene circulación máxima.

11. Indique alrededor de qué superficie cerrada y orientada en $\mathbb{R}^3$ el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (4x + 2x^3 z)\mathbf{i} - y(x^2 + z^2)\mathbf{j} - (3x^2 z^2 + 4y^2 z)\mathbf{k}$$

tiene flujo máximo.

12. Calcule el valor máximo de

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

siendo $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + (3z - xy^2)\mathbf{j} + (4y - x^2y)\mathbf{k}$ y C una curva cerrada y simple en el plano $x + y + z = 1$, orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj vista desde arriba en el eje z. ¿Qué curva C produce este máximo?

Problemas avanzados

1. (El universo en expansión) Sea $\mathbf{v}$ el campo de velocidades a gran escala de la materia en el universo (*gran escala* significa la escala de las distancias intergalácticas; el movimiento a *pequeña escala* como el de los sistemas planetarios alrededor de sus soles, e incluso de las estrellas alrededor de los centros galácticos, ha sido promediado). Suponga que $\mathbf{v}$ es un campo vectorial suave. De acuerdo con la teoría astronómica actual, la distancia entre dos puntos cualesquiera está creciendo, y la velocidad de incremento es proporcional a la distancia entre dichos puntos. La constante de proporcionalidad, C, se denomina *constante de Hubble*. En función de $\mathbf{v}$, si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son dos puntos, entonces

$$(\mathbf{v}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1)) \bullet (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = C|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2$$

Demuestre que **div v** es constante, y calcule el valor de dicha constante en función de la constante de Hubble. *Sugerencia*: Calcule el flujo de $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ hacia el exterior de una esfera de radio ϵ centrada en $\mathbf{r}_1$, y tome el límite cuando ϵ tiende a cero.

2. (Ángulo sólido) Dos rayos que parten de un punto P determinan un ángulo en dicho punto cuya medida en radianes es igual a la longitud del arco de circunferencia de radio 1 con centro en P que está entre los dos rayos. De forma similar, un semicono de forma arbitraria K con vértice en P determina un **ángulo sólido** en P cuya medida en **estereorradianes** (*estéreo* + *radianes*) es el área de la parte de la esfera de radio 1 con centro en P que está dentro de K. Por ejemplo, el primer octante de $\mathbb{R}^3$ es un semicono con vértice en el origen. Determina un ángulo sólido en el origen que mide

$$4\pi \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2} \text{ estereorradianes}$$

ya que el área de la esfera unidad es 4π (*véase* la Figura 16.25).

(a) Calcule la medida en estereorradianes del ángulo sólido en el vértice de un semicono circular recto cuya generatriz forma un ángulo α con su eje central.

(b) Dada una superficie orientada y suave que cruza al semicono general K, pero no en su vértice P, sea $\mathcal{S}$ la parte de la superficie que está dentro de K. Oriente $\mathcal{S}$ con una normal apuntando hacia el exterior desde P. Demuestre que la medida en estereorradianes del ángulo sólido en P determinada por K es el flujo de $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ a través de $\mathcal{S}$, siendo $\mathbf{r}$ el vector que va desde P hasta el punto (x, y, z).

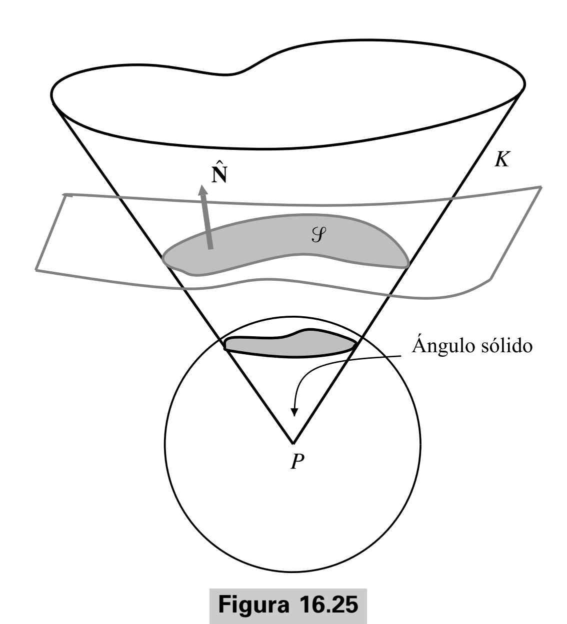


Figura 16.25

Integrales sobre dominios en movimiento

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, la derivada con respecto al tiempo t de una integral de $f(x, t)$ sobre un «intervalo en movimiento» $[a(t), b(t)]$ está dada por

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\,dx + f(b(t), t)\frac{db}{dt} - f(a(t), t)\frac{da}{dt}$$

Los tres problemas siguientes, sugeridos por Luigi Quartapelle del Politécnico de Milán, proporcionan varias ampliaciones de este resultado unidimensional a dimensiones superiores. Los cálculos son un poco largos, por lo que puede ser conveniente obtener alguna ayuda de Maple o de algún otro sistema de matemáticas por computador.

***3. (Velocidad de cambio de la circulación sobre una curva en movimiento)**

(a) Sea $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ un campo vectorial suave en $\mathbb{R}^3$ que depende de un parámetro t, y sea

$$\mathbf{G}(s, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(s, t), t) = \mathbf{F}(x(s, t), y(s, t), z(x, t), t)$$

donde $\mathbf{r}(s, t) = x(s, t)\mathbf{i} + y(s, t)\mathbf{j} + z(s, t)\mathbf{k}$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas. Demuestre que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{G} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathbf{G} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + \left((\nabla \times \mathbf{F}) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}$$

En este caso, el rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$ se toma con respecto al vector de posición $\mathbf{r}$.

(b) Para un t fijo (que puede pensar que representa el tiempo), $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$, $(a \leqslant s \leqslant b)$ representa paramétricamente una curva C_t en $\mathbb{R}^3$. La curva se mueve cuando t varía; la velocidad de cualquier punto sobre C_t es $\mathbf{v}_C(s, t) = \partial\mathbf{r}/\partial t$. Demuestre que

$$\frac{d}{dt}\int_{C_t} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{C_t} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \bullet d\mathbf{r} + \int_{C_t} ((\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{v}_C) \bullet d\mathbf{r}$$
$$+ \mathbf{F}(\mathbf{r}(b, t), t) \bullet \mathbf{v}_C(b, t) - \mathbf{F}(\mathbf{r}(a, t), t) \bullet \mathbf{v}_C(a, t)$$

Sugerencia: Exprese

$$\frac{d}{dt}\int_{C_t} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{G} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\right) ds$$
$$= \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathbf{G} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{G} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathbf{G} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)\right)\right] ds$$

Utilice ahora el resultado de (a).

∗**4. (Velocidad de cambio del flujo a través de una superficie en movimiento)** Sea S_t una superficie en movimiento en $\mathbb{R}^3$ parametrizada suavemente (para cada t) como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, t) = x(u, v, t)\mathbf{i} + y(u, v, t)\mathbf{j} + z(u, v, t)\mathbf{k}$$

donde (u, v) pertenece a una región de parámetros R en el plano uv. Sea $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ una función suave de un vector tridimensional, y sea $\mathbf{G}(u, v, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v, t), t)$.

(a) Demuestre que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{G} \bullet \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\mathbf{G} \bullet \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\mathbf{G} \bullet \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right]\right)$$
$$= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \bullet \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right] + (\nabla \bullet \mathbf{F})\,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \bullet \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]$$

(b) Si C_t es la frontera de S_t con orientación correspondiente a la de S_t, utilice el Teorema de Green para demostrar que

$$\iint_R \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathbf{G} \bullet \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mathbf{G} \bullet \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right]\right)\right] du\,dv$$
$$= \oint_{C_t} \left(\mathbf{F} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) \bullet d\mathbf{r}$$

(c) Combine los resultados de (a) y (b) para demostrar que

$$\frac{d}{dt}\iint_{S_t} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$
$$= \iint_{S_t} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{S_t} (\nabla \bullet \mathbf{F})\mathbf{v}_S \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$
$$+ \oint_{C_t} (\mathbf{F} \times \mathbf{v}_C) \bullet d\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{v}_S = \partial\mathbf{r}/\partial t$ sobre S_t es la velocidad de S_t, $\mathbf{v}_C = \partial\mathbf{r}/\partial t$ sobre C_t es la velocidad de C_t, y $\hat{\mathbf{N}}$ es el campo normal unitario sobre S_t correspondiente a su orientación.

∗**5. (Velocidad de cambio de integrales sobre volúmenes en movimiento)** Sea S_t la posición en el instante t de una superficie cerrada y suave en $\mathbb{R}^3$ que varía suavemente con t y limita en todo instante t una región D_t. Si $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}, t)$ indica el campo normal unitario hacia fuera (desde D_t) sobre S_t, y $\mathbf{v}_S(\mathbf{r}, t)$ es la velocidad del punto $\mathbf{r}$ sobre S_t en el instante t, demuestre que

$$\frac{d}{dt}\iiint_{D_t} f\,dV = \iiint_{D_t} \frac{\partial f}{\partial t}\, dV + \oiint_{S_t} f\mathbf{v}_S \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

se cumple para funciones suaves $f(\mathbf{r}, t)$. *Sugerencia*: Sea ΔD_t el conjunto de puntos por los que S_t pasa cuando t se incrementa hasta $t + \Delta t$. El elemento de volumen dV en ΔD_t se puede expresar en función del elemento de área dS sobre S_t como

$$dV = \mathbf{v} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS\, \Delta t$$

Demuestre que

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\iiint_{D_{t+\Delta t}} f(\mathbf{r}, t + \Delta t)\, dV - \iiint_{D_t} f(\mathbf{r}, t)\, dV\right]$$
$$= \iiint_{D_t} \frac{f(\mathbf{r}, t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, t)}{\Delta t}\, dV$$
$$+ \frac{1}{\Delta t}\iiint_{\Delta D_t} f(\mathbf{r}, t)\, dV$$
$$+ \iiint_{\Delta D_t} \frac{f(\mathbf{r}, t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, t)}{\Delta t}\, dV$$

y demuestre que la última integral $\to 0$ cuando $\Delta t \to 0$.

CAPÍTULO 17

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Para resolver esta ecuación diferencial la observas hasta que la solución se te ocurre.

George Polyá (1887-1985)
de *How to Solve It,* Princeton, 1945

La ciencia es una ecuación diferencial. La religión es la condición de contorno.

Alan Turing (1912-1954)
citado en *Theories of Everything,* de J. D. Barrow

Introducción Una **ecuación diferencial** (o **ED**) es una ecuación en la que intervienen una o más derivadas de una función desconocida. Resolver la ecuación diferencial significa obtener una función (o todas las funciones) que cumpla la ecuación diferencial.

Muchas leyes físicas y relaciones entre magnitudes que se estudian en varias disciplinas científicas se expresan matemáticamente como ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la segunda ley del movimiento de Newton ($F = ma$) establece que la posición $x(t)$ en el instante t de un objeto de masa constante m sobre el que actúa una fuerza $F(t)$ debe satisfacer la ecuación diferencial (ecuación del movimiento):

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = F(t)$$

De forma similar, la biomasa $m(t)$ en el instante t de un cultivo bacteriano que crece en un medio de soporte uniforme cambia con una velocidad proporcional a la biomasa:

$$\frac{dm}{dt} = km(t)$$

que es la ecuación diferencial del crecimiento exponencial (o, si $k < 0$, del decrecimiento exponencial). Como las ecuaciones diferenciales surgen ampliamente en el modelado abstracto de fenómenos concretos, dichas ecuaciones y las técnicas para resolverlas están en el corazón de las matemáticas aplicadas. De hecho, la mayor parte de la literatura matemática actual trata directamente sobre ecuaciones diferenciales o está motivada por problemas que surgen en el estudio de estas ecuaciones. Debido a esto, hemos presentado varias ecuaciones diferenciales, los términos de su

descripción y las técnicas para su solución en varios lugares en el desarrollo del cálculo que se realiza en este libro. En este capítulo final se proporciona un marco unificado, con una breve introducción al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Algún material de secciones anteriores (particularmente de las Secciones 7.9 y 3.7) forma parte natural de este capítulo, por lo que nos referiremos a dichas secciones en los instantes adecuados. Este capítulo es, de necesidad, relativamente corto. Los estudiantes de matemáticas y sus aplicaciones siguen en general uno o más cursos completos de ecuaciones diferenciales y, aun así, apenas arañan la superficie de esta materia.

17.1 Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de varias formas. La clasificación más significativa se basa en el número de variables con respecto a las que aparecen las derivadas de la ecuación. Una **ecuación diferencial ordinaria** (**EDO**) es aquella en la que aparecen derivadas sólo con respecto a una variable. Los dos ejemplos dados anteriormente son ecuaciones diferenciales ordinarias. Una **ecuación diferencial en derivadas parciales** (**EDP**) es aquella en la que aparecen derivadas parciales de la función desconocida con respecto a más de una variable. Por ejemplo, la **ecuación de onda unidimensional**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

modela el desplazamiento lateral $u(x, t)$ en la posición x en el instante t de una cuerda vibrante estirada (*véase* la Sección 12.4). En este capítulo no trataremos las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican también con respecto a su **orden**. El orden de una ecuación diferencial es el máximo orden de las derivadas presentes en la ecuación. La ecuación de onda unidimensional es una EDP de segundo orden. El siguiente ejemplo ilustra el orden de dos EDO.

Ejemplo 1

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^3 y = \operatorname{sen} x \qquad \text{tiene orden 2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y\,\frac{d^2y}{dx^2} + e^y \qquad \text{tiene orden 3}$$

Como toda ecuación, una ecuación diferencial se puede expresar en la forma $F = 0$, siendo F una función. En el caso de una EDO, la función F puede depender de la variable independiente (denominada habitualmente x o t), de la función desconocida (habitualmente y) y de cualquier derivada de la función desconocida hasta el orden de la ecuación. Por ejemplo, una EDO de orden n se puede expresar en la forma

$$F = (x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

Un caso especial importante de ecuaciones diferenciales es el de las que son **lineales**. Una EDO lineal de orden n tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots$$
$$+ a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

Cada término en la expresión del miembro izquierdo es el producto de un *coeficiente* que es función de x, y un segundo factor que es o bien y o bien una de las derivadas de y. El miembro

derecho no depende de y, y se denomina **término no homogéneo**. Obsérvese que ninguno de los términos del miembro izquierdo puede tener ninguna potencia de y o de sus derivadas que no sea la primera, y que y y sus derivadas nunca se multiplican entre sí.

Una EDO lineal se denomina **homogénea** si en todos sus términos interviene la función desconocida y, es decir, si $f(x) = 0$. Si $f(x)$ no es idénticamente nula, la ecuación es **no homogénea**.

Ejemplo 2 En el Ejemplo 1, la primera ED,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^3 y = \operatorname{sen} x$$

es lineal. Los coeficientes son $a_2(x) = 1$, $a_1(x) = 0$, $a_0(x) = x^3$ y el término no homogéneo es $f(x) = \operatorname{sen} x$. Aunque se puede expresar en la forma

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\,\frac{d^2y}{dx^2} - e^y = 0$$

la segunda ecuación es *no lineal* debido a que en el segundo término interviene el cuadrado de una derivada de y, en el tercer término aparece el producto de y con una de sus derivadas y el cuarto término no es y veces una función de x. La ecuación

$$(1 + x^2)\,\frac{d^3y}{dx^3} + \operatorname{sen} x\,\frac{d^2y}{dx^2} - 4\,\frac{dy}{dx} + y = 0$$

es una ecuación lineal de orden 3. Los coeficientes son $a_3(x) = 1 + x^2$, $a_2(x) = \operatorname{sen} x$, $a_1(x) = -4$ y $a_0(x) = 1$. Como $f(x) = 0$, esta ecuación es *homogénea*. ■

El siguiente teorema establece que toda *combinación lineal* de una ecuación diferencial lineal y homogénea es también una solución. Se trata de un resultado extremadamente importante sobre las ED lineales y homogéneas.

TEOREMA 1 Si $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación lineal y homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

entonces también lo es la combinación lineal

$$y = Ay_1(x) + By_2(x)$$

para todos los valores de las constantes A y B.

DEMOSTRACIÓN Sabemos que

$$a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \cdots + a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0 \quad \text{y}$$
$$a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \cdots + a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = 0$$

Multiplicando la primera ecuación por A, la segunda por B y sumando las dos se obtiene

$$a_n(Ay_1^{(n)} + By_2^{(n)}) + a_{n-1}(Ay_1^{(n-1)} + By_2^{(n-1)})$$
$$+ \cdots + a_2(Ay_1'' + By_2'') + a_1(Ay_1' + By_2') + a_0(Ay_1 + By_2) = 0$$

Por tanto, $y = Ay_1(x) + By_2(x)$ es también una solución de la ecuación.

El mismo tipo de demostración se puede utilizar en el siguiente teorema.

TEOREMA 2 Si $y = y_1(x)$ es una solución de la ecuación lineal y homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

e $y = y_2(x)$ es una solución de la ecuación lineal y no homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

entonces, $y = y_1(x) + y_2(x)$ es también una solución de la misma ecuación lineal y no homogénea.

Haremos un amplio uso de los dos teoremas anteriores al presentar las ecuaciones lineales de segundo orden en las Secciones 17.6-17.8.

Ejemplo 3 Verifique que $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = \cos 2x$ cumplen la ED $y'' + 4y = 0$. Calcule una solución $y(x)$ de dicha ED que cumpla $y(0) = 2$ e $y'(0) = -4$.

Solución Si $y = \operatorname{sen} 2x$, entonces $y'' = \dfrac{d}{dx}(2\cos 2x) = -4\operatorname{sen} 2x = -4y$. Por lo tanto, $y'' + 4y = 0$. Un cálculo similar demuestra que $y = \cos 2x$ también cumple la ED. Como la ED es lineal y homogénea, la función

$$y = A\operatorname{sen} 2x + B\cos 2x$$

es una solución para cualquier valor de las constantes A y B. Debe cumplirse que $y(0) = 2$, por lo que es necesario que $2 = A\operatorname{sen} 0 + B\cos 0 = B$. Por consiguiente, $B = 2$. Además,

$$y' = 2A\cos 2x - 2B\operatorname{sen} 2x$$

Como debe ser $y'(0) = -4$, entonces $-4 = 2A\cos 0 - 2B\operatorname{sen} 0 = 2A$. Por tanto, $A = -2$, y la solución pedida es $y = -2\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x$.

Observación Sea $P_n(r)$ el polinomio de grado n en la variable r dado por

$$P_n(r) = a_n(x)r^n + a_{n-1}(x)r^{n-1} + \cdots + a_2(x)r^2 + a_1(x)r + a_0(x)$$

cuyos coeficientes dependen de la variable x. Podemos expresar la EDO de orden n con coeficientes $a_k(x)$, $(0 \leqslant k \leqslant n)$ y término no homogéneo $f(x)$ en la forma

$$P_n(D)y(x) = f(x)$$

siendo D el *operador diferencial* d/dx. El miembro izquierdo de la ecuación anterior indica la aplicación del operador diferencial de orden n

$$P_n(D) = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$$

a la función $y(x)$. Por ejemplo,

$$a_k(x)D^k y(x) = a_k(x)\frac{d^k y}{dx^k}$$

A menudo es útil expresar las ED lineales mediante operadores diferenciales de esta forma.

Observación Desgraciadamente, el término *homogénea* se utiliza con más de un significado en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Ciertas EDO que no son necesariamente lineales se denominan homogéneas por una razón diferente a la que se aplica a las ecuaciones lineales anteriores. Aparecerán ecuaciones de este tipo en la Sección 17.2.

Ejercicios 17.1

En los Ejercicios 1-10, indique el orden de las ED dadas, e indique también si son lineales o no lineales. Si son lineales, ¿son homogéneas o no homogéneas?

1. $\dfrac{dy}{dx} = 5y$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x = y$

3. $y\dfrac{dy}{dx} = x$

4. $y''' + xy' = x \operatorname{sen} x$

5. $y'' + x \operatorname{sen} xy' = y$

6. $y'' + 4y' - 3y = 2y^2$

7. $\dfrac{d^3y}{dt^3} + t\dfrac{dy}{dt} + t^2y = t^3$

8. $\cos x \dfrac{dx}{dt} + x \operatorname{sen} t = 0$

9. $y^{(4)} + e^x y'' = x^3 y'$

10. $x^2y'' + e^x y' = \dfrac{1}{y}$

11. Verifique que $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$ son soluciones de la ED $y'' + y = 0$. ¿Son soluciones las siguientes funciones?: (a) $\operatorname{sen} x - \cos x$, (b) $\operatorname{sen}(x + 3)$, (c) $\operatorname{sen} 2x$. Justifique sus respuestas.

12. Verifique que $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ son soluciones de la ED $y'' - y = 0$. ¿Son soluciones las siguientes funciones?: (a) $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, (b) $\cos x$, (c) x^e. Justifique sus respuestas.

13. $y_1 = \cos(kx)$ es una solución de $y'' + k^2y = 0$. Plantee y verifique otra solución y_2 que no sea múltiplo de y_1. Obtenga a continuación una solución que cumpla $y(\pi/k) = 3$ e $y'(\pi/k) = 3$.

14. $y_1 = e^{kx}$ es una solución de $y'' - k^2y = 0$. Plantee y verifique otra solución y_2 que no sea múltiplo de y_1. Obtenga a continuación una solución que cumpla $y(1) = 0$ e $y'(1) = 2$.

15. Calcule una solución de $y'' + y = 0$ que cumpla $y(\pi/2) = 2y(0)$ e $y(\pi/4) = 3$. *Sugerencia*: Vea el Ejercicio 11.

16. Calcule dos valores de r tales que $y = e^{rx}$ sea una solución de $y'' - y' - 2y = 0$. Calcule a continuación una solución de la ecuación que cumpla $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

17. Verifique que $y = x$ es una solución de $y'' + y = x$ y calcule una solución y de esta ED que cumpla $y(\pi) = 1$ e $y'(\pi) = 0$. *Sugerencia*: Utilice el Ejercicio 11 y el Teorema 2.

18. Verifique que $y = -e$ es una solución de $y'' - y = e$ y calcule una solución y de esta ED que cumpla $y(1) = 0$ e $y'(1) = 1$. *Sugerencia*: Utilice el Ejercicio 12 y el Teorema 2.

17.2 Solución de ecuaciones de primer orden

En esta sección desarrollaremos técnicas para resolver diversos tipos de EDO de primer orden; concretamente:

1. Ecuaciones separables.
2. Ecuaciones homogéneas.
3. Ecuaciones exactas.
4. Ecuaciones lineales.

La mayor parte de las ecuaciones de primer orden tienen la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Para resolver estas ecuaciones diferenciales generalmente habrá que utilizar integración. De hecho, el proceso de resolver la ED se denomina *integración* de la ED. No obstante, resolver ecuaciones diferenciales es en general más complicado que simplemente plantear una integral y calcularla. La única ED que se puede resolver de esta manera es el tipo más simple de ED lineal de primer orden que se puede expresar de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

La solución es entonces la primitiva de f:

$$y = \int f(x)\,dx$$

Ecuaciones separables

El siguiente tipo más simple de ecuación a resolver se denomina **ecuación separable**. Una ecuación separable es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

donde la derivada dy/dx es un producto de una función sólo de x y una función sólo de y, en vez de ser una función más general de las dos variables x e y.

En la Sección 7.9 se puede encontrar una presentación extensa de las ecuaciones separables con ejemplos y ejercicios, por lo que no la repetiremos aquí. Si no ha estudiado ese material, por favor hágalo ahora.

Ecuaciones homogéneas de primer orden

Una ED de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se denomina **homogénea**. Se trata de un uso *diferente* del término homogéneo del empleado en la sección anterior, que se aplicaba sólo a ecuaciones lineales. Aquí, homogénea se refiere al hecho de que y/x, y por tanto $g(x, y) = f(y/x)$, es *homogénea de grado* 0 en el sentido descrito después del Ejemplo 7 de la Sección 12.5. Estas ecuaciones homogéneas se pueden transformar en una ecuación separable (que por tanto se puede resolver) mediante un cambio de la variable dependiente. Si hacemos

$$v = \frac{y}{x} \qquad \text{o, en otros términos,} \qquad y = xv(x)$$

tenemos entonces

$$\frac{dy}{dx} = v + x\,\frac{dv}{dx}$$

y la ecuación diferencial original se transforma en

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x}$$

que es separable.

Ejemplo 1 Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy}{xy + y^2}$$

Solución La ecuación es homogénea (para verlo, divida el numerador y el denominador por x^2). Si $y = vx$, entonces la ecuación se convierte en

$$v + x\,\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v}{v + v^2} = \frac{1}{v}$$

o

$$x\,\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{v}$$

Separando variables e integrando, se calcula

$$\int \frac{v\,dv}{1-v^2} = \int \frac{dx}{x} \qquad \text{Sea } u = 1 - v^2$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|u| = 2\ln|x| + C_1 = \ln C_2 x^2 \qquad (C_1 = \ln C_2)$$

$$\frac{1}{|u|} = C_2 x^2$$

$$|1 - v^2| = \frac{C_3}{x^2} \qquad (C_3 = 1/C_2)$$

$$\left|1 - \frac{y^2}{x^2}\right| = \frac{C_3}{x^2}$$

La solución se expresa mejor en la forma $x^2 - y^2 = C_4$. Sin embargo, cerca de los puntos donde $y \neq 0$, la ecuación se puede resolver expresando y en función de x.

■

Ecuaciones exactas

Una ecuación diferencial de primer orden expresada en forma diferencial como

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

que es equivalente a $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{M(x,\ y)}{N(x,\ y)}$, se denomina **exacta** si el miembro izquierdo es el diferencial de una función $\phi(x, y)$:

$$d\phi(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

La función ϕ se denomina **función integral** de la ecuación diferencial. Las curvas de nivel $\phi(x, y) = C$ o ϕ son las **curvas solución** de la ecuación diferencial. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

tiene curvas solución que se expresan como

$$x^2 + y^2 = C$$

ya que $d(x^2 + y^2) = 2(x\,dx + y\,dy) = 0$.

Observación La condición de que la ecuación diferencial $M\,dx + N\,dy = 0$ sea exacta es equivalente a la condición de que el campo vectorial

$$\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

sea *conservativo*; la función integral de la ecuación diferencial es entonces la función potencial del campo vectorial (*véase* la Sección 15.2).

Una **condición necesaria** para la exactitud de la ED $M\,dx + N\,dy = 0$ es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Esto dice simplemente que las derivadas parciales mixtas $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$ de la función integral ϕ deben ser iguales.

Una vez que sabemos que una ecuación es exacta, a menudo se puede plantear la función integral. En cualquier caso, ϕ siempre se puede obtener por el mismo método utilizado para calcular el potencial de un campo vectorial conservativo de la Sección 15.2.

Ejemplo 2 Verifique que la ED

$$(2x + \operatorname{sen} y - ye^{-x})\,dx + (x\cos y + \cos y + e^{-x})\,dy = 0$$

es exacta y calcule sus curvas solución.

Solución En este caso, $M = 2x + \operatorname{sen} y - ye^{-x}$ y $N = x\cos y + \cos y + e^{-x}$. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y - e^{-x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

la ED es exacta. Deseamos obtener ϕ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M = 2x + \operatorname{sen} y - ye^{-x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = N = x\cos y + \cos y + e^{-x}$$

Integramos la primera ecuación con respecto a x, teniendo en cuenta que la constante de integración puede depender de y.

$$\phi(x, y) = \int (2x + \operatorname{sen} y - ye^{-x})\,dx = x^2 + x\operatorname{sen} y + ye^{-x} + C_1(y)$$

Sustituiremos ahora esta expresión en la segunda ecuación:

$$x\cos y + \cos y + e^{-x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = x\cos y + e^{-x} + C_1'(y)$$

De este modo, $C_1'(y) = \cos y$ y $C_1(y) = \operatorname{sen} y + C_2$ (como la ED original era exacta, la ecuación $C_1'(y)$ no depende de x; si no fuera así, no podríamos obtener C_1 como función sólo de y). Eligiendo $C_2 = 0$ obtenemos que $\phi(x, y) = x^2 + x\operatorname{sen} y + ye^{-x} + \operatorname{sen} y$ es la función integral para la ED dada. Las curvas solución de la ED son las curvas de nivel

$$x^2 + x\operatorname{sen} y + ye^{-x} + \operatorname{sen} y = C$$

■

Factores de integración

Toda ecuación diferencial ordinaria de orden 1 y de grado 1 se puede expresar en forma diferencial: $M\,dx + N\,dy = 0$. Sin embargo, esta última ecuación en general no será exacta. Es posible multiplicar la ecuación por un **factor de integración** $\mu(x, y)$ de forma que la ecuación resultante

$$\mu(x, y)M(x, y)\,dx + \mu(x, y)N(x, y)\,dy = 0$$

sea exacta. En general, estos factores de integración son difíciles de obtener; deben cumplir la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$M(x, y)\,\frac{\partial \mu}{\partial y} - N(x, y)\,\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu(x, y)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

que se sigue de la condición necesaria sobre exactitud planteada anteriormente. No intentaremos resolver esa ecuación aquí.

Sucede algunas veces que una ecuación diferencial tiene un factor de integración que depende sólo de una de las dos variables. Supongamos, por ejemplo, que $\mu(x)$ es un factor

de integración de $M\,dx + N\,dy = 0$. Entonces, $\mu(x)$ debe cumplir la ecuación diferencial ordinaria

$$N(x, y)\,\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

o bien

$$\frac{1}{\mu(x)}\,\frac{d\mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x,\ y)}$$

Esta ecuación se puede resolver (mediante integración) y expresar así μ como función sólo de x, *siempre que el miembro derecho sea independiente de* y.

Ejemplo 3 Demuestre que $(x + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$ tiene un factor de integración que depende sólo de x, calcúlelo y resuelva la ecuación.

Solución En este caso, $M = x + y^2$ y $N = xy$. Como

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x,\ y)} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$$

no depende de y, la ecuación tiene un factor de integración que depende sólo de x. Este factor está dado por $d\mu/\mu = dx/x$. Evidentemente, $\mu = x$ es un factor de integración adecuado; si multiplicamos la ecuación diferencial dada por x, obtenemos

$$0 = (x^2 + xy^2)\,dx + x^2y\,dy = d\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2}\right)$$

La solución es, por tanto, $2x^3 + 3x^2y^2 = C$. ■

Observación Por supuesto, es posible obtener un factor de integración que dependa sólo de y en vez de x. *Véanse* los Ejercicios 17-19 posteriores. Es también posible buscar factores de integración que dependan de combinaciones específicas de x e y, por ejemplo xy. *Véase* el Ejercicio 20.

Ecuaciones lineales de primer orden

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es aquella del tipo

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones dadas, que se suponen continuas. La ecuación es *homogénea* (en el sentido descrito en la Sección 17.1) siempre que $q(x) = 0$. En ese caso, la ecuación lineal dada es separable:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

y se puede resolver integrando ambos miembros. Las ecuaciones lineales de primer orden no homogéneas se pueden resolver por un procedimiento en el que interviene el cálculo de un factor de integración.

La técnica para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, junto con varios ejemplos y ejercicios, se encuentra en la Sección 7.9. Si no ha estudiado ese material, por favor hágalo ahora.

Ejercicios 17.2

Véase la Sección 7.9 donde se plantean ejercicios sobre ecuaciones separables y ecuaciones lineales.

Resuelva las ecuaciones diferenciales homogéneas de los Ejercicios 1-6.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2+2y^2}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3+3xy^2}{3x^2y+y^3}$

5. $x\dfrac{dy}{dx} = y + x\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$

6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - e^{-y/x}$

7. Calcule una ecuación de la curva en el plano xy que pasa por el punto $(2, 3)$ y tiene, en cada punto (x, y) de la misma, pendiente $2x/(1+y^2)$.

8. Repita el Problema 7 para el punto $(1, 3)$ y la pendiente $1 + (2y/x)$.

9. Demuestre que el cambio de variables $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$ transforma la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{ex+fy+g}$$

en la ecuación homogénea

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta}{e\xi + f\eta}$$

sabiendo que (x_0, y_0) es la solución del sistema

$$ax+by+c=0$$
$$ex+fy+g=0$$

10. Utilice la técnica del Ejercicio 9 para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-4}{2x-y-3}$$

Demuestre que las ED de los Ejercicios 11-14 son exactas, y resuélvalas.

11. $(xy^2+y)\,dx + (x^2y+x)\,dy = 0$

12. $(e^x \operatorname{sen} y + 2x)\,dx + (e^x\cos y + 2y)\,dy = 0$

13. $e^{xy}(1+xy)\,dx + x^2e^{xy}\,dy = 0$

14. $\left(2x + 1 - \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx + \dfrac{2y}{x}\,dy = 0$

Demuestre que las ED de los Ejercicios 15 y 16 admiten factores de integración que son funciones sólo de x. Después resuelva las ecuaciones.

15. $(x^2+2y)\,dx - x\,dy = 0$

16. $(xe^x + x\ln y + y)\,dx + \left(\dfrac{x^2}{y} + x\ln x + x\operatorname{sen} y\right)dy = 0$

17. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes $M(x, y)$ y $N(x, y)$ si la ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$ tiene un factor de integración de la forma $\mu(y)$, y qué ED debe cumplir dicho factor de integración?

18. Calcule un factor de integración de la forma $\mu(y)$ para la ecuación

$$2y^2(x+y^2)\,dx + xy(x+6y^2)\,dy = 0$$

y después resuelva la ecuación. *Sugerencia*: *Véase* el Ejercicio 17.

19. Calcule un factor de integración de la forma $\mu(y)$ para la ecuación $y\,dx - (2x + y^3e^y)\,dy = 0$ y después resuelva la ecuación. *Sugerencia*: *Véase* el Ejercicio 17.

20. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes $M(x, y)$ y $N(x, y)$ si la ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$ tiene un factor de integración de la forma $\mu(xy)$, y qué ED debe cumplir dicho factor de integración?

21. Calcule un factor de integración de la forma $\mu(xy)$ para la ecuación

$$\left(x\cos x + \frac{y^2}{x}\right)dx - \left(\frac{x\operatorname{sen} x}{y} + y\right)dy = 0$$

y después resuelva la ecuación. *Sugerencia*: *Véase* el Ejercicio 20.

17.3 Existencia, unicidad y métodos numéricos

Una ecuación diferencial general de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

especifica una pendiente $f(x, y)$ en todo punto (x, y) del dominio de f y representa, por tanto, un **campo de pendientes**. Dicho campo de pendientes se puede representar gráficamente dibujando segmentos cortos con la pendiente indicada en muchos puntos del plano xy. Los campos de pen-

dientes son similares a los campos vectoriales, pero los segmentos se dibujan habitualmente de la misma longitud y sin puntas de flecha. La Figura 17.1 ilustra el campo de pendientes de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x - y$$

La resolución de un problema de valor inicial típico

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,\ y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

implica obtener una función $y = \phi(x)$ tal que

$$\phi'(x) = f(x,\ \phi(x)) \qquad \text{y} \qquad \phi(x_0) = y_0$$

La gráfica de la ecuación $y = \phi(x)$ es una curva que pasa por (x_0, y_0) y es tangente al campo de pendientes en cada punto. Tales curvas se denominan **curvas solución** de la ecuación diferencial. La Figura 17.1 muestra cuatro curvas solución de $y' = x - y$ correspondientes a las condiciones iniciales $y(0) = C$, con $C = -2, -1, 0$ y 1.

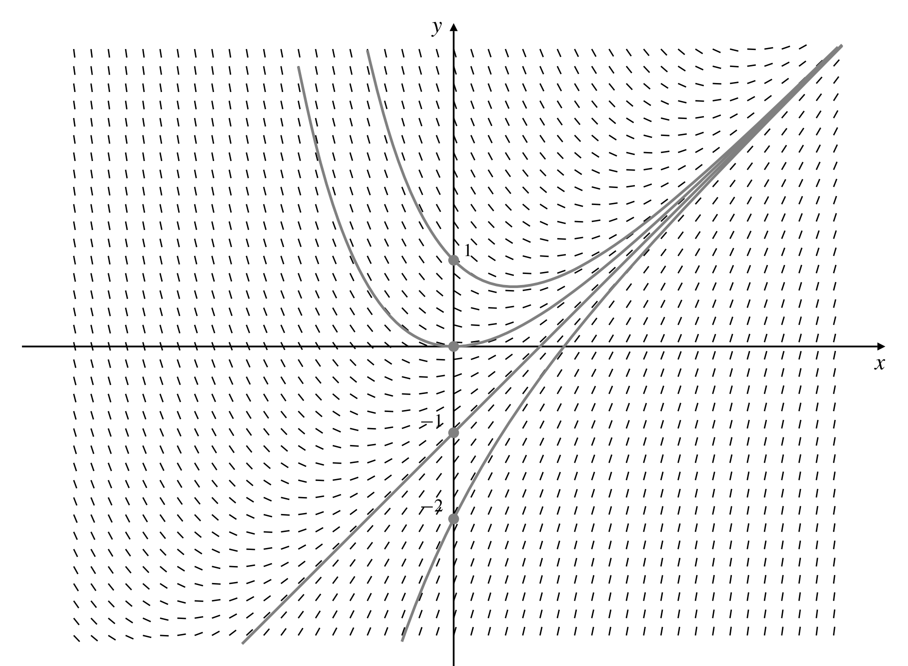


Figura 17.1 El campo de pendientes de la ED $y' = x - y$ y cuatro curvas solución de la misma.

La ED $y' = x - y$ es lineal y se puede resolver explícitamente por el método de la Sección 17.2. De hecho, la solución que cumple $y(0) = C$ es $y = x - 1 + (C + 1)e^{-x}$. La mayoría de las ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x, y)$ no permiten despejar y como función explícita de x, por lo que debemos utilizar aproximaciones numéricas para calcular el valor de la función solución $\phi(x)$ en puntos concretos.

Existencia y unicidad de soluciones

Aunque no se pueda calcular una solución explícita de un problema de valor inicial, es importante saber si el problema tiene solución y si la solución es única.

TEOREMA 3 **Un teorema de existencia y unicidad para problemas de valor inicial de primer orden**

Supongamos que $f(x, y)$ y $f_2(x, y) = (\partial/\partial y)f(x, y)$ son continuas en un rectángulo R de la forma $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Entonces, existe un número $\delta > 0$ y una función *única* $\phi(x)$ definida y con derivada continua en el intervalo $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, tal que $\phi(x_0) = y_0$ y $\phi'(x) = f(x,\ \phi(x))$ para $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. En otras palabras, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,\ y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{*}$$

tiene una solución única $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.

Presentaremos sólo un esbozo de la demostración. Toda solución $y = \phi(x)$ del problema de valor inicial (*) debe cumplir también la **ecuación integral**

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ \phi(t))\,dt \tag{**}$$

y, a la inversa, toda solución de la ecuación integral (**) debe cumplir también el problema de valor inicial (*). Una secuencia de aproximaciones $\phi_n(x)$ a una solución (**) se puede construir como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= y_0 \\ \phi_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ \phi_n(t))\,dt \qquad \text{para} \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}$$

Estas iteraciones se denominan **iteraciones de Picard**. La demostración del Teorema 3 implica demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x)$$

existe en un intervalo $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ y que el límite resultante $\phi(x)$ cumple la ecuación integral (**). Los detalles se pueden encontrar en textos más avanzados sobre ecuaciones diferenciales y análisis diferencial.

Observación Algunos problemas de valor inicial pueden tener soluciones que no son únicas. Por ejemplo, las funciones $y_1(x) = x^3$ e $y_2(x) = 0$ satisfacen ambas el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

En este caso, $f(x,\ y) = 3y^{2/3}$ es continua en todo el plano xy. Sin embargo, $\partial f/\partial y = 2y^{-1/3}$ no es continua en el eje x y, por tanto, no es continua en ningún rectángulo que contenga al punto $(0,\ 0)$ en su interior. No se cumplen las condiciones del Teorema 3 y el problema de valor inicial tiene solución, pero ésta no es única.

Observación La solución única $y = \phi(x)$ al problema de valor inicial (*) garantizada por el Teorema 3 puede no estar definida en todo el intervalo $[a,\ b]$ porque puede «escapar» del rectán-

gulo R por sus lados superior o inferior. Aunque $f(x, y)$ y $(\partial/\partial y)f(x, y)$ sean continuas en todo el plano xy, la solución puede no estar definida en toda la recta real. Por ejemplo,

$$y = \frac{1}{1-x} \quad \text{cumple el problema de valor inicial} \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pero sólo para $x < 1$. Empezando desde $(0, 1)$ podemos seguir la curva solución tanto como deseemos a la izquierda de $x = 0$, pero a la derecha de $x = 0$ la curva tiende a ∞ cuando $x \to 1-$ (*véase* la Figura 17.2). No tiene sentido considerar la parte de la curva a la derecha de $x = 1$ como parte de la curva solución del problema de valor inicial.

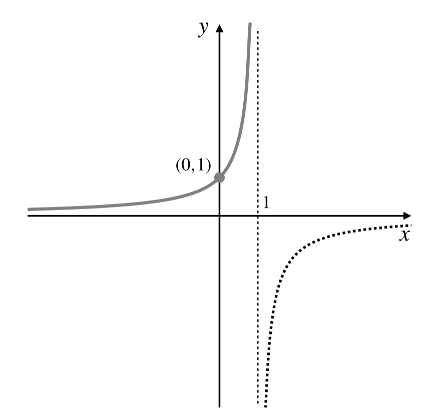


Figura 17.2 La solución de $y' = y^2$, $y(0) = 1$ es la parte de la curva $y = 1/(1 - x)$ a la izquierda de la asíntota vertical en $x = 1$.

Métodos numéricos

Supongamos que se cumplen las condiciones del Teorema 3, por lo que sabemos que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,\ y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene solución única $y = \phi(x)$ en algún intervalo que contiene a x_0. Aun cuando no podamos resolver la ecuación diferencial y obtener explícitamente $\phi(x)$, todavía podemos intentar obtener valores aproximados y_n de $\phi(x_n)$ en una secuencia de puntos

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \quad ...$$

empezando en x_0. En este caso, $h > 0$ (o $h < 0$) se denomina **tamaño del paso** del esquema de aproximación. En el resto de esta sección describiremos tres métodos para construir las aproximaciones $\{y_n\}$:

1. El método de Euler.
2. El método de Euler mejorado.
3. El método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Cada uno de estos métodos empieza con un valor dado de y_0 y proporciona una fórmula para construir y_{n+1} cuando se conoce y_n. Los tres métodos se enumeran anteriormente en orden de complejidad de sus fórmulas, pero las fórmulas más complicadas producen aproximaciones mucho mejores para cualquier tamaño dado del paso h.

El **método de Euler** se basa en aproximar la curva solución $y = \phi(x)$ por una línea poligonal (una secuencia de segmentos rectos unidos por sus extremos), donde cada segmento tiene

una longitud horizontal h y una pendiente determinada por el valor de $f(x, y)$ en el extremo final del segmento anterior. Por tanto, si $x_n = x_0 + nh$, entonces

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$$
$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$$
$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h$$

y, en general,

Fórmulas de iteración para el método de Euler

$$x_{n+1} = x_n + h, \qquad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Ejemplo 1 Utilice el método de Euler para obtener valores aproximados de la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

en el intervalo [0, 1] utilizando

(a) 5 pasos de tamaño $h = 0.2$,

(b) 10 pasos de tamaño $h = 0.1$.

Calcule el error en cada paso, sabiendo que el problema (que es una ecuación lineal y, por tanto, se puede resolver explícitamente) tiene como solución $y = \phi(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Solución

(a) Aquí tenemos $f(x, y) = x - y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $h = 0.2$, por lo que

$$x_n = \frac{n}{5}, \qquad y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n - y_n)$$

y el error es $e_n = \phi(x_n) - y_n$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5. Los resultados del cálculo, que se realiza fácilmente utilizando una hoja de cálculo, se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Aproximaciones de Euler con $h = 0.2$

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	y_{n+1}	$e_n = \phi(x_n) - y_n$
0	0.0	1.000 000	−1.000 000	0.800 000	0.000 000
1	0.2	0.800 000	−0.600 000	0.680 000	0.037 462
2	0.4	0.680 000	−0.280 000	0.624 000	0.060 640
3	0.6	0.624 000	−0.024 000	0.619 200	0.073 623
4	0.8	0.619 200	0.180 800	0.655 360	0.079 458
5	1.0	0.655 360	0.344 640		0.080 399

La Figura 17.3 muestra la solución exacta $y = \phi(x)$ y la línea poligonal que representa la aproximación de Euler. La aproximación está por debajo de la curva solución, como reflejan los valores positivos de la última columna de la Tabla 1, que representan el error en cada paso.

(b) En este caso tenemos $h = 0.1$, de forma que

$$x_n = \frac{n}{10}, \qquad y_{n+1} = y_n + 0.1(x_n - y_n)$$

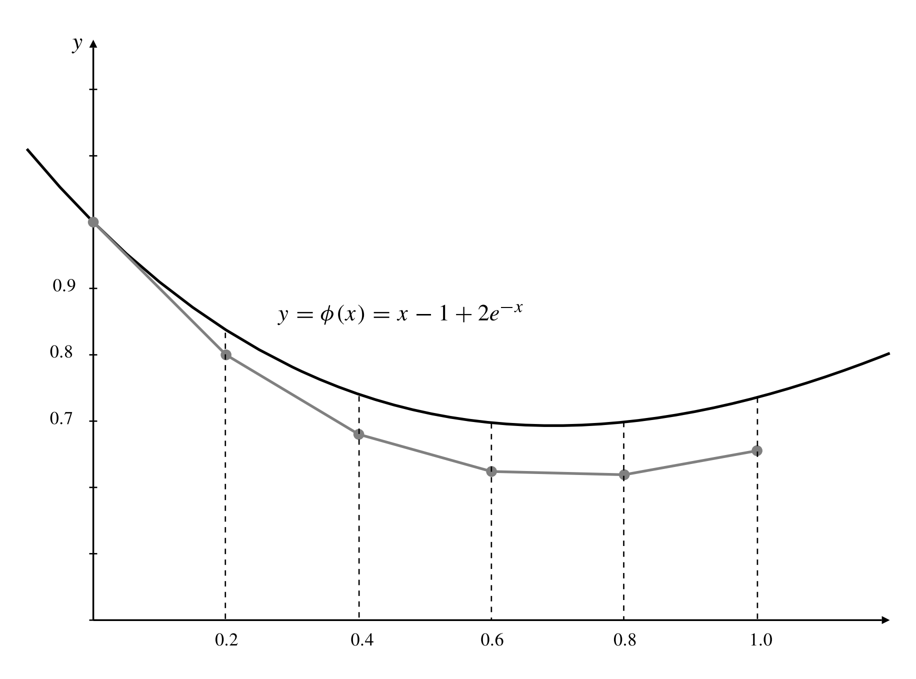


Figura 17.3 La solución $y = \phi(x)$ a $y' = x - y$, $y(0) = 1$ y una aproximación de Euler a la misma en [0, 1] con tamaño del paso $h = 0.2$.

para $n = 0, 1, ..., 10$. Presentamos los resultados de nuevo en forma de tabla:

Tabla 2. Aproximaciones de Euler con $h = 0.1$

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	y_{n+1}	$e_n = \phi(x_n) - y_n$
0	0.0	1.000 000	−1.000 000	0.900 000	0.000 000
1	0.1	0.900 000	−0.800 000	0.820 000	0.009 675
2	0.2	0.820 000	−0.620 000	0.758 000	0.017 462
3	0.3	0.758 000	−0.458 000	0.712 200	0.023 636
4	0.4	0.712 200	−0.312 200	0.680 980	0.028 440
5	0.5	0.680 980	−0.180 980	0.662 882	0.032 081
6	0.6	0.662 882	−0.062 882	0.656 594	0.034 741
7	0.7	0.656 594	0.043 406	0.660 934	0.036 577
8	0.8	0.660 934	0.139 066	0.674 841	0.037 724
9	0.9	0.674 841	0.225 159	0.697 357	0.038 298
10	1.0	0.697 357	0.302 643		0.038 402

Obsérvese que el error al final del primer paso es aproximadamente la cuarta parte del error al final del primer paso del apartado (a), pero al final en $x = 1$ es sólo aproximadamente la mitad que el del apartado (a). Este comportamiento es característico del método de Euler. ■

Si disminuimos el tamaño del paso h, se requieren más pasos ($n = |x - x_0|/h$) para llegar desde el punto inicial x_0 a un valor particular x donde deseemos conocer el valor de la solución. En el método de Euler se puede demostrar que el error en cada paso disminuye en promedio proporcionalmente a h^2, pero los errores se pueden acumular de un paso otro, por lo que el error en x decrecerá proporcionalmente a $nh^2 = |x - x_0|h$. Esto es coherente con los resultados del Ejemplo 1. Disminuir h y, por tanto, aumentar n es costoso en términos de recursos computacionales, por lo que es conveniente buscar formas de reducir el error sin disminuir el tamaño del paso. Esto es similar a desarrollar técnicas mejores que la Regla del Trapecio para evaluar numéricamente integrales definidas.

El **método de Euler mejorado** es un paso en esta dirección. La exactitud del método de Euler está obstaculizada por el hecho de que la pendiente de cada segmento de la línea poligonal de aproximación está determinada por el valor de $f(x, y)$ en un extremo del segmento. Como f varía a lo largo del segmento, podemos mejorar utilizando, por ejemplo, el valor medio de $f(x, y)$ en los dos extremos del segmento, es decir, calculando y_{n+1} a partir de la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h\,\frac{f(x_n,\ y_n) + f(x_{n+1},\ y_{n+1})}{2}$$

Desgraciadamente, y_{n+1} aparece en ambos miembros de la ecuación, por lo que no podremos resolverla despejando y_{n+1}. Podemos sortear esta dificultad sustituyendo y_{n+1} en el miembro derecho por su aproximación de Euler $y_n + hf(x_n, y_n)$. La fórmula resultante es la base del método de Euler mejorado.

Fórmulas de integración del método de Euler mejorado

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\,\frac{f(x_n,\ y_n) + f(x_{n+1},\ u_{n+1})}{2}$$

Ejemplo 2 Utilice el método de Euler mejorado con $h = 0.2$ para calcular valores aproximados de la solución del problema de valor inicial del Ejemplo 1 en [0, 1]. Compare los errores con los obtenidos por el método de Euler.

Solución La Tabla 3 resume los cálculos de cinco pasos del método de Euler mejorado para $f(x, y) = x - y$, $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$.

Tabla 3. Aproximaciones del método de Euler mejorado $h = 0.2$

n	x_n	y_n	u_{n+1}	y_{n+1}	$e_n = \phi(x_n) - y_n$
0	0.0	1.000 000	0.800 000	0.840 000	0.000 000
1	0.2	0.840 000	0.712 000	0.744 800	−0.002 538
2	0.4	0.744 800	0.675 840	0.702 736	−0.004 160
3	0.6	0.702 736	0.682 189	0.704 244	−0.005 113
4	0.8	0.704 244	0.723 395	0.741 480	−0.005 586
5	1.0	0.741 480	0.793 184		−0.005 721

Obsérvese que los errores son considerablemente menores que la décima parte de los obtenidos en el Ejemplo 1(a). Por supuesto, se necesitan más cálculos en cada paso, pero el número de evaluaciones de $f(x, y)$ requeridas es solamente el doble de las requeridas en el Ejemplo 1(a). Como en el caso de la integración numérica, si f es complicada, son estas evaluaciones de la función las que constituyen la mayor parte del «coste» computacional de las soluciones numéricas.

Observación Se puede demostrar para funciones f bien comportadas que el error en cada paso del método de Euler mejorado está acotado por un múltiplo de h^3, en vez de h^2 como en el caso del método de Euler (sin mejora). Por tanto, el error acumulativo en x se puede acotar por una constante multiplicada por $|x - x_0|h^2$. Si el Ejemplo 2 se repite con 10 pasos de tamaño $h = 0.1$, el error en $n = 10$ (es decir, en $x = 1$) es $-0.001\,323$, que es aproximadamente la cuarta parte del tamaño del error en $x = 1$ con $h = 0.2$.

El método de Runge-Kutta de cuarto orden consigue una mejora adicional respecto al método de Euler mejorado, pero a expensas de requerir cálculos más complicados en cada paso. Requiere cuatro evaluaciones de $f(x, y)$ en cada paso, pero el error en cada paso es menor que una constante multiplicada por h^5, por lo que el error acumulativo decrece como h^4 cuando h decrece. Como el método de Euler mejorado, este método requiere calcular una cierta clase de pendiente promedio para cada segmento de la aproximación poligonal a la solución del problema de valor inicial. Presentaremos a continuación las fórmulas apropiadas pero no las obtendremos.

Fórmulas de integración para el método de Runge-Kutta

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$p_n = f(x_n, y_n)$$

$$q_n = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} p_n\right)$$

$$r_n = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} q_n\right)$$

$$s_n = f(x_n + h, y_n + hr_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\,\frac{p_n + 2q_n + 2r_n + s_n}{6}$$

Ejemplo 3 Utilice el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.2$ para calcular valores aproximados de la solución del problema de valor inicial del Ejemplo 1 en [0, 1]. Compare los errores con los obtenidos con los métodos de Euler y de Euler mejorado.

Solución La Tabla 4 resume el cálculo de cinco pasos del método de Runge-Kutta para $f(x, y) = x - y$, $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$, de acuerdo con las fórmulas anteriores. La citada tabla no muestra los valores de las cantidades intermedias p_n, q_n, r_n y s_n, pero se han incluido columnas para esas cantidades en la hoja de cálculo con la que se han realizado los cálculos.

Tabla 4. Aproximaciones de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.2$

n	x_n	y_n	$e_n = \phi(x_n) - y_n$
0	0.0	1.000 000	0.000 000 0
1	0.2	0.837 467	−0.000 005 2
2	0.4	0.740 649	−0.000 008 5
3	0.6	0.697 634	−0.000 010 4
4	0.8	0.698 669	−0.000 011 3
5	1.0	0.735 770	−0.000 011 6

Los errores aquí son aproximadamente 1/500 del tamaño de los errores obtenidos con el método de Euler mejorado, y aproximadamente 1/7 000 del tamaño de los errores obtenidos con el método de Euler. Esta gran mejora se obtiene a expensas de doblar el número de evaluaciones de la función requeridas con respecto al método de Euler mejorado y cuadruplicar el número requerido en el método de Euler. Si utilizamos 10 pasos de tamaño $h = 0.1$ en el método de Runge-Kutta, el error en $x = 1$ se reduce a $-6.664\,82 \times 10^{-7}$, que es menor que 1/16 de su valor cuando $h = 0.2$. ■

Nuestro ejemplo final muestra lo que sucede con las aproximaciones numéricas a una solución que no está acotada.

Ejemplo 4 Obtenga aproximaciones en $x = 0.4$, $x = 0.8$ y $x = 1.0$ a las soluciones del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

utilizando todos los métodos descritos anteriormente, y usando tamaños de paso $h = 0.2$, $h = 0.1$ y $h = 0.05$ para cada método. ¿Qué sugieren los resultados sobre los valores de la solución en estos puntos? Compare los resultados con la solución real $y = 1/(1 - x)$.

Solución Las diversas aproximaciones se calculan utilizando las diferentes fórmulas descritas anteriormente $f(x, y) = y^2$, $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$. Los resultados se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5. Comparación de métodos y tamaños de paso para $y' = y^2$, $y(0) = 1$

	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
Euler			
$x = 0.4$	1.488 000	1.557 797	1.605 224
$x = 0.8$	2.676 449	3.239 652	3.793 197
$x = 1.0$	4.109 124	6.128 898	9.552 668
Euler mejorado			
$x = 0.4$	1.640 092	1.658 746	1.664 515
$x = 0.8$	4.190 396	4.677 726	4.897 519
$x = 1.0$	11.878 846	22.290 765	43.114 668
Runge-Kutta			
$x = 0.4$	1.666 473	1.666 653	1.666 666
$x = 0.8$	4.965 008	4.996 663	4.999 751
$x = 1.0$	41.016 258	81.996 399	163.983 395

Los resultados de Euler muestran poca información útil. Los resultados del método de Euler mejorado sugieren que la solución existe en $x = 0.4$ y $x = 0.8$, pero probablemente no en $x = 1$. El método de Runge-Kutta confirma esto y sugiere que $y(0.4) = 5/3$ e $y(0.8) = 5$, que son los valores correctos proporcionados por la solución real $y = 1/(1 - x)$. También sugiere muy fuertemente que la solución «estalla» en, o cerca de, $x = 1$. ■

Ejercicios 17.3

Un computador es prácticamente esencial para realizar la mayor parte de estos ejercicios. Los cálculos se realizan fácilmente con un programa de hoja de cálculo en el que las fórmulas para calcular las diversas cantidades que aparecen se pueden repetir a lo largo de las columnas para automatizar el proceso de iteración.

1. Utilice el método de Euler con tamaños de paso (a) $h = 0.2$, (b) $h = 0.1$ y (c) $h = 0.05$ para aproximar $y(2)$ sabiendo que $y' = x + y$ e $y(1) = 0$.
2. Repita el Ejercicio 1 utilizando el método de Euler mejorado.
3. Repita el Ejercicio 1 utilizando el método de Runge-Kutta.
4. Utilice el método de Euler con tamaños de paso (a) $h = 0.2$ y (b) $h = 0.1$ para aproximar $y(2)$ sabiendo que $y' = xe^{-y}$ e $y(0) = 0$.
5. Repita el Ejercicio 4 utilizando el método de Euler mejorado.
6. Repita el Ejercicio 4 utilizando el método de Runge-Kutta.

7. Utilice el método de Euler con (a) $h = 0.2$, (b) $h = 0.1$ y (c) $h = 0.05$ para aproximar $y(1)$ sabiendo que $y' = \cos y$ e $y(0) = 0$.

8. Repita el Ejercicio 7 utilizando el método de Euler mejorado.

9. Repita el Ejercicio 7 utilizando el método de Runge-Kutta.

10. Utilice el método de Euler con (a) $h = 0.2$, (b) $h = 0.1$ y (c) $h = 0.05$ para aproximar $y(1)$ sabiendo que $y' = \cos(x^2)$ e $y(0) = 0$.

11. Repita el Ejercicio 10 utilizando el método de Euler mejorado.

12. Repita el Ejercicio 10 utilizando el método de Runge-Kutta.

Resuelva las ecuaciones integrales de los Ejercicios 13 y 14 replanteándolas como problemas de valor inicial.

13. $y(x) = 2 + \int_1^x (y(t))^2\, dt$. *Sugerencia*: Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ e $y(1)$.

14. $u(x) = 1 + 3\int_2^x t^2 u(t)\, dt$. *Sugerencia*: Calcule $\dfrac{du}{dx}$ y $u(2)$.

15. Los métodos de esta sección se pueden utilizar para aproximar numéricamente integrales definidas. Por ejemplo,

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

está dada por $I = y(b)$, con

$$y' = f(x) \qquad \text{e} \qquad y(a) = 0$$

Demuestre que un paso del método de Runge-Kutta con $h = b - a$ da el mismo resultado para I que la Regla de Simpson (Sección 6.7) con dos subintervalos de longitud $h/2$.

16. Si $\phi(0) = A \geqslant 0$ y $\phi'(x) \geqslant k\phi(x)$ en $[0, X]$, con $k > 0$ y $X > 0$ constantes, demuestre que $\phi(x) \geqslant Ae^{kx}$ en $[0, X]$. *Sugerencia*: Calcule $(d/dx)(\phi(x)/e^{kx})$.

$*$**17.** Considere los tres problemas de valor inicial

$$\begin{array}{lll} \text{(A)} & u' = u^2 & u(0) = 1 \\ \text{(B)} & y' = x + y^2 & y(0) = 1 \\ \text{(C)} & v' = 1 + v^2 & v(0) = 1 \end{array}$$

(a) Demuestre que la solución de (B) permanece entre las soluciones de (A) y (C) en cualquier intervalo $[0, X]$ donde existan las soluciones de los tres problemas. *Sugerencia*: Debemos tener $u(x) \geqslant 1$, $y(x) \geqslant 1$ y $v(x) \geqslant 1$ en $[0, X]$ (¿por qué?). Aplique el resultado del Ejercicio 16 a $\phi = y - u$ y a $\phi = v - y$.

(b) Calcule soluciones explícitas para los problemas (A) y (C). ¿Qué se puede concluir sobre la solución del problema (B)?

(c) Utilice el método de Runge-Kutta con $h = 0.05$, $h = 0.02$ y $h = 0.01$ para aproximar la solución de (B) en $[0, 1]$. ¿Qué se puede concluir ahora?

17.4 Ecuaciones diferenciales de segundo orden

La ecuación diferencial ordinaria general de segundo orden es de la forma

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

para alguna función F de cuatro variables. Cuando esta ecuación se puede resolver explícitamente expresando y en función de x, la solución generalmente requiere dos integraciones y, por tanto, dos constantes arbitrarias. La solución única resulta de imponer los valores de la solución y, y de su derivada $y' = dy/dx$, en un punto particular. Tal imposición constituye un **problema de valor inicial** para la ecuación de segundo orden.

Ecuaciones reducibles a primer orden

Una ecuación de segundo orden de la forma

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0$$

en la que no aparece explícitamente la función desconocida y (excepto a través de sus derivadas) se puede reducir a una ecuación de primer orden mediante un cambio de la variable dependiente; si $v = dy/dx$, entonces la ecuación se puede expresar

$$F\left(\frac{dv}{dx}, v, x\right) = 0$$

Esta ecuación de primer orden en v puede ser susceptible de aplicar las técnicas descritas en las secciones anteriores. Si se puede tener una solución explícita e integrada $v = v(x)$, entonces la función

$$y = \int v(x)\,dx$$

es una solución explícita de la ecuación dada.

Ejemplo 1 Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -2$$

Solución Si hacemos $v = dy/dx$, la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{dv}{dx} = xv^2$$

que es una ecuación separable de primer orden. Por tanto,

$$\frac{dv}{v^2} = x\,dx$$

$$-\frac{1}{v} = \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{2}$$

$$v = -\frac{2}{x^2 + C_1}$$

La condición inicial $y'(0) = -2$ indica que $v(0) = -2$ y, por tanto, $C_1 = 1$. Entonces,

$$y = -2\int \frac{dx}{x^2 + 1} = -2\tan^{-1} x + C_2$$

La condición inicial $y(0) = 1$ implica que $C_2 = 1$, por lo que la solución del problema de valor inicial dado es $y = 1 - 2\tan^{-1} x$.

Una ecuación de segundo orden de la forma

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y\right) = 0$$

en la que no intervenga explícitamente la variable independiente x se puede reducir a una ecuación de primer orden mediante un cambio de las variables dependiente e independiente. Sea de nuevo $v = dy/dx$, pero consideremos v como función de y en vez de x; $v = v(y)$. Entonces,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\,\frac{dv}{dy}$$

por la Regla de la Cadena. Por consiguiente, la ecuación diferencial dada se convierte en

$$F\left(v\,\frac{dv}{dy},\, v,\, y\right) = 0$$

que es una ecuación de primer orden en v como función de y. Si esta ecuación se puede resolver obteniendo $v = v(y)$, queda todavía el problema de resolver la ecuación separable $(dy/dx) = v(y)$ expresando y en función de x.

Ejemplo 2 Resuelva la ecuación $y\,\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$.

Solución El cambio de variable $dy/dx = v(y)$ da como resultado la ecuación

$$yv\,\frac{dv}{dy} = v^2$$

que es separable, $dv/v = dy/y$, y su solución es $v = C_1 y$. La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y$$

es de nuevo separable y da lugar a

$$\frac{dy}{y} = C_1\,dx$$

$$\ln|y| = C_1 x + C_2$$

$$y = \pm e^{C_1 x + C_2} = C_3 e^{C_1 x}$$

Ecuaciones lineales de segundo orden

Las ecuaciones diferenciales ordinarias que aparecen más frecuentemente en aplicaciones son ecuaciones lineales de segundo orden. Una ecuación lineal de segundo orden general adopta la forma

$$a_2(x)\,\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Como se indicó en la Sección 17.1, si $f(x) = 0$ idénticamente, entonces se dice que la ecuación es **homogénea**. Si los coeficientes $a_2(x)$, $a_1(x)$ y $a_0(x)$ son continuos en un intervalo y $a_2(x) \neq 0$ en dicho intervalo, entonces la ecuación homogénea

$$a_2(x)\,\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

tiene una solución general de la forma

$$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

siendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones **independientes**, es decir, dos soluciones con la propiedad de que $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$ para todo x en el intervalo sólo si $C_1 = C_2 = 0$ (no demostraremos esto aquí).

Siempre que una solución, $y_1(x)$, de una ecuación de segundo orden lineal homogénea sea conocida, se puede obtener otra solución independiente (y, por tanto, la solución general) sustituyendo $y = v(x)y_1(x)$ en la ecuación diferencial. Esto da lugar a una ecuación separable lineal y de primer orden para v'.

Ejemplo 3 Demuestre que $y_1 = e^{-2x}$ es una solución de $y'' + 4y' + 4y = 0$, y calcule la solución general de esta ecuación.

Solución Como $y_1' = -2e^{-2x}$ e $y_1'' = 4e^{-2x}$, tenemos

$$y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = e^{-2x}(4 - 8 + 4) = 0$$

por lo que y_1 es de hecho una solución de la ecuación diferencial dada. Para obtener la solución general, probamos $y = y_1 v = e^{-2x}v(x)$. Tenemos

$$y' = -2e^{-2x}v + e^{-2x}v'$$
$$y'' = 4e^{-2x}v - 4e^{-2x}v' + e^{-2x}v''$$

Sustituyendo estas expresiones en la ED dada se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + 4y' + 4y \\ &= e^{-2x}(4v - 4v' + v'' - 8v + 4v' + 4v) = e^{-2x}v'' \end{aligned}$$

Por tanto, $y = y_1 v$ es una solución suponiendo que $v''(x) = 0$. Esta ecuación en v tiene la solución general $v = C_1 + C_2 x$, por lo que la ecuación dada tiene como solución general

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

donde $y_2 = xe^{-2x}$ es una segunda solución de la ED, independiente de y_1. ■

Por el Teorema 2 de la Sección 17.1, la solución general de la ecuación lineal de segundo orden no homogénea (con $f(x) \neq 0$) es de la forma

$$y = y_p(x) + y_h(x)$$

donde $y_p(x)$ es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea, e $y_h(x)$ es la solución general (tal como se describe anteriormente) de la correspondiente ecuación homogénea. En la Sección 17.6 presentaremos la solución de las ecuaciones lineales no homogéneas. Sin embargo, primero, en la Sección 17.5 nos concentraremos en algunas clases especiales de ecuaciones lineales homogéneas.

Ejercicios 17.4

1. Demuestre que $y = e^x$ es una solución de $y'' - 3y' + 2y = 0$ y calcule la solución general de esta ED.

2. Demuestre que $y = e^{-2x}$ es una solución de $y'' - y' - 6y = 0$ y calcule la solución general de esta ED.

3. Demuestre que $y = x$ es una solución de $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$ y calcule la solución general en este intervalo.

4. Demuestre que $y = x^2$ es una solución de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$ y calcule la solución general en este intervalo.

5. Demuestre que $y = x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y'' - (2x + x^2)y' + (2 + x)y = 0$ y calcule la solución general de esta ecuación.

6. Demuestre que $y = x^{-1/2}\cos x$ es una solución de la ecuación de Bessel con $v = 1/2$:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

Calcule la solución general de esta ecuación.

Sistemas de primer orden

7. Un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en n funciones desconocidas $y_1, y_2, ..., y_n$ se expresa como

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{aligned}$$

Este sistema se denomina **sistema lineal de primer orden** $n \times n$ y se puede expresar en forma vector-matriz como $\mathbf{y}' = \mathcal{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$, siendo

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Demuestre que la ecuación lineal de segundo orden $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ se puede transformar en un sistema de primer orden 2×2 con $y_1 = y$ e $y_2 = y'$, con

$$\mathscr{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

8. Generalice el Ejercicio 7 para transformar una ecuación lineal de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_0(x)y = f(x)$$

en un sistema de primer orden $n \times n$.

9. Si $\mathscr{A}$ es una matriz constante $n \times n$ y si existe un escalar λ y un vector constante distinto de cero $\mathbf{v}$ para el que $\mathscr{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, demuestre que $\mathbf{y} = C_1e^{\lambda x}\mathbf{v}$ es una solución del sistema homogéneo $\mathbf{y}' = \mathscr{A}\mathbf{y}$.

10. Demuestre que el determinante $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ es cero para dos valores distintos de λ. Para cada uno de estos valores obtenga un vector $\mathbf{v}$ distinto de cero que cumpla la condición $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. A partir de aquí resuelva el sistema

$$y_1' = 2y_1 + y_2, \qquad y_2' = 2y_1 + 3y_2$$

17.5 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial de la forma

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (*)$$

siendo a, b y c constantes y $a \neq 0$ se denomina **ecuación lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes**.

En la Sección 3.7 se puede encontrar un extenso estudio de las técnicas para resolver estas ecuaciones, junto con ejemplos, ejercicios y aplicaciones al estudio del movimiento armónico simple y amortiguado; no repetiremos la presentación aquí. Si no la ha estudiado, por favor hágalo ahora.

Sin embargo, ampliaremos el tratamiento para considerar ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de orden superior.

Ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes

Como en la mayor parte de las aplicaciones de la ecuación (*) la variable dependiente representa al tiempo, consideraremos, como hicimos en la Sección 3.7, y como una función de t en vez de x, de forma que el símbolo ($'$) indicará la derivada d/dt. El resultado básico de la Sección 3.7 era que la función $y = e^{rt}$ era una solución de (*) suponiendo que r cumpliera la **ecuación auxiliar**

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (**)$$

La ecuación auxiliar es de segundo grado y puede tener:

(a) Dos raíces reales distintas, r_1 y r_2 (si $b^2 > 4ac$), en cuyo caso (*) tiene como solución general $y = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$.
(b) Una única raíz real repetida r (si $b^2 = 4ac$), en cuyo caso (*) tiene como solución general $y = (C_1 + C_2t)e^{rt}$.
(c) Una pareja de raíces complejas conjugadas, $r = k \pm i\omega$, con k y ω reales (si $b^2 < 4ac$), en cuyo caso (*) tiene como solución general $y = e^{kt}(C_1\cos(\omega t) + C_2\operatorname{sen}(\omega t))$.

La situación es análoga para el caso de ecuaciones lineales y homogéneas con coeficientes constantes. Describiremos el procedimiento sin proporcionar las demostraciones. Si

$$P_n(r) = a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_2r^2 + a_1r + a_0$$

es un polinomio de grado n con coeficientes constantes a_j, $(0 \leqslant j \leqslant n)$, y $a_n \neq 0$, entonces la ED

$$P_n(D)y = 0 \qquad (\dagger)$$

donde $D = d/dt$ se puede resolver sustituyendo $y = e^{rt}$ y obteniendo la *ecuación auxiliar* $P_n(r) = 0$. Esta ecuación polinómica tiene n raíces (*véase* el Apéndice II), algunas de las cuales pueden ser iguales y algunas de las cuales, o bien todas, pueden ser complejas. Si los coeficientes del polinomio $P_n(r)$ son todos reales, entonces las raíces complejas deben aparecer en parejas complejas conjugadas $k \pm i\omega$, siendo k y ω reales.

La solución general de (†) se puede expresar como una *combinación lineal* de n soluciones particulares independientes

$$y = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + \cdots + C_ny_n(t)$$

siendo C_j constantes arbitrarias. Las soluciones independientes y_1, y_2, ..., y_n se construyen como sigue:

1. Si r_1 es una raíz real de orden k de la ecuación auxiliar (es decir, si $(r - r_1)^k$ es un factor de $P_n(r)$), entonces

$$e^{r_1t}, \quad te^{r_1t}, \quad t^2e^{r_1t}, \quad ..., \quad t^{k-1}e^{r_1t}$$

son k soluciones independientes de (†).

2. Si $r = a + ib$ y $r = a - ib$ (siendo a y b reales) constituyen una pareja de raíces complejas conjugadas de orden k de la ecuación auxiliar (es decir, si $[(r - a)^2 + b^2]^k$ es un factor de $P_n(r)$), entonces

$$e^{at}\cos bt, \quad te^{at}\cos bt, \quad ..., \quad t^{k-1}e^{at}\cos bt$$
$$e^{at}\,\mathrm{sen}\, bt, \quad te^{at}\,\mathrm{sen}\, bt, \quad ..., \quad t^{k-1}e^{at}\,\mathrm{sen}\, bt$$

son $2k$ soluciones independientes de (†).

Ejemplo 1 Resuelva (a) $y^{(4)} - 16y = 0$ y (b) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} = 0$.

Solución La ecuación auxiliar de (a) es $r^4 - 16 = 0$, que se puede factorizar como $(r-2)(r+2)(r^2+4) = 0$, y, por tanto, sus raíces son $r = 2$, -2, $2i$ y $-2i$. Por tanto, la ED (a) tiene como solución general

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3\cos(2t) + C_4\,\mathrm{sen}\,(2t)$$

para constantes arbitrarias C_1, C_2, C_3 y C_4.

La ecuación auxiliar de (b) es $r^5 - 2r^4 + r^3$, que se puede factorizar como $r^3(r-1)^2 = 0$, y, por tanto, sus raíces son $r = 0, 0, 0, 1, 1$. La solución general de la ED (b) es

$$y = C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4e^t + C_5te^t$$

siendo C_1, ..., C_5 constantes arbitrarias. ■

Ejemplo 2 Indique el orden y la solución general de la ED homogénea lineal con coeficientes constantes cuya ecuación auxiliar es

$$(r + 4)^3(r^2 + 4r + 13)^2 = 0$$

Solución La ecuación auxiliar es de grado 7, por lo que la ED es de séptimo orden. Puesto que $r^2 + 4r + 13 = (r + 2)^2 + 9$, cuyas raíces son $-2 \pm 3i$, la ED debe tener la solución general

$$\begin{aligned} y = {} & C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t} + C_3t^2e^{-4t} \\ & + C_4e^{-2t}\cos(3t) + C_5e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,(3t) + C_6te^{-2t}\cos(3t) + C_7te^{-2t}\,\mathrm{sen}\,(3t) \end{aligned}$$

■

Ecuaciones de Euler (equidimensionales)

Una ecuación lineal homogénea de la forma

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

se denomina **ecuación de Euler** o **ecuación equidimensional**, siendo este último término apropiado debido a que todos los términos de la ecuación tienen la misma dimensión (es decir, se miden en las mismas unidades), suponiendo que las constantes a, b y c tienen la misma dimensión. Los coeficientes de una ecuación de Euler *no son constantes*, pero existe una técnica para resolver estas ecuaciones que es similar a la utilizada para resolver ecuaciones con coeficientes constantes, por lo que incluiremos una breve presentación de estas ecuaciones en esta sección. Como en el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, supondremos que las constantes a, b y c son números reales y que $a \neq 0$. Incluso así, el coeficiente de orden superior, ax^2, se anula en $x = 0$ (que se denomina **punto singular** de la ecuación), y esto puede hacer que las soluciones no estén definidas en $x = 0$. Resolveremos la ecuación en el intervalo $x > 0$; se puede aplicar la misma solución para $x < 0$, suponiendo que se sustituye x por $|x|$ en dicha solución.

Busquemos soluciones en $x > 0$ dadas por potencias de x; si

$$y = x^r, \qquad \frac{dy}{dx} = rx^{r-1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$$

entonces la ecuación de Euler se convierte en

$$(ar(r-1) + br + c)x^r = 0$$

Esto se cumple para todo $x > 0$ siempre que r cumpla la **ecuación auxiliar**

$$ar(r-1) + br + c = 0 \quad \text{o, en otros términos,} \quad ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

Como en el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, existen tres posibilidades.

CASO I Si $(b-a)^2 \geqslant 4ac$, entonces la ecuación auxiliar tiene dos raíces reales:

$$r_1 = \frac{a - b + \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{a - b - \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso, la ecuación de Euler tiene la solución general

$$y = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2}, \qquad (x > 0)$$

La solución general normalmente se expresa en la forma

$$y = C_1|x|^{r_1} + C_2|x|^{r_2}$$

que es válida en cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$, y puede incluso ser válida en intervalos que contengan al origen si, por ejemplo, r_1 y r_2 son enteros no negativos.

Ejemplo 3 Resuelva el problema de valor inicial

$$2x^2y'' - xy' - 2y = 0, \qquad y(1) = 5, \qquad y'(1) = 0$$

Solución La ecuación auxiliar es $2r(r-1) - r - 2 = 0$, es decir, $2r^2 - 3r - 2 = 0$ o $(r-2)(2r+1) = 0$, y tiene raíces $r = 2$ y $r = -(1/2)$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial (válida para $x > 0$) es

$$y = C_1x^2 + C_2x^{-1/2}$$

Las condiciones iniciales implican que

$$5 = y(1) = C_1 + C_2 \quad \text{y} \quad 0 = y'(1) = 2C_1 - \frac{1}{2}C_2$$

Por tanto, $C_1 = 1$ y $C_2 = 4$, y la solución del problema de valor inicial es

$$y = x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}, \qquad (x > 0)$$

■

CASO II Si $(b - a)^2 = 4ac$, entonces la ecuación auxiliar tiene una raíz doble, esto es, la raíz $r = (a - b)/2a$. Se deja como ejercicio para el lector verificar que en este caso la transformación $y = x^r v(x)$ lleva a la solución general

$$y = C_1 x^r + C_2 x^r \ln x, \qquad (x > 0)$$

o, de forma más general,

$$y = C_1|x|^r + C_2|x|^r \ln|x|, \qquad (x \neq 0)$$

CASO III Si $(b - a)^2 < 4ac$, entonces la ecuación auxiliar tiene raíces complejas conjugadas:

$$r = \alpha \pm i\beta, \qquad \text{siendo} \quad \alpha = \frac{a - b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - (b - a)^2}}{2a}$$

Las correspondientes potencias x^r se pueden expresar en forma real de manera similar a la utilizada en el caso de ecuaciones con coeficientes constantes; tenemos

$$\begin{aligned} x^{\alpha \pm i\beta} = e^{(\alpha \pm i\beta)\ln x} &= e^{\alpha \ln x}[\cos(\beta \ln x) \pm i \operatorname{sen}(\beta \ln x)] \\ &= x^\alpha \cos(\beta \ln x) \pm i x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x) \end{aligned}$$

De acuerdo con esto, la ecuación de Euler tiene la solución general

$$y = C_1|x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|) + C_2|x|^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln|x|)$$

Ejemplo 4 Resuelva la ED $x^2y'' - 3xy' + 13y = 0$.

Solución La ED tiene como ecuación auxiliar $r(r - 1) - 3r + 13 = 0$, es decir, $r^2 - 4r + 13 = 0$, cuyas raíces son $r = 2 \pm 3i$. Por tanto, la ED tiene la solución general

$$y = C_1 x^2 \cos(3\ln|x|) + C_2 x^2 \operatorname{sen}(3\ln|x|)$$

■

Ejercicios 17.5

Los ejercicios relacionados con la solución de ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes y homogéneas se pueden encontrar al final de la Sección 3.7.

Calcule soluciones generales de las ecuaciones diferenciales de los Ejercicios 1-4.

1. $y''' - 4y'' + 3y' = 0$

2. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

3. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

4. $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 6y'' + 4y' + y = 0$

5. Demuestre que $y = e^{2t}$ es una solución de

$$y''' - 2y' - 4y = 0$$

donde $'$ indica d/dt, y obtenga la solución general de esta ED.

6. Exprese la solución general de la ED lineal con coeficientes constantes cuya ecuación auxiliar es $(r^2 - r - 2)^2(r^2 - 4)^2 = 0$.

Calcule soluciones generales a las ecuaciones de Euler de los Ejercicios 7-12.

7. $x^2y'' - xy' + y = 0$

8. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$

9. $x^2y'' + xy' - y = 0$

10. $x^2y'' - xy' + 5y = 0$

11. $x^2y'' + xy' = 0$

12. $x^2y'' + xy' + y = 0$

***13.** Resuelva la ED $x^3y''' + xy' - y = 0$ en el intervalo $x > 0$.

17.6 Ecuaciones lineales no homogéneas

Consideraremos ahora el problema de resolver la ecuación diferencial de segundo orden no homogénea

$$a_2(x)\,\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \qquad (*)$$

Supondremos que se conocen dos soluciones independientes $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente

$$a_2(x)\,\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

La función $y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, que es la solución general de la ecuación homogénea, se denomina **función complementaria** de la ecuación no homogénea. El Teorema 2 de la Sección 17.1 sugiere la solución general de la ecuación homogénea de la forma

$$y = y_p(x) + y_h(x) = y_p(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

donde $y_p(x)$ es cualquier **solución particular** de la ecuación no homogénea. Lo único que necesitamos hacer es obtener *una solución* de la ecuación homogénea, y podremos escribir la solución general.

Existen dos métodos habituales para calcular una solución particular y_p de la ecuación no homogénea (*):

1. El método de los coeficientes indeterminados.
2. El método de la variación de parámetros.

El primero de ellos a duras penas se puede llamar un *método*; simplemente realiza una hipótesis sobre la forma de la solución como una suma de términos con coeficientes desconocidos y la sustituye en la ecuación para determinar los coeficientes. Este método funciona bien para ED simples, especialmente aquellas con coeficientes constantes. La naturaleza de la *hipótesis* depende del término no homogéneo $f(x)$, pero puede verse también afectada por la solución de la correspondiente ecuación homogénea. Unos cuantos ejemplos ilustrarán las ideas que intervienen.

Ejemplo 1 Calcule la solución general de $y'' + y' - 2y = 4x$.

Solución Como el término no homogéneo $f(x) = 4x$ es un polinomio de primer grado, «planteamos» que se puede encontrar una solución particular que sea también un polinomio. Por tanto, probamos

$$y = Ax + B, \qquad y' = A, \qquad y'' = 0$$

Sustituyendo estas expresiones en la ED dada obtenemos

$$0 + A - 2(Ax + B) = 4x \quad \text{o}$$

$$-(2A + 4)x + (A - 2B) = 0$$

Esta última ecuación se cumplirá para todo x siempre que $2A + 4 = 0$ y $A - 2B = 0$. Por tanto, se requiere que $A = -2$ y $B = -1$; una solución particular de la ED dada es

$$y_p(x) = -2x - 1$$

Puesto que la correspondiente ecuación homogénea $y'' + y' - 2y = 0$ tiene como función auxiliar $r^2 + r - 2 = 0$ con raíces $r = 1$ y $r = -2$, la ED dada tiene la solución general

$$y = y_p(x) + C_1e^x + C_2e^{-2x} = -2x - 1 + C_1e^x + C_2e^{-2x}$$

■

Ejemplo 2 Calcule soluciones generales de las ecuaciones (donde $'$ indica d/dt)

(a) $y'' + 4y = \operatorname{sen} t$,

(b) $y'' + 4y = \operatorname{sen}(2t)$,

(c) $y'' + 4y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(2t)$.

Solución

(a) Busquemos una solución particular de la forma

$$\begin{aligned} y &= A \operatorname{sen} t + B \cos t \qquad \text{de forma que} \\ y' &= A \cos t - B \operatorname{sen} t \\ y'' &= -A \operatorname{sen} t - B \cos t \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ED $y'' + 4y = \operatorname{sen} t$, obtenemos

$$-A \operatorname{sen} t - B \cos t + 4A \operatorname{sen} t + 4B \cos t = \operatorname{sen} t$$

que se cumple para todo x si $3A = 1$ y $3B = 0$. Por tanto, $A = 1/3$ y $B = 0$. Como la ecuación homogénea $y'' + 4y = 0$ tiene la solución general $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$, la ecuación no homogénea dada tiene la solución general

$$y = \frac{1}{3} \operatorname{sen} t + C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$$

(b) Motivados por nuestro éxito en el apartado (a), podríamos estar tentados de intentar una solución particular de la forma $y = A \operatorname{sen}(2t) + B \cos(2t)$, pero esto no funciona, porque esta función es una solución de la ecuación homogénea, por lo que obtendríamos $y'' + 4y = 0$ para todo valor de A y B. En este caso es útil probar

$$y = At \operatorname{sen}(2t) + Bt \cos(2t)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} y' &= A \operatorname{sen}(2t) + 2At \cos(2t) + B \cos(2t) - 2Bt \operatorname{sen}(2t) \\ &= (A - 2Bt) \operatorname{sen}(2t) + (B + 2At) \cos(2t) \\ y'' &= -2B \operatorname{sen}(2t) + 2(A - 2Bt) \cos(2t) + 2A \cos(2t) \\ &\quad - 2(B + 2At) \operatorname{sen}(2t) \\ &= -4(B + At) \operatorname{sen}(2t) + 4(A - Bt) \cos(2t) \end{aligned}$$

Sustituyendo en $y'' + 4y = \operatorname{sen}(2t)$ llegamos a

$$\begin{aligned} -4(B + At) \operatorname{sen}(2t) + 4(A - Bt) \cos(2t) + 4At \operatorname{sen}(2t) + 4Bt \cos(2t) \\ = \operatorname{sen}(2t) \end{aligned}$$

Obsérvese que los términos en los que aparece $t \operatorname{sen}(2t)$ y $t \cos(2t)$ se cancelan, y nos queda

$$-4B \operatorname{sen}(2t) + 4A \cos(2t) = \operatorname{sen}(2t)$$

que se cumple para todo x si $A = 0$ y $B = -1/4$. Por tanto, la solución general del apartado (b) es

$$y = -\frac{1}{4} t \cos(2t) + C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$$

(c) Como la ecuación homogénea es la misma en los apartados (a), (b) y (c), y el término no homogéneo de la ecuación (c) es la suma de los términos no homogéneos de las ecuaciones (a) y (b), la suma de soluciones particulares de (a) y (b) es una solución particular de (c) (esto es porque la ecuación es *lineal*). Por consiguiente, la solución general de la ecuación (c) es

$$y = \frac{1}{3} \operatorname{sen} t - \frac{1}{4} t \cos(2t) + C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$$

■

Resumimos a continuación las formas apropiadas de probar soluciones particulares de ecuaciones con coeficientes constantes:

Soluciones de prueba para ecuaciones con coeficientes constantes

Sean $A_n(x)$, $B_n(x)$ y $P_n(x)$ los polinomios de grado n

$$A_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
$$B_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$
$$P_n(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$$

Para obtener una solución particular $y_p(x)$ de la ED de segundo orden lineal con coeficientes constantes y no homogénea

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

se utilizan las siguientes formas:

Si $f(x) = P_n(x)$, intente $y_p = x^m A_n(x)$.
Si $f(x) = P_n(x)e^{rx}$, intente $y_p = x^m A_n(x)e^{rx}$.
Si $f(x) = P_n(x)e^{rx}\cos(kx)$, intente $y_p = x^m e^{rx}[A_n(x)\cos(kx) + B_n(x)\,\text{sen}\,(kx)]$.
Si $f(x) = P_n(x)e^{rx}\,\text{sen}\,(kx)$, intente $y_p = x^m e^{rx}[A_n(x)\cos(kx) + B_n(x)\,\text{sen}\,(kx)]$,

siendo m el mínimo de los enteros 0, 1 y 2, que asegura que ningún término de y_p es una solución de la correspondiente ecuación homogénea

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

Resonancia

Para $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, la solución $y_\lambda(t)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y = \text{sen}\,(\lambda t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

se puede determinar buscando en primer lugar una solución particular de la ED con la forma $y = A\,\text{sen}\,(\lambda t)$, y después sumando la función complementaria $y = B\cos t + C\,\text{sen}\,t$. Los cálculos producen $A = 1/(1-\lambda^2)$, $B = 0$, $C = (1-\lambda-\lambda^2)/(1-\lambda^2)$, por lo que

$$y_\lambda(t) = \frac{\text{sen}\,(\lambda t) + (1-\lambda-\lambda^2)\,\text{sen}\,t}{1-\lambda^2}$$

Para $\lambda = 1$ el término no homogéneo de la ED es una solución de la ecuación homogénea $y'' + y = 0$, por lo que debemos probar una solución particular de la forma $y = At\cos t + Bt\,\text{sen}\,t$. En este caso, la solución del problema de valor inicial es

$$y_1(t) = \frac{3\,\text{sen}\,t - t\cos t}{2}$$

Esta solución también se puede obtener calculando $\lim_{\lambda\to 1} y_\lambda(t)$ mediante la Regla de l'Hôpital. Obsérvese que esta solución es no acotada; la amplitud de las oscilaciones se hace cada vez mayor cuando t crece. Por el contrario, las soluciones $y_\lambda(t)$ para $\lambda \neq 1$ están acotadas para todo t,

aunque pueden ser muy grandes para algunos valores de t si λ está cerca de 1. La Figura 17.4 muestra las gráficas de las soluciones $y_{0.9}(t)$, $y_{0.95}(t)$ e $y_1(t)$ en el intervalo $-10 \leqslant t \leqslant 100$.

El fenómeno que se ilustra aquí se denomina **resonancia**. Los sistemas mecánicos vibrantes tienen frecuencias naturales de vibración. Si intentamos forzarlos para que vibren a frecuencias diferentes, la amplitud de las vibraciones variará sinusoidalmente con el tiempo produciendo un efecto que se denomina **batidos**. Las amplitud de los batidos puede llegar a ser muy grande, y el periodo de los batidos crece a medida que las frecuencias a las que se fuerza la vibración se acercan a la frecuencia natural del sistema. Si el sistema no tiene atenuación resistiva (el ilustrado aquí no la tiene), entonces las vibraciones forzadas a la frecuencia natural harán que el sistema vibre con amplitudes siempre crecientes.

Por poner un ejemplo concreto, si empujamos a un niño en un columpio, se elevará cada vez más si empujamos con una frecuencia igual a la frecuencia natural del columpio. La resonancia se utiliza en el diseño de los circuitos de sintonía de las radios; el circuito se sintoniza (generalmente mediante un condensador variable) de forma que su frecuencia natural de oscilación sea la frecuencia de la estación que se está sintonizando. El circuito responde entonces mucho más fuertemente a la señal recibida de esa estación que a otras señales en diferentes frecuencias.

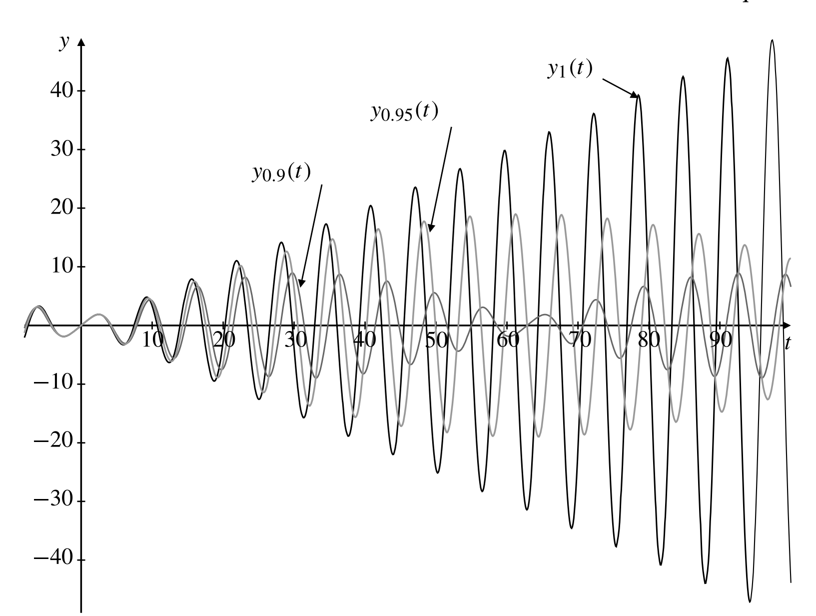


Figura 17.4 Resonancia.

Variación de parámetros

Un método más formal para calcular una solución particular $y_p(x)$ de una ecuación no homogénea cuando conocemos dos soluciones independientes, $y_1(x)$ y $y_2(x)$, de la ecuación homogénea es sustituir las constantes en la función complementaria por funciones, es decir, buscar y_p de la forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

Al requerir que y_p cumpla la ED no homogénea dada se obtiene una ecuación que debe ser satisfecha por las dos funciones desconocidas u_1 y u_2. Somos libres de requerir que cumplan también una segunda ecuación. Para simplificar los cálculos posteriores, escogeremos esta segunda ecuación como

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0$$

Ahora tenemos

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' = u_1y_1' + u_2y_2'$$
$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$

Sustituyendo estas expresiones en la ED dada obtenemos

$$a_2(u_1'y_1' + u_2'y_2') + u_1(a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1) + u_2(a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2)$$
$$= a_2(u_1'y_1' + u_2'y_2') = f(x)$$

dado que y_1 e y_2 cumplen la ecuación homogénea. Por tanto, u_1' y u_2' cumplen la pareja de ecuaciones

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0$$
$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)}$$

Podemos resolver estas dos ecuaciones obteniendo las funciones desconocidas u_1' y u_2' aplicando la Regla de Cramer (Teorema 5 de la Sección 10.6), o de cualquier otra forma, para obtener

$$u_1' = -\frac{y_2(x)}{W(x)}\frac{f(x)}{a_2(x)}, \qquad u_2' = \frac{y_1(x)}{W(x)}\frac{f(x)}{a_2(x)}$$

donde $W(x)$, denominado **wronskiano** de y_1 e y_2, es el determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Entonces, u_1 y u_2 se pueden obtener por integración.

Ejemplo 3 Calcule la solución general de $y'' - 3y' + 2y = 4x$.

Solución Resolvemos primero la ecuación homogénea $y'' - 3y' + 2y = 0$, cuya ecuación auxiliar es $r^2 - 3r + 2 = 0$, con raíces $r = 1$ y $r = 2$. Por tanto, $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{2x}$ son dos soluciones independientes de la ecuación homogénea, y la función complementaria es

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

Se puede encontrar una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación no homogénea de la forma

$$y_p = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{2x}$$

donde u_1 y u_2 cumplen

$$u_1'e^x + 2u_2'e^{2x} = 4x$$
$$u_1'e^x + u_2'e^{2x} = 0$$

Resolvemos estas ecuaciones lineales obteniendo u_1' y u_2' y después integramos, con lo que resulta

$$u_1' = -4xe^{-x} \qquad u_2' = 4xe^{-2x}$$
$$u_1 = 4(x+1)e^{-x} \qquad u_2 = -(2x+1)e^{-2x}$$

Entonces, $y_p = 4x + 4 - (2x + 1) = 2x + 3$ es una solución particular de la ecuación no homogénea, y la solución general es

$$y = 2x + 3 + C_1e^x + C_2e^{2x}$$

■

Observación Este método para resolver la ecuación no homogénea se denomina **método de variación de parámetros**. Es completamente general y se aplica a ecuaciones de orden superior en la forma razonable, pero es algo difícil computacionalmente hablando. Podríamos haber obtenido y_p de forma más fácil si hubiéramos «adivinado» que sería de la forma $y_p = Ax + B$, y sustituido entonces en la ecuación diferencial para obtener

$$-3A + 2(Ax + B) = 4x$$
$$\text{o} \qquad 2Ax + (2B - 3A) = 4x$$

La única forma en la que esta última ecuación se puede cumplir para todo x es que $2A = 4$ y $2B - 3A = 0$, es decir, $A = 2$ y $B = 3$.

Cálculos con Maple

Maple dispone de una rutina `dsolve` para resolver (algunas) ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial. Esta rutina toma una ED como entrada y, si se desea, condiciones iniciales para la misma. Ilustraremos el procedimiento para la ecuación $y'' + 2y' + 5y = 25t + 20$ (suponiendo que la variable independiente es t):

```
> DE := (D@@2)(y)(t)+2*D(y)(t)+5*y(t)=25*t+20;
```

$$DE := D^{(2)}(y)(t) + 2D(y)(t) + 5y(t) = 25t + 20$$

```
> dsolve(DE, y(t));
```

$$y(t) = e^{(-t)}\operatorname{sen}(2t)_C2 + e^{(-t)}\cos(2t)_C1 + 2 + 5t$$

Nótese el uso que hace Maple de $_C1$ y $_C2$ para indicar constantes arbitrarias. En el caso de un problema de valor inicial suministraremos a `dsolve` la ED y sus condiciones iniciales en forma de una lista de argumentos encerrados entre corchetes o llaves:

```
> dsolve([DE, y(0)=3, D(y)(0)=-2], y(t));
```

$$y(t) = -3e^{(-t)}\operatorname{sen}(2t) + e^{(-t)}\cos(2t) + 2 + 5t$$

Podríamos pensar que esta salida indica que y ha sido definida como función de t de forma que se puede tener un valor, por ejemplo para $y(1)$, proporcionando la entrada `evalf(y(1))`. Pero esto no funciona. De hecho, la salida de `dsolve` es simplemente una ecuación tal que su miembro izquierdo es el símbolo $y(t)$. Podemos, sin embargo, utilizar esta salida para definir y como función de t como sigue:

```
> y := unapply(op(2, %), t);
```

$$y := t \to -3e^{(-t)}\operatorname{sen}(2t) + e^{(-t)}\cos(2t) + 2 + 5t$$

`op(2,%)` en el comando `unapply` se refiere al segundo operando del resultado anterior (es decir, el miembro derecho de la ecuación de salida de `dsolve`). `unapply(f, t)` convierte una expresión `f` en una función de t. Para confirmar:

```
> evalf(y(1));
```

$$5.843372646$$

Ejercicios 17.6

Calcule soluciones generales de las ecuaciones no homogéneas de los Ejercicios 1-12 por el método de los coeficientes indeterminados.

1. $y'' + y' - 2y = 1$

2. $y'' + y' - 2y = x$

3. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$

4. $y'' + y' - 2y = e^{x}$

5. $y'' + 2y' + 5y = x^2$

6. $y'' + 4y = x^2$

7. $y'' - y' - 6y = e^{-2x}$

8. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

9. $y'' + 2y' + 2y = e^{x}\operatorname{sen} x$

10. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\operatorname{sen} x$

11. $y'' + y' = 4 + 2x + e^{-x}$

12. $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$

13. Repita el Ejercicio 3 utilizando el método de variación de parámetros.

14. Repita el Ejercicio 4 utilizando el método de variación de parámetros.

15. Obtenga una solución particular de la forma $y = Ax^2$ de la ecuación de Euler $x^2y'' + xy' - y = x^2$, y calcule a partir de aquí la solución general de esta ecuación en el intervalo $(0, \infty)$.

16. ¿Para qué valores de r se puede resolver la ecuación de Euler $x^2y'' + xy' - y = x^r$ por el método del

Ejercicio 15? Obtenga una solución particular para cada uno de esos valores de r.

17. Intente plantear la forma de una solución particular de $x^2y'' + xy' - y = x$, y a partir de aquí obtener la solución general de esta ecuación en el intervalo $(0, \infty)$.

18. Utilice el método de variación de parámetros para resolver $x^2y'' + xy' - y = x$.

19. Considere la ecuación lineal no homogénea

$$x^2y'' - (2x + x^2)y' + (2 + x)y = x^3$$

Utilice el hecho de que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = xe^x$ son soluciones independientes de la correspondiente ecuación homogénea (*véase* el Ejercicio 5 de la Sección 17.4) para obtener la solución general de esta ecuación no homogénea.

20. Considere la ecuación de Bessel no homogénea

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}$$

Utilice el hecho de que $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ e $y_2(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ son soluciones independientes de la correspondiente ecuación homogénea (*véase* el Ejercicio 6 de la Sección 17.4) para obtener la solución general de esta ecuación no homogénea.

17.7 Soluciones de ecuaciones diferenciales basadas en series

En la Sección 17.5 presentamos un procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes y homogéneas:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

y ecuaciones de Euler de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

Muchas de las ecuaciones diferenciales homogéneas lineales y de segundo orden que surgen en las aplicaciones no tienen coeficientes constantes, y no son del tipo de Euler. Si las funciones coeficiente de dichas ecuaciones son suficientemente bien comportadas, a menudo se pueden obtener soluciones en forma de series de potencias (series de Taylor). Estas series solución se utilizan frecuentemente para definir nuevas funciones, cuyas propiedades se deducen parcialmente del hecho de que son la solución de ecuaciones diferenciales particulares. Por ejemplo, las funciones de Bessel de orden v se definen como ciertas soluciones basadas en series de la ecuación diferencial de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

Las soluciones basadas en series de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas se obtienen más fácilmente cerca de un **punto ordinario** de la ecuación. Un punto ordinario es un punto $x = a$ tal que la ecuación se puede expresar en la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

donde las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son **analíticas** en $x = a$ (recuérdese que una función f es analítica en $x = a$ si $f(x)$ se puede expresar como la suma de su desarrollo de Taylor en serie de potencias de $x - a$ en un intervalo de radio positivo centrado en $x = a$). Por tanto, asumimos

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - a)^n$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - a)^n$$

donde ambas series convergen en algún intervalo de la forma $a - R < x < a + R$. Frecuentemente $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y, por tanto, son funciones analíticas en todas partes. Un cambio de la variable independiente $\xi = x - a$ situará el punto $x = a$ en el origen $\xi = 0$, por lo que podemos asumir que $a = 0$.

El siguiente ejemplo ilustra la técnica de solución basada en series alrededor de un punto ordinario.

Ejemplo 1 Calcule dos soluciones independientes basadas en series de potencias de x para la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + \nu y = 0$$

¿Para qué valores de ν tiene la ecuación una solución polinómica?

Solución Probamos una solución en forma de series de potencias como

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \text{ de forma que}$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Hemos sustituido n por $n + 2$ para obtener x^n en la suma de y''. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + \nu a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - (2n - \nu) a_n] x^n = 0$$

Esta identidad se cumple para todo x suponiendo que los coeficientes de todas las potencias de x se anulan; es decir,

$$a_2 = -\frac{\nu a_0}{2}, \qquad a_{n+2} = \frac{(2n - \nu) a_n}{(n+2)(n+1)}, \qquad (n = 1, 2, ...)$$

La última de estas fórmulas se denomina **relación de recurrencia**.

Podemos escoger cualquier valor para a_0 y a_1; después, las condiciones iniciales determinarán todos los coeficientes restantes con a_n, ($n \geqslant 2$). Podemos encontrar una solución escogiendo, por ejemplo, $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$. Entonces, por la relación de recurrencia,

$$a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_7 = 0, \quad ..., \quad \text{y}$$

$$a_2 = -\frac{\nu}{2}$$

$$a_4 = \frac{(4 - \nu) a_2}{4 \times 3} = -\frac{\nu(4 - \nu)}{2 \times 3 \times 4} = -\frac{\nu(4 - \nu)}{4!}$$

$$a_6 = \frac{(8 - \nu) a_4}{6 \times 5} = -\frac{\nu(4 - \nu)(8 - \nu)}{6!}$$

$$\cdots$$

El patrón resulta obvio:

$$a_{2n} = -\frac{\nu(4 - \nu)(8 - \nu) \cdots (4n - 4 - \nu)}{(2n)!}, \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Una solución de la ecuación de Hermite es

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\nu(4 - \nu)(8 - \nu) \cdots (4n - 4 - \nu)}{(2n)!} x^{2n}$$

Observamos que si $\nu = 4n$ para algún entero no negativo n, entonces y_1 es un polinomio par de grado $2n$, porque $a_{2n+2} = 0$ y todos los coeficientes pares posteriores por tanto también se anulan.

La segunda solución, y_2, se puede obtener de la misma forma, escogiendo $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Es

$$y_2 = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 - \nu)(6 - \nu) \cdots (4n - 2 - \nu)}{(2n + 1)!} x^{2n+1}$$

y es un polinomio impar de grado $2n + 1$ si $\nu = 4n + 2$.

Ambas soluciones basadas en series convergen para todo x. El test de la razón se puede aplicar directamente a la relación de recurrencia. Como los términos consecutivos distintos de cero de cada serie tienen la forma $a_n x^n$ y $a_{n+2}x^{n+2}$, podemos calcular

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n} \right| = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n - \nu}{(n + 2)(n + 1)} \right| = 0$$

para todo x, de forma que la serie converge por el test de la razón. ■

Si $x = a$ no es un punto ordinario de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

entonces se denomina **punto singular** de dicha ecuación. Esto significa que al menos una de las funciones $p(x)$ y $q(x)$ no es analítica en $x = a$. Sin embargo, si $(x - a)p(x)$ y $(x - a)^2 q(x)$ son analíticas en $x = a$, entonces se dice que el punto singular es un **punto singular regular**. Por ejemplo, el origen $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación de Bessel,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

ya que $p(x) = 1/x$ y $q(x) = (x^2 - \nu^2)/x^2$ satisfacen $xp(x) = 1$ y $x^2 q(x) = x^2 - \nu^2$, que son ambas polinomios y por tanto analíticas.

Las soluciones de ecuaciones diferenciales son en general no analíticas en puntos singulares. Sin embargo, es todavía posible calcular al menos una solución basada en series alrededor de esos puntos. El método requiere buscar una solución basada en series de la forma x^μ multiplicada por una serie de potencias, es decir,

$$y = (x - a)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^{n+\mu}, \qquad \text{con } a_0 \neq 0$$

La sustitución en la ecuación diferencial produce una **ecuación indicial** cuadrática, que determina uno o dos valores de μ donde se pueden obtener estas soluciones, y una **relación de recurrencia** que permite el cálculo de los coeficientes a_n para $n \geqslant 1$. Si las raíces indiciales no son iguales y su diferencia no es un entero, se pueden calcular dos soluciones independientes. Si las raíces indiciales son iguales o difieren en un entero, se puede calcular una solución de este tipo (correspondiente a la raíz indicial mayor), pero el cálculo de una segunda solución independiente (y, por tanto, de la solución general) requiere técnicas que se salen del alcance de este libro. Se remite al lector a textos estándar en ecuaciones diferenciales para una presentación más amplia y ejemplos. Nos contentaremos aquí con un ejemplo final.

Ejemplo 2 Calcule una solución, en potencias de x, de la ecuación de Bessel de orden $\nu = 1$, concretamente,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

Solución Probamos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\mu+n}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu + n) a_n x^{\mu+n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu + n)(\mu + n - 1) a_n x^{\mu+n-2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Bessel se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} [((\mu + n)(\mu + n - 1) + (\mu + n) - 1)a_n x^n + a_n x^{n+2}] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(\mu + n)^2 - 1]a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

$$(\mu^2 - 1)a_0 + ((\mu + 1)^2 - 1)a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [((\mu + n)^2 - 1)a_n + a_{n-2}]x^n = 0$$

Todos los términos deben anularse. Como $a_0 \neq 0$ (podemos tomar $a_0 = 1$), obtenemos

$$\mu^2 - 1 = 0, \qquad \text{ecuación indicial}$$

$$[(\mu + 1)^2 - 1]a_1 = 0,$$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(\mu + n)^2 - 1}, \quad (n \geqslant 2) \quad \text{relación de recurrencia}$$

Evidentemente, $\mu = \pm 1$; por lo tanto, $a_1 = 0$. Si tomamos $\mu = 1$, entonces la relación de recurrencia es $a_n = -a_{n-2}/(n)(n + 2)$. Entonces,

$$a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_7 = 0, \quad \cdots$$

$$a_2 = \frac{-1}{2 \times 4}, \quad a_4 = \frac{1}{2 \times 4 \times 4 \times 6}, \quad a_6 = \frac{-1}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8}, \quad \cdots$$

De nuevo el patrón es obvio:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n + 1)!}$$

y una solución de la ecuación de Bessel de orden 1 es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n + 1)!} x^{2n+1}$$

Por el test de la razón, esta serie converge para todo x. ■

Observación Obsérvese que si intentáramos calcular una segunda solución utilizando $\mu = -1$ obtendríamos la relación de recurrencia

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n - 2)}$$

y no seríamos capaces de calcular a_2. Esto demuestra lo que puede suceder si las raíces indiciales difieren en un entero.

Ejercicios 17.7

1. Calcule la solución general de $y'' = (x - 1)^2 y$ en forma de una serie de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 1)^n$.
2. Calcule la solución general de $y'' = xy$ en forma de una serie de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con a_0 y a_1 arbitrarios.
3. Resuelva el problema de valor inicial
$$\begin{cases} y'' + xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$
4. Calcule la solución de $y'' + xy' + y = 0$ que cumple $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.
5. Calcule los tres primeros términos distintos de cero de una solución en forma de serie de potencias de x del problema de valor inicial $y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
6. Calcule la solución, en forma de serie de potencias de x, del problema de valor inicial
$$(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$
7. Calcule dos soluciones en forma de serie de potencias de x de la ecuación $3xy'' + 2y' + y = 0$.
8. Calcule una solución en forma de serie de potencias de la ecuación de Bessel de orden $\nu = 0$, es decir, de la ecuación $xy'' + y' + xy = 0$.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes expresiones?**
  - ◇ ED ordinaria
  - ◇ ED en derivadas parciales
  - ◇ Solución general de una ED
  - ◇ Combinación lineal de soluciones de una ED
  - ◇ Orden de una ED
  - ◇ ED lineal
  - ◇ ED separable
  - ◇ ED exacta
  - ◇ Factor de integración
  - ◇ ED de coeficientes constantes
  - ◇ Ecuación de Euler
  - ◇ Ecuación auxiliar
- **Explique cómo resolver:**
  - ◇ Una ED separable
  - ◇ Una ED lineal de primer orden
  - ◇ Una ED de primer orden homogénea
  - ◇ Una ED de coeficientes constantes
  - ◇ Una ecuación de Euler
- **¿Qué condiciones implican que un problema de valor inicial para una ED de primer orden tendrá solución única cerca del punto inicial?**
- **Explique los siguientes métodos de resolución numérica de ED de primer orden:**
  - ◇ El método de Euler
  - ◇ El método de Euler mejorado
  - ◇ El método de Runge-Kutta de cuarto orden
- **Explique los siguientes métodos de resolución de ED lineales homogéneas:**
  - ◇ Coeficientes indeterminados
  - ◇ Variación de parámetros
- **¿Qué son los puntos ordinarios y los puntos singulares regulares en las ED lineales de segundo orden? Explique cómo se pueden utilizar las series para resolver estas ecuaciones cerca de tales puntos.**

Ejercicios de repaso

Calcule las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales de los Ejercicios 1-16.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$

2. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y}\operatorname{sen} x$

3. $\dfrac{dy}{dx} = x + 2y$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{y - x}$

6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y + e^x}{x + e^y}$

7. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$

8. $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$

9. $4y'' - 4y' + 5y = 0$

10. $2x^2y'' + y = 0$

11. $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} - t\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$

12. $\dfrac{d^3y}{dt^3} + 8\dfrac{d^2y}{dt^2} + 16\dfrac{dy}{dt} = 0$

13. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = e^x + e^{3x}$

14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = xe^{2x}$

15. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = x^2$

16. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = x^3$

Resuelva los problemas de valor inicial de los Ejercicios 17-26.

17. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2} \\ y(2) = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2} \\ y(2) = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = 2\cos x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} y'' + 2y' + (1 + \pi^2)y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = \pi \end{cases}$

23. $\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = e^{-5} \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \\ y(e) = e^2 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 8e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} - 3y = 6 + 7e^{x/2} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

27. Indique para qué valores de las constantes A y B es exacta la ecuación

$$[(x+A)e^x \operatorname{sen} y + \cos y]\, dx + x[e^x \cos y + B \operatorname{sen} y]\, dy = 0$$

¿Cuál es la solución general de la ecuación si A y B tienen esos valores?

28. Calcule un valor de n para que x^n sea un factor de integración de

$$(x^2 + 3y^2)\, dx + xy\, dy = 0$$

y resuelva la ecuación.

29. Demuestre que $y = x$ es una solución de

$$x^2 y'' - x(2 + x \cot x)y' + (2 + x \cot x)y = 0$$

y calcule la solución general de la ecuación.

30. Utilice el método de variación de parámetros y el resultado del Ejercicio 29 para calcular la solución general de la ecuación no homogénea

$$x^2 y'' - x(2 + x \cot x)y' + (2 + x \cot x)y = x^3 \operatorname{sen} x$$

31. Suponga que $f(x, y)$ y $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ son continuas en todo el plano xy y que $f(x, y)$ está acotada en dicho plano, es decir, $|f(x, y)| \leqslant K$. Demuestre que ninguna solución de $y' = f(x, y)$ puede tener una asíntota vertical. Describa la región del plano donde debe estar la solución al problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



APÉNDICE I

Números complejos

Old Macdonald had a farm,
Minus E-Squared O

Canción para niños matemáticamente simplificada

Muchos de los problemas a los que se aplica la matemática requieren la solución de ecuaciones. A lo largo de los siglos los sistemas de numeración se han tenido que ampliar muchas veces para proporcionar soluciones a más y más clases de ecuaciones. Los números naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

son inadecuados como soluciones de ecuaciones de la forma

$$x + n = m, \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

Se pueden añadir el cero y los números negativos para crear los enteros

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

donde esa ecuación tiene como solución $x = m - n$ incluso si $m < n$ (históricamente, esta extensión del sistema numérico apareció mucho más tarde que algunas de las que se mencionan posteriormente). Algunas ecuaciones de la forma

$$nx = m, \qquad (m, n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0)$$

no se pueden resolver mediante los enteros. Es necesaria otra extensión para incluir números de la forma m/n, lo que lleva al conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0\right\}$$

Toda ecuación lineal

$$ax = b, \qquad (a, b \in \mathbb{Q}, \quad a \neq 0)$$

tiene una solución $x = b/a$ en $\mathbb{Q}$, pero la ecuación cuadrática

$$x^2 = 2$$

no tiene solución en $\mathbb{Q}$, como se demostró en la Sección P.1. Una nueva extensión enriquece el conjunto de los números racionales para formar el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ en el que algunas ecuaciones como $x^2 = 2$ tienen solución. Sin embargo, otras ecuaciones cuadráticas, por ejemplo,

$$x^2 = -1$$

no tienen solución incluso dentro del conjunto de los números reales, por lo que el proceso de extensión no está completo. Para poder resolver cualquier ecuación cuadrática, necesitamos extender el sistema de los números reales para formar un conjunto mayor que se denomina **sistema de los números complejos**. En este apéndice definiremos los números complejos y desarrollaremos algunas de sus propiedades básicas.

Definición de números complejos

Empezaremos por definir el símbolo i, denominado **unidad imaginaria**[1], que tiene la propiedad

$$i^2 = -1$$

Por tanto, también denominaremos a i **raíz cuadrada de** -1 y lo expresaremos como $\sqrt{-1}$. Por supuesto, i no es un número real; ningún número real tiene un cuadrado negativo.

DEFINICIÓN 1

Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$a + bi \quad \text{o} \quad a + ib$$

siendo a y b *números reales*, e i la unidad imaginaria.

Por ejemplo, $3 + 2i$, $\frac{7}{2} - \frac{2}{3}i$, $i\pi = 0 + i\pi$ y $-3 = -3 + 0i$ son todos números complejos. El último de estos ejemplos muestra que todo número real se puede considerar como un número complejo (utilizaremos normalmente $a + bi$ a menos que b sea una expresión complicada, en cuyo caso escribiremos $a + ib$; cualquier forma es aceptable).

A menudo es conveniente representar un número complejo mediante una única letra; w y z se utilizan frecuentemente para este fin. Si a, b, x e y son números reales, y

$$w = a + bi \quad \text{y} \quad z = x + yi$$

podemos entonces referirnos a los números complejos w y z. Nótese que $w = z$ si y sólo si $a = x$ y $b = y$. Son de especial importancia los números complejos

$$0 = 0 + 0i, \qquad 1 = 1 + 0i \quad \text{y} \quad i = 0 + 1i$$

DEFINICIÓN 2

Si $z = x + yi$ es un número complejo (siendo x e y reales), denominaremos a x **parte real** de z y la indicaremos como $\text{Re}(z)$. Denominaremos a y **parte imaginaria** de z y la indicaremos como $\text{Im}(z)$:

$$\text{Re}(z) = \text{Re}(x + yi) = x, \qquad \text{Im}(z) = \text{Im}(x + yi) = y$$

Nótese que tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales:

$$\text{Re}(3 - 5i) = 3 \qquad \text{Im}(3 - 5i) = -5$$

$$\text{Re}(2i) = \text{Re}(0 + 2i) = 0 \qquad \text{Im}(2i) = \text{Im}(0 + 2i) = 2$$

$$\text{Re}(-7) = \text{Re}(-7 + 0i) = -7 \qquad \text{Im}(-7) = \text{Im}(-7 + 0i) = 0$$

[1] En algunos campos, por ejemplo, la ingeniería eléctrica, la unidad imaginaria se denomina j en vez de i. Como «negativo», o «irracional», el término «imaginario» sugiere el recelo con que se acogía la nueva clase de números que se presentaban por primera vez.

Representación gráfica de números complejos

Como los números complejos se construyen a partir de parejas de números reales (sus partes real e imaginaria), es natural representar gráficamente a los números complejos como puntos en un plano cartesiano. Utilizaremos el punto de coordenadas (a, b) para representar al número complejo $w = a + ib$. En particular, el origen $(0, 0)$ representa al número complejo 0, el punto $(1, 0)$ representa al número complejo $1 = 1 + 0i$ y el punto $(0, 1)$ representa al número complejo $i = 0 + 1i$ (*véase* la Figura I.1).

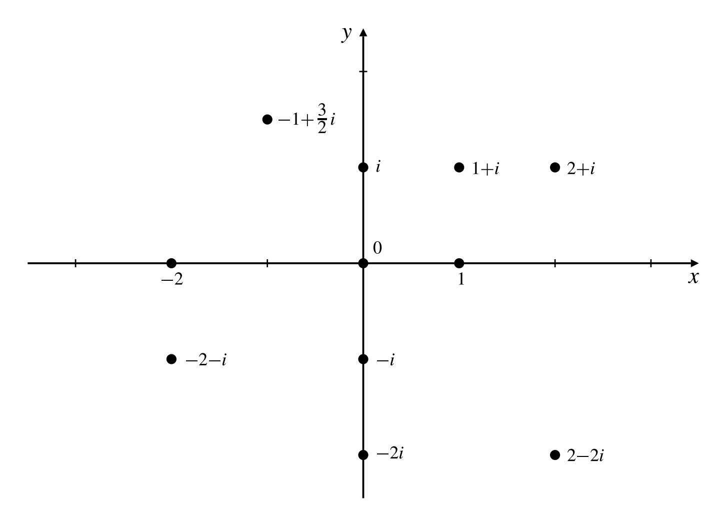


Figura I.1 Un diagrama de Argand que representa el plano complejo.

Esta representación de los números complejos como puntos en un plano se denomina **diagrama de Argand**. Como todo número complejo está representado por un único punto del plano, el conjunto de todos los números complejos se denomina frecuentemente **plano complejo**. El símbolo $\mathbb{C}$ se utiliza para representar al conjunto de todos los números complejos y, de forma equivalente, al plano complejo:

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y, \in \mathbb{R}\}$$

Los puntos del eje x del plano complejo corresponden a los números reales ($x = x + 0i$), por lo que el eje x se denomina **eje real**. Los puntos del eje y corresponden a números **imaginarios puros** ($yi = 0 + yi$), por lo que el eje y se denomina **eje imaginario**.

Puede ser de utilidad emplear las *coordenadas polares* de un punto en el plano complejo.

DEFINICIÓN 3

La distancia desde el origen hasta el punto (a, b) correspondiente al número complejo $w = a + bi$ se denomina **módulo** de w y se escribe $|w|$ o $|a + bi|$:

$$|w| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

DEFINICIÓN 4

Si la recta que va desde el origen hasta (a, b) forma un ángulo θ con la dirección positiva del eje real (midiéndose los ángulos positivos en el sentido contrario al de las agujas del reloj), entonces θ se denomina **fase** del número complejo $w = a + bi$ y se escribe $\arg(w)$ o $\arg(a + bi)$ (*véase* la Figura I.2).

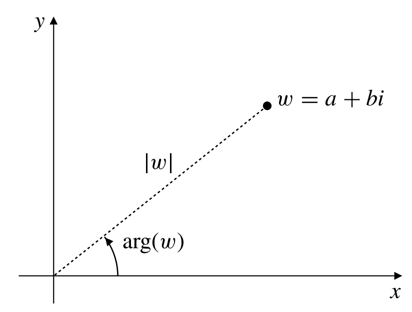


Figura I.2 Módulo y fase de un número complejo.

El módulo de un número complejo es siempre real y no negativo. Es positivo a menos que el número complejo sea 0. El papel que juega el módulo en los números complejos es similar al del valor absoluto en los números reales. De hecho, a veces el módulo se denomina valor absoluto.

Las fases de los números complejos no son únicas. Si $w = a + bi \neq 0$ entonces todos los posibles valores de $\arg(w)$ difieren en un múltiplo entero de 2π. El símbolo $\arg(w)$ no representa realmente un único número, sino un conjunto de números. Cuando escribimos $\arg(w) = \theta$ estamos diciendo que el conjunto $\arg(w)$ contiene a todos los números de la forma $\theta + 2k\pi$, siendo k un entero. De forma similar, la afirmación $\arg(z) = \arg(w)$ dice que los dos conjuntos son idénticos.

Si $w = a + bi$, con $a = \mathrm{Re}(w) \neq 0$, entonces

$$\tan \arg(w) = \tan \arg(a + bi) = \frac{b}{a}$$

Esto significa que $\tan\theta = b/a$ para todo θ en el conjunto $\arg(w)$.

Algunas veces es conveniente restringir $\theta = \arg(w)$ a un intervalo de amplitud 2π, es decir, al intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$ o $-\pi < \theta \leqslant \pi$, de forma que los números complejos distintos de cero tendrán fases únicas. Denominaremos al valor de $\arg(w)$ en el intervalo $-\pi < \theta \leqslant \pi$ **fase principal** de w y lo escribiremos $\mathrm{Arg}(w)$. Todo número complejo w excepto el cero tiene una fase principal única $\mathrm{Arg}(w)$.

Ejemplo 1 **(Algunos módulos y fases principales)** *Véase* la Figura I.3.

$|2| = 2$ $\qquad$ $\mathrm{Arg}(2) = 0$

$|1 + i| = \sqrt{2}$ $\qquad$ $\mathrm{Arg}(1 + i) = \pi/4$

$|i| = 1$ $\qquad$ $\mathrm{Arg}(i) = \pi/2$

$|-2i| = 2$ $\qquad$ $\mathrm{Arg}(-2i) = -\pi/2$

$|-\sqrt{3} + i| = 2$ $\qquad$ $\mathrm{Arg}(-\sqrt{3} + i) = 5\pi/6$

$|-1 - 2i| = \sqrt{5}$ $\qquad$ $\mathrm{Arg}(-1 - 2i) = -\pi + \tan^{-1}(2)$

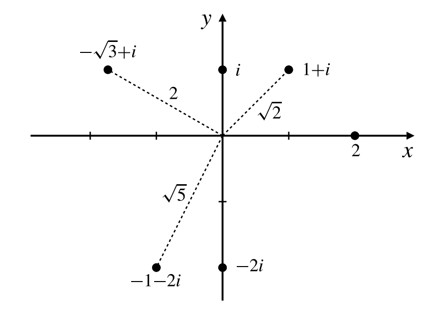


Figura I.3 Algunos números complejos con sus módulos.

Observación Si $z = x + yi$ y $\mathrm{Re}\,(z) = x > 0$, entonces $\mathrm{Arg}\,(z) = \tan^{-1}(y/x)$. Muchas hojas de cálculo de computador y paquetes de software matemático implementan una función arctan denominada atan2 (x, y) que proporciona el ángulo polar de (x, y) en el intervalo $(-\pi, \pi]$. Por tanto,

$$\mathrm{Arg}\,(x + yi) = \mathrm{atan2}\,(x, y)$$

Dado el módulo $r = |w|$ y cualquier valor de la fase $\theta = \arg(w)$ de un número complejo $w = a + bi$, tenemos que $a = r\cos\theta$ y $b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, por lo que w se puede expresar en función de su módulo y fase como

$$w = r\cos\theta + i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

La expresión del miembro derecho se denomina **representación polar** de w.

¡¡ ATENCIÓN !! Revise la nota de atención al final de la presentación de la función arcotangente en la Sección 3.5; programas diferentes implementan la función arcotangente de dos variables utilizando notaciones diferentes y/o diferente orden de variables.

DEFINICIÓN 5

El **conjugado** o **complejo conjugado** de un número complejo $w = a + bi$ es otro número complejo, simbolizado por $\bar{w}$, y dado por

$$\bar{w} = a - bi$$

Ejemplo 2 $\overline{2 - 3i} = 2 + 3i,\qquad \overline{3} = 3,\qquad \overline{2i} = -2i.$ ■

Obsérvese que

$$\mathrm{Re}\,(\bar{w}) = \mathrm{Re}\,(w) \qquad |\bar{w}| = |w|$$
$$\mathrm{Im}\,(\bar{w}) = -\mathrm{Im}\,(w) \qquad \arg(\bar{w}) = -\arg(w)$$

En un diagrama de Argand el punto $\bar{w}$ es la reflexión del punto w con respecto al eje real (*véase* la Figura I.4).

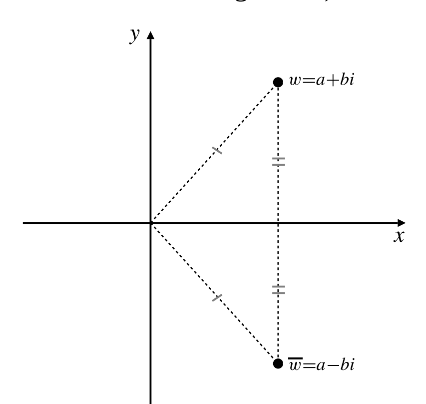


Figura I.4 Un número complejo y su conjugado son imágenes especulares entre sí con respecto al eje real.

Nótese que w es real ($\mathrm{Im}\,(w) = 0$) si y sólo si $\bar{w} = w$. Además, w es imaginario puro ($\mathrm{Re}\,(w) = 0$) si y sólo si $\bar{w} = -w$ (en este caso, $-w = -a - bi$ si $w = a + bi$).

Aritmética compleja

Como los números reales, los números complejos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Dos números complejos se suman o restan como si fueran vectores bidimensionales cuyas componentes son sus partes real e imaginaria.

Suma y diferencia de números complejos

Si $w = a + bi$ y $z = x + yi$, siendo a, b, x e y números reales, entonces

$$w + z = (a + x) + (b + y)i$$

$$w - z = (a - x) + (b - y)i$$

En un diagrama de Argand los puntos $w + z$ y $w - z$ son los puntos cuyos vectores de posición son, respectivamente, la suma y la diferencia de los vectores de posición de los puntos w y z (*véase* la Figura I.5). En particular, el número complejo $a + bi$ es la suma del número real $a = a + 0i$ y el número imaginario puro $bi = 0 + bi$.

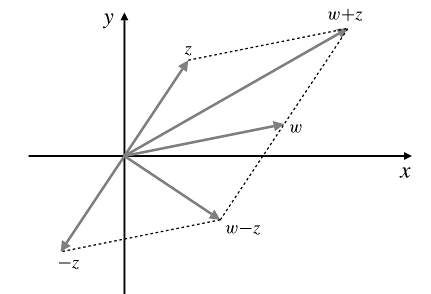


Figura I.5 Dos números complejos se suman y se restan vectorialmente. Obsérvense los paralelogramos.

La suma compleja obedece a las mismas reglas que la suma real: si w_1, w_2 y w_3 son tres números complejos, las siguientes propiedades se pueden verificar fácilmente:

$w_1 + w_2 = w_2 + w_1$	La suma es conmutativa.
$(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3)$	La suma es asociativa.
$\lvert w_1 \pm w_2\rvert \leqslant \lvert w_1\rvert + \lvert w_2\rvert$	desigualdad del triángulo.

Nótese que $|w_1 - w_2|$ es la distancia entre los w_1 y w_2 en el plano complejo. Por tanto, la desigualdad del triángulo dice que en el triángulo cuyos vértices son w_1, $\mp w_2$ y 0, la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

Se puede verificar también fácilmente que el conjugado de una suma (o diferencia) es la suma (o diferencia) de los conjugados:

$$\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}$$

Ejemplo 3

(a) Si $w = 2 + 3i$ y $z = 4 - 5i$, entonces

$$w + z = (2 + 4) + (3 - 5)i = 6 - 2i$$

$$w - z = (2 - 4) + (3 - (-5))i = -2 + 8i$$

(b) $3i + (1 - 2i) - (2 + 3i) + 5 = 4 - 2i$.

La multiplicación de dos números complejos $w = a + bi$ y $z = x + yi$ se realiza multiplicando formalmente las expresiones binomiales y sustituyendo i^2 por -1:

$$\begin{aligned} wz &= (a + bi)(x + yi) = ax + ayi + bxi + byi^2 \\ &= (ax - by) + (ay + bx)i \end{aligned}$$

Producto de números complejos

Si $w = a + bi$ y $z = x + yi$, siendo a, b, x e y números reales, entonces

$$wz = (ax - by) + (ay + bx)i$$

Ejemplo 4

(a) $(2 + 3i)(1 - 2i) = 2 - 4i + 3i - 6i^2 = 8 - i$.

(b) $i(5 - 4i) = 5i - 4i^2 = 4 + 5i$.

(c) $(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$.

El apartado (c) del ejemplo anterior muestra que el cuadrado del módulo de un número complejo es el producto de dicho número con su complejo conjugado:

$$w\bar{w} = |w|^2$$

La multiplicación compleja comparte muchas propiedades con la multiplicación real. En particular, si w_1, w_2 y w_3 son números complejos, entonces

$w_1w_2 = w_2w_1$	La multiplicación es conmutativa.
$(w_1w_2)w_3 = w_1(w_2w_3)$	La multiplicación es asociativa.
$w_1(w_2 + w_3) = w_1w_2 + w_1w_3$	La multiplicación es distributiva respecto de la suma.

El conjugado de un producto es el producto de los conjugados:

$$\overline{wz} = \overline{w}\,\overline{z}$$

Para ver que esto es así, sean $w = a + bi$ y $z = x + yi$. Entonces,

$$\begin{aligned} \overline{wz} &= \overline{(ax - by) + (ay + bx)i} \\ &= (ax - by) - (ay + bx)i \\ &= (a - bi)(x - yi) = \overline{w}\,\overline{z} \end{aligned}$$

Es particularmente sencillo determinar el producto de módulos complejos expresados en forma polar. Si

$$w = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad \text{y} \quad z = s(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

siendo $r = |w|$, $\theta = \arg(w)$, $s = |z|$, y $\phi = \arg(z)$, entonces

$$\begin{aligned} wz &= rs(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi) \\ &= rs((\cos\theta\cos\phi - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi) + i(\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi)) \\ &= rs(\cos(\theta + \phi) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta + \phi)) \end{aligned}$$

Véase la Figura I.6. Como las fases sólo están determinadas hasta un múltiplo entero de 2π, hemos demostrado que

Módulo y fase de un producto

$$|wz| = |w||z| \quad \text{y} \quad \arg(wz) = \arg(w) + \arg(z)$$

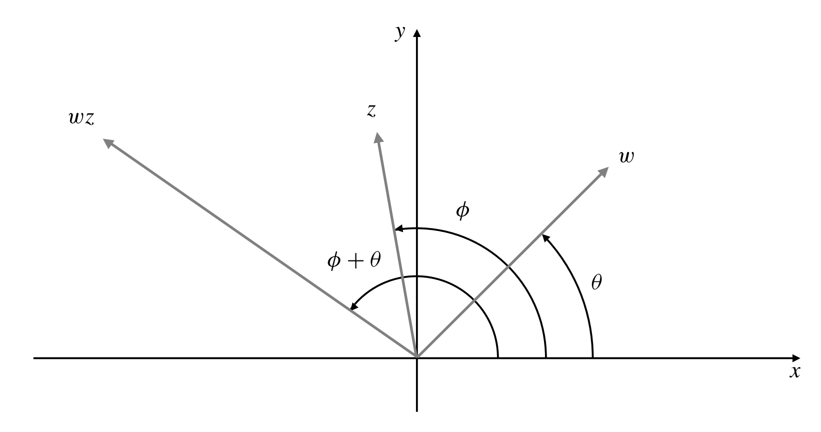


Figura I.6 La fase de un producto es la suma de las fases de los factores.

La segunda de estas ecuaciones dice que el conjunto $\arg(wz)$ está formado por todos los números $\theta + \phi$, donde θ pertenece al conjunto $\arg(w)$ y ϕ al conjunto $\arg(z)$.

De forma más general, si $w_1, w_2, ..., w_n$ son números complejos, entonces

$$|w_1 w_2 \cdots w_n| = |w_1||w_2| \cdots |w_n|$$

$$\arg(w_1 w_2 \cdots w_n) = \arg(w_1) + \arg(w_2) + \cdots + \arg(w_n)$$

La multiplicación de un número complejo por i tiene una interpretación geométrica particularmente simple en un diagrama de Argand. Como $|i| = 1$ y $\arg(i) = \pi/2$, la multiplicación de $w = a + bi$ por i no modifica el módulo de w pero aumenta su fase en $\pi/2$ (*véase* la Figura I.7). Por tanto, la multiplicación por i gira el vector de posición de w en sentido contrario al de las agujas del reloj 90º alrededor del origen.

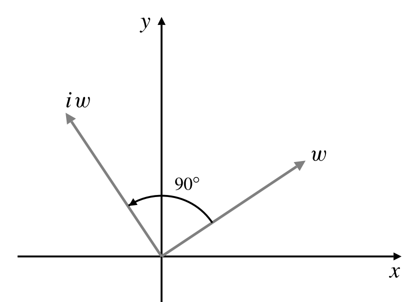


Figura I.7 La multiplicación por i corresponde a una rotación en sentido contrario al de las agujas del reloj de 90º.

Sea $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. Entonces $|z| = 1$ y $\arg(z) = \theta$. Como el módulo de un producto es el producto de los módulos de los factores y la fase de un producto es la suma de las fases de los factores, tenemos $|z^n| = |z|^n = 1$ y $\arg(z^n) = n\arg(z) = n\theta$. Por tanto,

$$z^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

y hemos demostrado el Teorema de de Moivre.

TEOREMA 1 Teorema de Moivre

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$$

Observación Una gran parte del estudio de las funciones complejas de variable compleja se sale del alcance de este libro. Sin embargo, en el Apéndice II presentaremos una versión compleja de la exponencial que tiene la siguiente propiedad: si $z = x + iy$ (siendo x e y reales), entonces

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$$

Por tanto, el módulo de e^z es $e^{\mathrm{Re}\,(z)}$ e $\mathrm{Im}\,(z)$ es un valor de $\arg(e^z)$. En este contexto, el Teorema de de Moivre dice simplemente que

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Ejemplo 5 Exprese $(1+i)^5$ en la forma $a + bi$.

Solución Como $|(1+i)^5| = |1+i|^5 = (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$ y $\arg((1+i)^5) = 5\arg(1+i) = \frac{5\pi}{4}$, tenemos

$$(1+i)^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -4 - 4i$$

El Teorema de Moivre se puede utilizar para generar identidades trigonométricas de los múltiplos de un ángulo. Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos

$$\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta + 2i\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Por tanto, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta$ y $\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$.

El **inverso** de un número complejo distinto de cero $w = a + bi$ se puede calcular multiplicando el numerador y el denominador de la expresión del inverso por el conjugado de w:

$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

Como $|\bar{w}| = |w|$ y $\arg(\bar{w}) = -\arg(w)$, tenemos

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \frac{|\bar{w}|}{|w|^2} = \frac{1}{|w|} \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{1}{w}\right) = -\arg(w)$$

El **cociente** z/w de dos números complejos $z = x + yi$ y $w = a + bi$ es el producto de z y $1/w$, por lo que

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(x+yi)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{xa+yb+i(ya-xb)}{a^2+b^2}$$

Tenemos

Módulo y fase de un cociente

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$$

El conjunto $\arg(z/w)$ está formado por todos los números $\theta - \phi$ donde θ pertenece al conjunto $\arg(z)$ y ϕ pertenece al conjunto $\arg(w)$.

Ejemplo 6 Simplifique (a) $\dfrac{2+3i}{4-i}$ y (b) $\dfrac{i}{1+i\sqrt{3}}$.

Solución

(a) $\dfrac{2+3i}{4-i} = \dfrac{(2+3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \dfrac{8-3+(2+12)i}{4^2+1^2} = \dfrac{5}{17} + \dfrac{14}{17}i.$

(b) $\dfrac{i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{i(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1^2+3} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i.$

Por otra parte, como $|1+i\sqrt{3}| = 2$ y $\arg(1+i\sqrt{3}) = \tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$, el módulo del cociente de (b) es $\dfrac{1}{2}$ y su fase es $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$. Por tanto,

$$\frac{i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

Raíces de números complejos

Si a es un número real positivo, existen dos números reales diferentes cuyo cuadrado es a. Se denominan

$$\sqrt{a} \qquad \text{(la raíz cuadrada positiva de } a\text{)}$$

$$-\sqrt{a} \qquad \text{(la raíz cuadrada negativa de } a\text{)}$$

Todo número complejo $z = x + yi$ distinto de cero (siendo $x^2 + y^2 > 0$) tiene dos raíces cuadradas; si w_1 es un número complejo tal que $w_1^2 = z$, entonces $w_2 = -w_1$ también cumple $w_2^2 = z$. Es interesante señalar una de esas raíces para denominarla $\sqrt{z}$.

Sea $r = |z|$, de forma que $r > 0$. Sea $\theta = \operatorname{Arg}(z)$. Por tanto, $-\pi < \theta \leqslant \pi$. Como

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

el número complejo

$$w = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$

cumple claramente $w^2 = z$. Denominaremos a w **raíz cuadrada principal** de z y lo escribiremos $\sqrt{z}$. Las dos soluciones de la ecuación $w^2 = z$ son, por tanto, $w = \sqrt{z}$ y $w = -\sqrt{z}$.

Obsérvese que la parte real de $\sqrt{z}$ es siempre no negativa puesto que $\cos(\theta/2) \geqslant 0$ para $-\pi/2 < \theta \leqslant \pi/2$. En este intervalo $\operatorname{sen}(\theta/2) = 0$ sólo si $\theta = 0$ en cuyo caso $\sqrt{z}$ es real y positiva.

Ejemplo 7

(a) $\sqrt{4} = \sqrt{4(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)} = 2.$

(b) $\sqrt{i} = \sqrt{1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i.$

(c) $\sqrt{-4i} = \sqrt{4\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]} = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

(d) $\sqrt{-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

Dado un número complejo z distinto de cero, se pueden obtener n números complejos distintos w que cumplen $w^n = z$. Estos n números se denominan las raíces n-ésimas de z. Por ejemplo, si $z = 1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$, entonces todos los números

$$\begin{aligned}
w_1 &= 1 \\
w_2 &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \\
w_3 &= \cos\frac{4\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} \\
w_4 &= \cos\frac{6\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{6\pi}{n} \\
&\vdots \\
w_n &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}
\end{aligned}$$

cumplen $w^n = 1$ y, por tanto, son raíces n-ésimas de 1 (estos números se denominan generalmente raíces n-ésimas de la unidad). La Figura I.8 muestra las tres raíces cúbicas de 1. Obsérvese que están en los tres vértices de un triángulo equilátero cuyo centro está en el origen y uno de sus vértices está en 1. En general, las n raíces n-ésimas de la unidad estarán en una circunferencia de radio 1 centrada en el origen, y sus vértices formarán un polígono regular de n lados con uno de sus vértices en 1.

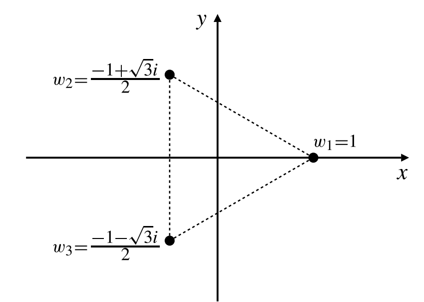


Figura I.8 Las raíces cúbicas de la unidad.

Si z es un número complejo distinto de cero y θ es la fase principal de $z\,(-\pi < \theta \leqslant \pi)$, entonces el número

$$w_1 = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right)$$

se denomina raíz **principal** n-ésima de z. Todas las raíces n-ésimas de z están en una circunferencia de radio $|z|^{1/n}$ centrada en el origen y ocupan los vértices de un polígono regular de n lados con uno de sus vértices en w_1 (*véase* la Figura I.9). Las otras n raíces son

$$\begin{aligned}
w_2 &= |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+2\pi}{n}\right) \\
w_3 &= |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+4\pi}{n}\right) \\
&\vdots \\
w_n &= |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

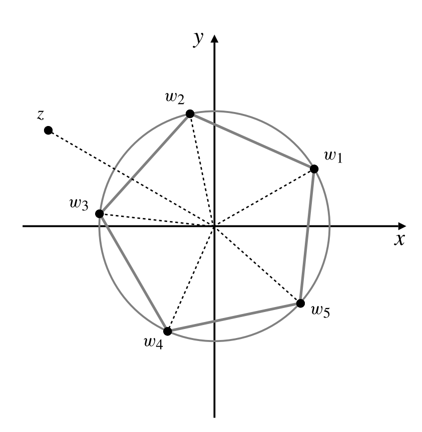


Figura I.9 Las cinco raíces quintas de z.

Podemos obtener todas las raíces n-ésimas de z multiplicando la raíz principal n-ésima por las raíces n-ésimas de la unidad.

Ejemplo 8 Calcule las raíces cuartas de -4. Dibújelas en un diagrama de Argand.

Solución Como $|-4|^{1/4} = \sqrt{2}$ y $\arg(-4) = \pi$, la raíz cuarta principal de -4 es

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$$

Las otras tres raíces cuartas están en los vértices de un cuadrado cuyo centro es el origen y uno de sus vértices está en $1 + i$ (*véase* la Figura I.10). Por tanto, las otras raíces son

$$w_2 = -1 + i, \qquad w_3 = -1 - i, \qquad w_4 = 1 - i$$

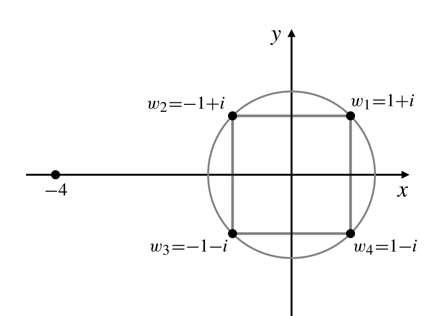


Figura I.10 Las cuatro raíces cuartas de -4.

Ejercicios: Apéndice I

En los Ejercicios 1-4, calcule las partes reales e imaginarias ($\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$) de los números complejos z dados, y dibuje la posición de cada uno de los números en el plano complejo (es decir, en un diagrama de Argand).

1. $z = -5 + 2i$

2. $z = 4 - i$

3. $z = -\pi i$

4. $z = -6$

En los Ejercicios 5-15, calcule los módulos $r = |z|$ y las fases principales $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ de los números complejos dados z, y exprese z en función de r y θ.

5. $z = -i + i$

6. $z = -2$

7. $z = 3i$

8. $z = -5i$

9. $z = 1 + 2i$

10. $z = -2 + i$

11. $z = -3 - 4i$

12. $z = 3 - 4i$

13. $z = \sqrt{3} - i$

14. $z = -\sqrt{3} - 3i$

15. $z = 3\cos\dfrac{4\pi}{5} + 3i\,\mathrm{sen}\dfrac{4\pi}{5}$

16. Si $\operatorname{Arg}(z) = 3\pi/4$ y $\operatorname{Arg}(w) = \pi/2$, calcule $\operatorname{Arg}(zw)$.

17. Si $\operatorname{Arg}(z) = -5\pi/6$ y $\operatorname{Arg}(w) = \pi/4$, calcule $\operatorname{Arg}(z/w)$.

En los Ejercicios 18-23, exprese en la forma $z = x + yi$ los números complejos z con los módulos y fases dados.

18. $|z| = 2, \quad \arg(z) = \pi$

19. $|z| = 5, \quad \arg(z) = \tan^{-1}\dfrac{3}{4}$

20. $|z| = 1, \quad \arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}$

21. $|z| = \pi, \quad \arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$

22. $|z| = 0, \quad \arg(z) = 1$

23. $|z| = \dfrac{1}{2}, \quad \arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}$

En los Ejercicios 24-27, calcule los complejos conjugados de los números complejos dados.

24. $5 + 3i$

25. $-3 - 5i$

26. $4i$

27. $2 - i$

Describa geométricamente (o realice un dibujo) del conjunto de puntos z en el plano complejo que cumplen las ecuaciones o desigualdades de los Ejercicios 28-33.

28. $|z| = 2$

29. $|z| \leqslant 2$

30. $|z - 2i| \leqslant 3$

31. $|z - 3 + 4i| \leqslant 5$

32. $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$

33. $\pi \leqslant \arg(z) \leqslant \dfrac{7\pi}{4}$

Simplifique las expresiones de los Ejercicios 34-43.

34. $(2 + 5i) + (3 - i)$

35. $i - (3 - 2i) + (7 - 3i)$

36. $(4 + i)(4 - i)$

37. $(1 + i)(2 - 3i)$

38. $(a + bi)(\overline{2a - bi})$

39. $(2 + i)^3$

40. $\dfrac{2 - i}{2 + i}$

41. $\dfrac{1 + 3i}{2 - i}$

42. $\dfrac{1 + i}{i(2 + 3i)}$

43. $\dfrac{(1 + 2i)(2 - 3i)}{(2 - i)(3 + 2i)}$

44. Demuestre que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

45. Demuestre que $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

46. Exprese los números complejos $z = 3 + i\sqrt{3}$ y $w = -1 + i\sqrt{3}$ en forma polar (es decir, en función de su módulo y fase). Utilice estas expresiones para calcular zw y z/w.

47. Repita el Ejercicio 46 para $z = -1 + i$ y $w = 3i$.

48. Utilice el Teorema de de Moivre para obtener una identidad trigonométrica de $\cos 3\theta$ en función de $\cos\theta$, y otra para $\operatorname{sen} 3\theta$ en función de $\operatorname{sen}\theta$.

49. Describa las soluciones, si existen, de la ecuación (a) $\bar{z} = 2/z$ y (b) $\bar{z} = -2/z$.

50. Dados los números positivos a y b, siempre es cierto que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. ¿Se cumple una identidad similar para $\sqrt{zw}$, siendo z y w números complejos? *Sugerencia*: Considere $z = w = -1$.

51. Calcule las tres raíces cúbicas de -1.

52. Calcule las tres raíces cúbicas de $-8i$.

53. Calcule las tres raíces cúbicas de $-1 + i$.

54. Calcule todas las raíces cuartas de 4.

55. Calcule todas las soluciones complejas de la ecuación $z^4 + 1 - i\sqrt{3} = 0$.

56. Calcule todas las soluciones de $z^5 + a^5 = 0$, siendo a un número real positivo.

57. Demuestre que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad es cero. *Sugerencia*: Demuestre que estas raíces son todas ellas potencias de la raíz principal.



APÉNDICE II

Funciones complejas

El camino más corto entre dos verdades en el dominio real pasa por el dominio complejo.

Jacques Hadamard (1865-1963)
citado en *La inteligencia matemática, v. 13, 1991*

La mayor parte de este libro trata del desarrollo de las propiedades de las **funciones reales**, es decir, funciones de una o más variables reales cuyos valores son a su vez números reales o vectores con componentes reales. La definición de *función* dada en la Sección P.4 se puede adaptar al caso de funciones complejas de variable compleja.

DEFINICIÓN 1

Una **función compleja** f es una regla que asigna un único número complejo $f(z)$ a cada número z de un conjunto de números complejos (denominado **dominio** de la función).

Normalmente utilizaremos $z = x + yi$ para indicar un punto general del dominio de una función compleja y $w = u + vi$ para indicar el valor de la función en z; si $w = f(z)$, entonces las partes real e imaginaria de w ($u = \mathrm{Re}\,(w)$ y $v = \mathrm{Im}\,(w)$) son funciones reales de z, y por tanto funciones reales de las dos variables reales x e y:

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y)$$

Por ejemplo, la función compleja $f(z) = z^2$, cuyo dominio es el plano complejo completo $\mathbb{C}$, asigna el valor z^2 al número complejo z. Si $w = z^2$ (siendo $w = u + vi$ y $z = x + yi$), entonces

$$u + vi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

de forma que

$$u = \mathrm{Re}\,(z^2) = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad v = \mathrm{Im}\,(z^2) = 2xy$$

No resulta práctico dibujar la *gráfica* de una función compleja. La gráfica de $w = f(z)$ tendría que ser dibujada en un espacio (real) de cuatro dimensiones, ya que se requieren dos dimensiones (un plano z) para la variable independiente y dos dimensiones más (un plano w) para la variable dependiente. En vez de eso, podemos representar gráficamente el comportamiento de una función compleja $w = f(z)$ dibujando el plano z y el plano w separadamente, y mostrando la imagen en el plano w de cierto conjunto de puntos previamente escogido en el plano z. Por ejemplo, la Figura II.1 ilustra el hecho de que para la función $w = z^2$ la imagen del cuarto de disco $|z| \leqslant a$, $0 \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{2}$ es el semidisco $|w| \leqslant a^2$, $0 \leqslant \arg(w) \leqslant \pi$. Para ver por qué esto es así,

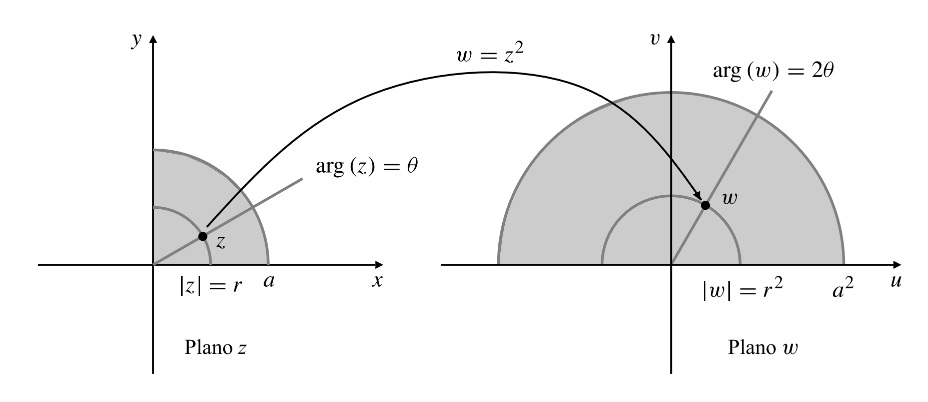


Figura II.1 La función $w = z^2$ transforma un cuarto de disco de radio a en un semidisco de radio a^2 elevando al cuadrado el módulo y doblando la fase de cada punto z.

obsérvese que si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, entonces $w = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)$. Por tanto, la función transforma la circunferencia $|z| = r$ en la circunferencia $|w| = r^2$ y la recta radial $\arg(z) = \theta$ en la recta radial $\arg(w) = 2\theta$.

Límites y continuidad

Los conceptos de límite y continuidad se pueden trasladar de manera obvia del campo de las funciones reales a las funciones complejas suponiendo que utilizamos $|z_1 - z_2|$ como la distancia entre los números complejos z_1 y z_2. Se dice que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lambda$$

suponiendo que podemos asegurar que $|f(z) - \lambda|$ es tan pequeño como deseemos tomando z suficientemente cerca de z_0. Formalmente,

DEFINICIÓN 2

Se dice que $f(z)$ tiende al **límite** λ cuando z tiende a z_0 y se escribe

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lambda$$

si para todo número real positivo ϵ existe un δ (que depende de ϵ), tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - \lambda| < \epsilon$$

DEFINICIÓN 3

La función compleja $f(z)$ es **continua** en $z = z_0$ si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe y es igual a $f(z_0)$.

Todas las leyes de los límites y de la continuidad se aplican como en el caso de funciones reales. Los polinomios, es decir, las funciones de la forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

son continuas en todo punto del plano complejo. Las funciones racionales, es decir, las funciones de la forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

siendo $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios, son continuas en todas partes excepto en los puntos donde $Q(z) = 0$. Las potencias enteras z^n son continuas excepto en el origen si $n < 0$. La situación de potencias fraccionarias es más complicada. Por ejemplo, $\sqrt{z}$ (la raíz cuadrada principal) es continua excepto en los puntos $z = x < 0$. La función $f(z) = \bar{z}$ es continua en todas partes, porque

$$|\bar{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$$

La derivada compleja

La definición de derivada es la misma que para funciones reales:

DEFINICIÓN 4

La función compleja f es **diferenciable** en z y tiene d**erivada** $f'(z)$ en ese punto, siempre que exista

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

Nótese, sin embargo, que en esta definición h es un número complejo. El límite debe existir independientemente de cómo h tienda a 0 en el plano complejo. Este hecho tiene profundas implicaciones. La existencia de una derivada en este sentido fuerza a que la función f sea mucho mejor comportada de lo que es necesario en el caso de una función real diferenciable. Por ejemplo, se puede demostrar que si $f'(z)$ existe para todo z en una región abierta D en $\mathbb{C}$, entonces f tiene derivadas de *todos* los órdenes en D. Es más, tal función es la suma de la serie de Taylor

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

alrededor de todo punto z_0 en D. La serie tiene radio de convergencia positivo R y converge en el disco $|z - z_0| < R$. Por esta razón, las funciones complejas que son diferenciables en conjuntos abiertos de $\mathbb{C}$ se denominan generalmente **funciones analíticas**. La demostración de estas afirmaciones está más allá del alcance de este apéndice introductorio. Se pueden encontrar en cursos y textos de análisis complejo.

Se aplican las reglas habituales de la diferenciación:

$$\frac{d}{dz}(Af(z) + Bg(z)) = Af'(z) + Bg'(z)$$

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$$

$$\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z))g'(z)$$

Como se puede esperar, la derivada de $f(z) = z^n$ es $f'(z) = nz^{n-1}$.

Ejemplo 1 Demuestre que la función $f(z) = \bar{z}$ no es diferenciable en ningún punto.

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z+h-z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h} \end{aligned}$$

Pero $\bar{h}/h = 1$ si h es real, y $\bar{h}/h = -1$ si h es imaginario. Como existen números reales e imaginarios puros arbitrariamente cercanos a 0, el límite anterior no existe, por lo que tampoco existe $f'(z)$. ■

El teorema siguiente relaciona la existencia de la derivada de una función compleja $f(z)$ con ciertas propiedades de sus partes real e imaginaria $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

TEOREMA 1 **La condición de Cauchy-Riemann**

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es diferenciable en $z = x + yi$, entonces u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Asimismo, si u y v son suficientemente suaves (es decir, si tienen derivadas parciales segundas continuas cerca de (x, y)), y si u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x, y), entonces f es diferenciable en $z = x + yi$ y

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos en primer lugar que f es diferenciable en z. Haciendo $h = s + ti$, tenemos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \left[\frac{u(x+s,\ y+t) - u(x,\ y)}{s+it} + i\frac{v(x+s,\ y+t) - v(x,\ y)}{s+it} \right] \end{aligned}$$

El límite debe ser independiente del camino por el que h tienda a 0. Haciendo $t = 0$, de forma que $h = s$ tienda a 0 siguiendo el eje real, obtenemos

$$f'(z) = \lim_{s\to 0} \left[\frac{u(x+s,\ y) - u(x,\ y)}{s} + i\frac{v(x+s,\ y) - v(x,\ y)}{s} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

De forma similar, haciendo $s = 0$, de forma que $h = ti$ tienda a 0 siguiendo el eje imaginario, tenemos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{t\to 0} \left[\frac{u(x,\ y+t) - u(x,\ y)}{it} + i\frac{v(x,\ y+t) - v(x,\ y)}{it} \right] \\ &= \lim_{t\to 0} \left[\frac{v(x,\ y+t) - v(x,\ y)}{t} - i\frac{u(x,\ y+t) - u(x,\ y)}{t} \right] \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Igualando estas dos expresiones de $f'(z)$, podemos ver que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Para demostrar la condición inversa, utilizaremos el resultado del Ejercicio 19 de la Sección 12.6. Como se supone que u y v tienen segundas derivadas parciales continuas, debemos tener

$$u(x+s, y+t) - u(x, y) = s\frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial y} + O(s^2 + t^2)$$

$$v(x+s, y+t) - v(x, y) = s\frac{\partial v}{\partial x} + t\frac{\partial v}{\partial y} + O(s^2 + t^2)$$

donde hemos utilizado la notación O (*véase* la Definición 10 de la Sección 4.8); la expresión $O(\lambda)$ indica un término que cumple $|O(\lambda)| \leqslant K|\lambda|$ para alguna constante K. Por tanto, si u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{s\frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(s\frac{\partial v}{\partial x} + t\frac{\partial v}{\partial y}\right) + O(s^2 + t^2)}{s + it} \\ &= \frac{(s+it)\frac{\partial u}{\partial x} + i(s+it)\frac{\partial v}{\partial x}}{s+it} + O(\sqrt{s^2+t^2}) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + O(\sqrt{s^2+t^2})\end{aligned}$$

Por tanto, podemos hacer que $h = s + ti$ tienda a 0 y obtener

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

De las ecuaciones de Cauchy-Riemann se sigue inmediatamente que las partes real e imaginaria de una función compleja diferenciable son funciones reales armónicas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Véase el Ejercicio 15 de la Sección 12.4.

La función exponencial

Consideremos la función

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$$

siendo $z = x + yi$. Las partes real e imaginaria de $f(z)$,

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z)) = e^x \cos y \quad \text{y} \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z)) = e^x \operatorname{sen} y$$

cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

en todos los puntos del plano z. Por lo tanto, $f(z)$ es diferenciable (analítica) en todas partes y cumple

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = f(z)$$

Evidentemente $f(0) = 1$, y $f(z) = e^x$ si $z = x$ es un número real. Es por tanto natural denominar a la función $f(z)$ función exponencial e^z.

La función exponencial compleja

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \qquad \text{para} \quad z = x + yi$$

En particular, si $z = yi$ es imaginario puro, entonces

$$e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

un resultado que también se puede obtener separando las partes real e imaginaria de la serie de Maclaurin de e^{yi}:

$$\begin{aligned} e^{yi} &= 1 + (yi) + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \frac{(yi)^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} |e^z| &= \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y)} = e^x \\ \arg(e^z) &= \arg(e^{yi}) = \arg(\cos y + i \operatorname{sen} y) = y \\ \overline{e^z} &= e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y = e^x \cos(-y) + ie^x \operatorname{sen}(-y) = e^{\bar{z}} \end{aligned}$$

En resumen:

Propiedades de la función exponencial

Si $z = x + yi$, entonces $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$. Además,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^z) &= e^x \cos y, & |e^z| &= e^x \\ \operatorname{Im}(e^z) &= e^x \operatorname{sen} y, & \arg(e^z) &= y \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Dibuje la imagen en el plano w del rectángulo

$$R: a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

en el plano z bajo la transformación $w = e^z$.

Solución Las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ se transforman en las circunferencias concéntricas $|w| = e^a$ y $|w| = e^b$. Las rectas horizontales $y = c$ y $y = d$ se transforman en las rectas radiales $\arg(w) = c$ y $\arg(w) = d$. Por tanto, el rectángulo R se transforma en la región polar P y se muestra en la Figura II.2.

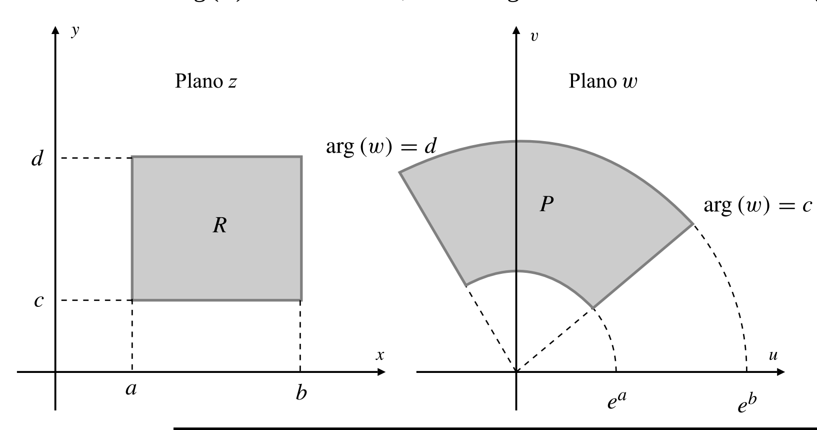


Figura II.2 Mediante la función exponencial $w = e^z$ las rectas verticales se transforman en circunferencias centradas en origen, y las rectas horizontales se transforman en semirrectas que radian desde el origen. ■

Obsérvese que si $d - c \geqslant 2\pi$, entonces la imagen de R será la región anular completa $e^a \leqslant |w| \leqslant e^b$, que se puede cubrir más de una vez. La función exponencial e^z es periódica de periodo $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \qquad \text{para todo} \qquad z$$

y no es, por tanto, uno a uno en todo el plano complejo. Sin embargo, $w = e^z$ es uno a uno desde cualquier banda horizontal de la forma

$$-\infty < x < \infty, \qquad c < y \leqslant c + 2\pi$$

en todo el plano w excluyendo el origen.

El Teorema Fundamental del Álgebra

Como se observa al principio del Apéndice I, la extensión del sistema de numeración para incluir los números complejos permite que una mayor clase de ecuaciones tenga solución. Concluiremos este apéndice verificando que las ecuaciones polinómicas siempre tienen solución utilizando números complejos.

Un **polinomio complejo** de grado n es una función de la forma

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

donde $a_0, a_1, ..., a_n$ son números complejos y $a_n \neq 0$. Los números $a_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ se denominan **coeficientes** del polinomio. Si todos ellos son números reales, entonces $P_n(x)$ se denomina polinomio real.

Un número complejo z_0 que cumple la ecuación $P(z_0) = 0$ se denomina **cero** o **raíz** del polinomio. Todo polinomio de grado 1 tiene un cero: si $a_1 \neq 0$, entonces $a_1 z + a_0$ tiene un cero $z = -a_0/a_1$. Este cero es real si a_1 y a_0 son reales.

De forma similar, todo polinomio complejo de grado 2 tiene dos ceros. Si el polinomio es

$$P_2(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

con $a_2 \neq 0$, entonces los ceros se pueden obtener mediante la *fórmula de la ecuación de segundo grado*

$$z = z_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2} \qquad \text{y} \qquad z = z_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

En este caso $P_2(z)$ tiene dos factores lineales:

$$P_2(z) = a_2(z - z_1)(z - z_2)$$

Incluso si cada $a_1^2 - 4a_2 a_0 = 0$, de modo que $z_1 = z_2$, podemos considerar todavía que el polinomio tiene dos ceros (iguales), cada uno correspondiente a cada factor. Si los coeficientes a_0, a_1 y a_2 son números reales, los ceros serán reales siempre que $a_1^2 \geqslant 4a_2 a_0$. Cuando los coeficientes reales cumplen $a_1^2 < 4a_2 a_0$, entonces los ceros son complejos, de hecho, complejos conjugados: $z_2 = \overline{z_1}$.

Ejemplo 3 Resuelva la ecuación $z^2 + 2iz - (1 + i) = 0$.

Solución Los ceros de esta ecuación son

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2i \pm \sqrt{-4 + 4(1 + i)}}{2} \\ &= -i \pm \sqrt{i} \\ &= -i \pm \frac{1 + i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + (1 - \sqrt{2})i) \qquad \text{o} \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + (1 + \sqrt{2})i) \end{aligned}$$

■

El Teorema Fundamental del Álgebra asegura que todo polinomio complejo de grado positivo tiene un cero complejo.

TEOREMA 2 **El Teorema Fundamental del Álgebra**

Si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ es un polinomio complejo de grado $n \geqslant 1$, entonces existe un número complejo z_1 tal que $P(z_1) = 0$.

DEMOSTRACIÓN (Daremos solamente un planteamiento informal de la demostración). Podemos suponer que el coeficiente de z^n en $P(z)$ es $a_n = 1$, ya que podemos dividir la ecuación $P(z) = 0$ por a_n sin cambiar sus soluciones. Podemos suponer también que $a_0 \neq 0$; si $a_0 = 0$, entonces $z = 0$ es ciertamente un cero de $P(z)$. Por tanto, consideraremos el polinomio

$$P(z) = z^n + Q(z)$$

donde $Q(z)$ es un polinomio de grado menor que n que tiene un término constante distinto de cero. Si R es suficientemente grande, entonces $|Q(z)|$ será menor que R^n para todos los números z que cumplan $|z| = R$. A medida que z se mueve por la circunferencia $|z| = R$ en el plano z, $w = z^n$ se mueve por la circunferencia $|w| = R^n$ en el plano w (n veces). Como la distancia desde z^n hasta $P(z)$ es igual a $|P(z) - z^n| = |Q(z)| < R^n$, se deduce que la imagen de la circunferencia $|z| = R$ bajo la transformación $w = P(z)$ es una curva que rodea al origen n veces (si se sigue una circunferencia de radio r n veces, paseando un perro con una cadena de longitud menor que r, y el perro vuelve al punto de origen, entonces aquél habrá recorrido la circunferencia n veces). En la Figura II.3 se ilustra esta situación para el caso particular

$$P(z) = z^3 + z^2 - iz + 1, \qquad |z| = 2$$

La imagen de $|z| = 2$ es la curva grande en el plano w que rodea al origen tres veces. Cuando R disminuye, la curva que traza $w = P(z)$ para $|z| = R$ cambia de forma continua. Cuando R se acerca a 0, hay una pequeña curva cerca del término constante a_0 de $P(z)$. Cuando R es lo suficientemente pequeño, la curva no encerrará al origen (en la Figura II.3 la imagen de $|z| = 0.3$ es la curva pequeña que está cerca del punto 1 en el plano w). Por tanto, para algún valor de R, por ejemplo $R = R_1$, la curva debe pasar por el origen. Es decir, debe existir un número complejo z_1, con $|z| = R_1$, tal que $P(z_1) = 0$.

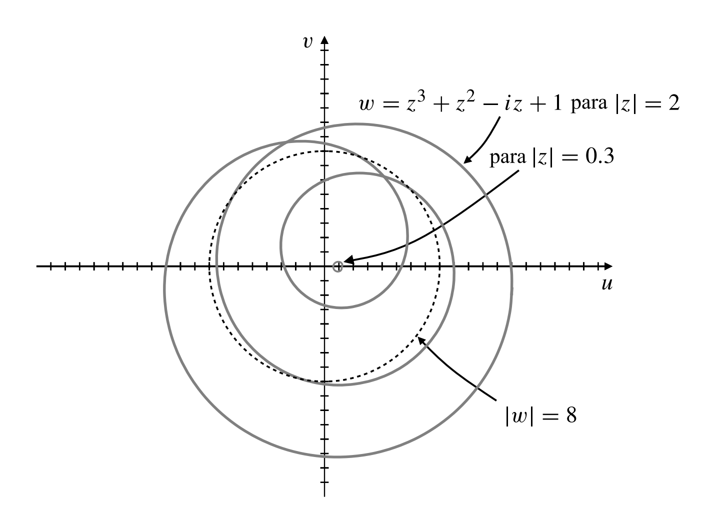


Figura II.3 La imagen de la circunferencia $|z| = 2$ rodea al origen en el plano w tres veces, pero la imagen de $|z| = 0.3$ no rodea al origen en absoluto.

Observación La demostración anterior sugiere que deberían existir n soluciones de la ecuación $P(z) = 0$; la curva tendría que pasar de rodear n veces al origen a rodear 0 veces al origen cuando R tiende a cero. Podemos formalizar esto como sigue. $P(z_1) = 0$ implica que $z - z_1$ es un factor de $P(z)$:

$$P(z) = (z - z_1)P_{n-1}(z)$$

donde P_{n-1} es un polinomio de grado $n - 1$. Si $n > 1$, entonces P_{n-1} debe tener también un cero, z_2, por el Teorema Fundamental. Podemos continuar este razonamiento de forma inductiva para obtener n ceros y factorizar $P(z)$ como un producto de la constante a_n y n factores lineales:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Por supuesto, algunos de los ceros pueden ser iguales.

Observación Si P es un polinomio real, es decir, un polinomio cuyos coeficientes son números reales, entonces $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. Por tanto, si z_1 es un cero no real de $P(z)$, entonces también lo es $z_2 = \overline{z_1}$:

$$P(z_2) = P(\overline{z_1}) = \overline{P(z_1)} = \bar{0} = 0$$

Los polinomios reales pueden tener ceros complejos, pero éstos siempre deben aparecer en pares conjugados. Todo polinomio real de grado impar debe tener al menos un cero real.

Ejemplo 4 Demuestre que $z_1 = -i$ es un cero del polinomio

$$P(z) = z^4 + 5z^3 + 7z^2 + 5z + 6$$

y calcule todos los ceros restantes de dicho polinomio.

Solución Obsérvese primero que $P(z_1) = P(-i) = 1 + 5i - 7 - 5i + 6 = 0$, por lo que $z_1 = -i$ es de hecho un cero. Como los coeficientes de $P(z)$ son reales, $z_2 = i$ debe ser también un cero. Por tanto, $z + i$ y $z - i$ son factores de $P(z)$, y también lo es

$$(z + i)(z - i) = z^2 + 1$$

Dividiendo $P(z)$ por $z^2 + 1$ se obtiene

$$\frac{P(z)}{z^2 + 1} = z^2 + 5z + 6 = (z + 2)(z + 3)$$

Por tanto, los cuatro ceros de $P(z)$ son $z_1 = -i$, $z_2 = i$, $z_3 = -2$ y $z_4 = -3$. ■

Ejercicios: Apéndice II

En los Ejercicios 1-12, la región D del plano z está formada por los números complejos $z = x + yi$ que cumplen las condiciones dadas. Describa (o dibuje) la imagen R de D en el plano w bajo las funciones dadas $w = f(z)$.

1. $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2;\quad w = \bar{z}$.

2. $x + y = 1;\quad w = \bar{z}$.

3. $1 \leqslant |z| \leqslant 2,\ \dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{3\pi}{4};\quad w = z^2$.

4. $0 \leqslant |z| \leqslant 2,\ 0 \leqslant \arg(z) \leqslant \dfrac{\pi}{2};\ w = z^3$.

5. $0 < |z| \leqslant 2,\ 0 \leqslant \arg(z) \leqslant \dfrac{\pi}{2};\quad w = \dfrac{1}{z}$.

6. $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \dfrac{\pi}{3};\quad w = -iz$.

7. $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3};\quad w = \sqrt{z}$.

8. $x = 1;\quad w = z^2$.

9. $y = 1;\quad w = z^2$.

10. $x = 1;\quad w = \dfrac{1}{z}$.

11. $-\infty < x < \infty,\ \dfrac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2};\quad w = e^z$.

12. $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \infty$; $w = e^{iz}$.

En los Ejercicios 13-16, verifique que las partes reales e imaginarias de las funciones $f(z)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y calcule $f'(z)$.

13. $f(z) = z^2$.

14. $f(z) = z^3$.

15. $f(z) = \frac{1}{z}$.

16. $f(z) = e^{z^2}$.

17. Utilice el hecho de que $e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ (para y real) para demostrar que

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}$$

El Ejercicio 16 sugiere que se pueden definir las funciones complejas

$$\cos z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$$

así como extender las definiciones de las funciones hiperbólicas a

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Los Ejercicios 18-26 desarrollan propiedades de estas funciones y relaciones entre ellas.

18. Demuestre que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son periódicas con periodo 2π, y que $\cosh z$ y $\operatorname{senh} z$ son periódicas con periodo $2\pi i$.

19. Demuestre que $(d/dz) \operatorname{sen} z = \cos z$ y $(d/dz) \cos z = -\operatorname{sen} z$. ¿Cuáles son las derivadas de $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$?

20. Verifique las identidades $\cos z = \cosh(iz)$ y $\operatorname{sen} z = -i \operatorname{senh}(iz)$. ¿Cuáles son las identidades correspondientes para $\cosh z$ y $\operatorname{senh}(z)$ en función de cos y sen?

21. Calcule todos los ceros complejos de $\cos z$ (es decir, todas las soluciones de $\cos z = 0$).

22. Calcule todos los ceros complejos de $\operatorname{sen} z$.

23. Calcule todos los ceros complejos de $\cosh z$ y $\operatorname{senh} z$.

24. Demuestre que $\operatorname{Re}(\cosh z) = \cosh x \cos y$ e $\operatorname{Im}(\cosh z) = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$.

25. Calcule las partes real e imaginaria de $\operatorname{senh} z$.

26. Calcule las partes real e imaginaria de $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$.

Calcule los ceros de los polinomios de los Ejercicios 27-32.

27. $P(z) = z^2 + 2iz$

28. $P(z) = z^2 - 2z + i$

29. $P(z) = z^2 + 2z + 5$

30. $P(z) = z^2 - 2iz - 1$

31. $P(z) = z^3 - 3iz^2 - 2z$

32. $P(z) = z^4 - 2z^2 + 4$

33. El polinomio $P(z) = z^4 + 1$ tiene dos parejas de ceros complejos conjugados. Calcúlelos y, a partir de aquí, exprese $P(z)$ como un producto de dos factores cuadráticos con coeficientes reales.

En los Ejercicios 34-36, compruebe que los números dados z_1 son ceros de los polinomios dados, y calcule todos los ceros de dichos polinomios.

34. $P(z) = z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 16z + 16$; $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$.

35. $P(z) = z^5 + 3z^4 + 4z^3 + 4z^2 + 3z + 1$; $z_1 = i$.

36. $P(z) = z^5 - 2z^4 - 8z^3 + 8z^2 + 31z - 30$; $z_1 = -2 + i$.

37. Demuestre que la imagen de la circunferencia $|z| = 2$ bajo la transformación $w = z^4 + z^3 - 2iz - 3$ rodea al origen en el plano w cuatro veces.



APÉNDICE III

Funciones continuas

La geometría parece a veces adelantarse al análisis, pero de hecho lo precede en la misma forma que un discípulo precede a su maestro para limpiar e iluminar su camino. El intervalo entre los dos es tan grande como el existente entre el empirismo y la ciencia, entre la comprensión y la razón o entre lo finito y el infinito.

J. J. Sylvester (1814-1897)
de *Philosophic Magazine, 1866*

El desarrollo del cálculo depende de un modo esencial del concepto de límite de una función y, por tanto, de las propiedades del sistema de los números reales. En el Capítulo 1 presentamos estas nociones de una manera intuitiva sin intentar demostrarlas, excepto en la Sección 1.5, donde se presentó la definición *formal* de límite y se utilizó para verificar algunos límites elementales y demostrar algunas propiedades sencillas de los límites.

Muchos resultados sobre límites y continuidad de funciones presentados en el Capítulo 1 pueden parecer bastante obvios; la mayoría de los estudiantes y usuarios del cálculo no se preocupan al aplicarlos sin demostración. No obstante, las matemáticas son una disciplina altamente lógica y rigurosa, y cualquier afirmación, aunque sea obvia, que no se pueda demostrar mediante argumentos estrictamente lógicos debe considerarse sospechosa. En este apéndice partiremos de la definición formal de límite dada en la Sección 1.5 y la combinaremos con la noción de *completitud* del sistema de los números reales que apareció por primera vez en la Sección P.1 para presentar demostraciones formales de los resultados más importantes sobre funciones continuas dados en los Teoremas 8 y 9 de la Sección 1.4, el Teorema Max-Min y el Teorema del Valor Medio. La mayor parte del desarrollo del cálculo realizado en este libro se basa en esos dos teoremas.

La rama de las matemáticas que trata de las demostraciones de este tipo se denomina análisis matemático. Se trata de una materia que no es seguida habitualmente por los estudiantes de matemáticas en los primeros cursos, sino que se pospone a cursos superiores para los estudiantes que siguen cursos de especialización en matemáticas. Es nuestra intención que el material que se presenta aquí sea de interés en esos cursos para los estudiantes con mayor interés en la comprensión del cálculo.

Límites de funciones

La definición formal de límite está en el corazón del análisis matemático, y es la Definición 9 de la Sección 1.5, que volvemos a presentar a continuación:

Definición formal de límite

Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si para todo número positivo ϵ existe un número positivo δ que depende de ϵ (es decir, $\delta = \delta(\epsilon)$), tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

La Sección 1.5 se marcó como «opcional», ya que la comprensión del contenido de esa sección no es esencial para la comprensión del cálculo. Sin embargo, esa sección es un requisito previo *esencial* para este apéndice. Es muy recomendable volver a la Sección 1.5 y leerla cuidadosamente, prestando especial atención a los Ejemplos 2 y 4, y realizando al menos los Ejercicios 31-36. En estos ejercicios se demuestran las leyes estándar de los límites planteadas en la Sección 1.2.

Funciones continuas

Consideremos las siguientes definiciones de continuidad, equivalentes a las proporcionadas en la Sección 1.4.

DEFINICIÓN 1 **Continuidad de una función en un punto**

Se dice que una función f, definida en un intervalo abierto que contiene al punto a, es continua en dicho punto a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

es decir, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

DEFINICIÓN 2 **Continuidad de una función en un intervalo**

Una función f es continua en un intervalo si es continua en todo punto de dicho intervalo. En el caso de un extremo de un intervalo cerrado, sólo es necesario que f sea continua por un lado. Por tanto, f es continua en el intervalo $[a, b]$ si

$$\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$$

para todo x que cumpla $a < x < b$ y

$$\lim_{t \to a+} f(t) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{t \to b-} f(t) = f(b)$$

La Figura III.1 ilustra estos conceptos.

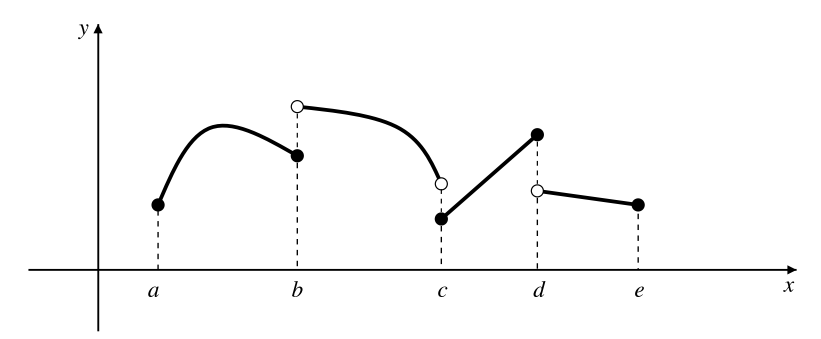


Figura III.1 f es continua en los intervalos $[a, b]$, (b, c), $[c, d]$ y $(d, e]$.

Los Teoremas 6 y 7 de la Sección 1.4 presentan unos resultados importantes que repetimos aquí:

TEOREMA 1 **Combinación de funciones continuas**

(a) Si f y g son continuas en el punto a, entonces también lo son $f + g$, $f - g$, fg y, si $g(a) \neq 0$, f/g.

(b) Si f es continua en el punto L y si $\lim_{x \to a} g(x) = L$, entonces tenemos

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

En particular, si g es continua en el punto a (de forma que $L = g(a)$), entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$, es decir, $f \circ g(x) = f(g(x))$ es continua en $x = a$.

(c) Las funciones $f(x) = C$ (constante) y $g(x) = x$ son continuas en toda la recta real.

(d) Para todo número racional r la función $f(x) = x^r$ es continua en todo número real donde esté definida.

DEMOSTRACIÓN El apartado (a) es un replanteamiento de varias reglas de combinación de límites; por ejemplo,

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = (\lim_{x \to a} f(x))(\lim_{x \to a} g(x)) = f(a)g(a)$$

El apartado (b) se puede demostrar como sigue. Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua en L, existe un $k > 0$ tal que $|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$ siempre que $|g(x) - L| < k$. Puesto que $\lim_{x \to a} g(x) = L$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - L| < k$. Por tanto, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$ y $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(L)$.

Las demostraciones de los apartados (c) y (d) se dejan planteadas al estudiante en los Ejercicios 3-9 de este apéndice.

Completitud y límites secuenciales

DEFINICIÓN 3

Se dice que un número real u es una **cota superior** de un conjunto no vacío S de números reales si $x \leqslant u$ para todo x de S.

El número u^* se denomina **cota superior mínima** de S si u^* es una cota superior de S y $u^* \leqslant u$ para toda cota superior u de S.

Análogamente, ℓ es una **cota inferior** de S si $\ell \leqslant x$ para todo x de S. El número ℓ^* es la **cota inferior máxima** de S si ℓ^* es una cota inferior y $\ell \leqslant \ell^*$ para toda cota inferior ℓ de S.

Ejemplo 1 Sean $S_1 = [2, 3]$ y $S_2 = (2, \infty)$. Cualquier número $u \geqslant 3$ es una cota superior de S_1. S_2 no tiene cota superior; se denomina no acotado superiormente. La cota superior mínima de S_1 es 3. Todo número real $\ell \leqslant 2$ es una cota inferior de S_1 y S_2. $\ell^* = 2$ es la cota inferior máxima de los dos conjuntos. Nótese que la cota superior mínima y la cota inferior máxima de un conjunto pueden pertenecer o no a dicho conjunto. ■

Recordaremos ahora el axioma de completitud de los números reales, que se presentó brevemente en la Sección P.1.

Axioma de completitud de los números reales

Un conjunto no vacío de números reales que tenga una cota superior debe tener una cota superior mínima.

De forma equivalente, un conjunto no vacío de números reales que tenga una cota inferior debe tener una cota inferior máxima.

Recalcamos que esto es un *axioma* que aceptamos sin demostración. No se puede deducir a partir de las propiedades más elementales algebraicas o de otro tipo de los números reales. Esas otras propiedades son compartidas por los números racionales, un conjunto que no es completo. El axioma de completitud es esencial para la demostración de los resultados más importantes sobre funciones continuas, en particular, el Teorema Max-Min y el Teorema del Valor Medio. Sin embargo, antes de plantear estas demostraciones, debemos realizar algún trabajo previo.

En la Sección 9.1 planteamos una versión del axioma de completitud en el ámbito de *secuencias* de números reales; concretamente, que una secuencia creciente que está acotada superiormente converge a un límite. Comenzaremos por verificar que esto se deduce de la versión planteada anteriormente (ambas versiones son, de hecho, equivalentes). Como se indicó en la Sección 9.1, la secuencia

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$$

es una función de los enteros positivos, es decir, $x_n = x(n)$. Se dice que la secuencia converge al límite L, y se expresa como $\lim x_n = L$, si la correspondiente función $x(t)$ cumple $\lim_{t\to\infty} x(t) = L$, tal como se definió antes. Más formalmente,

DEFINICIÓN 4 Límite de una secuencia

Se dice que $\lim x_n = L$ si para todo número positivo ϵ existe un número positivo $N = N(\epsilon)$ tal que $|x_n - L| < \epsilon$ se cumple siempre que $n \geqslant N$.

TEOREMA 2 Si $\{x_n\}$ es una secuencia creciente acotada superiormente, es decir,

$$x_{n+1} \geqslant x_n \quad \text{y} \quad x_n \leqslant K \quad \text{para } n = 1, 2, 3, ...$$

entonces $\lim x_n = L$ existe (en otras palabras, si $\{x_n\}$ es decreciente y acotada interiormente, entonces $\lim x_n$ existe).

DEMOSTRACIÓN Sea $\{x_n\}$ creciente y acotada superiormente. El conjunto S de números reales x_n tiene una cota superior, K, y por tanto tiene también una cota superior mínima, L. De este modo, $x_n \leqslant L$ para todo n, y si $\epsilon > 0$, entonces existe un entero positivo N tal que $x_N > L - \epsilon$ (si no fuera así, $L - \epsilon$ sería una cota superior de S que sería menor que la cota superior mínima). Si $n \geqslant N$, entonces tenemos $L - \epsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant L$, por lo que $|x_n - L| < \epsilon$. Por consiguiente, $\lim x_n = L$. La demostración para el caso de una secuencia decreciente acotada inferiormente es similar. ●

TEOREMA 3 Si $a \leqslant x_n \leqslant b$ para todo n, y si $\lim x_n = L$, entonces $a \leqslant L \leqslant b$.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $L > b$. Sea $\epsilon = L - b$. Como $\lim x_n = L$, existe un n tal que $|x_n - L| < \epsilon$. Por consiguiente, $x_n > L - \epsilon = L - (L - b) = b$, que es una contradicción, ya que se supone que $x_n \leqslant b$. Entonces, $L \leqslant b$. Un argumento similar permite demostrar que $L \geqslant a$.

TEOREMA 4 Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, si $a \leqslant x_n \leqslant b$ para todo n y si $\lim x_n = L$, entonces $\lim f(x_n) = f(L)$.

La demostración es similar a la del Teorema 1(b), y se deja como Ejercicio 15 al final de este apéndice.

Funciones continuas en un intervalo cerrado y finito

Ya estamos preparados para demostrar los resultados principales sobre funciones continuas en intervalos cerrados y finitos.

TEOREMA 5 **Teorema de la acotación**

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces está acotada en dicho intervalo; es decir, existe una constante K tal que $|f(x)| \leqslant K$ si $a \leqslant x \leqslant b$.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos que f está acotada superiormente; la demostración de que f está acotada inferiormente es similar. Para todo entero positivo n, sea S_n el conjunto de puntos x en $[a, b]$ tal que $f(x) > n$:

$$S_n = \{x : a \leqslant x \leqslant b \quad \text{y} \quad f(x) > n\}$$

Desearíamos demostrar que S_n es vacío para algún n. Se deduciría entonces que $f(x) \leqslant n$ para todo x en $[a, b]$; es decir, n sería una cota superior de f en $[a, b]$.

Supongamos, por el contrario, que S_n es no vacío para todo n. Demostraremos que esto lleva a una contradicción. Como S_n está acotado inferiormente (a es una cota inferior), por completitud, S_n tiene una cota inferior máxima; llamémosla x_n (*véase* la Figura III.2). Evidentemente $a \leqslant x_n$. Como $f(x) > n$ en algún punto de $[a, b]$ y f es continua en dicho punto, $f(x) > n$ en algún intervalo contenido en $[a, b]$. Entonces $x_n < b$. Se deduce entonces que $f(x_n) \geqslant n$ (si $f(x_n) < n$, entonces, por continuidad, $f(x) < n$ para alguna distancia a la derecha de x_n, y x_n no podría ser la máxima cota inferior de S_n).

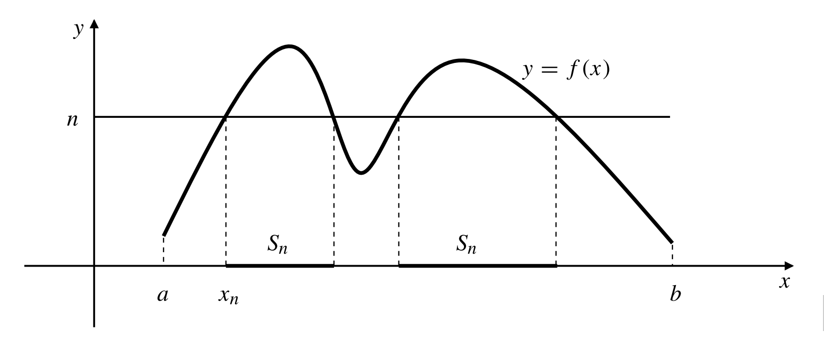


Figura III.2 El conjunto S_n.

Para todo n tenemos $S_{n+1} \subset S_n$. Por tanto, $x_{n+1} \geqslant x_n$ y $\{x_n\}$ es una secuencia creciente. Como está acotada superiormente (b es una cota superior) esta secuencia converge, por el Teorema 2. Sea $\lim x_n = L$. Por el Teorema 3, $a \leqslant L \leqslant b$. Como f es continua en L, $\lim f(x_n) = f(L)$ existe por el Teorema 4. Pero como $f(x_n) \geqslant n$, $\lim f(x_n)$ no puede existir. Esta contradicción completa la demostración.

TEOREMA 6 **El Teorema Max-Min**

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existen puntos v y u en $[a, b]$ tales que para todo x en $[a, b]$ tenemos

$$f(v) \leqslant f(x) \leqslant f(u)$$

es decir, f toma sus valores máximo y mínimo en $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN Por el Teorema 5 sabemos que el conjunto $S = \{f(x) : a \leqslant x \leqslant b\}$ tiene una cota superior y, por tanto, por el axioma de completitud, una cota superior mínima. Denominemos M a esta cota superior mínima. Supongamos que no existe ningún punto u en $[a, b]$ tal que $f(u) = M$. Entonces por el Teorema 1(a), $1/(M - f(x))$ es continua en $[a, b]$. Por el Teorema 5, existe una constante K tal que $1/(M - f(x)) \leqslant K$ para todo x en $[a, b]$. Entonces $f(x) \leqslant M - 1/K$, lo que contradice el hecho de que M es la *mínima* cota superior de los valores de f. Por tanto, debe existir algún punto u en $[a, b]$ tal que $f(u) = M$. Como M es una cota superior de los valores de f en $[a, b]$, tenemos que $f(x) \leqslant f(u) = M$ para todo x en $[a, b]$.

La demostración de que debe existir un punto v en $[a, b]$ tal que $f(x) \geqslant f(v)$ para todo x en $[a, b]$ es similar.

TEOREMA 7 **El Teorema del Valor Medio**

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y s es un número real comprendido entre los números $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto c en $[a, b]$ tal que $f(c) = s$.

DEMOSTRACIÓN Para ser concretos, supongamos que $f(a) < s < f(b)$ (la demostración para el caso $f(a) > s > f(b)$ es similar). Sea $S = \{x : a \leqslant x \leqslant b \text{ y } f(x) \leqslant s\}$. S es no vacío (a pertenece a S) y acotado superiormente (b es una cota superior) y por tanto, por completitud, S tiene una cota superior mínima; llamémosla c.

Supongamos que $f(c) > s$. Entonces $c \neq a$ y, por continuidad, $f(x) > s$ en algún intervalo $(c - \delta, c]$, con $\delta > 0$. Pero esto dice que $c - \delta$ es una cota superior de S menor que la mínima cota superior, lo que es imposible. Por tanto, $f(c) \leqslant s$.

Supongamos que $f(c) < s$. Entonces $c \neq b$ y, por continuidad, $f(x) < s$ en algún intervalo de la forma $[c, c + \delta)$ para algún $\delta > 0$. Pero esto dice que $[c, c + \delta) \subset S$, lo que contradice el hecho de que c es una cota superior de S. Por consiguiente, no podemos tener $f(c) < s$ y entonces $f(c) = s$.

En la Sección 1.4 se puede encontrar más material sobre estos teoremas y algunas aplicaciones.

Ejercicios: Apéndice III

1. Sea $a < b < c$ y supongamos que $f(x) \leqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant c$. Si $\lim_{x \to b} f(x) = L$ y $\lim_{x \to b} g(x) = M$, demuestre que $L \leqslant M$. *Sugerencia*: Suponga que $L > M$ y deduzca que $f(x) > g(x)$ para todo x suficientemente cercano a b. Esto contradice la condición de que $f(x) \leqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$.

2. Si $f(x) \leqslant K$ en los intervalos $[a, b)$ y $(b, c]$, y si $\lim_{x \to b} f(x) = L$, demuestre que $L \leqslant K$.

3. Utilice definición formal de límite para demostrar que $\lim_{x \to 0+} x^r = 0$ para todo número racional positivo r.

Demuestre las afirmaciones de los Ejercicios 4-9.

4. $f(x) = C$ (constante) y $g(x) = x$ son ambas continuas en toda la recta real.

5. Todo polinomio es continuo en toda la recta real.

6. Una función racional (cociente de polinomios) es continua en todas partes excepto donde el denominador sea cero.

7. Si n es un entero positivo y $a > 0$, entonces $f(x) = x^{1/n}$ es continua en $x = a$.

8. Si $r = m/n$ es un número racional, entonces $g(x) = x^r$ es continua en todo punto $a > 0$.

9. Si $r = m/n$, siendo m y n enteros y n impar, demuestre que $g(x) = x^r$ es continua en todo punto $a < 0$. Si $r \geqslant 0$, demuestre que g es también continua en 0.

10. Demuestre que $f(x) = |x|$ es continua en la recta real.

Utilice las definiciones del Capítulo 3 de las funciones de los Ejercicios 11-14 para demostrar que estas funciones son continuas en sus respectivos dominios.

11. $\operatorname{sen} x$

12. $\cos x$

13. $\ln x$

14. e^x

15. Demuestre el Teorema 4.

16. Suponga que toda función continua y acotada en $[a, b]$ debe tomar un valor máximo y mínimo en dicho intervalo. Sin utilizar el Teorema 5, demuestre que toda función f que sea continua en $[a, b]$ debe estar acotada en dicho intervalo. *Sugerencia*: Demuestre que $g(t) = t/(1 + |t|)$ es continua y creciente en la recta real. Considere después $g(f(x))$.

APÉNDICE IV

La integral de Riemann

Parece ser que todos los peregrinos que suben por las laderas del Parnaso matemático, en un punto u otro de su viaje se sentarán e inventarán una o dos integrales definidas que se unirán al montón general.

J. J. Sylvester (1814-1897)

En la Sección 5.3 presentamos la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función f continua en el intervalo cerrado finito $[a, b]$. La integral se definió como un tipo de «límite» de sumas de Riemann formadas definiendo una partición del intervalo $[a, b]$ en pequeños subintervalos. En este apéndice reformularemos la definición de la integral de forma que se pueda utilizar para funciones que no sean necesariamente continuas. En la presentación que sigue sólo supondremos que f está **acotada** en $[a, b]$. Posteriormente demostraremos el Teorema 2 de la Sección 5.3, que asevera que toda función continua es integrable.

Recuérdese que una **partición** P de $[a, b]$ es un conjunto finito y ordenado de puntos $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Esta partición subdivide $[a, b]$ en n subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, donde $n = n(P)$ depende de la partición. La longitud del subintervalo j, $[x_{j-1}, x_j]$, es $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$.

Supongamos que la función f está acotada en $[a, b]$. Dada cualquier partición P, los n conjuntos $S_j = \{f(x) : x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j\}$ tienen cotas superiores mínimas M_j y cotas inferiores máximas m_j, $(1 \leqslant j \leqslant n)$, de forma que

$$m_j \leqslant f(x) \leqslant M_j \quad \text{en} \quad [x_{j-1}, x_j]$$

Definimos sumas de Riemann superior e inferior para f correspondientes a la partición P como

$$U(f, P) = \sum_{j=1}^{n(P)} M_j \Delta x_j \quad \text{y}$$

$$L(f, P) = \sum_{j=1}^{n(P)} m_j \Delta x_j$$

Véase la Figura IV.1. Nótese que si f es continua en $[a, b]$, entonces m_j y M_j son, de hecho, los valores mínimo y máximo de f en $[x_{j-1}, x_j]$ (por el Teorema 6 del Apéndice II), es decir, $m_j = f(l_j)$ y $M_j = f(u_j)$, siendo $f(l_j) \leqslant f(x) \leqslant f(u_j)$ para $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j$.

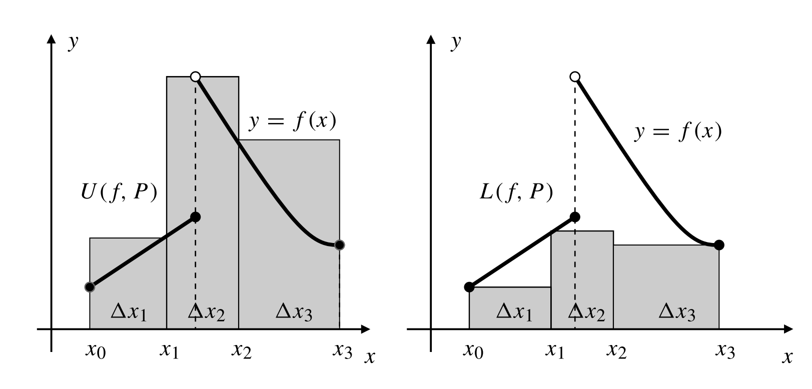


Figura IV.1 Sumas superior e inferior correspondientes a la partición $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$.

Si P es una partición cualquiera de $[a, b]$ y creamos una nueva partición P^* añadiendo nuevos puntos de subdivisión a los de P, y subdividiendo así los subintervalos de P en otros más pequeños, denominaremos a P^* un **refinamiento** de P.

TEOREMA 1 Si P^* es un refinamiento de P, entonces $L(f, P^*) \geqslant L(f, P)$ y $U(f, P^*) \leqslant U(f, P)$.

DEMOSTRACIÓN Si S y T son conjuntos de números reales, y $S \subset T$, entonces todo límite inferior (o superior) de T es también una cota inferior (o cota superior) de S. Por lo tanto, la máxima cota inferior de S es como mínimo tan grande como la de T, y la cota superior mínima de S no es mayor que la de T.

Sea P una partición dada de $[a, b]$ y formemos una nueva partición P' añadiendo un nuevo punto de subdivisión a los de P, por ejemplo, el punto k que divide el j-ésimo subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ de P en dos subintervalos $[x_{j-1}, k]$ y $[k, x_j]$ (*véase* la Figura IV.2). Sea m_j, m_j' y m_j'' las máximas cotas inferiores de los conjuntos de valores de $f(x)$ en los intervalos $[x_{j-1}, x_j]$, $[x_{j-1}, k]$ y $[k, x_j]$, respectivamente. Entonces, $m_j \leqslant m_j'$ y $m_j \leqslant m_j''$. Por lo tanto, $m_j(x_j - x_{j-1}) \leqslant m_j'(k - x_{j-1}) + m_j''(x_j - k)$, por lo que $L(f, P) \leqslant L(f, P')$.

Si P^* es un refinamiento de P, se puede obtener añadiendo un punto cada vez a los puntos de P y, por tanto, $L(f, P) \leqslant L(f, P^*)$. Se puede demostrar que $U(f, P) \geqslant U(f, P^*)$, de forma similar.

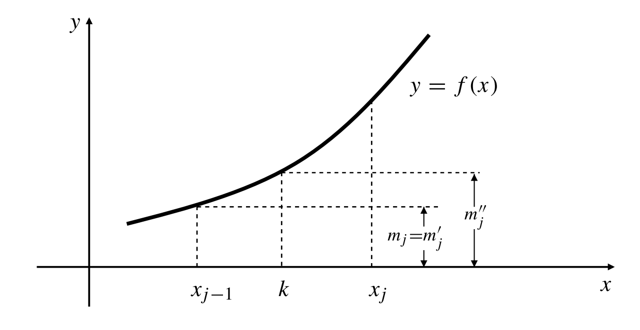


Figura IV.2 Adición de un punto a una partición.

TEOREMA 2 Si P y P' son dos particiones cualesquiera de $[a, b]$, entonces $L(f, P) \leqslant U(f, P')$.

DEMOSTRACIÓN Combinemos los puntos de subdivisión de P y P' para formar una nueva partición P^*, que es un refinamiento tanto de P como de P'. Entonces, por el Teorema 1,

$$L(f, P) \leqslant L(f, P^*) \leqslant U(f, P^*) \leqslant U(f, P')$$

Ninguna suma inferior puede superar a una suma superior.

El Teorema 2 demuestra que el conjunto de valores de $L(f, P)$ para f fijo y varias particiones P de $[a, b]$ es un conjunto acotado; toda suma superior es una cota superior de este conjunto. Por completitud, el conjunto tiene una cota superior mínima, que denominaremos I_*. Por tanto, $L(f, P) \leqslant I_*$ para toda partición P. De forma similar, existe una cota inferior máxima I^* para el conjunto de valores $U(f, P)$ correspondiente a diferentes particiones P. Se deduce que $I_* \leqslant I^*$ (*véase* el Ejercicio 4 al final de este apéndice).

DEFINICIÓN 1 La integral de Riemann

Si f está acotada en $[a, b]$ e $I_* = I^*$, entonces se dice que f es **integrable por Riemann**, o simplemente **integrable** en $[a, b]$, y entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_* = I^*$$

es la **integral (de Riemann)** de f en $[a, b]$.

El siguiente teorema proporciona una forma conveniente de determinar si una función acotada dada es integrable:

TEOREMA 3 La función acotada f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si para todo número positivo ϵ existe una partición P de $[a, b]$ tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$; entonces

$$I^* \leqslant U(f, P) < L(f, P) + \epsilon \leqslant I_* + \epsilon$$

Como $I^* < I_* + \epsilon$ debe cumplirse para todo $\epsilon > 0$, se deduce que $I^* \leqslant I_*$. Como ya sabemos que $I^* \geqslant I_*$, tenemos $I^* = I_*$ y f es integrable en $[a, b]$.

A la inversa, si tenemos $I^* = I_*$ y $\epsilon > 0$, podemos obtener una partición P' tal que $L(f, P') > I_* - \epsilon/2$ y otra partición P'' tal que $U(f, P'') < I^* + \epsilon/2$. Si P es un refinamiento común de P' y P'', entonces por el Teorema 1 tenemos que se requiere que $U(f, P) - L(f, P) \leqslant U(f, P'') - L(f, P') < (\epsilon/2) + (\epsilon/2) = \epsilon$.

Ejemplo 1 Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \text{ o } 1 < x \leqslant 2 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

Demuestre que f es integrable en $[0, 2]$ y calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Solución Supongamos $\epsilon > 0$. Sea $P = \{0, 1 - \epsilon/3, 1 + \epsilon/3, 2\}$. Entonces $L(f, P) = 0$ ya que $f(x) = 0$ en puntos de cada uno de los subintervalos en los que P subdivide a $[0, 2]$ (*véase* la Figura IV.3). Como $f(1) = 1$, tenemos

$$U(f, P) = 0\left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) + 1\left(\frac{2\epsilon}{3}\right) + 0\left(2 - \left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right)\right) = \frac{2\epsilon}{3}$$

Por tanto, $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ y f es integrable en $[0, 2]$. Como $L(f, P) = 0$ para toda partición, $\int_0^2 f(x)\,dx = I_* = 0$.

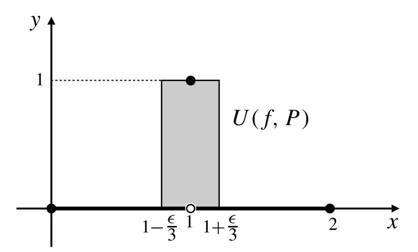


Figura IV.3

Ejemplo 2 Sea $f(x)$ una función definida en [0, 1] como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si} \quad x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Demuestre que f no es integrable en [0, 1].

DEMOSTRACIÓN Todo subintervalo de [0, 1] con longitud positiva contiene números racionales e irracionales. Por tanto, para toda partición P de [0, 1] tenemos $L(f, P) = 0$ y $U(f, P) = 1$. Entonces, $I_* = 0$ e $I^* = 1$, por lo que f no es integrable en [0, 1].

■

Continuidad Uniforme

Cuando aseguramos que una función f es continua en el intervalo $[a, b]$, esto implica que para todo x en dicho intervalo y para todo $\epsilon > 0$ se puede encontrar un entero positivo δ que depende de x y ϵ tal que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ siempre que $|y - x| < \delta$ e y está en $[a, b]$. De hecho, sin embargo, es posible obtener un número δ *que depende sólo de* ϵ tal que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ se cumple siempre que x e y pertenezcan a $[a, b]$ y cumplan $|y - x| < \delta$. Describiremos este fenómeno diciendo que f es **uniformemente continua** en el intervalo $[a, b]$.



TEOREMA 4 Si f es continua en el intervalo cerrado finito $[a, b]$, entonces es uniformemente continua en dicho intervalo.

DEMOSTRACIÓN Supongamos $\epsilon > 0$. Definamos números x_n en $[a, b]$ y subconjuntos S_n de $[a, b]$ como sigue:

$$x_1 = a$$
$$S_1 = \left\{ x : x_1 < x \leqslant b \text{ y } |f(x) - f(x_1)| \geqslant \frac{\epsilon}{3} \right\}$$

Si S_1 es vacío, terminamos. Si no, hacemos

$$x_2 = \text{la máxima cota inferior de } S_1$$
$$S_2 = \left\{ x : x_2 < x \leqslant b \text{ y } |f(x) - f(x_2)| \geqslant \frac{\epsilon}{3} \right\}$$

Si S_2 es vacío, terminamos. Si no, procedemos a definir x_3 y S_3 de forma análoga. Procedemos de esta forma en la medida en que podamos; si han sido definidos x_n y S_n y S_n no es vacío, definimos

$$x_{n+1} = \text{máxima cota inferior de } S_n$$
$$S_{n+1} = \left\{ x : x_{n+1} < x \leqslant b \text{ y } |f(x) - f(x_{n+1})| \geqslant \frac{\epsilon}{3} \right\}$$

En cualquier etapa donde S_n no sea vacía, la continuidad de f en x_n asegura que $x_{n+1} > x_n$ y $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| = \epsilon/3$.

Debemos considerar dos posibilidades para el procedimiento anterior: o bien S_n es vacía para algún n, o bien S_n es no vacía para todo n.

Supongamos que S_n es no vacío para todo n. Entonces hemos construido una secuencia infinita y creciente $\{x_n\}$ en $[a, b]$ que, estando acotada superiormente (por b), debe tener un límite por completitud (Teorema 2 del Apéndice II). Sea $\lim x_n = x^*$. Tenemos $a \leqslant x^* \leqslant b$. Como f es continua en x^*, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x^*)| < \epsilon/8$ siempre que $|x - x^*| < \delta$ y x esté en $[a, b]$. Como $\lim x_n = x^*$ existe un entero positivo N tal que $|x_n - x^*| < \delta$ siempre que $n \geqslant N$. Para ese n tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{3} = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| &= |f(x_{n+1}) - f(x^*) + f(x^*) - f(x_n)| \\ &\leqslant |f(x_{n+1}) - f(x^*)| + |f(x_n) - f(x^*)| \\ &< \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{8} = \frac{\epsilon}{4}\end{aligned}$$

que es claramente imposible. Por tanto S_n debe, de hecho, ser vacía para algún n.

Supongamos que S_N es vacío. Por tanto, S_n es no vacío para $n < N$, y el procedimiento para definir x_n se detiene para x_N. Como S_{N-1} es no vacío, $x_N < b$. En este caso definimos $x_{N+1} = b$ y sea

$$\delta = \text{mín}\,\{x_2 - x_1, x_3 - x_2, ..., x_{N+1} - x_N\}$$

El mínimo de un conjunto finito de números positivos es un número positivo, por lo que $\delta > 0$. Si x está en $[a, b]$, entonces x pertenece a uno de los intervalos $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_N, x_{N+1}]$. Supongamos que x está en $[x_k, x_{k+1}]$. Si y está en $[a, b]$, y $|y - x| < \delta$, entonces y está o en el mismo subintervalo que x o en uno adyacente; es decir, y está en $[x_j, x_{j+1}]$, con $j = k - 1$, k, o $k + 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x)| &= |f(y) - f(x_j) + f(x_j) - f(x_k) + f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant |f(y) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Estamos ahora en condiciones de demostrar que una función continua es integrable.

TEOREMA 5 Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN Por el Teorema 4, f es uniformemente continua en $[a, b]$. Sea $\epsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/(b - a)$ siempre que $|x - y| < \delta$ y x e y pertenezcan a $[a, b]$. Escojamos una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ para la que cada subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ tenga longitud $\Delta x_j < \delta$. Entonces la máxima cota inferior, m_j, y la mínima cota superior, M_j, del conjunto de valores de $f(x)$ en $[x_{j-1}, x_j]$ cumplen $M_j - m_j < \epsilon/(b - a)$. De acuerdo con esto,

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{j=1}^{n(P)} \Delta x_j = \frac{\epsilon}{b - a}\,(b - a) = \epsilon$$

Por tanto, f es integrable en $[a, b]$, como queríamos demostrar.

Ejercicios: Apéndice IV

1. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$. Demuestre que f es integrable en [0, 2] y calcule el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$.

2. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1/n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{para todos los demás valores de } x. \end{cases}$
Demuestre que f es integrable en [0, 1] y calcule el valor de la integral $\int_0^1 f(x)\,dx$.

3. Sea $f(x) = 1/n$ si $x = m/n$ con m, n enteros sin factores comunes, y sea $f(x) = 0$ si x es un número irracional. Por tanto, $f(1/2) = 1/2$, $f(1/3) = f(2/3) = 1/3$, $f(1/4) = f(3/4) = 1/4$, etc. Demuestre que f es integrable en [0, 1] y calcule $\int_0^1 f(x)\,dx$. *Sugerencia*: Demuestre que para todo $\epsilon > 0$ sólo un número finito de puntos en la gráfica de f en [0, 1] está por encima de la recta $y = \epsilon$.

4. Demuestre que I_* e I^* definidas en el párrafo que sigue al Teorema 2 cumplen $I_* \leqslant I^*$ como allí se indica.

5. Demuestre los apartados (c), (d), (e), (f), (g) y (h) del Teorema 3 de la Sección 5.4 para la integral de Riemann.

6. Utilice la definición de continuidad uniforme dada en el Teorema 4 del párrafo anterior para demostrar que $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua en [0, 1]. No utilice el propio Teorema 4.

7. Demuestre directamente a partir de la definición de continuidad uniforme (sin utilizar el Teorema 5 del Apéndice II) que una función f uniformemente continua en un intervalo abierto finito está necesariamente acotada en dicho intervalo.

8. Si f es acotada e integrable en $[a, b]$, demuestre que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es uniformemente continua en $[a, b]$ (si f fuera continua, tendríamos un resultado más fuerte; F sería diferenciable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$, que es el Teorema Fundamental del Cálculo).



APÉNDICE V

Realización de cálculos con Maple

Pienso, luego existo

René Descartes (1596-1650)
de *Discurso del método*

IA [Inteligencias Artificiales] piensan, luego existo

David Braue
de *APC Magazine, noviembre 2003*

Los sistemas de matemáticas por computador como Maple y Mathematica son capaces de realizar la mayor parte de las operaciones tediosas al practicar las matemáticas, especialmente las operaciones intensivas necesarias en muchos problemas de aplicación (por supuesto, no pueden pensar por nosotros, y tenemos que entender completamente lo que estamos haciendo, así como las limitaciones de estos programas). A lo largo de este libro hemos insertado material que ilustra cómo utilizar **Maple** para realizar operaciones comunes en el cálculo. Estas inserciones varían en longitud desde simples párrafos y observaciones hasta secciones enteras. Para ayudarnos a localizar el material de Maple apropiado para temas específicos, incluimos a continuación una lista con referencias a las secciones del texto que contienen ejemplos de Maple y las páginas donde comienzan.

Nótese, sin embargo, que este material asume que estamos familiarizados con los aspectos básicos de inicio de una sesión en Maple, preferiblemente con una interfaz de usuario gráfica que presenta el signo $>$ para solicitar una entrada de usuario. En este texto la entrada se muestra en tipo Courier, y normalmente finaliza con un punto y coma (;) seguido por la pulsación de la tecla <`enter`>, que omitimos en los ejemplos presentados.

La salida impresa por Maple se presenta en el centro de la ventana, en tipo normal. Por ejemplo

```
> factor(x^2-x-2);
```

$$(x+1)(x-2)$$

La salida se puede suprimir utilizando dos puntos (:) en vez de punto y coma al final de la entrada.

El autor ha utilizado Maple 9 en la preparación de los ejemplos de la presente edición. Dichos ejemplos no pretenden ser completos ni exhaustivos. Para un tratamiento más completo de Maple como una herramienta de cálculo, el autor recomienda con encarecimiento el excelente manual de laboratorio de Maple *Calculus: The Maple Way*, escrito por su colega, el profesor Robert Israel, de la Universidad de British Columbia. El libro se encuentra publicado por Pearson Canada bajo el logo de Addison Wesley.

Lista de ejemplos de Maple con su presentación

Varios ejemplos de la lista anterior ocupan varias páginas. Sólo se indica la primera.

Respuestas a los ejercicios de numeración impar

Capítulo P

Preliminares

Sección P.1 (página 10)

1. $0.\overline{2}$

3. $4/33$

5. $1/7 = 0.\overline{142857}$, $2/7 = 0.\overline{285714}$, $3/7 = 0.\overline{428571}$, $4/7 = 0.\overline{571428}$, $5/7 = 0.\overline{714285}$, $6/7 = 0.\overline{857142}$

7. $[0, 5]$

9. $(-\infty, -6) \cup (-5, \infty)$

11. $(-2, \infty)$

13. $(-\infty, -2)$

15. $(-\infty, 5/4]$

17. $(0, \infty)$

19. $(-\infty, 5/3) \cup (2, \infty)$

21. $[0, 2]$

23. $(-2, 0) \cup (2, \infty)$

25. $[-2, 0) \cup [4, \infty)$

27. $x = -3, 3$

29. $t = -1/2, -9/2$

31. $s = -1/3, 17/3$

33. $(-2, 2)$

35. $[-1, 3]$

37. $\left(\frac{5}{3}, 3\right)$

39. $[0, 4]$

41. $x > 1$

43. verdadero si $a \geqslant 0$, falso si $a < 0$

Sección P.2 (página 18)

1. $\Delta x = 4$, $\Delta y = -3$, dist $= 5$

3. $\Delta x = -4$, $\Delta y = -4$, dist $= 4\sqrt{2}$

5. $(2, -4)$

7. círcunferencia, centro $(0, 0)$, radio 1

9. puntos en el interior de un círculo, centro $(0, 0)$, radio 1

11. puntos sobre y por encima de la parábola $y = x^2$

13. (a) $x = -2$, (b) $y = 5/3$

15. $y = x + 2$

17. $y = 2x + b$

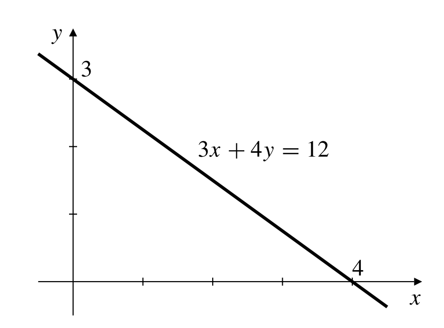
19. por encima

21. $y = 3x/2$

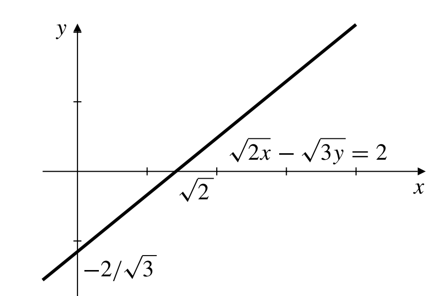
23. $y = (7 - x)/3$

25. $y = \sqrt{2} - 2x$

27. 4, 3



29. $\sqrt{2}$, $-2/\sqrt{3}$



31. (a) $y = x - 1$, (b) $y = -x + 3$

33. $(2, -3)$

37. 5

39. 23,000 \$

43. $(-2, -2)$

45. $\left(\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2), \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2)\right)$

47. circunferencia, centro $(2, 0)$, radio 4

49. perp. si $k = -8$, paralela si $k = 1/2$

Sección P.3 (página 28)

1. $x^2 + y^2 = 16$

3. $x^2 + y^2 + 4x = 5$

5. $(1, 0)$, 2

7. $(1, -2)$, 3

9. exterior de la circunferencia, centro (0, 0), radio 1

11. disco cerrado, centro $(-1, 0)$, radio 2

13. región con forma de anillo entre las circunferencias de radio 1 y 2 centradas en (0, 0)

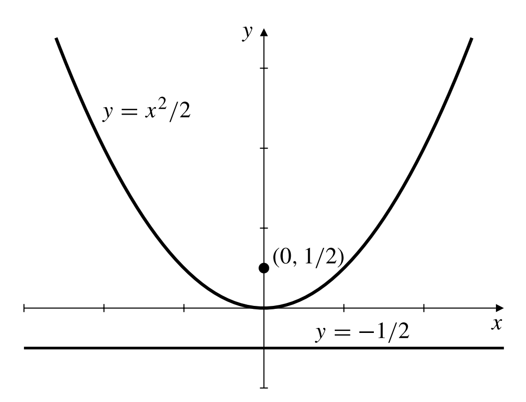
15. región del primer octante en el interior de las dos circunferencias de radio 1 centradas en (1, 0) y (0, 1)

17. $x^2 + y^2 + 2x - 4y < 1$

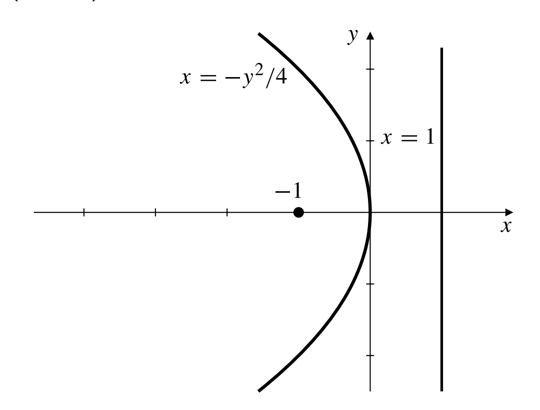
19. $x^2 + y^2 < 2,\ x \geqslant 1$

21. $x^2 = 16y$ **23.** $y^2 = 8x$

25. $(0, 1/2)$, $y = -1/2$



27. $(-1, 0)$, $x = 1$



29. (a) $y = x^2 - 3$,
(b) $y = (x - 4)^2$,
(c) $y = (x - 3)^2 + 3$,
(d) $y = (x - 4)^2 - 2$

31. $y = \sqrt{(x/3) + 1}$

33. $y = \sqrt{(3x/2) + 1}$

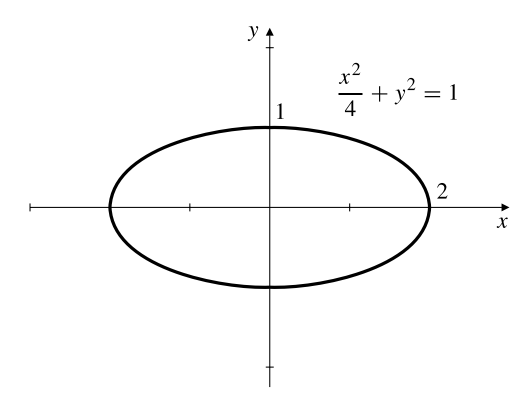
35. $y = -(x + 1)^2$

37. $y = (x - 2)^2 - 2$

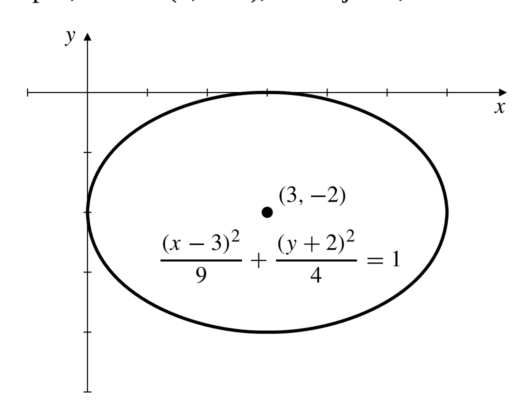
39. (2, 7), (1, 4)

41. $(4, -3)$ $(-4, 3)$

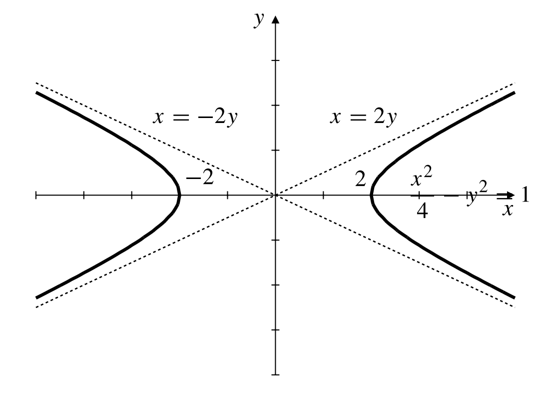
43. elipse, centro (0, 0), semiejes 2, 1



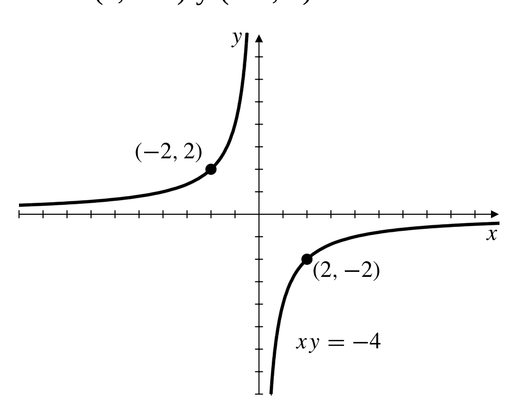
45. elipse, centro $(3, -2)$, semiejes 3, 2



47. hipérbola, centro (0, 0), asíntotas $x = \pm 2y$, vértices $(\pm 2, 0)$

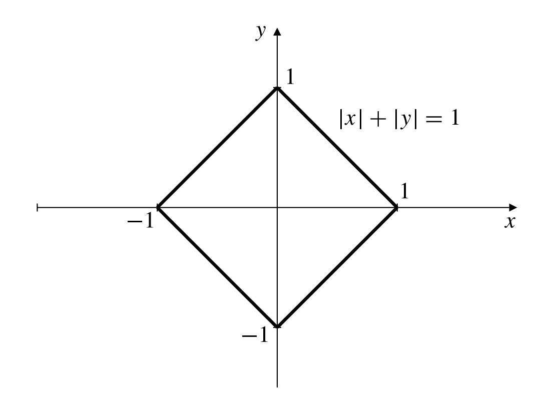


49. hipérbola rectangular, asíntotas $x = 0$ e $y = 0$, vértices $(2, -2)$ y $(-2, 2)$



51. (a) reflejar la gráfica en el eje y, (b) reflejar la gráfica en el eje x.

53.



Sección P.4 (página 38)

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}(f) = [1, \infty)$

3. $\mathcal{D}(G) = (-\infty, 4]$, $\mathcal{R}(g) = [0, \infty)$

5. $\mathcal{D}(h) = (-\infty, 2)$, $\mathcal{R}(h) = (-\infty, \infty)$

7. Sólo (ii) es la gráfica de una función. Las rectas verticales pueden cruzar a las otras en más de un punto.

11. par, simétrica respecto al eje y

13. impar, simétrica respecto a $(0, 0)$

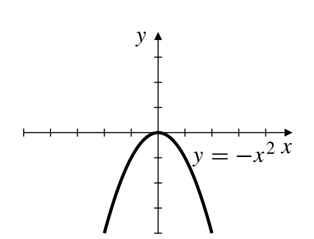
15. simétrica respecto a $(2, 0)$

17. simétrica respecto a $x = 3$

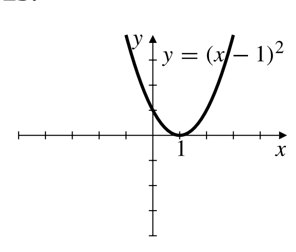
19. par, simétrica respecto al eje y

21. no simétrica

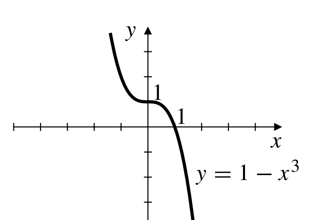
23.



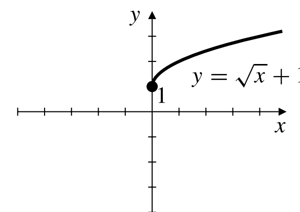
25.



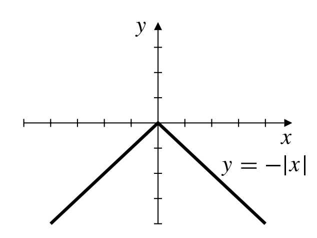
27.



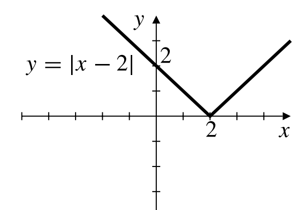
29.



31.

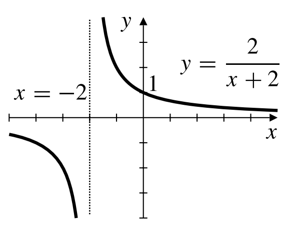


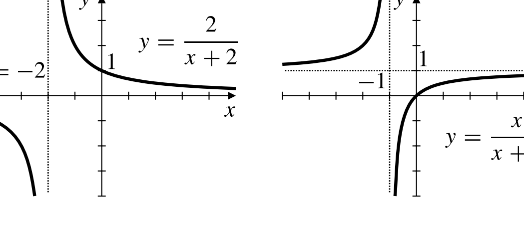
33.

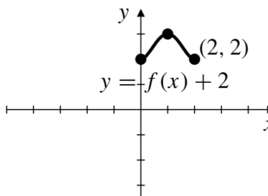


35.

37.



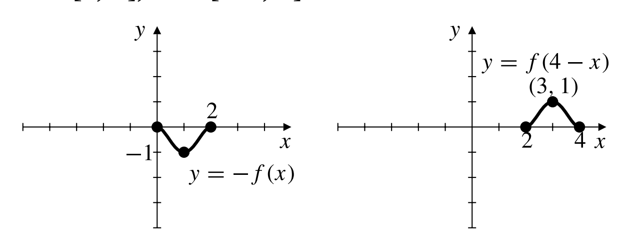




39. $\mathcal{D} = [0, 2]$, $\mathcal{R} = [2, 3]$

41. $\mathcal{D}[-2, 0]$, $\mathcal{R}[0, 1]$

43. $\mathcal{D}[0, 2]$, $\mathcal{R} = [-1, 0]$



45. $\mathcal{D} = [2, 4]$, $\mathcal{R} = [0, 1]$ **47.** $[-0.18, 0.68]$

49. $y = 3/2$

51. $(2, 1)$, $y = x - 1$, $y = 3 - x$

53. $f(x) = 0$

Sección P.5 (página 45)

1. Los dominios de $f + g$, $f - g$, fg y g/f son $[1, \infty)$. El dominio de f/g es $(1, \infty)$.

$(f + g)(x) = x + \sqrt{x - 1}$

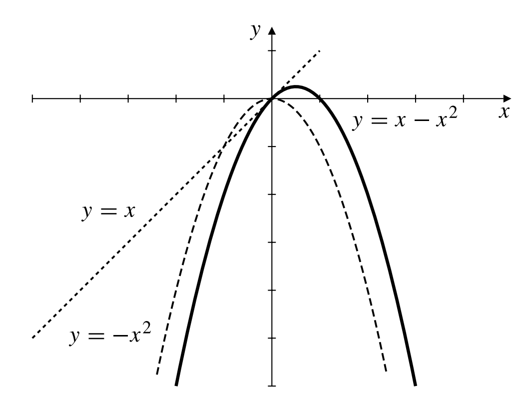
$(f - g)(x) = x - \sqrt{x - 1}$

$(fg)(x) = x\sqrt{x - 1}$

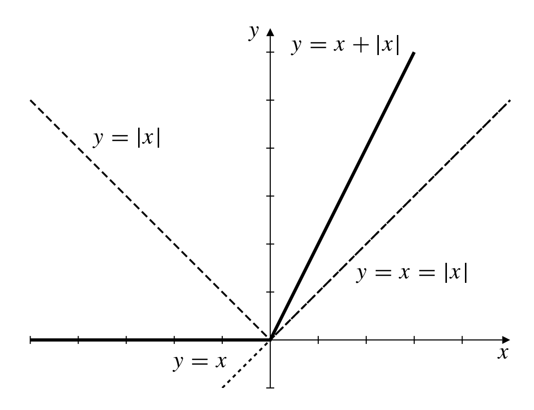
$(f/g)(x) = x/\sqrt{x - 1}$

$(g/f)(x) = \sqrt{x - 1}/x$

3.



5.

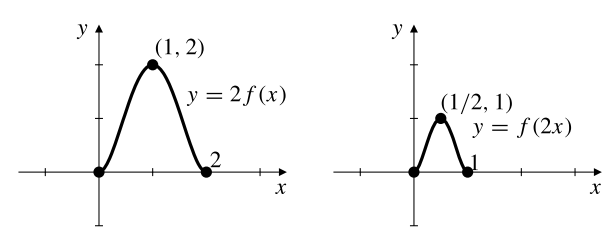


7. (a) 2, (b) 22, (c) $x^2 + 2$, (d) $x^2 + 10x + 22$, (e) 5, (f) -2, (g) $x + 10$, (h) $x^4 - 6x^2 + 6$

9. (a) $(x - 1)/x$, $x \neq 0, 1$,
(b) $1/(1 - \sqrt{x - 1})$ en $[1, 2) \cup (2, \infty)$
(c) $\sqrt{x/(1 - x)}$, en $[0, 1)$
(d) $\sqrt{\sqrt{x - 1} - 1}$, en $[2, \infty)$

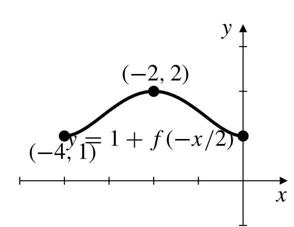
11. $(x + 1)^2$ **13.** x^2

15. $1/(x - 1)$ **19.** $\mathcal{D} = [0, 2]$, $\mathcal{R} = [0, 2]$



21. $\mathcal{D} = [0, 1]$, $\mathcal{R} = [0, 1]$

23. $\mathcal{D} = [-4, 0]$, $\mathcal{R} = [1, 2]$

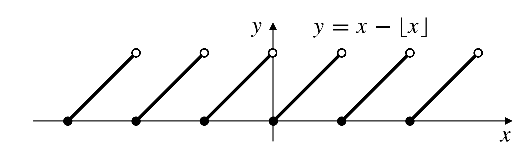


25.

27. (a) $A = 0$, B arbitrario, o $A = 1$, $B = 0$
(b) $A = -1$, B arbitrario, o $A = 1$, $B = 0$

29. todos enteros

31.



33. f^2, g^2, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ son pares
fg, f/g, g/f, $g \circ g$ son impares
$f + g$ no es ninguna de las dos cosas, a menos que, o bien $f(x) = 0$ o bien $g(x) = 0$.

Sección P.6 (página 52)

1. raíces -5 y -2; $(x + 5)(x + 2)$

3. raíces $-1 \pm i$; $(x + 1 - i)(x + 1 + i)$

5. raíces $1/2$ (doble) y $-1/2$ (doble); $(2x - 1)^2 (2x + 1)^2$

7. raíces $-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$; $(x+1)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

9. raíces 1 (triple) y -1 triple; $(x-1)^3(x+1)^3$

11. raíces -2, i, -1, $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$; $(x+2)(x-1)(x+i)(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$

13. $x + \frac{2x-1}{x^2-2}$ **15.** $x - 2 + \frac{7x+6}{x^2+2x+3}$

Sección P.7 (página 68)

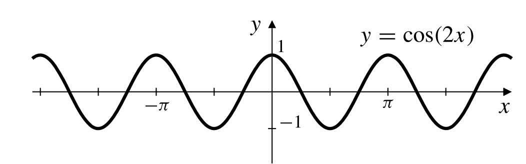
1. $-1/\sqrt{2}$ **3.** $\sqrt{3}/2$

5. $(\sqrt{3}-1)/(2\sqrt{2})$ **7.** $-\cos x$

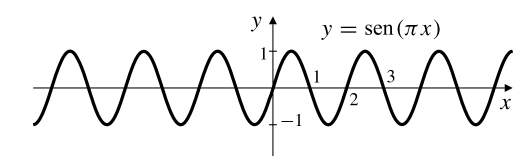
9. $-\cos x$ **11.** $1/(\operatorname{sen} x \cos x)$

17. $3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$

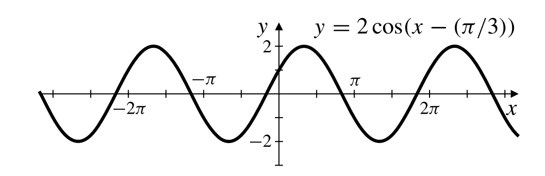
19. periodo π



21. periodo 2



23.



25. $\cos\theta = -4/5$, $\tan\theta = -3/4$

27. $\operatorname{sen}\theta = -2\sqrt{2}/3$, $\tan\theta = -2\sqrt{2}$

29. $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$, $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$

31. $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ **33.** $b = 5/\sqrt{3}$, $c = 10/\sqrt{3}$

35. $a = b \tan A$ **37.** $a = b \cot B$

39. $c = b \sec A$ **41.** $\operatorname{sen} A = \sqrt{c^2 - b^2}/c$

43. $\operatorname{sen} B = 3/(4\sqrt{2})$ **45.** $\operatorname{sen} B = \sqrt{135}/16$

47. $6/(1+\sqrt{3})$

49. $b = 4 \operatorname{sen} 40^{\circ} / \operatorname{sen} 70^{\circ} \approx 2.736$

51. aprox. 16.98 m

Capítulo 1
Límites y continuidad

Sección 1.1 (página 76)

1. $((t+h)^2 - t^2)/h$ m/s **3.** 4 m/s

5. -3 m/s, 3 m/s, 0 m/s

7. a la izquierda, parado, a la derecha

9. peso 2, moviéndose hacia abajo

11. -1 ft/s, peso moviéndose hacia abajo

13. día 45

Sección 1.2 (página 84)

1. (a) 1, (b) 0, (c) 1 **3.** 1

5. 0 **7.** 1

9. 2/3 **11.** 0

13. 0 **15.** no existe

17. 1/6 **19.** 0

21. -1 **23.** no existe

25. 2 **27.** 3/8

29. $-1/2$ **31.** 8/3

33. 1/4 **35.** $1/\sqrt{2}$

37. $2x$ **39.** $-1/x^2$

41. $1/(2\sqrt{x})$ **43.** 1

45. 1/2 **47.** 1

49. 0 **51.** 2

53. no existe **55.** no existe

57. $-1/(2a)$ **59.** 0

61. -2 **63.** π^2

65. (a) 0, (b) 8, (c) 9, (d) -3

67. 5 **69.** 1

71. 0.7071 **73.** $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

75. 2

77. $x^{1/3} < x^3$ en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$,
$x^{1/3} > x^3$ en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$,
$\lim_{x\to a} h(x) = a$ para $a = -1$, 0 y 1

Sección 1.3 (página 92)

1. $1/2$ **3.** $-3/5$

5. 0 **7.** -3

9. $-2/\sqrt{3}$ **11.** no existe

13. $+\infty$ **15.** 0

17. $-\infty$ **19.** $-\infty$

21. ∞ **23.** $-\infty$

25. ∞ **27.** $-\sqrt{2}/4$

29. -2 **31.** -1

33. horiz.: $y = 0$, $y = -1$, vert.: $x = 0$

35. 1 **37.** 1

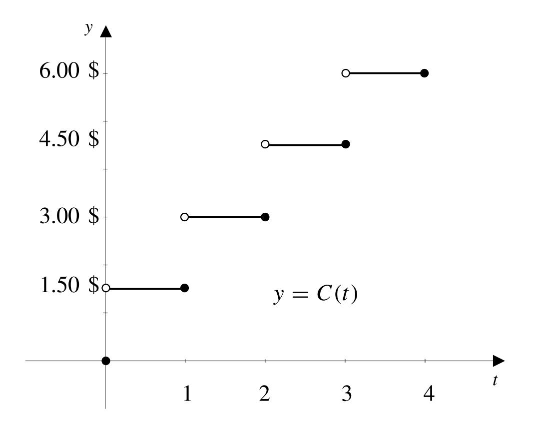
39. $-\infty$ **41.** 2

43. -1 **45.** 1

47. 3 **49.** no existe

51. 1

53. $C(t)$ tiene límite en todo real t, excepto en los enteros.
$\lim_{t\to t_0-} C(t) = C(t_0)$ en todas partes, pero
$\lim_{t\to t_0+} C(t) = \begin{cases} C(t_0) & \text{si } t_0 \text{ no es integral} \\ C(t_0)+1.5 & \text{si } t_0 \text{ es entero} \end{cases}$



55. (a) B, (b) A, (c) A, (d) A

Sección 1.4 (página 103)

1. en -2, continua por la derecha, y cont. en -1 disc., en 0 disc. pero cont. por la izquierda, en 1 disc. y cont. por la derecha, en 2 disc.

3. no máx. abs., mín. abs. 0 **5.** no

7. cont. en todas partes

9. cont. en todas partes excepto en $x = 0$, disc. en $x = 0$

11. cont. en todas partes excepto en los enteros, discontinua pero continua por la izquierda en los enteros.

13. 4, $x + 2$ **15.** $1/5$, $(t-2)/(t+2)$

17. $k = 8$ **19.** no máx, mín $= 0$

21. 16 **23.** 5

25. f positiva en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$; f negativa en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$

27. f positiva en $(-\infty, -2)$, $(-1, 1)$ y $(2, \infty)$; f negativa en $(-2, -1)$ y $(1, 2)$

35. máx. 1.593 en -0.831, mín. 0.756 en 0.629

37. máx. $31/3 \approx 10.333$ en $x = 3$, mín. 4.762 en $x = 1.260$

39. 0.682

41. -0.6367326508, 1.409624004

Sección 1.5 (página 109)

1. entre 12 ºC y 20 ºC

3. (1.99, 2.01) **5.** (0.81, 1.21)

7. $\delta = 0.01$ **9.** $\delta \approx 0.0165$

Ejercicios de repaso (página 111)

1. 13 **3.** 12

5. 4 **7.** no existe

9. no existe **11.** $-\infty$

13. $12\sqrt{3}$ **15.** 0

17. no existe **19.** $-1/3$

21. $-\infty$ **23.** ∞

25. no existe **27.** 0

29. 2 **31.** no disc.

33. disc. y cont. por la izquierda en 2

35. disc. y cont. por la derecha en $x = 1$

37. no disc.

Problemas avanzados (página 111)

1. a la derecha **3.** $-1/4$

5. 3 **7.** V, F, V, F, F

Capítulo 2
Diferenciación

Sección 2.1 (página 119)

1. $y = 3x - 1$ **3.** $y = 8x - 13$

5. $y = 12x + 24$ **7.** $x - 4y = -5$

9. $x - 4y = -2$ **11.** $y = 2x_0x - x_0^2$

13. no **15.** sí, $x = -2$

17. sí, $x = 0$

19. (a) $3a^2$; (b) $y = 3x - 2$ e $y = 3x + 2$

21. $(1, 1), (-1, 1)$ **23.** $k = 3/4$

25. tangente horiz. en $(0, 0)$, $(3, 108)$, $(5, 0)$

27. tangente horiz. en $(-0.5, 1.25)$, no tangentes en $(-1, 1)$ y $(1, -1)$

29. tangente horiz. en $(0, -1)$

31. no, considere $y = x^{2/3}$ en $(0, 0)$

Sección 2.2 (página 128)

1.

3.

5. en $[-2, 2]$ excepto en $x = -1$ y $x = 1$

7. pendiente positiva para $x < 1.5$, negativa para $x > 1.5$; tangente horizontal en $x = 1.5$

9. puntos singulares en $x = -1, 0, 1$, tangentes horizontales alrededor de $x = \pm 0.57$

11. $2x - 3$ **13.** $3x^2$

15. $\dfrac{1}{\sqrt{2t+1}}$ **17.** $1 - \dfrac{1}{x^2}$

19. $-\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ **21.** $-\dfrac{1}{2(1+x)^{3/2}}$

23. Defina $f(0) = 0$, f no es diferenciable en 0

25. en $x = -1$ y $x = -2$

27.

x	$\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$
1.9	-0.26316
1.99	-0.25126
1.999	-0.25013
1.9999	-0.25001

x	$\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$
2.1	-0.23810
2.01	-0.24876
2.001	-0.24988
2.0001	-0.24999

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\bigg|_{x=2} = -\frac{1}{4}$$

29. $x - 6y = -15$

31. $y = \dfrac{2}{a^2+a} - \dfrac{2(2a+1)}{(a^2+a)^2}(t-a)$

33. $22t^{21}$, todo t **35.** $-(1/3)x^{-4/3}$, $x \neq 0$

37. $(119/4)s^{115/4}$, $s \geqslant 0$ **39.** -16

41. $1/(8\sqrt{2})$ **43.** $y = a^2x - a^3 + \dfrac{1}{a}$

45. $y = 6x - 9$ e $y = -2x - 1$

47. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ **51.** $f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$

Sección 2.3 (página 137)

1. $6x - 5$ **3.** $2Ax + B$

5. $\dfrac{1}{3}s^4 - \dfrac{1}{5}s^2$

7. $\dfrac{1}{3}t^{-2/3} + \dfrac{1}{2}t^{-3/4} + \dfrac{3}{5}t^{-4/5}$

9. $x^{2/3} + x^{-8/5}$ **11.** $\dfrac{5}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{5}{6}x^{3/2}$

13. $-\dfrac{2x+5}{(x^2+5x)^2}$ **15.** $\dfrac{\pi^2}{(2-\pi t)^2}$

17. $(4x^2-3)/x^4$

19. $-t^{-3/2}+(1/2)t^{-1/2}+(3/2)\sqrt{t}$

21. $-\dfrac{24}{(3+4x)^2}$ **23.** $\dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1-\sqrt{t})^2}$

25. $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

27. $10+70x+150x^2+96x^3$

29. $2x(\sqrt{x}+1)(5x^{2/3}-2)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+4)(5x^{2/3}-2)$
$+\dfrac{10}{3}x^{-1/3}(x^2+4)(\sqrt{x}+1)$

31. $\dfrac{6x+1}{(6x^2+2x+1)^2}$ **33.** -1

35. 20 **37.** $-\dfrac{1}{2}$

39. $-\dfrac{1}{18\sqrt{2}}$ **41.** $y=4x-6$

43. $(1,2)$ y $(-1,-2)$ **45.** $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3}\right)$

47. $y=b-\dfrac{b^2x}{4}$

49. $y=12x-16$, $y=3x+2$

51. $x/\sqrt{x^2+1}$

Sección 2.4 (página 143)

1. $12(2x+3)^5$ **3.** $-20x(4-x^2)^9$

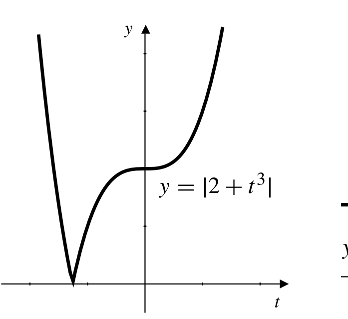
5. $\dfrac{30}{t^2}\left(2+\dfrac{3}{t}\right)^{-11}$ **7.** $\dfrac{12}{(5-4x)^2}$

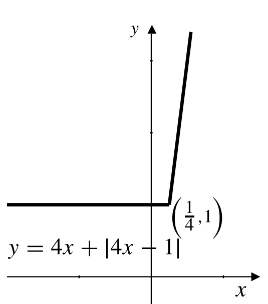
9. $2x\,\mathrm{sgn}\,(1-x^2)$ **11.** $\begin{cases}8 & \text{si } x>1/4\\ 0 & \text{si } x<1/4\end{cases}$

13. $\dfrac{-3}{2\sqrt{3x+4}(2+\sqrt{3x+4})^2}$

15. $-\dfrac{5}{3}\left(1-\dfrac{1}{(u-1)^2}\right)\left(u+\dfrac{1}{u-1}\right)^{-8/3}$

17.





23. $(5-2x)f'(5x-x^2)$ **25.** $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{3+2f(x)}}$

27. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}f'(3+2\sqrt{x})$

29. $15f'(4-5t)f'(2-3f(4-5t))$

31. $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ **33.** 102

35. $-6\left(1-\dfrac{15}{2}(3x)^4((3x)^5-2)^{-3/2}\right)$
$\times\,(x+((3x)^5-2)^{-1/2})^{-7}$

37. $y=2^{3/2}-\sqrt{2}(x+1)$ **39.** $y=\dfrac{1}{27}+\dfrac{5}{162}(x+2)$

41. $\dfrac{x(x^4+2x^2-2)}{(x^2-1)^{5/2}}$ **43.** 857,592

45. no; sí; ambas funciones son iguales a x^2

Sección 2.5 (página 150)

3. $-3\,\mathrm{sen}\,3x$ **5.** $\pi\sec^2\pi x$

7. $3\csc^2(4-3x)$ **9.** $r\,\mathrm{sen}\,(s-rx)$

11. $2\pi x\cos(\pi x^2)$ **13.** $\dfrac{-\mathrm{sen}\,x}{2\sqrt{1+\cos x}}$

15. $-(1+\cos x)\,\mathrm{sen}\,(x+\mathrm{sen}\,x)$

17. $(3\pi/2)\,\mathrm{sen}^2(\pi x/2)\cos(\pi x/2)$

19. $a\cos 2at$ **21.** $2\cos(2x)+2\,\mathrm{sen}\,(2x)$

23. $\sec^2 x-\csc^2 x$ **25.** $\tan^2 x$

27. $-t\,\mathrm{sen}\,t$ **29.** $1/(1+\cos x)$

31. $2x\cos(3x)-3x^2\,\mathrm{sen}\,(3x)$

33. $2x[\sec(x^2)\tan^2(x^2)+\sec^3(x^2)]$

35. $-\sec^2 t \operatorname{sen}(\tan t)\cos(\cos(\tan t))$

39. $y = \pi - x,\ y = x - \pi$

41. $y = 1 - (x - \pi)/4,\ y = 1 + 4(x - \pi)$

43. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{180\sqrt{2}}(x - 45)$

45. $\pm(\pi/4, 1)$ **49.** sí, (π, π)

51. sí, $(2\pi/3, (2\pi/3) + \sqrt{3}), (4\pi/3, (4\pi/3) - \sqrt{3})$

53. 2 **55.** 1

57. 1/2

59. un número infinito, 0.336508, 0.161228

Sección 2.6 (página 158)

1. $c = \dfrac{a+b}{2}$ **3.** $c = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

9. crec. en $\left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right)$, decr. en $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

11. crec. en $(-2, 0)$ y $(2, \infty)$; decr. en $(-\infty, -2)$ y $(0, 2)$

13. crec. en $(-\infty, 3)$ y $(5, \infty)$; decr. en $(3, 5)$

15. crec. en $(-\infty, \infty)$

17. Las dos aplicaciones separadas del TVM no deben dar el mismo valor de c.

Sección 2.7 (página 164)

1. 4% **3.** −4%

5. 1% **7.** 6%

9. 8 ft^2/ft

11. $1/\sqrt{\pi A}$ unidades/unidad al cuadrado

13. $16\pi\ \text{m}^3/\text{m}$

15. $\dfrac{dC}{dA} = \sqrt{\dfrac{\pi}{A}}$ unidades de longitud/unidad de área

17. PC. $x = 0$, crec. $x > 0$, decr. $x < 0$

19. PC. $x = 0$, $x = -4$, crec. en $(-\infty, -4)$ y $(0, \infty)$, decr. en $(-4, 0)$

23. 0.535898, 7.464102 **25.** 0, −0.518784

27. (a) 10,500 L/min, 3,500 L/min, (b) 7,000 L/min

29. decrece a 1/8 libras/min

31. (a) 300 \$, (b) $C(101) - C(100) = 299.50$ \$

33. (a) −2.00 \$, (b) 9.11 \$

Sección 2.8 (página 168)

1. $\begin{cases} y' = -14(3-2x)^6 \\ y'' = 168(3-2x)^5 \\ y''' = -1680(3-2x)^4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y' = -12(x-1)^{-3} \\ y'' = 36(x-1)^{-4} \\ y''' = -144(x-1)^{-5} \end{cases}$

5. $\begin{cases} y' = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{3}x^{-4/3} \\ y'' = -\frac{2}{9}x^{-5/3} - \frac{4}{9}x^{-7/3} \\ y''' = \frac{10}{27}x^{-8/3} + \frac{28}{27}x^{-10/3} \end{cases}$

7. $\begin{cases} y' = \frac{5}{2}x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{-1/2} \\ y'' = \frac{15}{4}x^{1/2} - \frac{3}{4}x^{-3/2} \\ y''' = \frac{15}{8}x^{-1/2} + \frac{9}{8}x^{-5/2} \end{cases}$

9. $y' = \sec^2 x$, $y'' = 2\sec^2 x \tan x$, $y''' = 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x$

11. $y' = -2x\operatorname{sen}(x^2)$, $y'' = -2\operatorname{sen}(x^2) - 4x^2\cos(x^2)$, $y''' = -12x\cos(x^2) + 8x^3\operatorname{sen}(x^2)$

13. $(-1)^n n!\, x^{-(n+1)}$ **15.** $n!(2-x)^{-(n+1)}$

17. $(-1)^n n!\, b^n (a+bx)^{-(n+1)}$

19. $f^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k a^n \cos(ax) & \text{si } n = 2k \\ (-1)^{k+1} a^n \operatorname{sen}(ax) & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$

21. $f^{(n)} = (-1)^k[a^n x \operatorname{sen}(ax) - na^{n-1}\cos(ax)]$ si $n = 2k$, o $(-1)^k[a^n x\cos(ax) + na^{n-1}\operatorname{sen}(ax)]$ si $n = 2k+1$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$

23. $-\dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n} 3^n (1-3x)^{-(2n-1)/2}$, $(n = 2, 3, \ldots)$

31. Si $f^{(n)}$ existe en un intervalo I y f se anula $n+1$ puntos distintos de I entonces $f^{(n)}$ se anula en al menos un punto de I.

Sección 2.9 (página 175)

1. $\frac{1-y}{2+x}$ **3.** $\frac{2x+y}{3y^2-x}$

5. $\frac{2-2xy^3}{3x^2y^2+1}$ **7.** $-\frac{3x^2+2xy}{x^2+4y}$

9. $2x+3y=5$ **11.** $y=x$

13. $y=1-\frac{4}{4-\pi}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

15. $y=2-x$ **17.** $\frac{2(y-1)}{(1-x)^2}$

19. $\frac{(2-6y)(1-3x^2)^2}{(3y^2-2y)^3}-\frac{6x}{3y^2-2y}$

21. $-a^2/y^3$ **23.** 0

25. -26

Sección 2.10 (página 181)

1. $5x+C$ **3.** $\frac{2}{3}x^{3/2}+C$

5. $\frac{1}{4}x^4+C$ **7.** $-\cos x+C$

9. $a^2x-\frac{1}{3}x^3+C$ **11.** $\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{9}{4}x^{4/3}+C$

13. $\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C$

15. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)+C$ **17.** $\frac{-1}{1+x}+C$

19. $\frac{1}{3}(2x+3)^{3/2}+C$ **21.** $-\cos(x^2)+C$

23. $\tan x-x+C$ **25.** $(x+\operatorname{sen}x\cos x)/2+C$

27. $y=\frac{1}{2}x^2-2x+3$, todo x

29. $y=2x^{3/2}-15$, $(x>0)$

31. $y=\frac{A}{3}(x^3-1)+\frac{B}{2}(x^2-1)+C(x-1)+1$, (todo x)

33. $y=\operatorname{sen}x+(3/2)$, (todo x)

35. $y=1+\tan x$, $-\pi/2<x<\pi/2$

37. $y=x^2+5x-3$, (todo x)

39. $y=\frac{x^5}{20}-\frac{x^2}{2}+8$, (todo x)

41. $y=1+x-\cos x$, (todo x)

43. $y=3x-\frac{1}{x}$, $(x>0)$

45. $y=-\frac{7\sqrt{x}}{2}+\frac{18}{\sqrt{x}}$, $(x>0)$

Sección 2.11 (página 187)

1. (a) $t>2$, (b) $t<2$, (c) todo t, (d) ningún t, (e) $t>2$, (f) $t<2$, (g) 2, (h) 0

3. (a) $t<-2/\sqrt{3}$ o $t>2/\sqrt{3}$, (b) $-2/\sqrt{3}<t<2/\sqrt{3}$, (c) $t>0$, (d) $t<0$, (e) $t>2/\sqrt{3}$ o $-2/\sqrt{3}<t<0$, (f) $t<-2/\sqrt{3}$ o $0<t<2/\sqrt{3}$, (g) $\pm 12/\sqrt{3}$ a $t=\pm 2/\sqrt{3}$, (h) 12

5. acel. $=9.8$ m/s^2 hacia abajo todas las veces; altura máxima $=4.9$ m; la bola llega al suelo a 9.8 m/s

7. tiempo 27.8 s; distancia 771.6 m

9. $4h$ m, $\sqrt{2}v_0$ m/s **11.** 400 pies

13. 0.833 km

15. $v=\begin{cases}2t & \text{si } 0<t\leqslant 2\\ 4 & \text{si } 2<t<8\\ 20-2t & \text{si } 8\leqslant t<10\end{cases}$

v es continua para $0<t<10$.

$a=\begin{cases}2 & \text{si } 0<t<2\\ 0 & \text{si } 2<t<8\\ -2 & \text{si } 8<t<10\end{cases}$

a es continua excepto en $t=2$ y $t=8$.
La velocidad máxima 4 se alcanza para $2\leqslant t\leqslant 8$.

17. 7 s **19.** 448 pies

Ejercicios de repaso (página 189)

1. $18x + 6$ **3.** -1

5. $6\pi x + 12y = 6\sqrt{3} + \pi$

7. $\dfrac{\cos x - 1}{(x - \operatorname{sen} x)^2}$ **9.** $x^{-3/5}(4 - x^{2/5})^{-7/2}$

11. $-2\theta \sec^2\theta \tan\theta$ **13.** $20x^{19}$

15. $-\sqrt{3}$ **17.** $-2xf'(3 - x^2)$

19. $2f'(2x)\sqrt{g(x/2)} + \dfrac{f(2x)g'(x/2)}{4\sqrt{g(x/2)}}$

21. $f'(x + (g(x))^2)(1 + 2g(x)g'(x))$

23. $\cos x\, f'(\operatorname{sen} x)g(\cos x) - \operatorname{sen} x\, f(\operatorname{sen} x)g'(\cos x)$

25. $7x + 10y = 24$ **27.** $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{x} + C$

29. $2\tan x + 3\sec x + C$ **31.** $4x^3 + 3x^4 - 7$

33. $I_1 = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$, $I_2 = \operatorname{sen} x - x\cos x + C$

35. $y = 3x$

37. puntos $k\pi$ y $k\pi/(n+1)$ siendo k cualquier entero

39. $(0, 0)$, $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/2)$, dist. $= \sqrt{3}/2$ unidades

41. (a) $k = g/R$ **43.** 15.3 m

45. 80 pies/s o aproximadamente 55 mph

Problemas avanzados (página 190)

3. (a) 0, (b) 3/8, (c) 12, (d) -48, (e) 3/7, (f) 21

13. $f(m) = C - (m - B)^2/(4A)$

17. (a) $3b^2 > 8ac$

19. (a) 3 s, (b) $t = 7$ s, (c) $t = 12$ s, (d) aproximadamente 13.07 m/s^2, (e) 197.5 m, (f) 60.3 m

Capítulo 3
Funciones trascendentes

Sección 3.1 (página 199)

1. $f^{-1}(x) = x + 1$
$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

3. $f^{-1}(x) = x^2 + 1$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = [0, \infty)$,
$\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = [1, \infty)$

5. $f^{-1}(x) = x^{1/3}$
$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

7. $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = [0, \infty)$,
$\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = (-\infty, 0]$

9. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 1$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = \{x : x \neq 0\}$,
$\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = \{x : x \neq -1\}$

11. $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - x}{2 + x}$,
$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = \{x : x \neq -2\}$,
$\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = \{x : x \neq -1\}$

13. $g^{-1}(x) = f^{-1}(x + 2)$ **15.** $k^{-1}(x) = f^{-1}\left(-\dfrac{x}{3}\right)$

17. $p^{-1}(x) = f^{-1}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$

19. $r^{-1}(x) = \dfrac{1}{4}\left(3 - f^{-1}\left(\dfrac{1 - x}{2}\right)\right)$

21. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1} & \text{si } x >= 1 \\ x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

23. $h^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1} & \text{si } x \geqslant 1 \\ \sqrt{1 - x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

25. $g^{-1}(1) = 2$ **29.** $(f^{-1})'(2) = 1/4$

31. 2.23362 **33.** $\mathbb{R}$, 1

35. $c = 1$, a, b arbitrario, o $a = b = 0$, $c = -1$

37. no

Sección 3.2 (página 204)

1. $\sqrt{3}$ **3.** x^6

5. 3 **7.** $-2x$

9. x **11.** 1

13. 1 **15.** 2

17. $\log_a(x^4 + 4x^2 + 3)$ **19.** 4.728804...

21. $x = (\log_{10} 5)/(\log_{10}(4/5)) \approx -7.212567$

23. $x = 3^{1/5} = 10^{(\log_{10} 3)/5} \approx 1.24573$

29. 1/2 **31.** 0

33. ∞

Sección 3.3 (página 214)

1. $\sqrt{e}$ **3.** x^5

5. $-3x$ **7.** $\ln \dfrac{64}{81}$

9. $\ln(x^2(x-2)^5)$ **11.** $x = \dfrac{\ln 2}{\ln(3/2)}$

13. $x = \dfrac{\ln 5 - 9\ln 2}{2\ln 2}$ **15.** $0 < x < 2$

17. $3 < x < 7/2$ **19.** $5e^{5x}$

21. $(1-2x)e^{-2x}$ **23.** $\dfrac{3}{3x-2}$

25. $\dfrac{e^x}{1+e^x}$ **27.** $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

29. e^{x+e^x} **31.** $e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$

33. $\dfrac{1}{x\ln x}$ **35.** $2x\ln x$

37. $(2\ln 5)5^{2x+1}$ **39.** $t^x x^t \ln t + t^{x+1}x^{t-1}$

41. $\dfrac{b}{(bs+c)\ln a}$

43. $x^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2}\ln x + 1\right)\right)$

45. $\sec x$ **47.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

49. $f^{(n)}(x) = e^{ax}(na^{n-1} + a^n x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

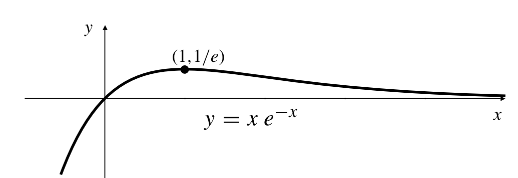
51. $y' = 2xe^{x^2}, \quad y'' = 2(1+2x^2)e^{x^2},$
$y''' = 4(3x+2x^3)e^{x^2}, \quad y^{(4)} = 4(3+12x^2+4x^4)e^{x^2}$

53. $f'(x) = x^{x^2+1}(2\ln x + 1),$
$g'(x) = x^{x^x}x^x\left(\ln x + (\ln x)^2 + \dfrac{1}{x}\right);$
g crece más rápidamente que f.

55. $f'(x) = f(x)\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-4}\right)$

57. $f'(2) = \dfrac{526}{3675}, \quad f'(1) = \dfrac{1}{6}$

59. f crec. para $x < 1$, decr. para $x > 1$



61. $y = ex$ **63.** $y = 2e\ln 2(x-1)$

65. $-1/e^2$

67. $f'(x) = (A+B)\cos\ln x + (B-A)\operatorname{sen}\ln x,$
$\int \cos\ln x\,dx = \dfrac{x}{2}(\cos\ln x + \operatorname{sen}\ln x),$
$\int \operatorname{sen}\ln x\,dx = \dfrac{x}{2}(\operatorname{sen}\ln x - \cos\ln x)$

69. (a) $F_{2B,-2A}(x)$; (b) $-2e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$

Sección 3.4 (página 223)

1. 0 **3.** 2

5. 0 **7.** 0

9. 566 **11.** 29.15 años

13. 160.85 años **15.** 4139 g

17. 7557.84 $

19. aproximadamente 14.7 años

21. aproximadamente 142

23. (a) $f(x) = Ce^{bx} - (a/b)$,
(b) $y = (y_0 + (a/b))e^{bx} - (a/b)$

25. 22.35 °C **27.** 6.84 min

31. $(0, -(1/k)\ln(y_0/(y_0 - L)))$, solución $\to -\infty$

33. aproximadamente 7671 casos, creciendo aproximadamente a 3028 casos/semana

Sección 3.5 (página 234)

1. $\pi/3$ **3.** $-\pi/4$

5. 0.7 **7.** $-\pi/3$

9. $\dfrac{\pi}{2} + 0.2$ **11.** $2/\sqrt{5}$

13. $\sqrt{1-x^2}$ **15.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

17. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ **19.** $\dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$

21. $\dfrac{-\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}$ **23.** $\tan^{-1} t + \dfrac{t}{1+t^2}$

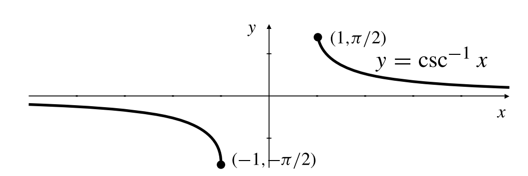
25. $2x\tan^{-1} x + 1$

27. $\dfrac{\sqrt{1-4x^2}\operatorname{sen}^{-1} 2x - 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}(\operatorname{sen}^{-1} 2x)^2}$

29. $\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^4)\,\text{sen}^{-1}x^2}}$ **31.** $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$

33. $\dfrac{\pi-2}{\pi-1}$

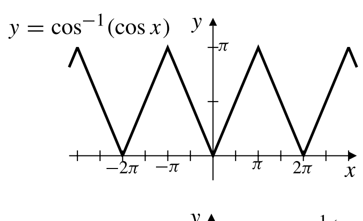
37. $\dfrac{d}{dx}\csc^{-1}x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

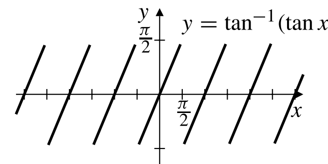


39. $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = -\dfrac{\pi}{2}$ para $x < 0$

41. continua en todas partes, diferenciable excepto en $n\pi$ para enteros n

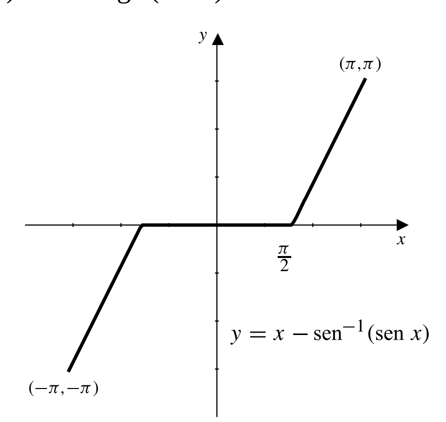
43. continua y diferenciable en todas partes excepto en múltiplos impares de $\pi/2$.





49. $\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - \tan^{-1}x = \dfrac{3\pi}{4}$ en $(-\infty, -1)$

51. $f'(x) = 1 - \text{sgn}(\cos x)$



53. $y = \dfrac{1}{3}\tan^{-1}\dfrac{x}{3} + 2 - \dfrac{\pi}{12}$

55. $y = 4\,\text{sen}^{-1}\dfrac{x}{5}$

Sección 3.6 (página 240)

3. $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

$\tanh(x-y) = \dfrac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$

5. $\dfrac{d}{dx}\,\text{senh}^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

$\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

$\dfrac{d}{dx}\tanh^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$,

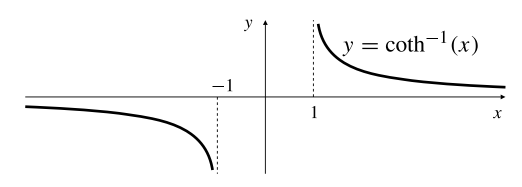
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \text{senh}^{-1}(x) + C$,

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1}(x) + C \quad (x > 1)$,

$\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1}(x) + C \quad (-1 < x < 1)$

7. (a) $\dfrac{x^2-1}{2x}$; (b) $\dfrac{x^2+1}{2x}$; (c) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; (d) x^2

9. $\coth^{-1}x = \tanh^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$, dominio: todo x tal que $|x| > 1$, rango: todo $y \neq 0$, derivada: $-1/(x^2-1)$



11. $f_{A,B} = g_{A+B,A-B}$; $g_{C,D} = f_{(C+D)/2,(C-D)/2}$

13. $y = y_0\cosh k(x-a) + \dfrac{v_0}{k}\,\text{senh}\,k(x-a)$

Sección 3.7 (página 247)

1. $y = Ae^{-5t} + Be^{-2t}$ **3.** $y = A + Be^{-2t}$

5. $y = (A + Bt)e^{-4t}$

7. $y = (A\cos t + B\,\text{sen}\,t)e^{3t}$

9. $y = (A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t)e^{-t}$

11. $y = (A\cos\sqrt{2}t + B\,\text{sen}\,\sqrt{2}t)e^{-t}$

13. $y = \frac{6}{7}e^{t/2} + \frac{1}{7}e^{-3t}$

15. $y = e^{-2t}(2\cos t + 6\,\text{sen}\,t)$

25. $y = \frac{3}{10}\text{sen}\,(10t)$, frec. circ. 10, frec. $\frac{10}{2\pi}$, per $\frac{2\pi}{10}$, amp $\frac{3}{10}$

33. $y = e^{3-t}[2\cos(2(t-3)) + \text{sen}\,(2(t-3))]$

35. $y = \frac{c}{k^2}(1 - \cos(kx) + a\cos(kx) + \frac{b}{k}\text{sen}\,(kx)$

Ejercicios de repaso (página 249)

1. 1/3

3. ambos límites son 0

5. máx. $1/\sqrt{2e}$, mín. $-1/\sqrt{2e}$

7. $f(x) = 3e^{(x^2/2)-2}$

9. (a) aproximadamente 13.863%, (b) aproximadamente 68 días

11. e^{2x}

13. $y = x$

15. 13.8165% aprox.

17. $\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \text{sen}^{-1}x$, $\cot^{-1}x = \text{sgn}\,x\,\text{sen}^{-1}(1/\sqrt{x^2+1})$, $\csc^{-1}x = \text{sen}^{-1}(1/x)$

19. 15 °C

Capítulo 4
Algunas aplicaciones de las derivadas

Sección 4.1 (página 257)

1. 32 cm^2/min

3. creciendo a 160π cm^2/s

5. (a) $1/(6\pi r)$ km/h, (b) $1/(6\sqrt{\pi A})$ km/h

7. $1/(180\pi)$ cm/s

9. 2 cm^2/s

11. creciendo a 2 cm^3/s

13. creciendo con velocidad 12

15. creciendo con velocidad $2/\sqrt{5}$

17. $45\sqrt{3}$ km/h

19. 1/3 m/s, 5/6 m/s

21. 100 tons/día

23. $16\frac{4}{11}$ min después de 3:00

25. $1/(18\pi)$ m/min

27. $9(6250\pi)$ m/min, 4.64 m

29. 8 m/min

31. decr. a 126.9 km/h

33. 1/8 unidades/s

35. $\sqrt{3}/16$ m/min

37. (a) hacia abajo a 24/125 m/s, (b) a la derecha a 7/125 m/s

39. decr. a 0.0197 rad/s

41. 0.047 rad/s

Sección 4.2 (página 268)

1. mín. abs. 1 en $x = -1$; máx. abs. 3 en $x = 1$

3. mín. abs. 1 en $x = -1$; no máx.

5. mín. abs. -1 en $x = 0$; máx. abs. 8 en $x = 3$; máx. loc. 3 en $x = -2$

7. mín. abs. $a^3 + a - 4$ en $x = a$; máx. abs. $b^3 + b - 4$ en $x = b$

9. máx. abs. $b^5 + b^3 + 2b$ en $x = b$; no valor mínimo

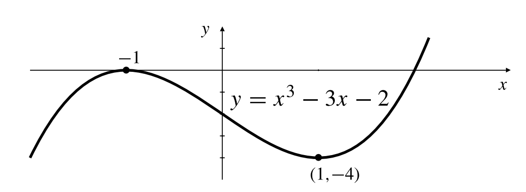
11. no valores máx. ni mín.

13. máx. 3 en $x = -2$, mín. 0 en $x = 1$

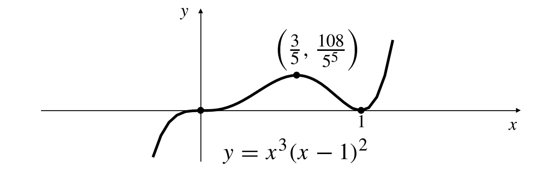
15. máx. abs. 1 en $x = 0$; no valor mínimo

17. no valores máx. ni mín.

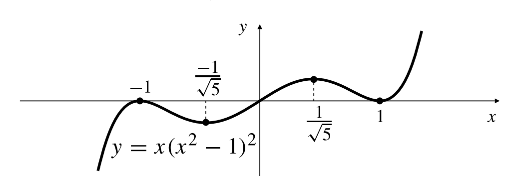
19. máx. loc. en $x = -1$; mín. loc. en $x = 1$



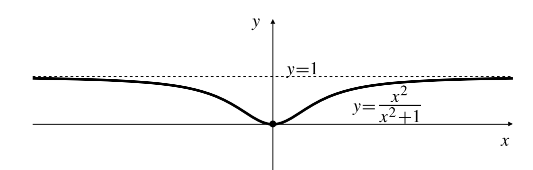
21. máx. loc. en $x = \frac{3}{5}$; mín. loc. en $x = 1$; el punto crítico $x = 0$ no es máximo ni mínimo



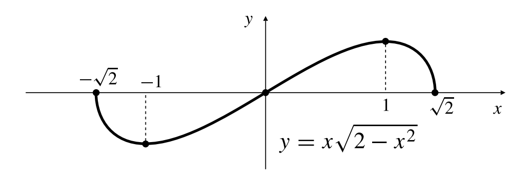
23. máx. loc. en $x = -1$ y $x = 1/\sqrt{5}$; mín. loc. en $x = 1$ y $x = -1/\sqrt{5}$



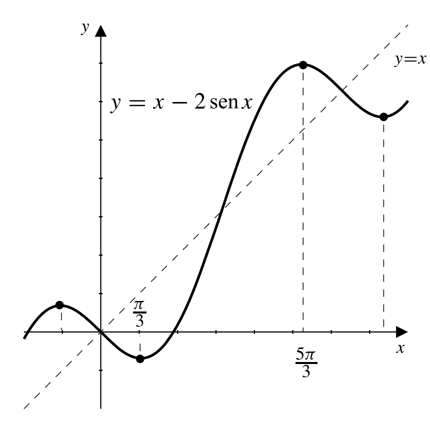
25. mín. abs. en $x = 0$



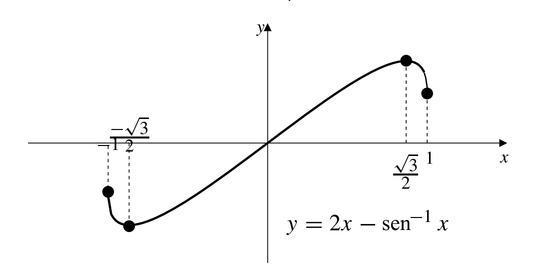
27. mín. loc. a PC $x = -1$ y PS extremo $x = \sqrt{2}$; máx. loc. en PC $x = 1$ y PS extremo $x = -\sqrt{2}$



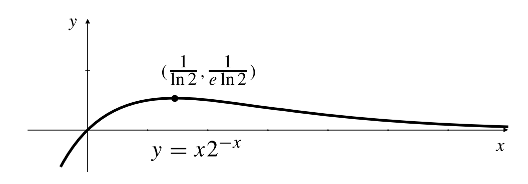
29. máx. loc. en $x = 2n\pi - \dfrac{\pi}{3}$; mín. loc. en $x = 2n\pi + \dfrac{\pi}{3}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$)



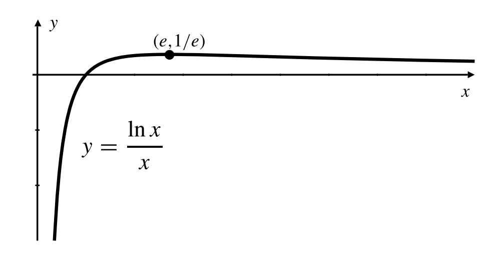
31. máx. loc. en PC $x = \sqrt{3}/2$ y PS extremo $x = -1$; mín. loc. en PC $x = -\sqrt{3}/2$ y PS extremo $x = 1$



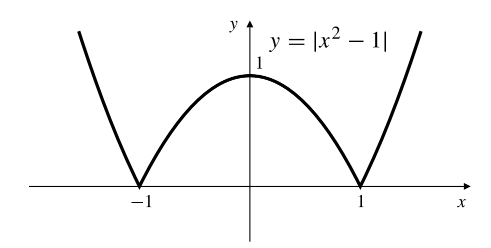
33. máx. abs. en $x = 1/\ln 2$



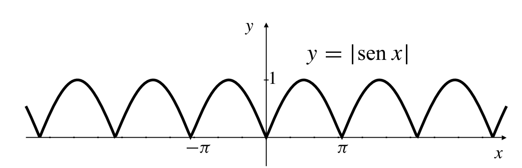
35. máx. abs. en $x = e$



37. máx. loc. en PC $x = 0$; mín. abs. en PS $x = \pm 1$



39. máx. abs. en PC $x = (2n + 1)\pi/2$; mín. abs. en PS $x = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$)



41. no máx. ni mín.

43. máx. 2, mín. -2

45. tiene mín., no máx.

47. sí, no

Sección 4.3 (página 273)

1. cońcava en $(0, \infty)$

3. convexa en $\mathbb{R}$

5. cóncava en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$; convexa en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$; inflexión $x = -1, 0, 1$

7. cóncava en $(-1, 1)$; convexa en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; inflexión $x = \pm 1$

9. cóncava en $(-2, -2/\sqrt{5})$ y $(2/\sqrt{5}, 2)$; convexa en $(-\infty, -2)$, $(-2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $(2, \infty)$; inflexión $x = \pm 2, \pm 2/\sqrt{5}$

11. cóncava en $(2n\pi, (2n+1)\pi)$; convexa en $((2n-1)\pi, 2n\pi)$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$; inflexión $x = n\pi$

13. cóncava en $(n\pi, (n + \frac{1}{2})\pi)$; convexa en $((n - \frac{1}{2})\pi, n\pi)$; inflexión $x = n\pi/2$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

15. cóncava en $(0, \infty)$, convexa en $(-\infty, 0)$; inflexión $x = 0$

17. cóncava en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, convexa en $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, \infty)$; inflexión $x = \pm 1/\sqrt{2}$

19. cóncava en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; convexa en $(-1, 1)$; inflexión $x = \pm 1$

21. cóncava en $(-\infty, 4)$, convexa en $(4, \infty)$; inflexión $x = 4$

23. no concavidad, no inflexiones

25. mín. loc. en $x = 2$; máx. loc. en $x = \frac{2}{3}$

27. mín. loc. en $x = 1/\sqrt[4]{3}$; máx. loc. en $-1/\sqrt[4]{3}$

29. máx. loc. en $x = 1$; mín. loc. en $x = -1$ ambos abs.

31. loc. (y abs.) mín. en $x = 1/e$

33. mín. loc. en $x = 0$; inflexiones en $x = \pm 2$ (no discernible para el Test de la Segunda Derivada)

35. mín. abs. en $x = 0$; máx. abs. en $x = \pm 1/\sqrt{2}$

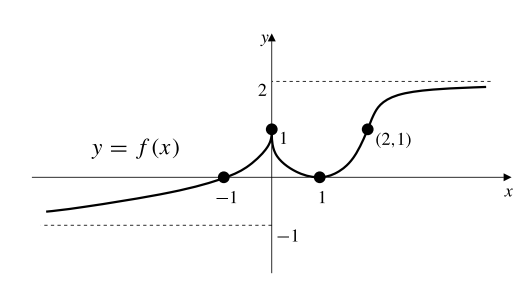
39. Si n es par, f_n tiene un mínimo y g_n tiene un máximo en $x = 0$. Si n es impar ambas tienen inflexiones en $x = 0$.

Sección 4.4 (página 283)

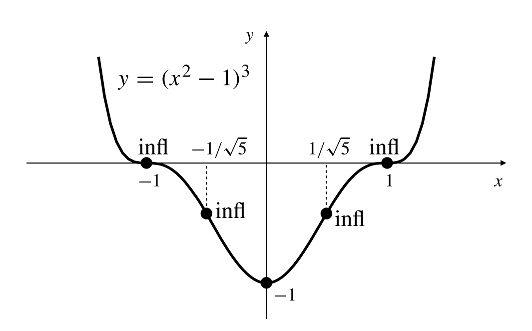
1. (a) g, (*b*) f'', (c) f, (d) f'

3. (a) $k(x)$, (b) $g(x)$, (c) $f(x)$, (d) $h(x)$

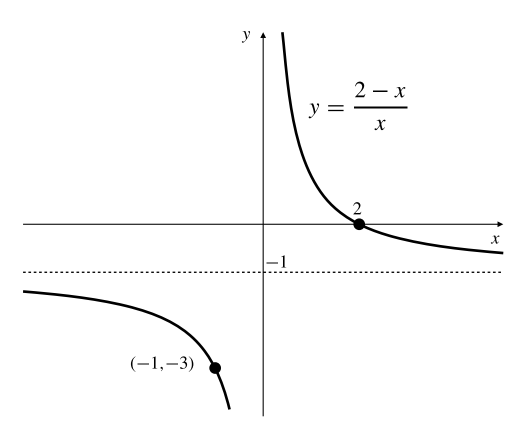
5.



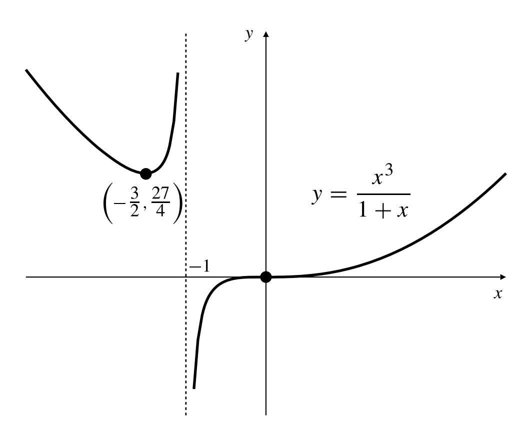
7.



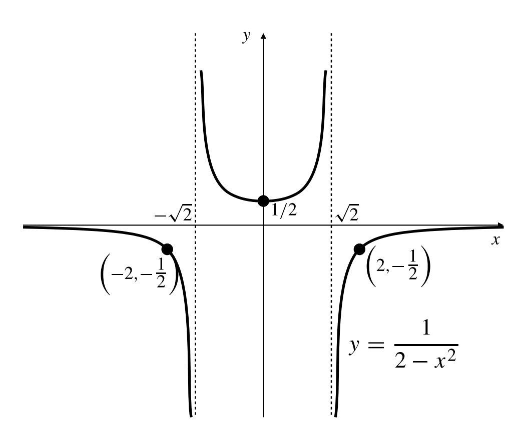
9.



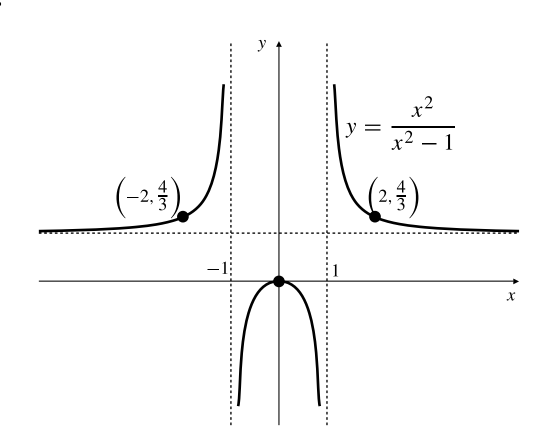
11.



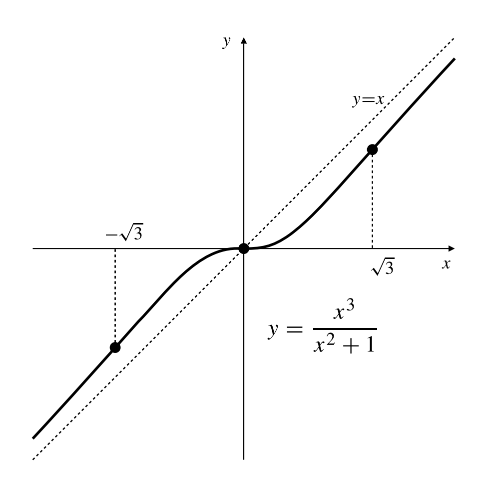
13.



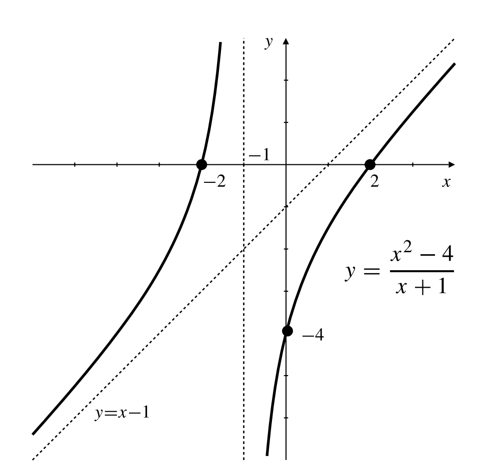
15.



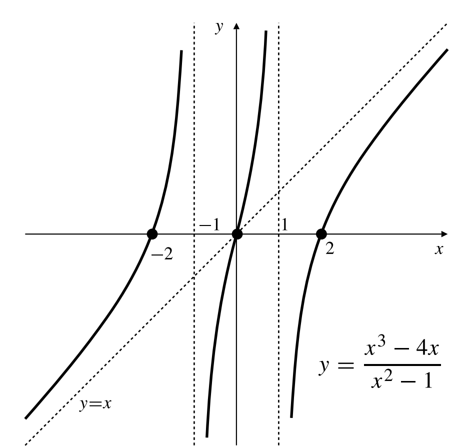
17.

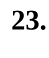


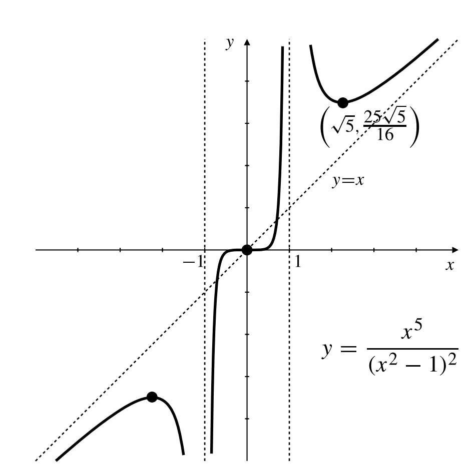
19.



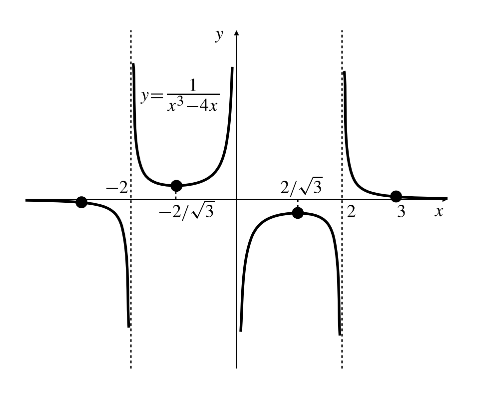
21.



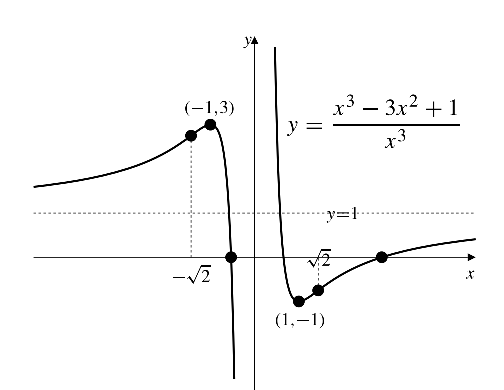

23.



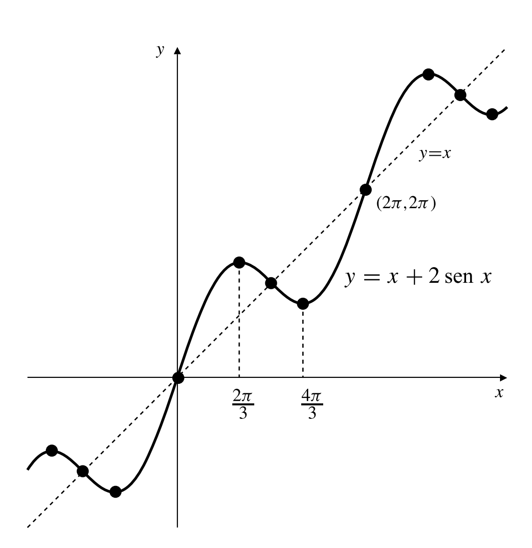

25.



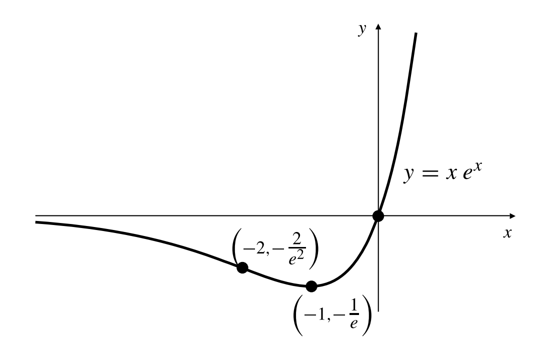
27.



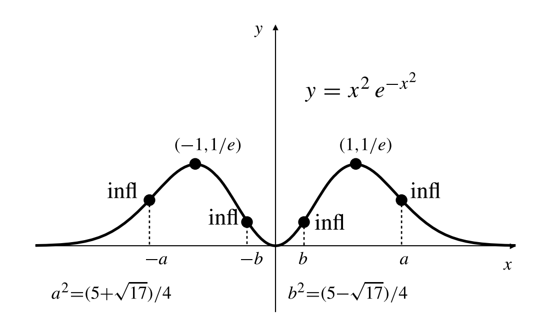
29.



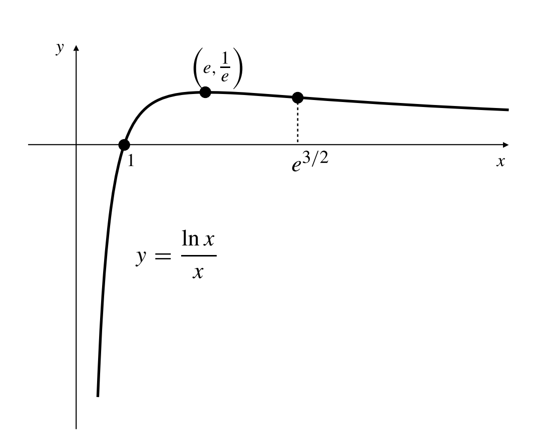
31.



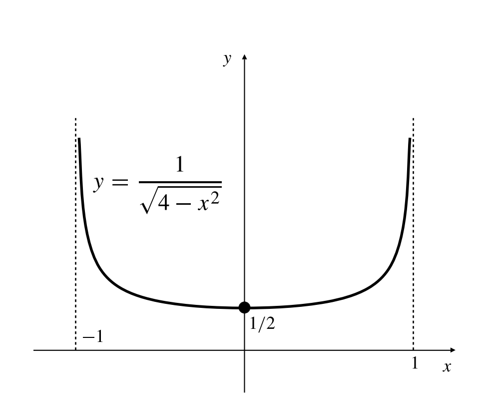
33.



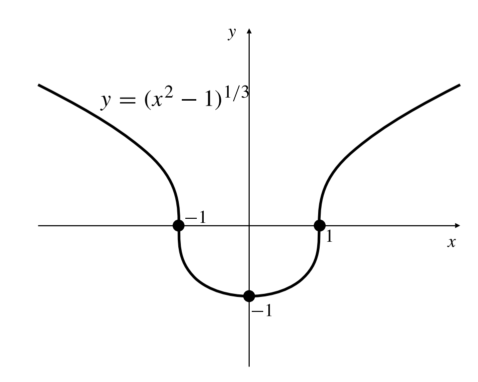
35.



37.



39.



41. $y = 0$. La curva corta a la asíntota en $x = n\pi$ para todo entero n.

Sección 4.5 (página 290)

1. 49/4 **3.** 20 y 40

5. 71.45 **11.** R^2 unidades cuad.

13. $2ab$ unidades^2 **15.** 50 cm^2

17. anchura $8 + 10\sqrt{2}$ m, altura $4 + 5\sqrt{2}$ m

19. descuento de 250 $

21. punto 5 km al este de A

23. (a) 0 m, (b) $\pi/(4+\pi)$ m

25. $8\sqrt{3}$ unidades

27. $[(a^{2/3} + b^{2/3})^3 + c^2]^{1/2}$ unidades

29. $3^{1/2}/2^{1/3}$ unidades

31. altura $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, radio $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,R$ unidades

33. base 2 m × 2 m, altura 1 m

35. anchura $\dfrac{20}{4+\pi}$ m, altura $\dfrac{10}{4+\pi}$ m

39. anchura R, profundidad $\sqrt{3}R$ **41.** $Q = 3L/8$

43. 750 coches

45. $\dfrac{5000}{\pi}$ m^2; semicircunferencia

47. $\dfrac{3\sqrt{3}a}{4}$ cm

Sección 4.6 (página 300)

1. 1.41421356237 **3.** 0.453397651516

5. 1.64809536561, 2.352392647658

7. 0.510973429389

9. infinitas 4.49340945791

13. máx. 1, mín. -0.11063967219 ...

15. $x_1 = -a$, $x_2 = a = x_0$. Buscar una raíz en la mitad de x_0 y x_1

17. $x_n = (-1/2)^n \to 0$ (raíz) cuando $n \to \infty$

19. 0.95025 **21.** 0.45340

23. $N(x_n)$ es la aproximación por el Método de Newton

Sección 4.7 (página 306)

1. $6x - 9$ **3.** $2 - (x/4)$

5. $(7 - 2x)/27$ **7.** $\pi - x$

9. $(1/4) + (\sqrt{3}/2)(x - (\pi/6))$

11. aprox. 8 cm^2 **13.** aprox. 62.8 millas

15. $\sqrt{50} \approx \dfrac{99}{14} \approx 7.071429$, error < 0, $|\text{error}| < \dfrac{1}{2744} \approx 0.0003644$, (7.07106, 7.071429)

17. $\sqrt[4]{85} \approx \dfrac{82}{27}$, error < 0, $|\text{error}| < \dfrac{1}{2 \times 3^6}$, (3.03635, 3.03704)

19. $\cos 46^{\circ} \approx \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \dfrac{\pi}{180}\right) \approx 0.694765$, error < 0, $|\text{error}| < \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{180}\right)^2$, (0.694658, 0.694765)

21. $\operatorname{sen}(3.14) \approx \pi - 3.14$, error < 0, $|\text{error}| < (\pi - 3.14)^3/2 < 2.02 \times 10^{-9}$, $(\pi - 3.14 - (\pi - 3.14)^3/2,\ \pi - 3.14)$

23. (7.07106, 7.07108), $\sqrt{50} \approx 7.07107$

25. (0.80891, 0.80921), $\sqrt[4]{85} \approx 0.80906$

27. $3 \leqslant f(3) \leqslant 13/4$

29. $g(1.8) \approx 0.6$, $|\text{error}| < 0.0208$

31. aprox. 1005 cm^3

Sección 4.8 (página 314)

1. $1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{24}x^4$

3. $\ln 2 + \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{8} + \dfrac{(x-3)^3}{24} - \dfrac{(x-2)^4}{64}$

5. $2 + \dfrac{x-4}{4} - \dfrac{(x-4)^2}{64} + \dfrac{3(x-4)^3}{1536}$

7. $P_n(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}(x-1) + \dfrac{1}{27}(x-1)^2 - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n$

9. $x^{1/3} \approx 2 + \dfrac{1}{12}(x-8) - \dfrac{1}{288}(x-8)^2$, $9^{1/3} \approx 2.07986$, $0 < \text{error} \leqslant 5/(81 \times 256)$, $2.07986 < 9^{1/3} < 2.08010$

11. $\dfrac{1}{x} \approx 1 - (x-1) + (x-1)^2$, $\dfrac{1}{1.02} \approx 0.9804$, $-(0.02)^3 \leqslant \text{error} < 0$, $0.0980392 \leqslant \dfrac{1}{1.02} < 0.9804$

13. $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, $e^{-0.5} \approx 0.625$,
$-\frac{1}{6}(0.5)^3 \leqslant \text{error} < 0.0604 \leqslant e^{-0.5} < 0.625$

15. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + R_7$;
$R_7 = \frac{\operatorname{sen} c}{8!}x^8$ para algún c entre 0 y x

17. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \right.$
$\left. - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right] + R_4$;
con $R_4 = \frac{\cos c}{5!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5$ para algún c entre x y $\pi/4$

19. $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} -$
$- \frac{(x-11)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + R_6$;
con $R_6 = \frac{(x-1)^7}{7c^7}$ para algún c entre 1 y x

21. $\frac{1}{e^3} + \frac{3}{e^3}(x+1) + \frac{9}{2e^3}(x+1)^2 + \frac{9}{2e^3}(x+1)^3$

23. $x^2 - \frac{1}{3}x^4$ **25.** $1 - 2x^2 + 4x^4 - 8x^6$

27. $P_n(x) = 0$ si $0 \leqslant n \leqslant 2$; $P_n(x) = x^3$ si $n \geqslant 3$

29. $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

31. $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + R_n$;
con $R_n = (-1)^{n+1}\frac{e^{-X}x^{n+1}}{(n+1)!}$ para algún X entre 0 y x;
$\frac{1}{e} \approx \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 0.36788$

33. $1 - 2x + x^2$ (f es su propia aproximación cuadrática; (error = 0). $g(x) \approx 4 + 3x + 2x^2$; error $= x^3$; ya que $g'''(x) = 6 = 3!$, por lo tanto error $= \frac{g'''(c)}{3!}x^3$; no hay mejora posible.

35. $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$

Sección 4.9 (página 321)

1. 3/4 **3.** a/b
5. 1 **7.** 1
9. 0 **11.** $-3/2$
13. 1 **15.** $-1/2$
17. ∞ **19.** $2/\pi$
21. -2 **23.** a
25. 1 **27.** $-1/2$
29. e^{-2} **31.** 0
33. $f''(x)$

Ejercicios de repaso (página 322)

1. 6%/min
3. (a) -1600 ohm/min, (b) -1350 ohm/min
5. 2, 000 **7.** $32\pi R^3/81$ un^3
9. 9000 cm^3 **11.** aprox. 0.057 rad/s
13. aprox. 9.69465 cm **15.** 2.06%
17. $\frac{\pi}{4} + 0.0475 \approx 0.83290$, $|\text{error}| < 0.00011$
19. 0, 1.4055636328
21. aprox. $(-1.1462, 0.3178)$

Problemas avanzados (página 324)

1. (a) $\frac{dx}{dt} = \frac{k}{3}(x_0^3 - x^3)$, (b) $V_0/2$
3. (b) 11
5. (c) $y_0(1 - (t/T))^2$, (d) $(1 - (1/\sqrt{2}))T$
7. $P^2(3 - 2\sqrt{2})/4$
9. (a) $\cos^{-1}(r_2/r_1)^2$, (b) $\cos^{-1}(r_2/r_1)^4$
11. aprox. 921 cm^3

Capítulo 5
Integración

Sección 5.1 (página 331)

1. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ **3.** $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$

5. $\frac{(-2)^3}{1^2} + \frac{(-2)^4}{2^2} + \frac{(-2)^5}{3^2} + \cdots + \frac{(-2)^n}{(n-2)^2}$

7. $\sum_{i=5}^{9} i$ **9.** $\sum_{i=2}^{99} (-1)^i i^2$

11. $\sum_{i=0}^{n} x^i$ **13.** $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}/i^2$

15. $\sum_{i=1}^{100} \operatorname{sen}(i-1)$ **17.** $n(n+1)(2n+7)/6$

19. $\frac{\pi(\pi^n - 1)}{\pi - 1} - 3n$ **21.** $\ln(n!)$

23. 400 **25.** $(x^{2n+1} + 1)/(x+1)$

27. -4949 **31.** $2^m - 1$

33. $n/(n+1)$

Sección 5.2 (página 339)

1. 3/2 unidades al cuad.

3. 6 unidades al cuad.

5. 26/3 unidades al cuad.

7. 15 unidades al cuad.

9. 4 unidades al cuad.

11. 32/3 unidades al cuad.

13. $3/(2\ln 2)$ unidades al cuad.

15. $\ln(b/a)$, se deduce de la definición de ln

17. 0 **19.** $\pi/4$

Sección 5.3 (página 344)

1. $L(f, P_8) = 7/4, \quad U(f, P_8) = 9/4$

3. $L(f, P_4) = \frac{e^4 - 1}{e^2(e-1)} \approx 4.22,$

$U(f, P_4) = \frac{e^4 - 1}{e(e-1)} \approx 11.48$

5. $L(f, P_6) = \frac{\pi}{6}(1 + \sqrt{3}) \approx 1.43,$

$U(f, P_6) = \frac{\pi}{6}(3 + \sqrt{3}) \approx 2.48$

7. $L(f, P_n) = \frac{n-1}{2n}, U(f, P_n) = \frac{n+1}{2n}, \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

9. $L(f, P_n) = \frac{(n-1)^2}{4n^2}, U(f, P_n) = \frac{(n+1)^2}{4n^2},$

$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$

11. $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ **13.** $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

15. $\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$

Sección 5.4 (página 351)

1. 0 **3.** 8

5. $(b^2 - a^2)/2$ **7.** π

9. 0 **11.** 2π

13. 0 **15.** $(2\pi + 3\sqrt{3})/6$

17. 16 **19.** 32/3

21. $(4 + 3\pi)/12$ **23.** $\ln 2$

25. $\ln 3$ **27.** 4

29. 1 **31.** $\pi/2$

33. 1 **35.** 11/6

37. $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ **39.** 41/2

41. 3/4 **43.** $k = \bar{f}$

Sección 5.5 (página 357)

1. 4 **3.** 1

5. 9 **7.** $80\frac{4}{5}$

9. $\frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ **11.** $(1/\sqrt{2}) - (1/2)$

13. $e^{\pi} - e^{-\pi}$ **15.** $(a^e - 1)/\ln a$

17. $\pi/2$ **19.** $\frac{\pi}{3}$

21. $\frac{1}{5}$ unidades al cuad. **23.** $\frac{32}{3}$ unidades al cuad.

25. $\frac{1}{6}$ unidades al cuad. **27.** $\frac{1}{3}$ unidades al cuad.

29. $\frac{1}{12}$ unidades al cuad. **31.** 2π unidades al cuad.

33. 3

35. $\frac{16}{3}$

37. $e - 1$

39. $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

41. $-2\,\frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$

43. $\frac{\cos t}{1 + t^2}$

45. $(\cos x)/(2\sqrt{x})$

47. $f(x) = \pi e^{\pi(x-1)}$

49. $1/x^2$ no es continua (ni siquiera está definida) en $x = 0$, por lo que el Teorema Fundamental del Cálculo no se puede aplicar en $[-1, 1]$; como $1/x^2 > 0$ en su dominio, hay que esperar que la integral fuera positiva si existiera (no existe).

51. $F(x)$ tiene un valor máximo en $x = 1$ pero no tiene valor mínimo.

53. 2

Sección 5.6 (página 366)

1. $-\frac{1}{2}\,e^{5-2x} + C$

3. $\frac{2}{9}\,(3x + 4)^{3/2} + C$

5. $-\frac{1}{32}\,(4x^2 + 1)^{-4} + C$

7. $\frac{1}{2}\,e^{x^2} + C$

9. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right) + C$

11. $2\ln|e^{x/2} - e^{-x/2}| + C = \ln|e^x - 2 + e^{-x}| + C$

13. $-\frac{2}{5}\sqrt{4 - 5s} + C$

15. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{t^2}{2}\right) + C$

17. $-\ln(1 + e^{-x}) + C$

19. $-\frac{1}{2}\,(\ln\cos x)^2 + C$

21. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x + 3}{2} + C$

23. $\frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x + C$

25. $-\frac{1}{3a}\cos^3 ax + C$

27. $\frac{5}{16}\,x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C$

29. $\frac{1}{5}\sec^5 x + C$

31. $\frac{2}{3}\,(\tan x)^{3/2} + \frac{2}{7}\,(\tan x)^{7/2} + C$

33. $\frac{3}{8}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\operatorname{sen} x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4\operatorname{sen} x) + C$

35. $\frac{1}{3}\tan^3 x + C$

37. $-\frac{1}{9}\csc^9 x + \frac{2}{7}\csc^7 x - \frac{1}{5}\csc^5 x + C$

39. $\frac{14}{3}\sqrt{17} + \frac{2}{3}$

41. $3\pi/16$

43. $\ln 2$

45. $2,\ 2(\sqrt{2} - 1)$

47. $\pi/32$ unidades al cuad.

Sección 5.7 (página 371)

1. $\frac{1}{6}$ unidades al cuad.

3. $\frac{64}{3}$ unidades al cuad.

5. $\frac{125}{12}$ unidades al cuad.

7. $\frac{1}{2}$ unidades al cuad.

9. $\frac{5}{12}$ unidades al cuad.

11. $\frac{15}{8} - 2\ln 2$ unidades al cuad.

13. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ unidades al cuad.

15. $\frac{4}{3}$ unidades al cuad.

17. $2\sqrt{2}$ unidades al cuad.

19. $1 - \pi/4$ unidades al cuad.

21. $(\pi/8) - \ln\sqrt{2}$ unidades al cuad.

23. $(4\pi/3) - 2\ln(2 + \sqrt{3})$ unidades al cuad.

25. $(4/\pi) - 1$ unidades al cuad.

27. $\frac{4}{3}$ unidades al cuad.

29. $\frac{e}{2} - 1$ unidades al cuad.

Ejercicios de repaso (página 372)

1. la suma es $n(n+2)/(n+1)^2$

3. $20/3$ **5.** 4π

7. 0 **9.** 2

11. $\operatorname{sen}(t^2)$ **13.** $-4e^{\operatorname{sen}(4s)}$

15. $f(x) = -\frac{1}{2}e^{(3/2)(1-x)}$ **17.** $9/2$ unidades al cuad.

19. $3/10$ unidades al cuad.

21. $(3\sqrt{3}/4) - 1$ unidades al cuad.

23. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}(2x^3+1) + C$ **25.** $98/3$

27. $(\pi/8) - (1/2)\tan^{-1}(1/2)$

29. $-\cos\sqrt{2s+1} + C$ **31.** mín. $-\pi/4$, no máx.

35. $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}, \quad x_2 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$

Capítulo 6
Técnicas de integración

Sección 6.1 (página 381)

1. $x\operatorname{sen}x + \cos x + C$

3. $\frac{1}{\pi}x^2\operatorname{sen}\pi x + \frac{2}{\pi^2}x\cos\pi x - \frac{2}{\pi^3}\operatorname{sen}\pi x + C$

5. $\frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$

7. $x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

9. $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)\operatorname{sen}^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$

11. $\frac{7}{8}\sqrt{2} + \frac{3}{8}\ln(1+\sqrt{2})$

13. $\frac{1}{13}e^{2x}(2\operatorname{sen}3x - 3\cos 3x) + C$

15. $\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\pi}{6}$ **17.** $x\tan x - \ln|\sec x| + C$

19. $\frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)] + C$

21. $\ln x(\ln(\ln x) - 1) + C$

23. $x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C$

25. $\frac{2\pi}{3} - \ln(2+\sqrt{3})$

27. $\frac{1}{2}(x^2+1)(\tan^{-1}x)^2 - x\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

29. $\dfrac{1+e^{-\pi}}{2}$ unidades al cuadrado

31. $I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$,
$I_4 = x[(\ln x)^4 - 4(\ln x)^3 + 12(\ln x)^2 - 24(\ln x) + 24] + C$

33. $I_n = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$,
$I_6 = \frac{5x}{16} - \cos x\left[\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x + \frac{5}{24}\operatorname{sen}^3 x + \frac{5}{16}\operatorname{sen}x\right] + C$,
$I_7 = -\cos x\left[\frac{1}{7}\operatorname{sen}^6 x + \frac{6}{35}\operatorname{sen}^4 x + \frac{8}{35}\operatorname{sen}^2 x + \frac{16}{35}\right] + C$

35. $I_n = \dfrac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$,
$I_3 = \dfrac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \dfrac{3x}{8a^4(x^2+a^2)} + \dfrac{3}{8a^5}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + C$

37. Cualquier condición que garantice que $f(b)g'(b) - f'(b)g(b) = f(a)g'(a) - f'(a)g(a)$ será suficiente

Sección 6.2 (página 390)

1. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(2x) + C$

3. $\frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C$

5. $-\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$

7. $-\sqrt{9-x^2} + \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3} + C$

9. $\frac{1}{3}(9+x^2)^{3/2} - 9\sqrt{9+x^2} + C$

11. $\dfrac{1}{a^2}\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$

13. $\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{a} + C$

15. $\dfrac{1}{2}\sec^{-1}\dfrac{x}{2} + C$ **17.** $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}\dfrac{x+1}{3} + C$

19. $\dfrac{1}{32}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{2} + \dfrac{1}{16}\dfrac{2x+1}{4x^2+4x+5} + C$

21. $a\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x-a}{a} - \sqrt{2ax - x^2} + C$

23. $\dfrac{3-x}{4\sqrt{3-2x-x^2}} + C$

25. $\dfrac{3}{8}\tan^{-1}x + \dfrac{3x^3+5x}{8(1+x^2)^2} + C$

27. $\dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{1-x^2}) - \dfrac{1}{2}\ln|x| - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + C$

29. $2\sqrt{x} - 4\ln(2+\sqrt{x}) + C$

31. $\dfrac{6}{7}x^{7/6} - \dfrac{6}{5}x^{5/6} + \dfrac{3}{2}x^{2/3} + 2x^{1/2}$
$-3x^{1/3} - 6x^{1/6} + 3\ln(1+x^{1/3}) + 6\tan^{-1}x^{1/6} + C$

33. $\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ **35.** $\pi/3$

37. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2\tan(\theta/2)+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

39. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\dfrac{\tan(\theta/2)}{\sqrt{5}}\right) + C$

41. $\dfrac{9}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}$ unidades al cuad.

43. $a^2\cos^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) - b\sqrt{a^2-b^2}$ unidades al cuad.

45. $\dfrac{25}{2}\left(\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{4}{5} - \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{3}{5}\right) - 12\ln\dfrac{4}{3}$ unidades al cuad.

47. $\dfrac{\ln(Y+\sqrt{1+Y^2})}{2}$ unidades al cuad.

Sección 6.3 (página 398)

1. $\ln|2x-3| + C$

3. $\dfrac{x}{\pi} - \dfrac{2}{\pi^2}\ln|\pi x + 2| + C$

5. $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| + C$ **7.** $\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

9. $x - \dfrac{4}{3}\ln|x+2| + \dfrac{1}{3}\ln|x-1| + C$

11. $3\ln|x+1| - 2\ln|x| + C$

13. $\dfrac{1}{3(1-3x)} + C$

15. $-\dfrac{1}{9}x - \dfrac{13}{54}\ln|2-3x| + \dfrac{1}{6}\ln|x| + C$

17. $\dfrac{1}{2a^2}\ln\dfrac{|x^2-a^2|}{x^2} + C$

19. $x + \dfrac{a}{3}\ln|x-a| - \dfrac{a}{6}\ln(x^2+ax+a^2)$
$-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+a}{\sqrt{3a}} + C$

21. $\dfrac{1}{3}\ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln|x-1| + \dfrac{1}{6}\ln|x-3| + C$

23. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{x}{2(x^2-1)} + C$

25. $\dfrac{1}{27}\ln\left|\dfrac{x-3}{x}\right| + \dfrac{1}{9x} + \dfrac{1}{6x^2} + C$

27. $\dfrac{t-1}{4(t^2+1)} - \dfrac{1}{4}\ln|t+1| + \dfrac{1}{8}\ln(t^2+1) + C$

29. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + \dfrac{1}{12}\ln\left(\dfrac{(2+\sqrt{1-x^2})^2}{3+x^2}\right) + C$

31. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right| + C$

33. $\dfrac{1-2x^2}{x\sqrt{x^2-1}} + C$

Sección 6.4 (página 402)

5. $\dfrac{x\sqrt{x^2-2}}{2} + \ln|x+\sqrt{x^2-2}| + C$

7. $-\sqrt{3t^2+5}/(5t) + C$

9. $(x^5/3125)(625(\ln x)^4 - 500(\ln x^3) + 300(\ln x)^2 -$
$-120\ln x + 24) + C$

11. $(1/6)(2x^2 - x - 3)\sqrt{2x-x^2} -$
$-(1/2)\operatorname{sen}^{-1}(1-x) + C$

13. $(x-2)/(4\sqrt{4x-x^2}) + C$

Sección 6.5 (página 411)

1. $1/2$
3. $1/2$
5. $3 \times 2^{1/3}$
7. $3/2$
9. 3
11. π
13. $1/2$
15. diverge a ∞
17. 2
19. diverge
21. 0
23. 1 unidad al cuad.
25. $2\ln 2$ unidades al cuad.
29. 2
31. diverge a ∞
33. converge
35. diverge a ∞
37. diverge a ∞
39. diverge
41. diverge a ∞

Sección 6.6 (página 419)

1. $T_4 = 4.75$,
$M_4 = 4.625$,
$T_8 = 4.6875$,
$M_8 = 4.65625$,
$T_{16} = 4.671875$,
Errores reales:
$I - T_4 \approx -0.833333$,
$I - M_4 \approx 0.0416667$,
$I - T_8 \approx -0.0208333$,
$I - M_8 \approx 0.0104167$,
$I - T_{16} \approx -0.0052083$
Errores estimados:
$|I - T_4| \leqslant 0.0833334$,
$|I - M_4| \leqslant 0.0416667$,
$|I - T_8| \leqslant 0.0208334$,
$|I - M_8| \leqslant 0.0104167$,
$|I - T_{16}| \leqslant 0.0052084$

3. $T_4 = 0.9871158$,
$M_4 = 1.0064545$,
$T_8 = 0.9967852$,
$M_8 = 1.0016082$,
$T_{16} = 0.9991967$,
Errores reales:
$I - T_4 \approx 0.0128842$,
$I - M_4 \approx -0.0064545$,
$I - T_8 \approx 0.0032148$,
$I - M_8 \approx -0.0016082$,
$I - T_{16} \approx 0.0008033$
Errores estimados:
$|I - T_4| \leqslant 0.020186$,
$|I - M_4| \leqslant 0.010093$,
$|I - T_8| \leqslant 0.005047$,
$|I - M_8| \leqslant 0.002523$,
$|I - T_{16}| \leqslant 0.001262$

5. $T_4 = 46$, $T_8 = 46.7$

7. $T_4 = 3000$ km^2, $T_8 = 3400$ km^2

9. $T_4 \approx 2.02622$, $M_4 \approx 2.03236$,
$T_8 \approx 2.02929$, $M_8 \approx 2.02982$,
$T_{16} \approx 2.029555$

11. $M_8 \approx 1.3714136$, $T_{16} \approx 1.3704366$, $I \approx 1.371$

Sección 6.7 (página 424)

1. $S_4 = S_8 = I$, Errores $= 0$

3. $S_4 \approx 1.0001346$, $S_8 \approx 1.0000083$,
$I - S_4 \approx -0.0001346$, $I - S_8 \approx -0.0000083$

5. 46.93

7. Para $f(x) = e^{-x}$:
$|I - S_4| \leqslant 0.000022$, $|I - S_8| \leqslant 0.0000014$;
para $f(x) = \operatorname{sen} x$,
$|I - S_4| \leqslant 0.00021$,
$|I - S_8| \leqslant 0.000013$

9. $S_4 \approx 2.034333$, $S_8 \approx 2.0303133$,
$S_{16} \approx 2.0296433$

Sección 6.8 (página 430)

1. $3\displaystyle\int_0^1 \frac{u\,du}{1+u^3}$

3. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$, o $\displaystyle 2\int_0^1 \frac{e^{1-u^2} + e^{u^2-1}}{\sqrt{2-u^2}}\,du$

5. $4\displaystyle\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(2-v^2)(2-2v^2+v^4)}}$

7. $T_2 \approx 0.603553$, $T_4 \approx 0.643283$,
$T_8 \approx 0.658130$, $T_{16} \approx 0.663581$;
Errores: $I - T_2 \approx 0.0631$, $I - T_4 \approx 0.0234$,
$I - T_8 \approx 0.0085$, $I - T_{16} \approx 0.0031$;
Los errores no decrecen como $1/n^2$ porque la segunda derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no está acotada en $[0, 1]$.

9. $I \approx 0.74684$ con error menor que 10^{-4}; se necesitan siete términos de la serie.

11. $A = 1$, $u = 1/\sqrt{3}$

13. $A = 5/9$, $B = 8/9$, $u = \sqrt{3/5}$

15. $R_1 \approx 0.7471805$, $R_2 \approx 0.7468337$, $R_3 \approx 0.7468241$, $I \approx 0.746824$

17. $R_2 = \frac{2h}{45}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)$

Ejercicios de repaso en técnicas de integración (página 431)

1. $\frac{2}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{6}\ln|2x+1| + C$

3. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x + C$

5. $\frac{3}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| + C$

7. $-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3 + C$

9. $\frac{1}{5}(5x^3-2)^{1/3} + C$

11. $\frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{x}{8(4+x^2)} + C$

13. $\frac{1}{2\ln 2}\left(2^x\sqrt{1+4^x} + \ln\left(2^x + \sqrt{1+4^x}\right)\right) + C$

15. $\frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{6}\tan^6 x + C$

17. $-e^{-x}\left(\frac{2}{5}\cos 2x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2x\right) + C$

19. $\frac{x}{10}(\cos(3\ln x) + 3\operatorname{sen}(3\ln x)) + C$

21. $\frac{1}{4}(\ln(1+x^2))^2 + C$

23. $\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x\sqrt{2-x^2}}{2} + C$

25. $\frac{1}{64}\left(-\frac{1}{7(4x+1)^7} + \frac{1}{4(4x+1)^8} - \frac{1}{9(4x+1)^9}\right) + C$

27. $-\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{6}\cos^3 4x - \frac{1}{20}\cos^5 4x + C$

29. $-\frac{1}{2}\ln(2e^{-x}+1) + C$

31. $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 4\ln(2 - \operatorname{sen} x) + C$

33. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

35. $\frac{1}{48}(1-4x^2)^{3/2} - \frac{1}{16}\sqrt{1-4x^2} + C$

37. $\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$

39. $x + \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{4}{3}\ln|x-3| - \frac{5}{3}\ln|x+3| + C$

41. $-\frac{1}{10}\cos^{10} x + \frac{1}{6}\cos^{12} x - \frac{1}{14}\cos^{14} x + C$

43. $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x-1| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}\right| + C$

45. $\frac{1}{3}x^3\operatorname{sen}^{-1} 2x + \frac{1}{24}\sqrt{1-4x^2} - \frac{1}{72}(1-4x^2)^{3/2} + C$

47. $\frac{1}{128}\left(3x - \operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(8x)\right)$

49. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{x}}{2} + C$

51. $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{2x} + \frac{15}{4}\ln|x+2| + C$

53. $-\frac{1}{2}\cos(2\ln x) + C$

55. $\frac{1}{2}\exp(2\tan^{-1} x) + C$

57. $\frac{1}{4}(\ln(3+x^2))^2 + C$

59. $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}^{-1}(x/2))^2 + C$

61. $\sqrt{x^2+6x+10} - 2\ln\left(x+3+\sqrt{x^2+6x+10}\right) + C$

63. $\frac{2}{5(2+x^2)^{5/2}} - \frac{1}{3(2+x^2)^{3/2}} + C$

65. $\frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2\sqrt{x} - 6x^{1/6} - 6\tan^{-1} x^{1/6} + C$

67. $\frac{2}{3}x^{3/2} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + C$

69. $\frac{1}{2(4-x^2)} + C$

71. $\frac{1}{3}x^3\tan^{-1} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$

73. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3\tan(x/2) - 1}{\tan(x/2) + 3}\right| + C$

75. $\frac{1}{2}\ln|\tan(x/2)| - \frac{1}{4}(\tan^{-1}(x/2))^2 + C =$
$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| - \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C$

77. $2\sqrt{x} - 2\tan^{-1}\sqrt{x} + C$

79. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln(x^2+2x+4) + \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$

Ejercicios de repaso (otros) (página 433)

1. $I = \frac{1}{2}(xe^x\cos x + (x-1)e^x \operatorname{sen} x)$, $J = \frac{1}{2}((1-x)e^x\cos x + xe^x\operatorname{sen} x)$

3. diverge a ∞ **5.** $-4/9$

9. 367 000 m^3

11. $T_8 = 1.61800$, $S_8 = 1.62092$, $I \approx 1.62$

13. (a) $T_4 = 5.526$, $S_4 = 5.504$; (b) $S_8 = 5.504$; (c) sí, porque $S_4 = S_8$, y la regla de Simpson es exacta para cúbicas.

Problemas avanzados (página 434)

1. (c) $I = \frac{1}{630}, \frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$

3. (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$, (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2x}-1)$

7. (a) $a = 7/90$, $b = 16/45$, $c = 2/15$. (b) un intervalo: aprox. 0.6321208750, dos intervalos: aprox. 0.6321205638, valor correcto: 0.6321205588

Capítulo 7
Aplicaciones de integración

Sección 7.1 (página 445)

1. $\frac{\pi}{5}$ unidades al cubo **3.** $\frac{3\pi}{10}$ unidades al cubo

5. (a) $\frac{16\pi}{15}$ unids. al cubo, (b) $\frac{8\pi}{3}$ unids. al cubo

7. (a) $\frac{27\pi}{2}$ unids. al cubo, (b) $\frac{108\pi}{5}$ unids. al cubo

9. (a) $\frac{15\pi}{4} - \frac{\pi^2}{8}$ unids. al cubo, (b) $\pi(2 - \ln 2)$ unids. al cubo

11. $\frac{10\pi}{3}$ unidades al cubo **13.** aprox. 35%

15. $\frac{\pi h}{3}\left(b^2 - 3a^2 + \frac{2a^3}{b}\right)$ unidades al cubo

17. $\frac{\pi}{3}(a-b)^2(2a+b)$ unidades al cubo

19. $\frac{4\pi ab^2}{3}$ unidades al cubo

21. (a) $\pi/2$ unids. al cubo, (b) 2π unids. al cubo

23. $k > 2$ **25.** sí; no; $a^2b/2$ cm^3

27. aprox. 1537 unids. al cubo

29. $8192\pi/105$ unids. al cubo

31. $R = \frac{h\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos 2\alpha}$

Sección 7.2 (página 449)

1. 6 m^3 **3.** $\pi/3$ unidades^3

5. 132 pies^3 **7.** $\pi a^2h/2$ cm^3

9. $3z^2$ unids. al cuad. **11.** $\frac{16r^3}{3}$ unids. al cubo

13. 72π cm^3

15. $\pi r^2(a+b)/2$ unids. al cubo

17. $\frac{16\,000}{3}$ unids. al cubo **19.** $12\pi\sqrt{2}$ pulgadas^3

21. aprox. 97.28 cm^3

Sección 7.3 (página 458)

1. $2\sqrt{5}$ unidades **3.** $52/3$ unidades

5. $(2/27)(13^{3/2} - 8)$ unidades **7.** 6 unidades

9. $(e^2+1)/4$ unidades **11.** $\sinh a$ unidades

13. $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4 + \sqrt{17})$ unidades

15. $6a$ unidades **17.** 1.0338 unidades

19. 1.0581

21. $(10^{3/2} - 1)\pi/27$ unidades al cuad.

23. $\dfrac{64\pi}{81}\left[\dfrac{(13/4)^{5/2}-1}{5} - \dfrac{(13/4)^{3/2}-1}{3}\right]$ unidades al cuad.

25. $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$ unidades al cuad.

27. $2\pi\left(\dfrac{255}{16} + \ln 4\right)$ unidades al cuad.

29. $4\pi^2 ab$ unidades al cuad.

31. $8\pi\left(1 + \dfrac{\ln(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\right)$ unidades al cuad.

33. $s = \dfrac{5}{\pi}\sqrt{4+\pi^2}E\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}\right)$

35. $k > -1$

37. (a) π unids. al cubo; (c) «Cubrir» una superficie con pintura requiere poner una capa de espesor constante. Suficientemente lejos hacia la derecha, el asta es más fina que cualquier constante fijada, por lo que puede contener menos pintura de la necesaria para cubrir su superficie.

Sección 7.4 (página 466)

1. masa $\dfrac{2L}{\pi}$; centro de masas en $\bar{s} = \dfrac{L}{2}$

3. $m = \dfrac{1}{4}\pi\delta_0 a^2$; $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{4a}{3\pi}$

5. $m = \dfrac{256k}{15}$; $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \dfrac{16}{7}$

7. $m = \dfrac{ka^3}{2}$; $\bar{x} = \dfrac{2a}{3}$, $\bar{y} = \dfrac{a}{2}$

9. $m = \displaystyle\int_a^b \delta(x)(g(x) - f(x))\,dx$;

$M_{x=0} = \displaystyle\int_a^b x\delta(x)(g(x) - f(x))\,dx$, $\bar{x} = M_{x=0}/m$,

$M_{y=0} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b \delta(x)((g(x))^2 - (f(x))^2)\,dx$,

$\bar{y} = M_{y=0}/m$

11. La masa es $\dfrac{8}{3}\pi R^3$ kg. El centro de masas está en la recta perpendicular al plano que pasa por el centro de la bola, a una distancia de $R/10$ m del centro de la bola sobre el lado opuesto del plano.

13. $m = \dfrac{1}{8}\pi\delta_0 a^4$; $\bar{x} = 16a/(15\pi)$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 8a/15$

15. $m = \dfrac{1}{3}k\pi a^3$; $\bar{x} = 0$, $y = \dfrac{3a}{2\pi}$

17. aprox. $5.57C/k^{3/2}$

Sección 7.5 (página 472)

1. $\left(\dfrac{4r}{3\pi}, \dfrac{4r}{3\pi}\right)$

3. $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\ln(1+\sqrt{2})}, \dfrac{\pi}{8\ln(1+\sqrt{2})}\right)$

5. $\left(0, \dfrac{9\sqrt{3}-4\pi}{4\pi - 3\sqrt{3}}\right)$

7. $\left(\dfrac{19}{9}, -\dfrac{1}{3}\right)$

9. El centroide está en el eje de simetría del hemisferio a mitad de camino entre el plano de la base y el vértice.

11. El centroide está en el eje del cono a un cuarto de su altura desde el plano de la base.

13. $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{8}\right)$

15. $\left(\dfrac{2r}{\pi}, \dfrac{2r}{\pi}\right)$

17. $(8/9, 11/9)$

19. $(0, 2/(3(\pi + 2)))$

21. $(1, -2)$

23. $\dfrac{5\pi}{3}$ unids. al cubo

25. $(0.71377, 0.26053)$

27. $(1, \frac{1}{5})$

29. $\bar{x} = \dfrac{M_{x=0}}{A}$, $\bar{y} = \dfrac{M_{y=0}}{A}$,

siendo $A = \displaystyle\int_c^d (g(y) - f(y))\,dy$,

$M_{x=0} = \frac{1}{2}\displaystyle\int_c^d ((g(y))^2 - (f(y))^2)\,dy$

$M_{y=0} = \displaystyle\int_c^d y(g(y) - f(y))\,dy$

31. orientación diamante, lado hacia arriba

Sección 7.6 (página 480)

1. (a) 235 200 N, (b) 352 800 N

3. 6.12×10^8 N

5. 8.92×10^6 N

7. 7.056×10^5 N · m

9. $2450\pi a^3\left(a + \frac{8h}{3}\right)$ N · m

Sección 7.7 (página 484)

1. 11 000 $ **3.** $8\,(\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}))$ $

5. 9063,46 $ **7.** 5865,64 $

9. 50 000 $ **11.** 11 477,55 $

13. 64 872,10 $ **15.** $\int_0^T e^{-\lambda(t)}P(t)\,dt$

17. aprox. 23 300, 11 890 $

Sección 7.8 (página 497)

1. no más de 2,47 € **3.** 6,81 €

5. $\mu \approx 3.5833$, $\sigma = 1.7059$, $\Pr(X \leqslant 3) = 0.4833$

7. (a) ocho tripletas (x, y, z) con $x, y, z \in \{H, T\}$
(b) $\Pr(H, H, H) = 0.166375$, $\Pr(H, H, T) = \Pr(H, T, H) = \Pr(T, H, H) = 0.136125$, $\Pr(H, T, T) = \Pr(T, H, T) = \Pr(T, T, H) = 0.111375$, $\Pr(T, T, T) = 0.091125$
(c) $f(0) = 0.911125$, $f(1) = 0.334125$, $f(2) = 0.408375$, $f(3) = 0.166375$
(d) 0.908875, (e) 1.650000

9. (a) $\frac{2}{9}$, (b) $\mu = 2$, $\sigma^2 = \frac{1}{2}$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
(c) $\frac{8}{9\sqrt{2}} \approx 0{,}63$

11. (a) 3, (b) $\mu = \frac{3}{4}$, $\sigma^2 = \frac{3}{80}$, $\sigma = \sqrt{\frac{3}{80}}$,
(c) $\frac{69}{20}\sqrt{\frac{3}{80}} \approx 0.668$

13. (a) 6 (b) $\mu = \frac{1}{2}$, $\sigma^2 = \frac{1}{20}$, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{20}}$,
(c) $\frac{7}{5\sqrt{5}} \approx 0.626$

15. (a) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, (b) $\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.0564$, $\sigma^2 = \frac{\pi - 2}{2\pi}$,
$\sigma = \sqrt{\frac{\pi - 2}{2\pi}} \approx 0.426$, (c) $\Pr \approx 0.68$

19. (a) 0, (b) $e^{-3} \approx 0.05$, (c) ≈ 0.046

21. aproximadamente 0.006

Sección 7.9 (página 506)

1. $y^2 = Cx$ **3.** $x^3 - y^3 = C$

5. $Y = Ce^{t^2/2}$ **7.** $y = \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}$

9. $y = -\ln(Ce^{-2t} - \frac{1}{2})$ **11.** $y = x^3 + Cx^2$

13. $y = \frac{3}{2} + Ce^{-2x}$ **15.** $y = x - 1 + Ce^{-x}$

17. $y = (1 + e^{1-10t})/10$ **19.** $y = (x + 2)e^{1/x}$

21. $y = \sqrt{4 + x^2}$ **23.** $y = \frac{2x}{1 + x}$, $(x > 0)$

25. b

27. Si $a = b$ la solución dada está indeterminada 0/0; en este caso la solución es $x = a^2kt/(1 + akt)$.

29. $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{kg/mt}} - 1}{e^{2\sqrt{kg/mt}} + 1}$, $v \to \sqrt{\frac{mg}{k}}$

31. las hipérbolas $x^2 - y^2 = C$

Ejercicios de repaso (página 507)

1. aprox. 833

3. $a \approx 1.1904$, $b \approx 0.0476$

5. $a = 2.1773$ **7.** $(\frac{8}{3\pi}, \frac{4}{3\pi})$

9. aprox. 27 726 N · cm **11.** $y = 4(x - 1)^3$

13. 8798,85 €

Problemas avanzados (página 508)

1. (b) $\ln 2/(2\pi)$, (c) $\pi/(4k(k^2 + 1))$

3. $y = (r/h^3)x^3 - 3(r/h^2)x^2 + 3(r/h)x$

5. $b = -a = 27/2$ **7.** $1/\pi$

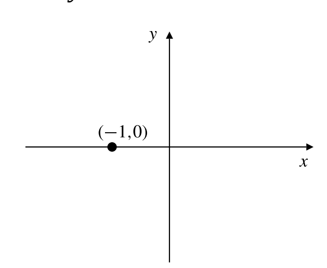
9. (a) $S(a, a, c) = 2\pi a^2 + \frac{2\pi ac^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c}\right)$
(b) $S(a, c, c) = 2\pi c^2 + \frac{2\pi a^2 c}{\sqrt{a^2 - c^2}}\cos^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)$
(c) $S(a, b, c) \approx \frac{b - c}{a - c}\,S(a, a, c) + \frac{a - b}{a - c}\,S(a, c, c)$
(d) $S(3, 2, 1) \approx 49.595$

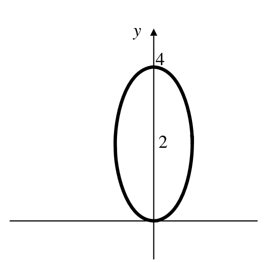
Capítulo 8
Cónicas, curvas paramétricas y curvas en polares

Sección 8.1 (página 526)

1. $(x^2/5) + (y^2/9) = 1$ **3.** $(x - 2)^2 = 16 - 4y$

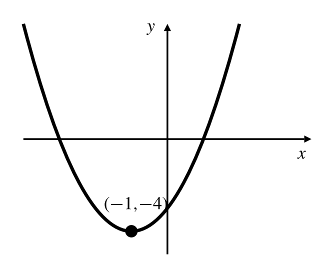
5. $3y^2 - x^2 = 3$ **7.** un solo punto $(-1, 0)$



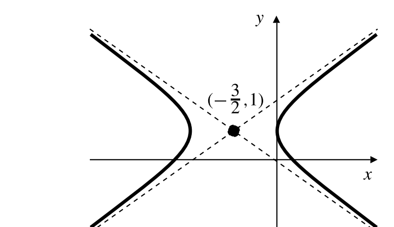


9. elipse, centro $(0, 2)$

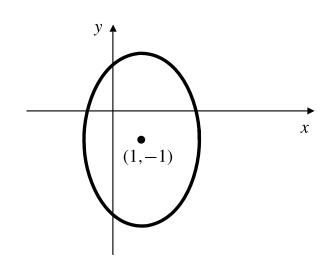
11. parábola, vértice $(-1, -4)$



13. hipérbola, centro $(-\frac{3}{2}, 1)$
asíntotas
$2x + 3 = \pm 2^{3/2}(y - 1)$

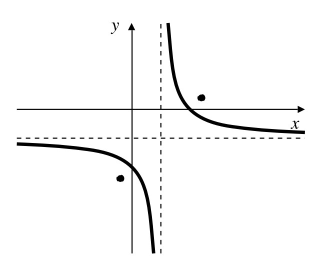


15. elipse, centro $(1, -1)$

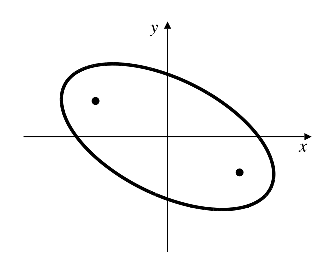


17. $y^2 - 8y = 16x$ o $y^2 - 8y = -4x$

19. hipérbola rectangular, centro $(1, -1)$
semieje $a = b = \sqrt{2}$, excentricidad $\sqrt{2}$,
focos $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1)$, $(-\sqrt{2}+1, -\sqrt{2}-1)$,
asíntotas $x = 1$, $y = -1$



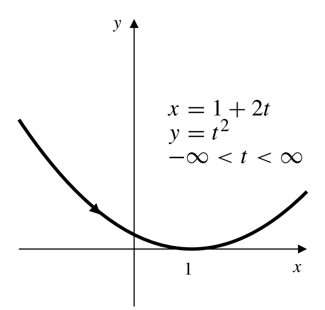
21. elipse, centro $(0, 0)$, semiejes $a = 2$, $b = 1$,
focos $\pm\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$



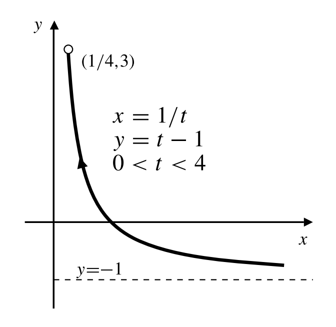
23. $(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 - 2p\varepsilon^2 x = \varepsilon^2 p^2$

Sección 8.2 (página 533)

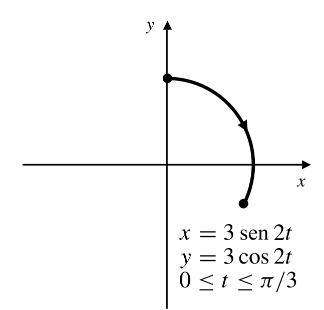
1. $y = (x - 1)^2/4$



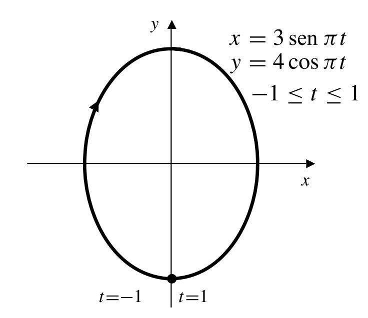
3. $y = (1/x) - 1$



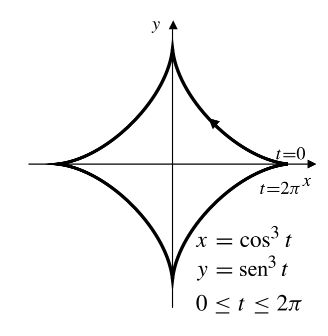
5. $x^2 + y^2 = 9$



7. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$



9. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

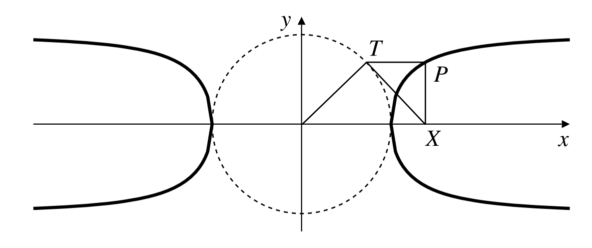


11. La mitad derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

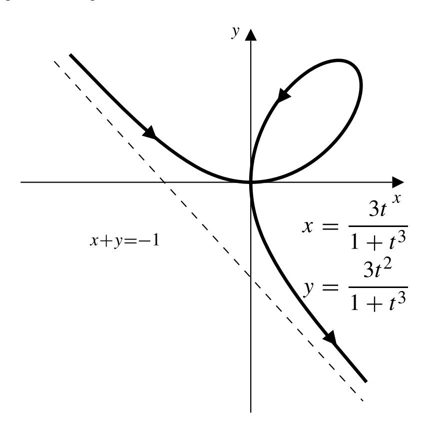
13. La curva empieza en el origen y realiza dos veces una espiral en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del origen terminando en $(4\pi, 0)$

15. $x = m/2, \quad y = m^2/4, \quad (-\infty < m < \infty)$

17. $x = a \sec t$, $y = a \operatorname{sen} t$; $y^2 = a^2(x^2 - a^2)/x^2$



19. $x^3 + y^3 = 3xy$



Sección 8.3 (página 539)

1. vertical en $(1, -4)$

3. horiz. en $(0, -16)$ y $(8, 16)$; vert. en $(-1, -11)$

5. horizontal en $(0, 1)$, vertical en $(\pm 1/\sqrt{e}, 1/e)$

7. horizontal en $(0, \pm 1)$, vert. en $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ y $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$

9. $-3/4$

11. $-1/2$

13. $x = t - 2$, $y = 4t - 2$

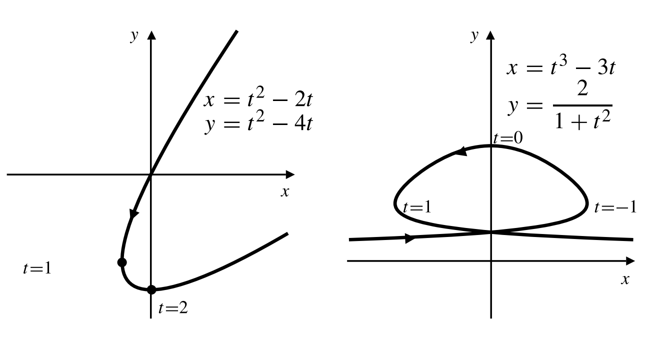
15. pendientes ± 1

17. no suave en $t = 0$

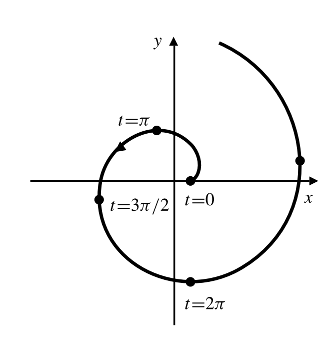
19. no suave en $t = 0$

21.

23.



25.



Sección 8.4 (página 544)

1. $4\sqrt{2} - 2$ unidades **3.** $6a$ unidades

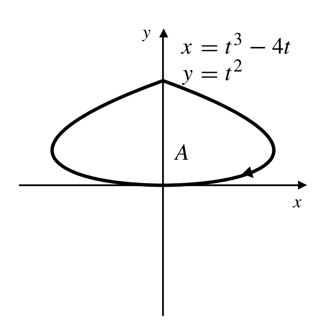
5. $\frac{8}{3}\,((1 + \pi^2)^{3/2} - 1)$ unidades

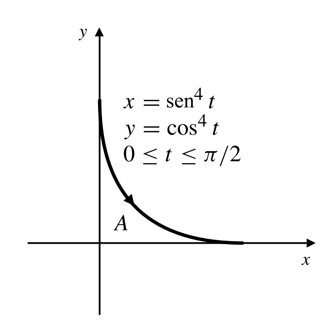
7. 4 unidades **9.** $8a$ unidades

11. $2\sqrt{2}\pi(1 + 2e^{\pi})/5$ unidades al cuad.

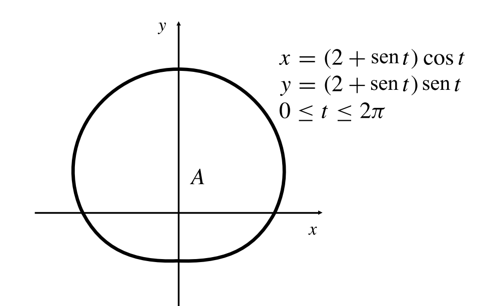
13. $72\pi(1 + \sqrt{2})/15$ unidades al cuad.

15. 256/15 unids. al cuad. **17.** 1/6 unids. al cuad.





19. $9\pi/2$ unidades al cuad.



23. $32\pi a^3/105$ unidades al cubo

Sección 8.5 (página 553)

1. $x = 3$, recta vertical

3. $3y - 4x = 5$, recta

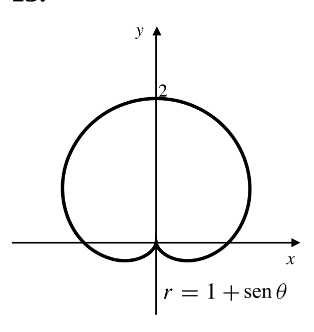
5. $2xy = 1$, hipérbola rectangular

7. $y = x^2 - x$, una parábola

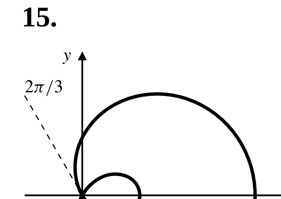
9. $y^2 = 1 + 2x$, una parábola

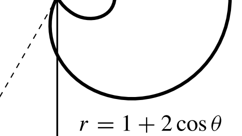
11. $x^2 - 3y^2 - 8y = 4$, una hipérbola

13.

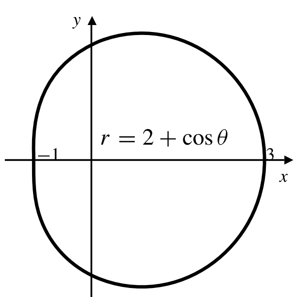


15.

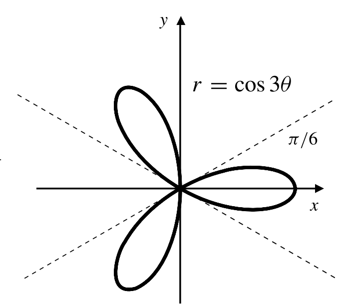




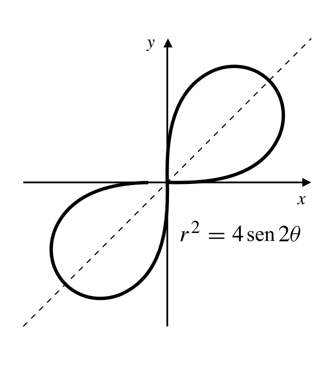
17.



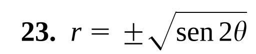
19.

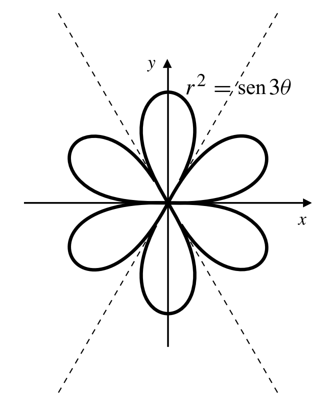


21.



23. $r = \pm\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}$

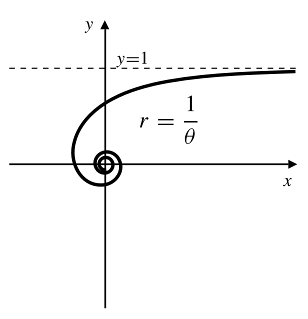




25. el origen y $[\sqrt{3}/2, \pi/3]$

27. el origen y $[3/2, \pm\pi/3]$

29. asíntota $y = 1$, $r = 1/(\theta - \alpha)$ tiene asíntota $(\cos\alpha)y - (\operatorname{sen}\alpha)x = 1$

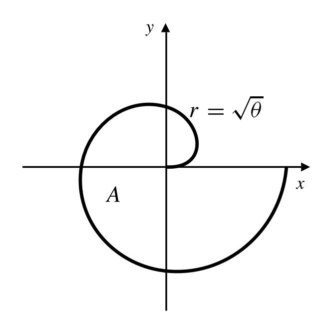


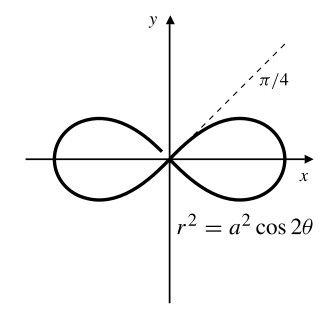
31. $x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$

39. $\ln\theta_1 = 1/\theta_1$, punto $(-0.108461,\ 0.556676)$; $\ln\theta_2 = -1/(\theta_2 + \pi)$, punto $(-0.182488,\ -0.178606)$

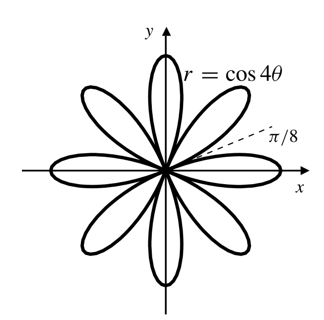
Sección 8.6 (página 558)

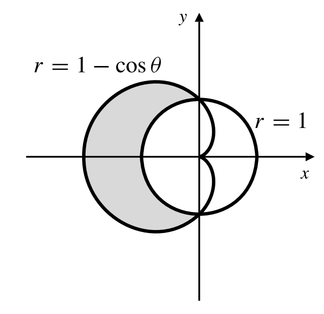
1. π^2 unids. al cuad. **3.** a^2 unids. al cuad.



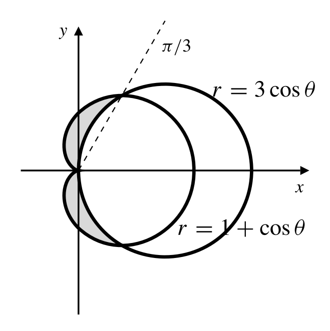


5. $\pi/2$ unids. al cuad. **7.** $2 + (\pi/4)$ unids. al cuad.

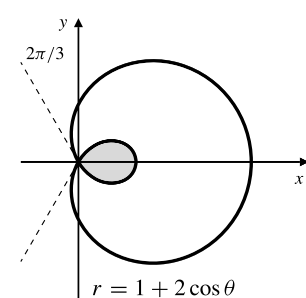




9. $\pi/4$ unidades al cuad.



11. $\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ unidades al cuad.



13. $\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\pi} - e^{-a\pi})$ unidades

17. $67.5^{\circ},\ -22.5^{\circ}$

19. 90° en $(0, 0)$,

$\pm 45^{\circ}$ en $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\pm 135^{\circ}$ en $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

21. horizontal en $(\pm\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$, vertical en $(2, 0)$ y el origen

23. horizontal en $(0, 0)$, $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \pm\tan^{-1}\sqrt{2})$, $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \pi \pm \tan^{-1}\sqrt{2})$, vertical en $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \pm\tan^{-1}(1/\sqrt{2}))$, $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \pi \pm \tan^{-1}(1/\sqrt{2}))$

25. horizontal en $(4, -\frac{\pi}{2})$, $(1, \frac{\pi}{6})$, $(1, \frac{5\pi}{6})$, vertical en $(3, -\frac{\pi}{6})$, $(3, -\frac{5\pi}{6})$, no tangente en $(0, \frac{\pi}{2})$

Ejercicios de repaso (página 559)

1. elipse, focos $(\pm 1, 0)$, semieje mayor $\sqrt{2}$, semieje menor 1

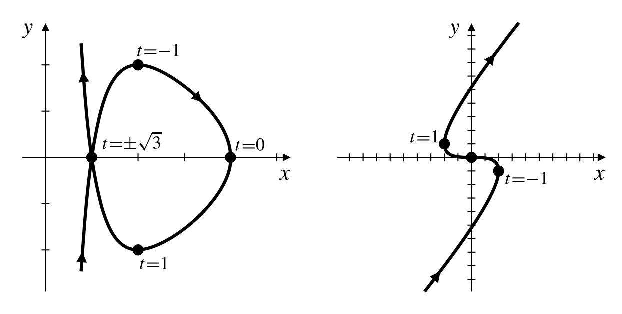
3. parábola, vértice $(4, 1)$, foco $(15/4, 1)$

5. recta desde $(0, 2)$ hasta $(2, 0)$

7. la parábola $y = x^2 - 1$ izquierda a derecha

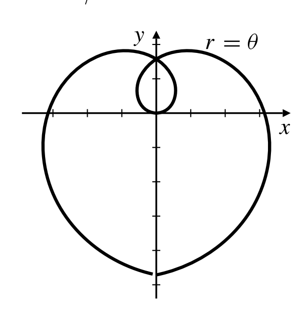
9. parte del primer cuadrante de la elipse $16x^2 + y^2 = 16$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 4)$

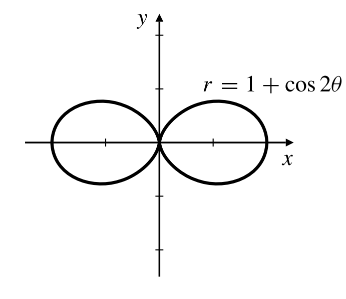
11. tangentes horizontales en $(2, \pm 2)$ (i.e. $t = \pm 1$), tangentes verticales en $(4, 0)$ (i.e. $t = 0$)



13. tangente horizontal en $(0, 0)$ (i.e. $t = 0$), tangente vertical en $(2, -1)$ y $(-2, 1)$ (i.e. $t = \pm 1$)

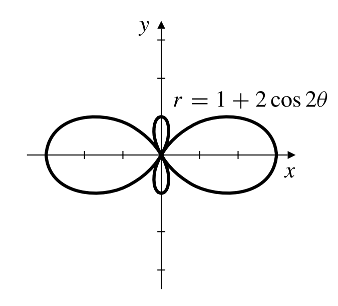
15. 1/2 unids. al cuad. **17.** $1 + e^2$ unidades





19. $r = \theta$ **21.** $r = 1 + \cos 2\theta$

23. $r = 1 + 2\cos 2\theta$



25. $\pi + (3\sqrt{3}/4)$ unidades al cuad.

27. $(\pi - 3)/2$ unidades al cuad.

Problemas avanzados (página 559)

1. $16\pi \sec\theta$ cm^2 **5.** $40\pi/3$ ft^3

7. aprox. 84.65 minutos

9. $r^2 = \cos(2\theta)$ es la curva interna; el área entre las curvas es de 1/3 unidades al cuadrado

Capítulo 9
Secuencias, series y series de potencias

Sección 9.1 (página 569)

1. acotada, positiva, creciente, convergente a 2

3. acotada, positiva, convergente a 4

5. acotada por abajo, positiva, creciente, divergente a infinito

7. acotada por abajo, positiva, creciente, divergente a infinito

9. acotada, positiva, decreciente, convergente a 0

11. divergente **13.** divergente

15. ∞ **17.** 0

19. 1 **21.** e^{-3}

23. 0 **25.** 1/2

27. 0 **29.** 0

31. $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$

33. Si $\{a_n\}$ es definitivamente decreciente, entonces o está acotada inferiormente, y es por lo tanto convergente, o no está acotada inferiormente y por lo tanto diverge a menos infinito.

Sección 9.2 (página 576)

1. $\dfrac{1}{2}$

3. $\dfrac{1}{(2+\pi)^8((2+\pi)^2 - 1)}$

5. $\dfrac{25}{4{,}416}$ **7.** $\dfrac{8e^4}{e-2}$

9. diverge a ∞ **11.** $\dfrac{3}{4}$

13. $\dfrac{1}{3}$ **15.** diverge a ∞

17. diverge a ∞ **19.** diverge

21. 14 m

25. Si $\{a_n\}$ es definitivamente decreciente, entonces la serie $\sum a_n$ debe, o bien converger (si sus sumas parciales están acotadas inferiormente), o bien diverger a $-\infty$ (si sus sumas parciales no están acotadas inferiormente).

27. falso, e.g. $\sum \dfrac{(-1)^n}{2^n}$ **29.** verdadero

31. verdadero

Sección 9.3 (página 586)

1. converge **3.** diverge a ∞

5. converge **7.** diverge a ∞

9. converge **11.** diverge a ∞

13. diverge a ∞ **15.** converge

17. converge **19.** diverge a ∞

21. converge **23.** converge

25. converge

27. $s_n + \dfrac{1}{3(n+1)^3} \leqslant s \leqslant s_n + \dfrac{1}{3n^3}; \quad n = 6$

29. $s_n + \dfrac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant s \leqslant s_n + \dfrac{2}{\sqrt{n}}; \quad n = 63$

31. $0 < s - s_n \leqslant \dfrac{n+2}{2^n(n+1)!(2n+3)}; \quad n = 4$

33. $0 < s - s_n \leqslant \dfrac{2^n(4n^2+6n+2)}{(2n)!(4n^2+6n)}; \quad n = 4$

39. converge, $a_n^{1/n} \to (1/e) < 1$

41. no info del test de la razón, pero la serie diverge a infinito ya que todos los términos superan a 1.

43. (b) $s \leqslant \dfrac{2}{k(1-k)}$, $k = \frac{1}{2}$,

(c) $0 < s - s_n < \dfrac{(1+k)^{n+1}}{2^n k(1-k)}$, $k = \dfrac{n+2-\sqrt{n^2+8}}{2(n-1)}$ para $n \geqslant 2$

45. (a) 10, (b) 5, (c) 0.765

Sección 9.4 (página 594)

1. conv. condicionalmente

3. conv. condicionalmente

5. diverge

7. conv. absolutamente

9. conv. condicionalmente

11. diverge

13. 999

15. 13

17. converge absolutamente si $-1 < x < 1$, condicionalmente si $x = -1$, diverge en el resto

19. converge absolutamente si $0 < x < 2$, condicionalmente si $x = 2$, diverge en el resto

21. converge absolutamente si $-2 < x < 2$, condicionalmente si $x = -2$, diverge en el resto

23. converge absolutamente si $-\frac{7}{2} < x < \frac{1}{2}$, condicionalmente si $x = -\frac{7}{2}$, diverge en el resto

25. AST no se aplica directamente, pero sí se aplica si eliminamos los términos 0; la serie converge condicionalmente.

27. (a) falso, e.g. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$,

(b) falso, e.g. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n}$, (*véase* el Ejercicio 25),

(c) verdadero

29. converge absolutamente para $-1 < x < 1$, condicionalmente si $x = -1$, diverge en el resto.

Sección 9.5 (página 604)

1. centro 0, radio 1, intervalo $(-1, 1)$

3. centro -2, radio 2, intervalo $[-4, 0)$

5. centro $\frac{3}{2}$, radio $\frac{1}{2}$, intervalo $(1, 2)$

7. centro 0, radio ∞, intervalo $(-\infty, \infty)$

9. $\dfrac{1}{(1-x)^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$, $(-1 < x < 1)$

11. $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $(-1 < x < 1)$

13. $\dfrac{1}{(2-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^{n+2}} x^n$, $(-2 < x < 2)$

15. $\ln(2-x) = \ln 2 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n n}$, $(-2 \leqslant x < 2)$

17. $\dfrac{1}{x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^{n+2}} (x+2)^n$, $(-4 < x < 0)$

19. $\dfrac{x^3}{1-2x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n+3}$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

21. $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$; $\dfrac{1}{1+4x}$

23. $[-1, 1)$; $\frac{1}{3}$ si $x = 0$,

$-\dfrac{1}{x^3}\ln(1-x) - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x}$ en el resto

25. $(-1, 1)$; $\dfrac{2}{(1-x^2)^2}$

27. $3/4$

29. $\pi^2(\pi+1)/(\pi-1)^3$

31. $\ln(3/2)$

Sección 9.6 (página 614)

1. $e^{3x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n e}{n!} x^n$, (todo x)

3. $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[-\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$, (todo x)

5. $x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}(2n+1)!} x^{2n+3}$, (todo x)

7. $\operatorname{sen} x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, (todo x)

9. $\frac{1+x^3}{1+x^2} = 1 - x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (x^{2n-1} + x^{2n})$, $(-1 < x < 1)$

11. $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $(-1 < x < 1)$

13. $\cosh x - \cos x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}$, (todo x)

15. $e^{-2x} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} (x+1)^n$, (todo x)

17. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (x-\pi)^{2n}$, (todo x)

19. $\ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n n} (x-2)^n$, $(-2 < x \leqslant 6)$

21. $\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$, (todo x)

23. $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (x+2)^n$, $(-4 < x < 0)$

25. $(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} (x-1)^n$, $(0 \leqslant x \leqslant 2)$

27. $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}$ **29.** $x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$

31. $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ **33.** e^{x^2} (todo x)

35. $\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{\operatorname{senh} x}{x}$ si $x \neq 0$, 1 si $x = 0$

37. (a) $1 + x + x^2$, (b) $3 + 3(x-1) + (x-1)^2$

Sección 9.7 (página 618)

1. $\frac{1}{720}(0.2)^7$ **3.** 1.22140

5. 3.32011 **7.** 0.99619

9. -0.10533 **11.** 0.42262

13. 1.54306

15. $I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} x^{2n+1}$, (todo x)

17. $K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} x^{n+1}$, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$

19. $M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+1)} x^{4n+1}$, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$

21. 0.946 **23.** 2

25. $-3/25$ **27.** 0

Sección 9.8 (página 622)

1. $\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n n!} x^n$
$|x| < 1$

3. $\sqrt{4+x} = 2 + \frac{x}{4} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2^{3n} n!} x^n$, $(-4 < x \leqslant 4)$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $|x| < 1$

Sección 9.9 (página 628)

1. $2\pi/3$ **3.** π

5. $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\operatorname{sen}(nt))/n$

7. $\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\cos((2n-1)\pi t)}{(2n-1)^2 \pi^2} + \frac{(-1)^n \operatorname{sen}(n\pi t)}{n\pi} \right)$

9. 1

11. $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi t)$

13. $\pi^2/8$

Ejercicios de repaso (página 630)

1. conv. a 0 **3.** div. a ∞

5. $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ **7.** $4\sqrt{2}/(\sqrt{2}-1)$

9. 2 **11.** converge

13. converge **15.** converge

17. conv. abs. **19.** conv. cond.

21. conv. abs. para x en $(-1, 5)$, cond. para $x = -1$, div. en el resto

23. 1.202

25. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/3^{n+1}$, $|x| < 3$

27. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{2n}/(ne^n)$, $-\sqrt{e} < x \leqslant \sqrt{e}$

29. $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{2n-1}x^{2n+1}/(2n)!$, todo x

31. $(1/2) + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 1 \times 4 \times 7 \times \cdots \times (3n-2)x^n}{2 \times 24^n n!}$, $-8 < x \leqslant 8$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(x-\pi)^n/\pi^{n+1}$, $0 < x < 2\pi$

35. $1 + 2x + 3x^2 + \frac{10}{3}x^3$ **37.** $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$

39. $\begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ \cosh\sqrt{|x|} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ **41.** $\pi^2/(\pi-1)^2$

43. $\ln(e/(e-1))$ **45.** $1/14$

47. 3, 0.49386 **49.** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n}\,\text{sen}\,(nt)$

Problemas avanzados (página 631)

5. (c) 1.645

7. (a) ∞, (c) e^{-x^2}, (d) $f(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

Capítulo 10

Vectores y geometría de coordenadas en el espacio tridimensional

Sección 10.1 (página 640)

1. 3 unidades **3.** $\sqrt{6}$ unidades

5. $|z|$ unidades; $\sqrt{y^2 + z^2}$ unidades

7. $\cos^{-1}(-4/9) \approx 116.39^{\text{o}}$

9. $\sqrt{3}/2$ unidades al cuad. **11.** $\sqrt{n-1}$ unidades

13. El semiespacio que contiene al origen y está limitado por el plano que pasa por $(0, -1, 0)$ y es perpendicular al eje y.

15. El plano vertical (paralelo al eje z) que pasa por $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

17. La esfera de radio 2 centrada en $(1, -2, 3)$.

19. El cilindro circular sólido de radio 2 con eje en el eje x.

21. El cilindro parabólico generado trasladando la parábola $z = y^2$ en el plano yz en la dirección del eje x.

23. El plano que pasa por los puntos $(6, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 2)$.

25. La recta que pasa por $(1, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$.

27. La cicunferencia en la que la esfera de radio 2 centrada en el origen corta a la esfera de radio 2 centrada en $(2, 0, 0)$.

29. La elipse en la que el plano $z = x$ corta al cilindro circular de radio 1 y eje coincidente con el eje z.

31. La parte del cilindro sólido circular de radio 1 y eje el eje z que está por encima del plano $z = y$.

33. Frontera $(0, 0)$ y $x^2 + y^2 = 1$; interior $= S$; S abierto.

35. La frontera de S es S; interior vacío; S es cerrado.

37. Frontera: las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; interior: puntos entre las esferas; S es cerrado.

39. La frontera de S es S, concretamente la recta $x = y = z$; interior vacío; S es cerrado.

Sección 10.2 (página 651)

1. (a) $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, (b) $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, (c) $2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, (d) $-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, (e) $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, (f) $4\mathbf{i} + \mathbf{j}$, (g) $-7\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$, (h) $2\mathbf{i} - (5/3)\mathbf{j}$

3. (a) $6\mathbf{i} - 10\mathbf{k}$, $8\mathbf{j}$, $-3\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ (b) $5\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, (c) $\frac{3}{5\sqrt{2}}\mathbf{i} \pm \frac{4}{5\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ (d) 18, (e) $\cos^{-1}(9/25) \approx 68.9^{\text{o}}$, (f) $18/5\sqrt{2}$ (g) $(27/25)\mathbf{i} + (36/25)\mathbf{j} - (9/5)\mathbf{k}$

9. desde el sudoeste a $50\sqrt{2}$ km/h.

11. La orientación a un ángulo θ al este de AC, con $\theta = \operatorname{sen}^{-1} \dfrac{3}{2\sqrt{1+4k^2}}$.
El viaje no es posible si $k < \frac{1}{4}\sqrt{5}$. Si $k > \frac{1}{4}\sqrt{5}$ hay un segundo rumbo posible, $\pi - \theta$, pero el viaje será más largo.

13. $t = 2$

15. $\cos^{-1}(2/\sqrt{6}) \approx 35.26^{\circ}$, 90°

17. $(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$

19. $\lambda = 1/2$, punto medio, $\lambda = 2/3$, 2/3 del trayecto desde P_1 a P_2, $\lambda = -1$, P_1 está a medio camino entre este punto y P_2.

21. plano que pasa por un punto con vector de posición $(b/|\mathbf{a}|^2)\mathbf{a}$ perpendicular a $\mathbf{a}$.

23. $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

25. $(|\mathbf{u}|\mathbf{v} + |\mathbf{v}|\mathbf{u})/||\mathbf{u}|\mathbf{v} + |\mathbf{v}|\mathbf{u}|$

31. $\mathbf{u} = (\mathbf{w} \bullet \mathbf{a}/|\mathbf{a}|^2)\mathbf{a}$, $\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{u}$

33. $\mathbf{x} = (\mathbf{a} + K\hat{\mathbf{u}})/(2r)$, $\mathbf{y} = (\mathbf{a} - K\hat{\mathbf{u}})/(2s)$, con $K = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - 4rst}$ y $\hat{\mathbf{u}}$ es cualquier vector unitario

35. aprox. 12.373 m **37.** aprox. 19 m

Sección 10.3 (página 660)

1. $5\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

3. $\sqrt{6}$ unidades al cuad.

5. $\pm\frac{1}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$

15. 4/3 unidades al cubo

17. $k = -6$

19. $\lambda = \dfrac{\mathbf{x} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}$, $\mu = \dfrac{\mathbf{x} \bullet (\mathbf{w} \times \mathbf{u})}{\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}$, $\nu = \dfrac{\mathbf{x} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}$

21. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; el primero está en el plano de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, el segundo está en el plano de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Sección 10.4 (página 668)

1. (a) $x^2 + y^2 + z^2 = z^2$; (b) $x + y + z = x + y + z$; (c) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$

3. $x - y + 2z = 0$ **5.** $7x + 5y - z = 12$

7. $x - 5y - 3z = -7$ **9.** $x + 6y - 5z = 17$

11. $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \bullet [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)] = 0$

13. planos que pasan por la recta $x = 0$, $y + z = 1$ (excepto el propio plano $y + z = 1$).

15. $\mathbf{r} = (1 + 2t)\mathbf{i} + (2 - 3t)\mathbf{j} + (3 - 4t)\mathbf{k}$, $(-\infty < t < \infty)$ $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 3t$, $z = 3 - 4t$, $(-\infty < t < \infty)$
$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-4}$

17. $\mathbf{r} = t(7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$; $x = 7t$, $y = -6t$, $z = -5t$; $x/7 = -y/6 = -z/5$

19. $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} + t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$;
$x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = -1 + t$;
$x - 1 = y - 2 = z = 1$

21. $\frac{x-4}{-5} = \frac{y}{3}$, $z = 7$

25. $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j$, $(i, j = 1, ..., 4,\ i \neq j)$,
$\mathbf{v} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \neq 0$, $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \bullet \mathbf{v} = 0$.

27. $7\sqrt{2}/10$ unidades **29.** $18/\sqrt{69}$ unidades

31. todas las rectas paralelas al plano xy y pasan por (x_0, y_0, z_0).

33. (x, y, z) satisface la cuadrática si $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ o $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$.

Sección 10.5 (página 673)

1. Elipsoide centrado en el origen con semiejes 6, 3 y 2 cuyos ejes son, respectivamente, los ejes x, y y z.

3. Esfera con centro $(1, -2, 3)$ y radio $1/\sqrt{2}$.

5. Paraboloide elíptico con vértice en el origen, eje coincidente con el eje z y sección cruzada $x^2 + 2y^2 = 1$ en el plano $z = 1$.

7. Hiperboloide de dos hojas con vértices $(\pm 2, 0, 0)$ y secciones cruzadas circulares en planos $x = c$, $(c^2 > 4)$.

9. Paraboloide hiperbólico, el mismo que $z = x^2 - y^2$ pero rotado 45° respecto al eje z (en sentido contrario al de las agujas del reloj visto desde arriba).

11. Cilindro hiperbólico paralelo al eje y, que corta al plano xz en la hipérbola $(x^2/4) - z^2 = 1$.

13. Cilindro parabólico paralelo al eje y.

15. Cono circular con vértice $(2, 3, 1)$, eje vertical, y semiángulo vertical de 45°.

17. Circunferencia en el plano $x + y + z = 1$ con centro en (1/3, 1/3, 1/3) y radio $\sqrt{11/3}$.

19. Una parábola en el plano $z = 1 + x$ con vértice en $(-1/2, 0, 1/2)$ y eje coincidente con la recta $z = 1 + x$, $y = 0$.

21. $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{x}{a}\right)$;

$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 + \frac{x}{a}\right)$, $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$

23. $\mathbf{a} = \mathbf{i} \pm \mathbf{k}$ (o cualquier múltiplo)

Sección 10.6 (página 682)

1. $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{pmatrix}$

5. $\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. 36

15. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

19. $x_1 = x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$

21. def. neg.

23. def. pos.

25. indefinida

Sección 10.7 (página 693)

1. 2 unidades

5.
```
sp:=(U, V) −>DotProduct(
U,Normalize(V, 2), conjugate=false)
```

7.
```
ang := (u, v) −> evalf(
(180/Pi) *VectorAngle(U, V))
```

9.
```
VolT:=(U, V, W) −>(1/6) *abs(
DotProduct(U,(V &x W),conjugate=false))
```

11. $(u, v, x, y, z) = (1, 0, -1, 3, 2)$

13. -935

15. $\begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$

Ejercicios de repaso (página 694)

1. Plano paralelo al eje y que pasa por (3, 0, 0) y (0, 0, 1).

3. Todos los puntos sobre o encima del plano que pasa por el origen con normal $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

5. Paraboloide circular con vértice en (0, 1, 0) y eje coincidente con el eje y, abriéndose en la dirección de y creciente.

7. Paraboloide hiperbólico.

9. Puntos dentro del elipsoide de vértices $(\pm 2, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0)$ y $(0, 0, \pm 1)$.

11. Cono de eje el eje x, vértice en el origen, y sección cruzada elíptica perpendicular a su eje.

13. Cono circular oblicuo (cono elíptico). Las secciones cruzadas en planos horizontales $z = k$ son circunferencias de radio 1 con centros en $(k, 0, k)$.

15. Recta horizontal que pasa por (0, 0, 3) y $(2, -1, 3)$.

17. Circunferencia de radio 1 centrada en (1, 1, 1) en un plano normal a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

19. $2x - y + 3z = 0$

21. $2x + 5y + 3z = 2$

23. $7x + 4y - 8z = 6$

25. $\mathbf{r} = (2 + 3t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} - (1 + 2t)\mathbf{k}$

27. $x = 3t$, $y = -2t$, $z = 4t$

29. $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{0}$

31. $(3/2)\sqrt{34}$ unidades al cuad.

33. $\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

35. def. pos.

Problemas avanzados (página 695)

5. condición: $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$,

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} + t\mathbf{a} \text{ (para todo escalar } t)$$

Capítulo 11
Funciones vectoriales y curvas

Sección 11.1 (página 704)

1. $\mathbf{v} = \mathbf{j}$, $v = 1$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, la trayectoria es la recta $x = 1$, $z = 0$

3. $\mathbf{v} = 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $v = \sqrt{4t^2 + 1}$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{j}$, la trayectoria es la parábola $y = z^2$, en el plano yz

5. $\mathbf{v} = 2t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$, $v = 2\sqrt{2}t$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, la trayectoria es la semirrecta $x + y = 0$, $z = 1$, $(x \geqslant 0)$

7. $\mathbf{v} = -a \operatorname{sen} t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $v = \sqrt{a^2 + c^2}$, $\mathbf{a} = -a\cos t\mathbf{i} - a \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, la trayectoria es una hélice circular

9. $\mathbf{v} = -3\operatorname{sen} t\mathbf{i} - 4\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 5\cos t\mathbf{k}$, $v = 5$, $\mathbf{a} = -\mathbf{r}$, la trayectoria es la circunferencia intersección del plano $4x = 3y$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

11. $\mathbf{a} = \mathbf{v} = \mathbf{r}$, $v = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, e^t$, la trayectoria es la recta $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$

13. $\mathbf{v} = -(e^{-t}\cos e^t + \operatorname{sen} e^t)\mathbf{i} + (-e^{-t}\operatorname{sen} e^t + \cos e^t)\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$
$v = \sqrt{1 + e^{-2t} + e^{2t}}$
$\mathbf{a} = [(e^{-t} - e^t)\cos e^t + \operatorname{sen} e^t]\mathbf{i} + [(e^{-t} - e^t)\operatorname{sen} e^t - \cos e^t]\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$
La trayectoria es una espiral que está en la superficie $z = -1/\sqrt{x^2 + y^2}$

15. $\mathbf{a} = -3\pi^2\mathbf{i} - 4\pi^2\mathbf{j}$ **17.** $\sqrt{3/2}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$

19. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = -\frac{8}{9}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$

29. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})) = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{u} \times \left(\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{w}\right) + \mathbf{u} \times \left(\mathbf{v} \times \dfrac{d\mathbf{w}}{dt}\right)$

31. $\mathbf{u}''' \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$

33. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{2t}$, $\mathbf{a} = 4\mathbf{r}_0 e^{2t}$; la trayectoria es una recta que pasa por el origen y por el punto $\mathbf{r}_0$

35. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \dfrac{1 - e^{-ct}}{c}\mathbf{v}_0 - \dfrac{g}{c^2}(ct + e^{-ct} - 1)\mathbf{k}$

Sección 11.2 (página 712)

1. $\dfrac{e - 1}{e}$, $\dfrac{e^2 - 1}{e^2}$

3. $\mathbf{r} = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$; la curva es una circunferencia de radio 1 en el plano $z = 1$.

5. 4.76° al oeste o al sur; $\dfrac{\pi^2 R}{72}$ hacia el suelo, siendo R el radio de la tierra

7. (a) sólo tangencial, 90° en sentido contrario al de las agujas del reloj desde $\mathbf{v}$.
(b) sólo tangencial, 90° en el sentido de las agujas del reloj desde $\mathbf{v}$.
(c) sólo normal.

9. 16.0 horas, 52.7°

Sección 11.3 (página 719)

1. $x = \sqrt{a^2 - t^2}$, $y = t$, $0 \leqslant t \leqslant a$

3. $x = a\operatorname{sen}\theta$, $y = -a\cos\theta$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$

5. $\mathbf{r} = -2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 4t^2\mathbf{k}$

7. $\mathbf{r} = 3\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3(\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$

9. $\mathbf{r} = (1 + 2\cos t)\mathbf{i} - 2(1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (9 + 4\cos t - 8\operatorname{sen} t)\mathbf{k}$

11. La ecuación de (b) lleva a $\mathbf{r} = \dfrac{t^2 - 1}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{t^2 + 1}{2}\mathbf{k}$ que representa la parábola completa. Las opciones (a) y (c) llevan a parametrizaciones separadas de las mitades $y \geqslant 0$ e $y \leqslant 0$ de la parábola. Para (a) son $\mathbf{r} = t\mathbf{i} \pm \sqrt{1 + 2t}\mathbf{j} + (1 + t)\mathbf{k}$, $(t \geqslant -1/2)$

13. $(17/\sqrt{17} - 16\sqrt{2})/27$ unidades

15. $\displaystyle\int_1^T \frac{\sqrt{4a^2t^4 + b^2t^2 + c^2}}{t}\,dt$ unidades; $a(T^2 - 1) + c\ln T$ unidades

17. $\pi\sqrt{2 + 4\pi^2} + \ln(\sqrt{2}\pi + \sqrt{1 + 2\pi^2})$ unidades

19. $\sqrt{2e^{4\pi} + 1} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln\dfrac{e^{4\pi} + 1 - \sqrt{2e^{4\pi} + 1}}{e^{4\pi}} - \frac{1}{2}\ln(2 - \sqrt{3})$ unidades

21. segmentos rectos desde (0, 0) hasta (1, 1), después a (0, 2)

23. $\mathbf{r} = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(As\mathbf{i} + Bs\mathbf{j} + Cs\mathbf{k})$

25. $\mathbf{r} = a\left(1 - \dfrac{s}{K}\right)^{3/2}\mathbf{i} + a\left(\dfrac{s}{K}\right)^{3/2}\mathbf{j} + b\left(1 - \dfrac{2s}{K}\right)\mathbf{k}$, $0 \leqslant s \leqslant K$, $K = (\sqrt{9a^2 + 16b^2})/2$

Sección 11.4 (página 728)

1. $\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{a + 16t^2 + 81t^4}}(\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + 9t^2\mathbf{k})$

3. $\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}}(\cos 2t\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t\mathbf{j} - \operatorname{sen} t\mathbf{k})$

Sección 11.5 (página 736)

1. $1/2,\ 27/2$ **3.** $27/(4\sqrt{2})$

5. $\hat{\mathbf{T}} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})/\sqrt{5}$, $\hat{\mathbf{N}} = (-2\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{5}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{k}$

7. $\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}(\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})$,

$\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}(t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k})$,

$\hat{\mathbf{N}} = \frac{-(t + 2t^3)\mathbf{i} + (1 - t^4)\mathbf{j} + (t^3 + 2t)\mathbf{k}}{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$,

$\kappa = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{(t^4 + t^2 + 1)^{3/2}}$, $\tau = \frac{2}{t^4 + 4t^2 + 1}$

9. $\kappa(t) = 1/\sqrt{2}$, $\tau(t) = 0$, la curva es una circunferencia en el plano $y + z = 4$, con centro (2, 1, 3) y radio $\sqrt{2}$

11. (a) $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{i}$, $\hat{\mathbf{N}} = \frac{2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{5}}$,

$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{5}}$, $\kappa = \sqrt{5}$, $\tau = 0$

(b) $\hat{\mathbf{T}} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k})$, $\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{\sqrt{13}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\sqrt{2}\mathbf{k})$,

$\hat{\mathbf{N}} = -\frac{1}{\sqrt{39}}(6\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k})$, $\kappa = \frac{2\sqrt{39}}{9}$, $\tau = -\frac{6\sqrt{2}}{13}$

13. máx. a/b^2, mín. b/a^2

15. $\kappa = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}$, $\mathbf{r} = (x - 1 - e^{2x})\mathbf{i} + (2e^x + e^{-x})\mathbf{j}$

17. $\frac{3}{2\sqrt{2ar}}$

21. $\mathbf{r} = -4x^3 i + (3x^2 + \frac{1}{2})\mathbf{j}$

23. $f(x) = \frac{1}{8}(15x - 10x^3 + 3x^5)$

Sección 11.6 (página 746)

3. velocidad: $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$; aceleración: $-e^{-\theta}/2$, $e^{-\theta}/2$.

5. $|a_r| = \frac{v_0^2}{5}\left(\frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)$

7. 42,777 km, el plano ecuatorial

9. $\frac{T}{4\sqrt{2}}$ **13.** $3/4$

15. $(1/2) - (\epsilon/\pi)$

19. $r = A\sec\omega(\theta - \theta_0)$, $\omega^2 = 1 - (k/h^2)$ si $k < h^2$, $r = 1/(A + B\theta)$ si $k = h^2$, $r = Ae^{\omega\theta} + Be^{-\omega\theta}$, $\omega^2 = (k/h^2) - 1$, si $k > h^2$; no existen órbitas acotadas que no se aproximan al origen excepto en el caso $k = h^2$ si $B = 0$ cuando hay órbitas circulares. (¿No le parece ahora bien que la ley de la gravitación dependa del inverso del cuadrado en vez del inverso del cubo?)

21. centro $\left(\frac{\ell\epsilon}{\epsilon^2 - 1}, 0\right)$;

asíntotas en direcciones $\theta = \pm\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)$;

eje semitransversal $a = \frac{\ell}{\epsilon^2 - 1}$;

eje semiconjugado $b = \frac{\ell}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$;

separación semifocal $c = \frac{\ell\epsilon}{\epsilon^2 - 1}$.

Ejercicios de repaso (página 748)

3. $\mathbf{v} = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$, $\mathbf{a} = (8/3)(-2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

5. $\kappa = \tau = \sqrt{2}/(e^t + e^{-t})^2$

9. $4a(1 - \cos(T/2))$ unidades

11. $\mathbf{r}_C(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$

13. $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \operatorname{sen}\phi\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k}$ orientado a la derecha

$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \cos\phi\cos\theta\mathbf{i} + \cos\phi\operatorname{sen}\theta\mathbf{j} - \operatorname{sen}\phi\mathbf{k}$

$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$

Problemas avanzados (página 749)

1. (a) $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\frac{\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}}$, $\Omega \approx 7.272 \times 10^{-5}$.

(b) $\mathbf{a}_C = -\sqrt{2}\Omega v\mathbf{i}$.

(c) aprox. 15.5 cm al oeste de P.

3. (c) $\mathbf{v}(t) = (\mathbf{v}_0 - (\mathbf{v}_0 \bullet \mathbf{k})\mathbf{k})\cos(\omega t) + (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{k})\operatorname{sen}(\omega t) + {} + (\mathbf{v}_0 \bullet \mathbf{k})\mathbf{k}$.

(d) Recta si $\mathbf{v}_0$ es paralelo a $\mathbf{k}$, circunferencia si $\mathbf{v}_0$ es perpendicular a $\mathbf{k}$.

5. (a) $y = (48 + 24x^2 - x^4)/64$

7. (a) Sí, tiempo $\pi a/(v\sqrt{2})$, (b) $\phi = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{vt}{a\sqrt{2}}$,
$\theta = \ln\left[\sec\left(\dfrac{vt}{a\sqrt{2}}\right) + \tan\left(\dfrac{vt}{a\sqrt{2}}\right)\right]$.
(c) infinitamente a menudo

Capítulo 12
Diferenciación parcial

Sección 12.1 (página 761)

1. todo (x, y) con $x \neq y$

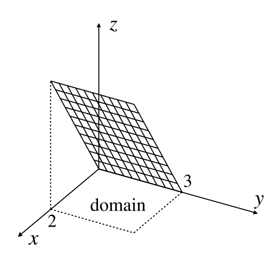
3. todo (x, y) excepto $(0, 0)$

5. todo (x, y) que cumpla $4x^2 + 9y^2 \geqslant 36$

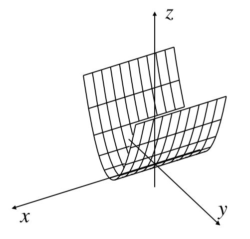
7. todo (x, y) con $xy > -1$

9. todo (x, y, z) excepto $(0, 0, 0)$

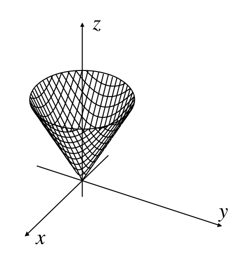
11. $z = f(x, y) = x$

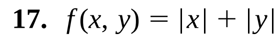


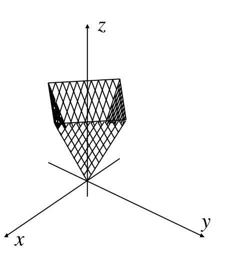
13. $z = f(x, y) = y^2$



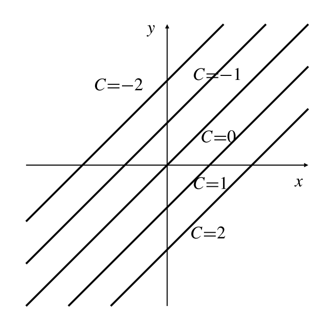
15. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

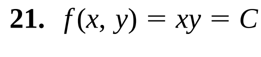


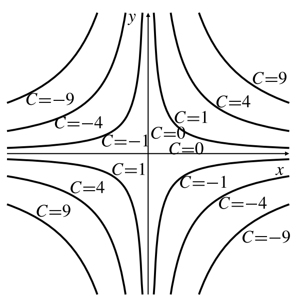

17. $f(x, y) = |x| + |y|$



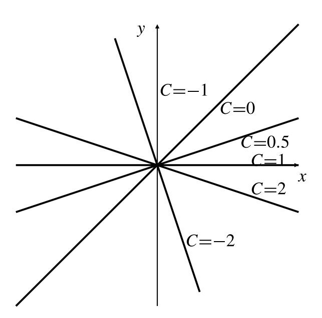
19. $f(x, y) = x - y = C$



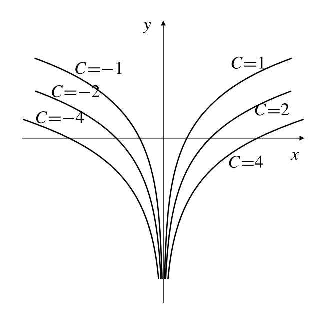

21. $f(x, y) = xy = C$



23. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y} = C$



25. $f(x, y) = xe^{-y} = C$



27. En B, porque los contornos están más próximos allí.

29. Un plano que contiene al eje y, con pendiente ascendente en la dirección de x.

31. Un cono circular recto con base en el plano xy y vértice en el eje z a una altura de 5.

33. No, diferentes curvas de la familia no se deben cruzar en la región.

35. (a) $\sqrt{x^2 + y^2}$, (b) $(x^2 + y^2)^{1/4}$
(c) $x^2 + y^2$, (d) $e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

37. Esferas centradas en el origen

39. Cilindros circulares cuyo eje es el eje z.

41. Octaedros regulares con vértices en los ejes coordenados.

Sección 12.2 (página 765)

1. 2

3. no existe

5. -1

7. 0

9. no existe

11. 0

13. $f(0, 0) = 1$

15. todo (x, y) tal que $x \neq \pm y$; sí; sí, $f(x, x) = \frac{1}{2x}$ hace que f sea continua en (x, x) para $x \neq 0$; no, f no tiene extensión continua en la recta $x + y = 0$

17. no, sí

19. $a = c = 0$, $b \neq 0$

23. Una superficie que no forma lágrimas, que corta sólo una vez a rectas verticales que pasan por puntos de la región.

Sección 12.3 (página 773)

1. $f_1(x, y) = f_1(3, 2) = 1,\ f_2(x, y) = f_2(3, 2) = -1$

3. $f_1 = 3x^2y^4z^5,\ f_2 = 4x^3y^3z^5,\ f_3 = 5x^3y^4z^4$
Las tres se anulan en $(0, -1, -1)$.

5. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2},$
Si $(-1, 1)$: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}$

7. $f_1 = \sqrt{y}\cos(x\sqrt{y}),\ f_2 = \dfrac{x\cos(x\sqrt{y})}{2\sqrt{y}},$
Si $(\pi/3, 4)$: $f_1 = -1,\ f_2 = -\pi/24$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = y\ln z x^{(y\ln z - 1)},\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = \ln x \ln z^{y\ln z},$
$\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{y\ln x}{z}\, x^{y\ln z}$
Si $(e, 2, e)$: $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial z} = 2e,\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = e^2$

11. $f_1(0, 0) = 2,\ f_2(0, 0) = -1/3$

13. $z = -4x - 2y - 3;\ \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$

15. $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \dfrac{x-\pi}{4} + \dfrac{\pi}{16}(y-4)\right);$
$\dfrac{x-\pi}{-1/4\sqrt{2}} = \dfrac{y-4}{\pi/16\sqrt{2}} = \dfrac{z-1/\sqrt{2}}{-1}$

17. $z = \frac{2}{5} + \frac{3x}{25} - \frac{4y}{25};\ \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1/5}{-25}$

19. $z = \ln 5 + \frac{2}{5}(x-1) - \frac{4}{5}(y+2);$
$\dfrac{x-1}{2/5} = \dfrac{y+2}{-4/5} = \dfrac{z-\ln 5}{-1}$

21. $z = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{\pi}{4};\ 2(x-1) = 2(y+1) = -z - \dfrac{\pi}{4}$

23. $(0, 0),\quad (1, 1),\quad (-1, -1)$

33. $w = f(a, b, c) + f_1(a, b, c)(x-a) +$
$+ f_2(a, b, c)(y-b) + f_3(a, b, c)(z-c)$

35. $\sqrt{7}/4$ unidades

37. $f_1(0, 0) = 1,\ f_2(0, 0)$ no existe.

39. f es continua en $(0, 0)$; f_1 y f_2 no.

Sección 12.4 (página 779)

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(1+y^2),\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 4xy,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 6xy^3z^3,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 6x^3yz^3,$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 6x^3y^3z,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = 9x^2y^2z^3,$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} = 9x^2y^3z^2,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial z} = 9x^3y^2z^2$

5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -ye^x,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = e^y - e^x,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^y$

7. $27,\ 10,\ x^2e^{xy}(xz \operatorname{sen} xz - (3+xy)\cos xz)$

19. $u(x, y, z, t) = t^{-3/2}e^{-(x^2+y^2+z^2)/4t}$

Sección 12.5 (página 789)

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f_1g_2 + f_2h_2 + f_3k_2$

3. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = g_1h_1 + g_2f'h_1$

5. $\dfrac{dw}{dz} = f_1g_1h' + f_1g_2 + f_2h' + f_3,$
$\left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_x = f_2h' + f_3,$
$\left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{x,y} = f_3$

7. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-5y}{13x^2 - 2xy + 2y^2}$

9. $2f_1(2x, 3y)$ **11.** $2xf_2(y^2, x^2)$

13. $dT/dt = e^{-t}(f'(t) - f(t))$; $dT/dt = 0$ si $f(t) = e^t$: en este caso la disminución de T con el tiempo (a profundidad fija) se compensa exactamente por el aumento de T con la profunfidad.

15. $4f_{11} + 12f_{12} + 9f_{22},\ 6f_{11} + 5f_{12} - 6f_{22},$
$9f_{11} - 12f_{12} + 4f_{22}$

17. $f_1\cos s - f_2 \operatorname{sen} s + f_{11}t\cos s \operatorname{sen} s +$
$+ f_{12}t(\cos^2 s - \operatorname{sen}^2 s) - f_{22}t \operatorname{sen} s\cos s$

19. $f_2 + 2y^2f_{12} + xyf_{22} - 4xyf_{31} - 2x^2f_{32};$
todas las derivadas en $(y^2, xy, -x^2)$

27. $\sum_{i,j=1}^{n} x_ix_j f_{ij}(x_1, ..., x_n) = k(k-1)f(x_1, ..., x_n)$

31. $u(x, y) = f(x + ct)$

Sección 12.6 (página 798)

1. 6.9 **3.** 0.0814

5. 2.967 **7.** (a) 3%, (b) 2%, (c) 1%

9. 8.88 ft^2

11. 169 m, 24 m, más sensible al ángulo en B

13. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2x & z & y \\ -\ln z & 2y & -x/z \end{pmatrix}$, (5.99, 3.98)

Sección 12.7 (página 809)

1. $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $z = 4x + 2y - 3$; $2x + y = 3$

3. $(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})/25$; $3x - 4y - 25z + 10 = 0$; $3x - 4y + 5 = 0$

5. $(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j})/5$; $2x - 4y - 5z = 10 - 5\ln 5$; $x - 2y = 5$

7. $x + y - 3z = -3$

9. $\sqrt{3}y + z = \sqrt{3} + \pi/3$

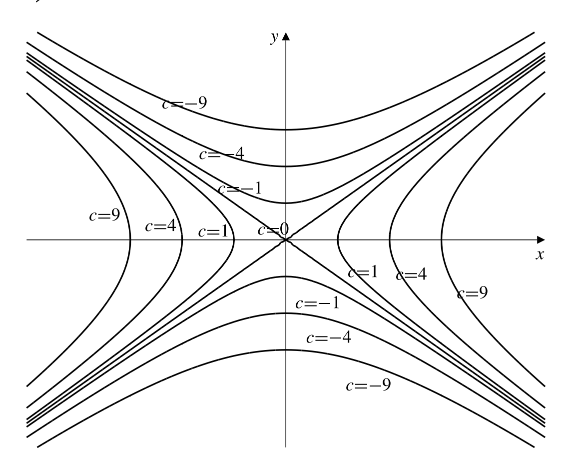
11. $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

13. $1 - 2\sqrt{3}$

17. en direcciones que forman ángulos -30° o -150° son el eje x positivo; no; $-\mathbf{j}$.

19. $7\mathbf{i} - \mathbf{j}$

21. a)



b) en dirección $-\mathbf{j} - \mathbf{j}$

c) $4\sqrt{2k}$ grados/unidad de tiempo

d) $12k/\sqrt{5}$ grados/unidad de tiempo

e) $x^2y = -4$

23. $3x^2 - 2y^2 = 10$

25. $-4/3$

27. $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

33. $D_{\mathbf{v}}(D_{\mathbf{v}}f) = v_1^2 f_{11} + v_2^2 f_{22} + v_3^2 f_{33} + 2v_1v_2 f_{12} + {} + 2v_1v_3 f_{13} + 2v_2v_3 f_{23}$

Es la segunda derivada de f medida por un observador que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$.

35. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} + 2D_{\mathbf{v}(t)}\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right) + D_{\mathbf{a}(t)}T + D_{\mathbf{v}(t)}(D_{\mathbf{v}(t)}T)$

Sección 12.8 (página 819)

1. $-\dfrac{x^4 + 3xy^2}{y^3 + 4x^3y}$, $y \neq 0$, $y^2 \neq -4x^3$

3. $\dfrac{3xy^4 + xz}{xy - 2y^2z}$, $y \neq 0$, $x \neq 2yz$

5. $\dfrac{x - 2t^2w}{2xy^2 - w}$, $w \neq 2xy^2$

7. $-\dfrac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial u}$, $\dfrac{\partial G}{\partial u} \neq 0$

9. $-\dfrac{v^2H_2 + wH_3}{u^2H_1 + tH_3}$, $u^2H_1 + tH_3 \neq 0$, todas las derivadas en (u^2w, v^2t, wt)

11. $\dfrac{2w - 4y}{4x - w}$, $4x \neq w$

13. $\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{6}$

15. r; todos los puntos excepto el origen

17. $-3/2$

19. $-\dfrac{\partial(F, G, H)}{\partial(y, z, w)} \Big/ \dfrac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, z, w)}$

21. 15; $-\dfrac{\partial(F, G, H)}{\partial(x_2, x_3, x_5)} \Big/ \dfrac{\partial(F, G, H)}{\partial(x_1, x_3, x_5)}$

23. $2(u + v)$, -2, 0

Sección 12.9 (página 826)

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n y^{2n}}{2^{n+1}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}(y+1)^{2n+1}}{2n+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^{2k}y^{2n-2k}$

7. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{2}(x-2)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{3}{8}(x-2)^2(y-1) - \frac{3}{4}(x-2)(y-1)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^3$

9. $x + y^2 - \frac{x^3}{3}$

11. $1 - (y-1) + (y-1)^2 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2$

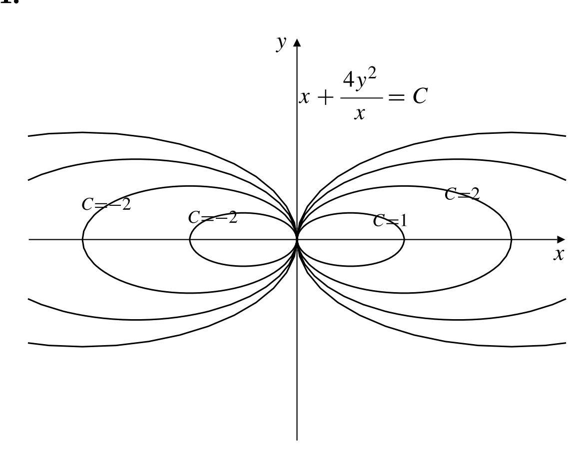
13. $-x - x^2 - (5/6)x^3$

15. $-\dfrac{x}{3}-\dfrac{2y}{3}-\dfrac{2x^2}{27}-\dfrac{8xy}{27}-\dfrac{8y^2}{27}$

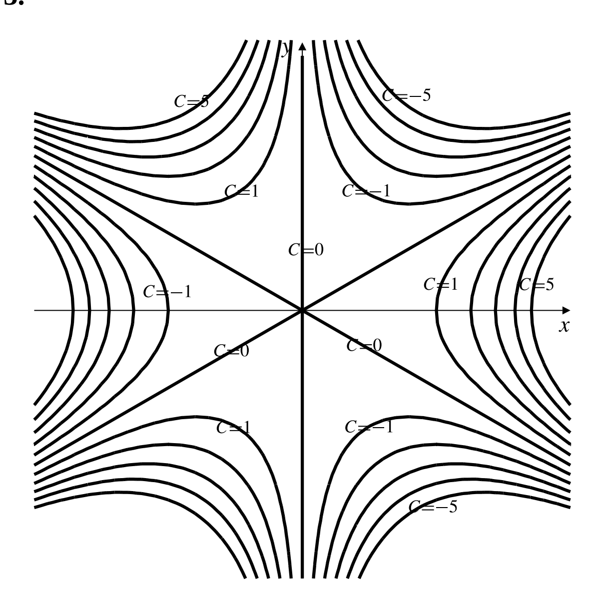
17. $\dfrac{[(2n)!]^3}{(n!)^2}$

Ejercicios de repaso (página 826)

1.



3.



5. continua excepto en las rectas $x=\pm y$; se puede extender a $x=y$ excepto en el origen; si $f(0,0)=0$ entonces $f_1(0,0)=f_2(0,0)=1$.

7. (a) $ax+by+4cz=16$,
(b) la circunferencia $z=1$, $x^2+y^2=12$,
(c) $\pm(2, 2, \sqrt{2})$

9. 7500 m^2, 7.213%

11. (a) $-1/\sqrt{2}$, (b) dir. de $\pm(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$, (c) dir. de $7\mathbf{i}+5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

15. (a) $\partial u/\partial x=-5$, $\partial u/\partial y=1$, (b) -1.13

Capítulo 13
Aplicaciones de las derivadas parciales

Sección 13.1 (página 837)

1. $(2, -1)$, mín. loc. (abs.).

3. $(0, 0)$, pto. ensilladura; $(1, 1)$, mín. loc.

5. $(-4, 2)$, máx. loc.

7. $(0, n\pi)$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$, todos puntos ensilladura

9. $(0, a)$, $(a>0)$, mín. loc.; $(0, a)$, $(a<0)$, máx. loc.; $(0, 0)$ pto. ensilladura; $(\pm1, 1/\sqrt{2})$, máx. loc. (abs.); $(\pm1, -1/\sqrt{2})$, mín. loc. (abs.).

11. $(3^{-1/3}, 0)$, punto ensilladura

13. máx. en (x, x), mín. en $(x, -x)$, $x\neq0$

15. $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, pto. ensilladura; $(-3, -3)$, mín. loc.

17. $(1, 1, \frac{1}{2})$, ptos. ensilladura

19. $(0, 0)$, ptos. ensilladura; $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, máx. loc. (abs.); $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, mín. loc. (abs.).

21. máx. $e^{-3/2}/2\sqrt{2}$, mín. $-e^{-3/2}/2\sqrt{2}$; f es continua en todas partes, y $f(x, y, z)\to0$ cuando $x^2+y^2+z^2\to\infty$.

23. $L^3/108$ unidades al cubo

25. $8abc/(3\sqrt{3})$ unidades al cubo

27. PC son $(\sqrt{\ln 3}, -\sqrt{\ln 3})$ y $(-\sqrt{\ln 3}, \sqrt{\ln 3})$.

29. f no tiene un mínimo local en $(0, 0)$, el test de la segunda derivada no permite concluir ($B^2=AC$).

Sección 13.2 (página 844)

1. máx. $5/4$, mín. -2

3. máx. $(\sqrt{2}-1)/2$, mín. $-(\sqrt{2}+1)/2$.

5. máx. $2/3\sqrt{3}$, mín. 0

7. máx. 1, mín. -1

9. máx. $1/\sqrt{e}$, mín. $-1/\sqrt{e}$

11. máx. 4/9, mín. $-4/9$

13. no límite; sí, máx. $f = e^{-1}$ (en todos los puntos de la curva $xy = 1$)

15. 625 000 €, 733 333 €

17. máx. 37/2 en (7/4,5)

19. 6667 kg de lujo, 6667 kg estándar

Sección 13.3 (página 853)

1. 84 375

3. 1 unidad

5. máx. 4 unidades, mín. 2 unidades

7. $a = \pm\sqrt{3}$, $b = \pm 2\sqrt{3}$, $c = \pm\sqrt{3}$

9. máx. 8, mín. -8

11. máx. 2, mín. -2

13. máx. 7, mín. -1

15. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ unidades

17. $\pm\sqrt{\dfrac{3n(n+1)}{2(2n+1)}}$

19. $\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

21. anchura $= \left(\dfrac{2V}{15}\right)^{1/3}$, profundidad $= 3 \times$ anchura, altura $= \dfrac{5}{2} \times$ anchura

23. máx. 1, mín. $-\frac{1}{2}$

27. el método no fallará si $\nabla f = \mathbf{0}$ en un punto extremo, pero $\lambda = 0$.

Sección 13.4 (página 861)

1. en $(\bar{x}, \bar{y})$ siendo $\bar{x} = (\Sigma_{i=1}^{n} x_i)/n$, $\bar{y} = (\Sigma_{i=1}^{n} y_i)/n$

3. $a = (\Sigma_{i=1}^{n} y_i e^{x_i})/(\Sigma_{i=1}^{n} e^{2x_i})$

5. Si $A = \Sigma x_i^2$, $B = \Sigma x_i y_i$, $C = \Sigma x_i$, $D = \Sigma y_i^2$, $E = \Sigma y_i$, $F = \Sigma x_i z_i$, $G = \Sigma y_i z_i$, y $H = \Sigma z_i$, siendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & n \end{vmatrix}, \qquad a = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} F & B & C \\ G & D & E \\ H & E & n \end{vmatrix},$$

$$b = \frac{1}{A}\begin{vmatrix} A & F & C \\ B & G & E \\ C & H & n \end{vmatrix}, \qquad c = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & B & F \\ B & D & G \\ C & E & H \end{vmatrix},$$

7. Utilizamos regresión lineal con el fin de ajustar $\eta = a + bx$ a los datos $(x_i, \ln y_i)$. Seguidamente $p = e^a$, $q = b$. Éstos no son los mismos valores que se obtendrían minimizando la expresión $\Sigma\,(y_i - pe^{qx_i})^2$.

9. Utilizamos regresión lineal con el fin de ajustar $\eta = a + b\xi$ a los datos $\left(x_i, \dfrac{y_i}{x_i}\right)$. Seguidamente $p = a$, $q = b$. No es lo mismo que minimizar $\Sigma\,(y_i - px_i - qx_i^2)^2$.

11. Utilizamos regresión lineal con el fin de ajustar $\eta = a + b\xi$ a los datos $\left(e^{-2x_i}, \dfrac{y_i}{e^{x_i}}\right)$. Entonces $p = a$, $q = b$. No es lo mismo que minimizar $\Sigma\,(y_i - pe^{x_i} - qe^{-x_i})^2$. Hay otras respuestas posibles.

13. Si $A = \Sigma x_i^2$, $B = \Sigma x_i^3$, $C = \Sigma x_i^2$, $D = \Sigma x_i$, $H = \Sigma x_i^2 y_i$, $I = \Sigma x_i y_i$, y $J = \Sigma y_i$, entonces

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & n \end{vmatrix}, \qquad a = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} H & B & C \\ I & C & D \\ J & D & n \end{vmatrix},$$

$$b = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & H & C \\ B & I & D \\ C & J & n \end{vmatrix}, \qquad c = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A & B & H \\ B & C & I \\ C & D & J \end{vmatrix},$$

15. $a = 5/6$, $I = 1/252$

17. $a = 15/16$, $b = -1/16$, $I = 1/448$

19. $a = \frac{20}{\pi^5}(\pi^2 - 16)$, $b = \frac{12}{\pi^4}(20 - \pi^2)$

21. $a_k = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$, $(k = 0, 1, 2, ...)$

23. $\pi - \frac{4}{\pi}\Sigma_{k=0}^{\infty} \dfrac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$; $-x$

Sección 13.5 (página 870)

1. $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

3. $2\sqrt{\pi}(\sqrt{y} - \sqrt{x})$

5. $\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; $\dfrac{(6x^2-2)}{(1+x^2)^3}$

7. $\frac{\pi}{2x}$, supongamos $x > 0$; $\frac{\pi}{4x^3}$; $\frac{3\pi}{16x^5}$

9. $n!$

11. $f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$

13. $y = x^2$

15. $x^2 + y^2 = 1$

17. $y = x - \frac{1}{4}$

19. no

21. no; una recta de puntos singulares

23. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

25. $y = x - \epsilon \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{\pi\epsilon^2}{2} \operatorname{sen}(2\pi x) + \cdots$

27. $y = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}\epsilon x - \frac{16}{125}\epsilon^2 x^2 + \cdots$

29. $x \approx 1 - \frac{1}{100e} - \frac{1}{30\,000e^2}$, $y \approx 1 - \frac{1}{30\,000e^2}$

Sección 13.6 (página 874)

1. (0.797105, 2.219107)

3. $(\pm 0.2500305, \pm 3.9995115)$, $(\pm 1.9920783, \pm 0.5019883)$

5. (0.3727730, 0.3641994), $(-1.4141606, -0.9877577)$

7. $x = x_0 - \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = y_0 - \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $z = z_0 - \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, con $\Delta = \left.\dfrac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}$ y Δ_i es Δ con la i-ésima columna sustituida con $\begin{matrix} f \\ g \\ h \end{matrix}$

9. 18 iteraciones cerca de (0, 0), 4 iteraciones cerca de (1, 1); las dos curvas son tangentes en (0, 0), pero no en (1, 1).

Sección 13.7 (página 880)

1. $(\pm 0.45304, 0.81204, \pm 0.36789)$, $(\pm 0.96897, 0.17751, \pm 0.17200)$

3. máx. local y absoluto 0.81042 en $(-0.33853, -0.52062)$;
mín. local y absoluto -0.66572 en (0.13319, 0.53682)

5. -4.5937

Ejercicios de repaso (página 880)

1. (0, 0) pto. ensilladura, $(1, -1)$ mín. loc.

3. (2/3, 4/3) mín. loc.; $(2, -4)$ y $(-1, 2)$ ptos. ensilladura

5. sí, 2, en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

7. máx. $1/(4e)$, mín. $-1/(4e)$

9. (a) $L^2/48$ cm^2, (b) $L^2/16$ cm^2

11. 4π unidades al cuad.

13. 16π unidades al cubo

15. 1,688 productos a 2.00 euros cada uno

17. $y \approx -2x - \epsilon x e^{-2x} + \epsilon^2 x^2 e^{-4x}$

Problemas avanzados (página 881)

3. $\frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\tan^{-1} x$

Capítulo 14
Integración múltiple

Sección 14.1 (página 890)

1. 15 **3.** 21
5. 15 **7.** 96
9. 80 **11.** 36.6258
13. 20 **15.** 0
17. 5π **19.** $\frac{\pi a^3}{3}$
21. $\frac{1}{6}$

Sección 14.2 (página 898)

1. 5/24 **3.** 4
5. $\dfrac{ab(a^2 + b^2)}{3}$ **7.** π
9. $\frac{3}{56}$ **11.** $\frac{33}{8}\ln 2 - \frac{45}{16}$
13. $\frac{e-2}{2}$

15. $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)$; la región es un triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 1)

17. $\dfrac{\pi}{4\lambda}$; la región es un triángulo de vértices (0, 0), (0, 1) y (1, 1)

19. 1/4 unidades al cubo **21.** 1/3 unidades al cubo
23. $\ln 2$ unidades al cubo **25.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ unidades al cubo
27. $\frac{16a^3}{3}$ unidades al cubo

Sección 14.3 (página 905)

1. converge a 1 **3.** converge a $\pi/2$
5. diverge a ∞ **7.** converge a 4
9. converge a $1 - \dfrac{1}{e}$ **11.** diverge a ∞
13. converge a $2\ln 2$ **15.** $k > a - 1$

17. $k < -1 - a$

19. $k > -\dfrac{1+a}{1+b}$ (suponiendo que $b > -1$)

21. $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}$ (son posibles diferentes soluciones porque la *integral doble* no existe)

23. $\dfrac{a^2}{3}$ **25.** $\dfrac{4\sqrt{2a}}{3\pi}$

27. sí, $1/(2\pi)$

Sección 14.4 (página 916)

1. $\pi a^4/2$ **3.** $2\pi a$

5. $\pi a^4/4$ **7.** $a^3/3$

9. $\pi(e^{a^2} - 1)/4$ **11.** $\frac{(\sqrt{3}+1)a^3}{6}$

13. $\frac{1}{3}$ **15.** $\dfrac{2a}{3}$

17. $k < 1$; $\frac{\pi}{1-k}$ **19.** $\dfrac{a^4}{16}$

21. $\frac{2\pi}{3}$ unidades al cubo

23. $\frac{4\pi(2\sqrt{2}-1)a^3}{3}$ unidades al cubo

25. $16[1 - (1/\sqrt{2})]a^3$ unidades al cubo

27. $1 - \dfrac{4\sqrt{2}}{3\pi}$ unidades

29. $\frac{4}{3}\,\pi abc$ unidades al cubo

31. $2a \operatorname{senh} a$ **33.** $\frac{3\ln 2}{2}$ unidades al cuad.

35. $\frac{1}{4}\,(e - e^{-1})$

Sección 14.5 (página 922)

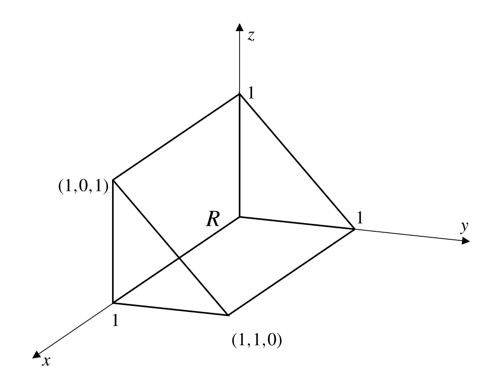
1. $8abc$ **3.** 16π

5. $2/3$ **7.** $1/15$

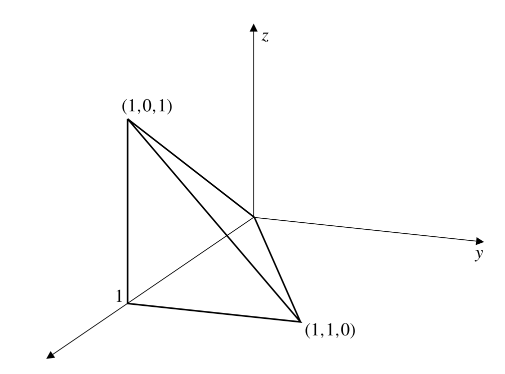
9. $2/(3\pi)$ **11.** $\frac{3}{16}\ln 2$

13. $\pi\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ **15.** $1/8$

17. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz$



19. $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{x-y} f(x, y, z)\, dz$



27. $(e - 1)/3$

29. $\bar{f} = \dfrac{1}{\text{vol}\,(R)} \iiint_R f\, dV$; 1

Sección 14.6 (página 931)

1. Cartesianas: $(-\sqrt{3}, 3, 2)$; cilíndricas: $[2\sqrt{3}, 2\pi/3, 2]$

3. Cartesianas: $(\sqrt{3}, 1, -2)$; esféricas: $[2\sqrt{2}, 3\pi/4, \pi/6]$

5. el semiplano $x = 0$, $y > 0$

7. el plano xy

9. el cilindro circular de radio 4 cuyo eje es el eje z

11. el plano xy

13. esfera de radio 1 con centro $(0, 0, 1)$

15. $\frac{2}{3}\,\pi a^3\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ unidades al cubo

17. 24π unidades al cubo

19. $\left(2\pi - \frac{32}{9}\right)a^3$ unidades al cubo

21. $\frac{abc}{3}\tan^{-1}\frac{a}{b}$ unidades al cubo

23. $\frac{\pi ab}{2}$ unidades al cubo

25. $\frac{8\pi a^5}{15}$ **27.** $\frac{2\pi a^5}{5}\left(1 - \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\right)$

29. $\frac{7\pi}{12}$ **31.** $\frac{ha^3}{12}, \frac{\pi a^2 h^2}{48}$

Sección 14.7 (página 940)

1. 3π unidades al cuad.

3. $2\pi a^2$ unidades al cuad.

5. $24\pi/\sqrt{3}$ unidades al cuad.

7. $(5\sqrt{5} - 1)/12$ unidades al cuad.

9. 4 unidades al cuad. **11.** 5.123

13. $4\pi A\left[a - \sqrt{B}\tan^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{B}}\right)\right]$ unidades

15. $2\pi km\delta(h + \sqrt{a^2 + (b-h)^2} - \sqrt{a^2 + b^2})$

17. $2\pi km\delta(h + \sqrt{a^2 + (b-h)^2} - \sqrt{a^2 + b^2})$

19. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ **21.** $(\frac{3a}{8}, \frac{3a}{8}, \frac{3a}{8})$

23. El modelo todavía incluye aceleración angular que gira la bola; no sólo cae. Parte de la energía gravitatoria produce este giro incluso en el caso límite.

25. $I = \pi\delta a^2 h\left(\frac{h^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right)$, $\bar{D} = \left(\frac{h^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right)^{1/2}$

27. $I = \frac{\pi\delta a^2 h}{3}\left(\frac{2h^2 + 3a^2}{20}\right)$, $\bar{D} = \left(\frac{2h^2+3a^2}{20}\right)^{1/2}$

29. $I = \frac{5a^5\delta}{12}$, $\bar{D} = \sqrt{\frac{5}{12}}\,a$

31. $I = \frac{8}{3}\,\delta abc(a^2 + b^2)$, $\bar{D} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{3}}$

33. $m = \frac{4\pi}{3}\,\delta\,(a^2 - b^2)^{3/2}$, $I = \frac{1}{5}\,m(2a^2 + 3b^2)$

35. $\frac{5a^2 g \operatorname{sen}\alpha}{7a^2 + 3b^2}$

39. El momento de inercia respecto a la recta $\mathbf{r}(t) = At\mathbf{i} + Bt\mathbf{j} + Ct\mathbf{k}$ es

$$\frac{1}{A^2+B^2+C}\,((B^2 + C^2)P_{xx} + (A^2 + C^2)P_{yy} + (A^2 + B^2)P_{zz} - 2ABP_{xy} - 2ACP_{xz} - 2BCP_{yz})$$

Ejercicios de repaso (página 942)

1. $3/10$ **3.** $\ln 2$

5. $k = 1/\sqrt{3}$

7. $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 f(x, y, z)\,dz$

9. $(1 - e^{-a^2})/(2a)$ **11.** $\frac{8\pi}{15}(18\sqrt{6} - 41)a^5$

13. vol $= 7/12$, $\bar{z} = 11/28$ **15.** $17/24$

17. $\frac{1}{6}\int_0^{\pi/2}[(1 + 16\cos^2\theta)^{3/2} - 1]\,d\theta \approx 7.904$ unidades al cuad.

Problemas avanzados (página 943)

1. $\pi abc\left(\frac{2}{3} - \frac{8}{9\sqrt{3}}\right)$ unidades al cubo

3. (b) (i) $\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}1/n^2$, (ii) $\Sigma_{n=1}^{\infty}1/n^3$, (iii) $\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}1/n^3$

5. $4 - \tan^{-1}(\sqrt{2}) + \frac{32}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) - \frac{4}{3}(7\pi + 2\sqrt{2})$ ≈ 18.9348 unidades al cubo

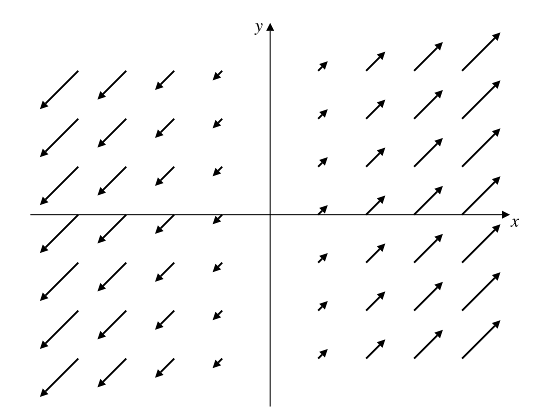
7. $a^3/210$ unidades al cubo

Capítulo 15

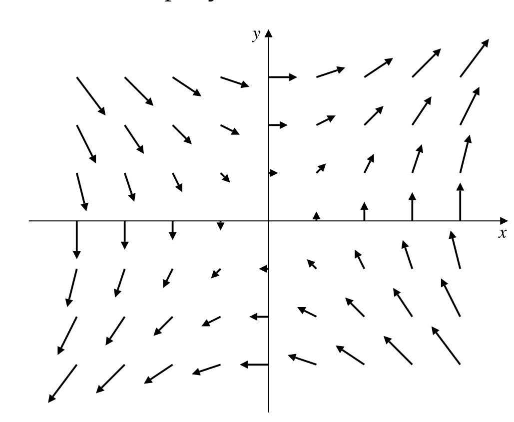
Campos vectoriales

Sección 15.1 (página 950)

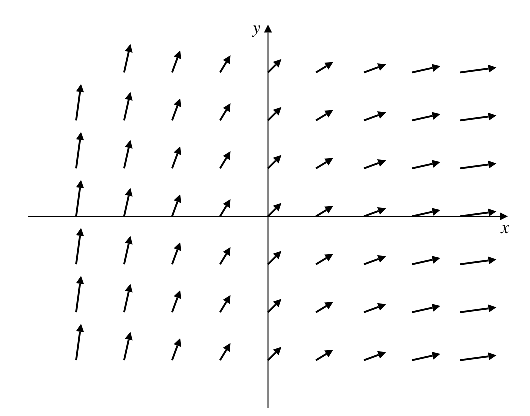
1. líneas de campo: $y = x + C$



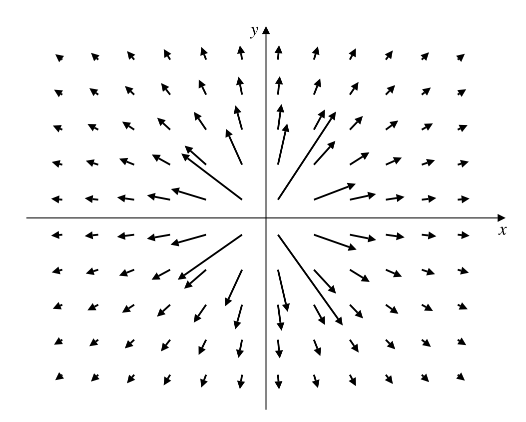
3. líneas de campo: $y^2 = x^2 + C$



5. líneas de campo: $y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$



7. líneas de campo: $y = Cx$



9. las líneas de corriente son rectas paralelas a $\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$

11. líneas de corriente: $x^2+y^2=a^2$, $x = a\,\mathrm{sen}\,(z-b)$ (espirales)

13. $y = C_1 x$, $2x = z^2 + C_2$

15. $y = Ce^{1/x}$ **17.** $r = \theta + C$

19. $r = C\theta^2$

Sección 15.2 (página 959)

1. conservativo; $\dfrac{x^2}{2} - y^2 + \dfrac{3z^2}{2}$

3. no conservativo

5. conservativo; $x^2y + y^2z - z^2x$

7. $-2\,\dfrac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^4}$

9. $(x^2+y^2)/z$; las superficies equipotenciales son paraboloides $z = C(x^2+y^2)$; las líneas de campo son elipses $x^2+y^2+2z^2 = A$, $y = Bx$ en planos verticales por el origen

11. $\mathbf{v} = \dfrac{m(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z-\ell)\mathbf{k})}{[x^2+y^2+(z-\ell)^2]^{3/2}} + \dfrac{m(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z+\ell)\mathbf{k})}{[x^2+y^2+(z+\ell)^2]^{3/2}}$, $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ sólo en el origen; $\mathbf{v}(x, y, 0) = \dfrac{2m(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})}{(x^2+y^2+\ell^2)^{3/2}}$; velocidad máxima en la circunferencia $x^2+y^2=\ell^2/2$, $z=0$

15. $\phi = -\frac{\mu y}{r^2}$, $\mathbf{F} = \frac{\mu(2xy\mathbf{i} + (y^2-x^2)\mathbf{j})}{r^4}$, $(r^2 = x^2+y^2)$

21. $\phi = \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{sen}\, 2\theta$

Sección 15.3 (página 964)

1. $\frac{a^2}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$ **3.** 8 gm

5. $\frac{\delta}{6}((2e^{4\pi}+1)^{3/2} - 3^{3/2})$

7. $3\sqrt{14}$

9. $m = 2\sqrt{2}\pi^2$, $(0, -1/\pi, 4\pi/3)$

11. $(e^6 + 3e^4 - 3e^2 - 1)/(3e^3)$

13. $(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1))a^2/2$

15. $\pi/\sqrt{2}$

17. $4\sqrt{b^2+c^2}\,E\left(\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{b^2+c^2}}\right)$; $\sqrt{b^2+c^2}\,E\left(\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{b^2+c^2}}, T\right)$

Sección 15.4 (página 973)

1. $-1/4$ **3.** $1/2$

5. 0 **7.** $19/2$

9. $e^{1+(\pi/4)}$

11. $A = 2$, $B = 3$; $4\ln 2 - \frac{1}{2}$

13. $-13/2$

15. a) πa^2, b) $-\pi a^2$

17. a) $\dfrac{\pi a^2}{2}$, b) $-\dfrac{\pi a^2}{2}$

19. a) $ab/2$, b) $-ab/2$

23. El plano con el origen eliminado no es simplemente conexo.

Sección 15.5 (página 985)

1. $dS = ds\,dz = \sqrt{(g(\theta))^2 + (g'(\theta))^2}\,d\theta\,dz$

3. $\dfrac{\pi ab\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|}$ unidades al cuad. ($C \neq 0$)

5. (a) $dS = |\nabla F/F_2|\,dx\,dz$, (b) $dS = |\nabla F/F_1|\,dy\,dz$

7. $\frac{\pi}{8}$

9. $16a^2$ unidades al cuad.

13. 2π

15. $1/96$

17. $\pi(3e + e^3 - 4)/3$

19. $2\pi a^2 + \dfrac{2\pi ac^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}\ln\left(\dfrac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c}\right)$ unidades al cuad.

21. $2\pi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}/|D|$

23. un tercio del camino de la base al vértice sobre el eje.

25. $2\pi k\sigma ma\left(\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + (b-h)^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

27. $I = \frac{8}{3}\pi\sigma a^4$; $\bar{D} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a$

29. $\frac{3}{5}\,g\,\text{sen}\,\alpha$

Sección 15.6 (página 992)

1. 6

3. $3abc$

5. $\pi(3a^2 - 4ab + b^2)/2$

7. 4π

9. $2\sqrt{2\pi}$

11. $4\pi/3$

13. $4\pi m$

15. a) $2\pi a^2$, b) 8

Ejercicios de repaso (página 993)

1. $(3e/2) - (3/(2e))$

3. $8\sqrt{2}/15$

5. 1

7. (a) $6\pi mgb$, (b) $6\pi R\sqrt{a^2 + b^2}$

9. (b) e^2

11. $(x\mathbf{i} - y\mathbf{j})/\sqrt{x^2 + y^2}$

Problemas avanzados (página 994)

1. centroide $(0, 0, 2/\pi)$; mitad superior de la superficie del toro obtenido rotando la circunferencia $(x-2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, alrededor del eje z

Capítulo 16

Cálculo vectorial

Sección 16.1 (página 1004)

1. $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = 2$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$

3. $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

5. $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = 1$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = -\mathbf{j}$

7. $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = f'(x) + g'(y) + h'(z)$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$

9. $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \cos\theta\left(1 + \dfrac{1}{r}\cos\theta\right)$;
$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = -\text{sen}\,\theta\left(1 + \dfrac{1}{r}\cos\theta\right)\mathbf{k}$

11. $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = 0$; $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (1/r)\mathbf{k}$

Sección 16.2 (página 1012)

7. **div F** puede tener cualquier valor, **rot F** debe ser normal a **F**

9. $f(r) = Cr^{-3}$

15. Si $\mathbf{F} = \nabla\phi$ y $\mathbf{G} = \nabla\psi$ entonces $\nabla\times(\phi\nabla\psi) = \mathbf{F}\times\mathbf{G}$.

17. $\mathbf{G} = ye^{2z}\mathbf{i} + xye^{2z}\mathbf{k}$ es un posible vector potencial

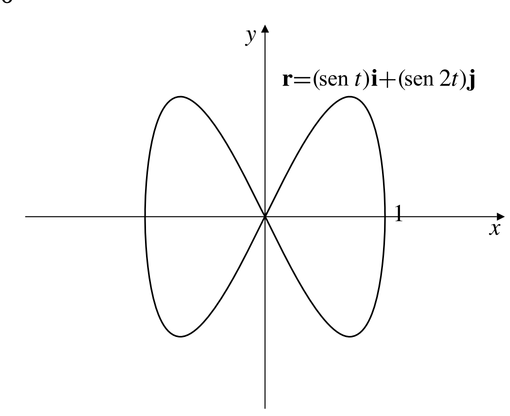
Sección 16.3 (página 1017)

1. $\pi a^2 - 4a^3$

3. 9

5. $\dfrac{3\pi ab}{8}$ unidades al cuad.

7. 0



Sección 16.4 (página 1023)

1. $4\pi a^3$ **3.** $(4/3)\pi a^3$

5. 360π **7.** $81/4$

11. $\frac{2}{3}\pi a^2 b + \frac{3}{10}\pi a^4 b + \pi a^2$

13. (a) $12\sqrt{3}\pi a^3$, (b) $-4\sqrt{3}\pi a^3$, (c) $16\sqrt{3}\pi a^3$

15. $(6 + 2\bar{x} + 4\bar{y} - 2\bar{z})V$ **17.** $9\pi a^2$

Sección 16.5 (página 1029)

1. $1/2$ **3.** $-3\pi a^2$

7. 9π

9. $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -3$, $I = -\frac{3}{8}\pi$

11. sí, $\phi\nabla\psi$

Sección 16.6 (página 1037)

(ninguno)

Sección 16.7 (página 1048)

1. $\nabla f = \theta z\hat{\mathbf{r}} + z\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\theta\mathbf{k}$ **3.** $\textbf{div } \mathbf{F} = 2$, $\textbf{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$

5. $\textbf{div } \mathbf{F} = \dfrac{2\,\text{sen}\,\phi}{\rho}$, $\textbf{rot } \mathbf{F} = -\dfrac{\cos\phi}{\rho}\hat{\boldsymbol{\theta}}$

7. $\textbf{div } \mathbf{F} = 0$, $\textbf{rot } \mathbf{F} = \cot\phi\hat{\boldsymbol{\rho}} - 2\hat{\boldsymbol{\phi}}$

9. factores de escala: $h_u = \left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|$, $h_v = \left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|$

base local: $\hat{\mathbf{u}} = \dfrac{1}{h_u}\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\hat{\mathbf{v}} = \dfrac{1}{h_v}\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$

elementos de área: $dA = h_u h_v\, du\, dv$

11. $\nabla f(r, \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$\nabla \bullet \mathbf{F}(r, \theta) = \dfrac{\partial F_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}F_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$

$\nabla \times \mathbf{F}(r, \theta) = \left(\dfrac{\partial F_\theta}{\partial r} + \dfrac{1}{r}F_\theta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{k}$

13. superficies u: cilindros verticales elípticos con ejes focales en $x = \pm a$, $y = 0$
superficies v: cilindros verticales hiperbólicos con eje focal en $x = \pm a$, $y = 0$
superficies z: planos horizontales
curvas u: hipérbolas horizontales con focos $x = \pm a$, $y = 0$
curvas v: elipses horizontales con focos $x = \pm a$, $y = 0$
curvas z: rectas verticales

15. $$\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\cot\phi}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2\,\text{sen}^2\,\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Ejercicios de repaso (página 1049)

1. 128π **3.** -6

5. $3/4$ **7.** $\lambda = -3$, no

11. el elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ con normal hacia fuera

Problemas avanzados (página 1050)

1. $\textbf{div } \mathbf{v} = 3C$

Capítulo 17
Ecuaciones diferenciales ordinarias

Sección 17.1 (página 1057)

1. 1, lineal, homogénea **3.** 1, no lineal

5. 2, lineal, homogénea

7. 3, lineal, no homogénea

9. 4, lineal, homogénea

11. (a) y (b) con soluciones, (c) no

13. $y_2 = \text{sen}\,(kx)$, $y = -3(\cos(kx) + (3/k)\,\text{sen}\,(kx))$

15. $y = \sqrt{2}(\cos x + 2\,\text{sen}\,x)$

17. $y = x + \text{sen}\,x + (\pi - 1)\cos x$

Sección 17.2 (página 1062)

1. $2\tan^{-1}(y/x) = \ln(x^2 + y^2) + C$

3. $y = x\tan(\ln|x| + C)$ **5.** $y = x\tan^{-1}(\ln|Cx|)$

7. $y^3 + 3y - 3x^2 = 24$ **11.** $2xy + x^2y^2 = C$

13. $xe^{xy} = C$ **15.** $\ln|x| - \frac{y}{x^2} = C$

17. $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ debe depender sólo de y.

19. $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ debe depender sólo de y. $x - y^2e^y = Cy^2$

21. $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN}$ debe depender sólo de xy; $\frac{\text{sen}\,x}{y} - \frac{y}{x} = C$

Sección 17.3 (página 1070)

1. (a) 1.97664, (b) 2.187485, (c) 2.306595

3. (a) 2.436502, (b) 2.436559, (c) 2.436563

5. (a) 1.097897, (b) 1.098401

7. (a) 0.89441, (b) 0.87996, (c) 0.872831

9. (a) 0.865766, (b) 0.865769, (c) 0.865769

11. (a) 0.898914, (b) 0.903122, (c) 0.904174

13. $y = 2/(3 - 2x)$

17. (b) $u = 1/(1 - x)$, $v = \tan(x + \frac{\pi}{4})$. $y(x)$ está definida al menos en $[0, \pi/4)$ y cumple $1/(1 - x) \leqslant y(x) \leqslant \tan(x + \frac{\pi}{4})$ allí.

Sección 17.4 (página 1074)

1. $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ **3.** $y = C_1x + \frac{C_2}{x^2}$

5. $y = C_1x + C_2xe^x$

Sección 17.5 (página 1078)

1. $y = C_1 + C_2e^t + C_3e^{3t}$

3. $y = C_1\cos t + C_2\,\text{sen}\,t + C_3t\cos t + C_4t\,\text{sen}\,t$

5. $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-t}\cos t + C_3e^{-t}\,\text{sen}\,t$

7. $y = Ax + Bx\ln x$ **9.** $y = Ax + \frac{B}{x}$

11. $y = A + B\ln x$

13. $y = C_1x + C_2x\ln x + C_3x(\ln x)^2$

Sección 17.6 (página 1084)

1. $y = -\frac{1}{2} + C_1e^x + C_2e^{-2x}$

3. $y = -\frac{1}{2}e^{-x} + C_1e^x + C_2e^{-2x}$

5. $y = -\frac{2}{125} - \frac{4x}{25} + \frac{x^2}{5} + C_1e^{-x}\cos(2x) + C_2e^{-x}\,\text{sen}(2x)$

7. $y = -\frac{1}{5}xe^{-2x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$

9. $y = \frac{1}{8}e^x(\text{sen}\,x - \cos x) + e^{-x}(C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x)$

11. $y = 2x + x^2 - xe^{-x} + C_1 + C_2e^{-x}$

15. $y_p = \frac{x^2}{3}$, $y = \frac{x^2}{3} + C_1x + \frac{C_2}{x}$

17. $y = \frac{1}{2}x\ln x + C_1x + \frac{C_2}{x}$

19. $y = -x^2 + C_1x + C_2xe^x$

Sección 17.7 (página 1088)

1. $y = a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{4k}}{4(k!)(3)(7)\cdots(4k-1)}\right) + a_1\left(x - 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{4k+1}}{4(k!)(5)(9)\cdots(4k+1)}\right)$

3. $y = \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2^n n!}{(2n)!}x^{2n} + \frac{1}{2^{n-1}n!}x^{2n+1}\right]$

5. $y = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots$

7. $y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{(k!)(2)(5)(8)\cdots(3k-1)}$,

$y_2 = x^{1/3}\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{(k!)(4)(7)\cdots(3k+1)}\right)$

Ejercicios de repaso (página 1089)

1. $y = Ce^{x^2}$ **3.** $y = Ce^{2x} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$

5. $x^2 + 2xy - y^2 = C$ **7.** $y = C_1 - \ln|t + C_2|$

9. $y = e^{x/2}(C_2 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$

11. $y = C_1 t \cos(2\ln|t|) + C_2 t \operatorname{sen}(2\ln|t|)$

13. $y = \frac{1}{2}e^x + xe^{3x} + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

15. $y = x^2 - 4x + 6 + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

17. $y = (x^3 - 7)^{1/3}$ **19.** $y = e^{x^2/2y^2}$

21. $y = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$ **23.** $y = (5t - 4)e^{-5t}$

25. $y = e^{2t} - 2\operatorname{sen}(2t)$

27. $A = 1,\ B = -1,\ x(e^x \operatorname{sen} y + \cos y) = C$

29. $y = C_1x + C_2x\cos x$

Apéndice I
Números complejos

(página 1102)

1. $\Re(z) = -5,\ \Im(z) = 2$ **3.** $\Re(z) = 0,\ \Im(z) = -\pi$

5. $|z| = \sqrt{2},\ \theta = 3\pi/4$ **7.** $|z| = 3,\ \theta = \pi/2$

9. $|z| = \sqrt{5},\ \theta = \tan^{-1} 2$

11. $|z| = 5,\ \theta = -\pi + \tan^{-1}(4/3)$

13. $|z| = 2,\ \theta = -\pi/6$ **15.** $|z| = 3,\ \theta = 4\pi/5$

17. $11\pi/12$ **19.** $4 + 3i$

21. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2}i$ **23.** $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

25. $-3 + 5i$ **27.** $2 + i$

29. disco cerrado, radio 2, centro 0

31. disco cerrado, radio 5, centro $3 - 4i$

33. sector plano por debajo de $y = 0$ y a la izquierda de $y = -x$

35. 4 **37.** $5 - i$

39. $2 + 11i$ **41.** $-\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$

43. 1

47. $zw = -3 - 3i,\ \dfrac{z}{w} = \dfrac{1 + i}{3}$

49. (a) circunferencia $|z| = \sqrt{2}$, (b) sin soluciones

51. $-1,\ \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$

53. $2^{1/6}(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ donde $\theta = \pi/4,\ 11\pi/12,\ 19\pi/12$

55. $\pm 2^{1/4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),\ \pm 2^{1/4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Apéndice II
Funciones complejas

(página 1113)

1. $0 \leqslant \Re(w) \leqslant 1,\ -2 \leqslant \Im(w) \leqslant 0$

3. $1 \leqslant |w| \leqslant 4,\ \pi \leqslant \arg w \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$

5. $\dfrac{1}{2} \leqslant |w| < \infty, -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg w \leqslant 0$

7. $\arg(w) = 5\pi/6$ **9.** parábola $v^2 = 4u + 4$

11. $u \geqslant 0,\ v \geqslant u$ **13.** $f'(z) = 2z$

15. $f'(z) = -1/z^2$

19. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{senh} z = \cosh z,\ \dfrac{d}{dz}\cosh z = \operatorname{senh} z$

21. $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$

23. ceros de $\cosh z$: $z = i\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)\ (k \in \mathbb{Z})$
ceros de $\operatorname{senh} z$: $z = k\pi i\ (k \in \mathbb{Z})$

25. $\Re(\operatorname{senh} z) = \operatorname{senh} x \cos y,\ \Im(\operatorname{senh} z) = \cosh x \operatorname{sen} y$

27. $z = 0,\ -2i$ **29.** $z = -1 \pm 2i$

31. $z = 0,\ i,\ 2i$

33. $z = \dfrac{1 \pm i}{\sqrt{2}},\ z = \dfrac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$
$z^4 + 1 = (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}x + 1)$

35. $z = -1,\ -1,\ -1,\ i,\ -i$

Índice alfabético

D

E

F

G

H

I

K

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

DIFERENCIACIÓN DE LAS NORMAS

$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$

$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$

$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

$\frac{d}{dx}\,f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

DERIVADAS PRIMARIAS

$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$

$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$

$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \;\; (a>0)$

$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \;\; (x>0)$

$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$

$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$

IDENTITADES TRIGONOMÉTRICAS

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

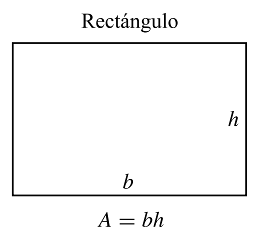
FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $Ax^2 + Bx + C = 0$, siendo $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$.

FÓRMULAS GEOMÉTRICAS

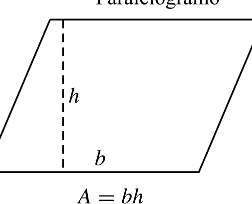
$A =$ área,
$b =$ base,
$h =$ altura,
$C =$ circunferencia,
$V =$ volumen,
$S =$ superficie

Rectángulo



$A = bh$

Paralelogramo



$A = bh$

Triángulos

h b h b

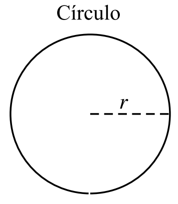
$A = \frac{1}{2}bh$

Trapezoide

b_1 h b_2

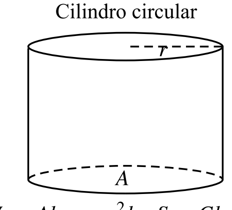
$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$

Círculo



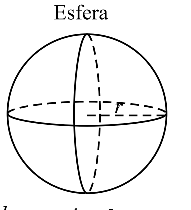
$A = \pi r^2, \ C = 2\pi r$

Cilindro circular



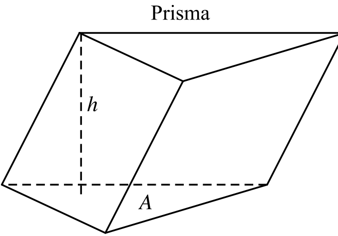
$V = Ah = \pi r^2 h, \ S = Ch = 2\pi rh$
(Pared cilíndrica)

Esfera



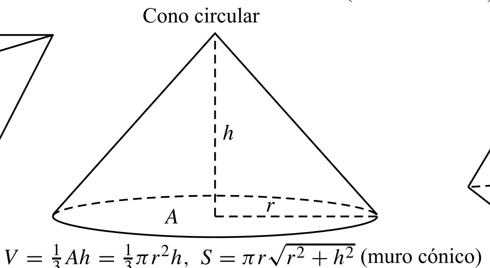
$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \ S = 4\pi r^2$

Prisma



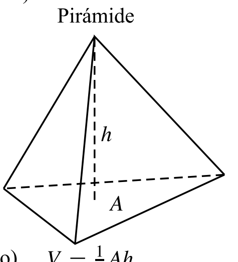
$V = Ah$

Cono circular



$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \ S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ (muro cónico)

Pirámide



$V = \frac{1}{3}Ah$

IDENTIDAD DE VECTORES

Si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ siendo (producto escalar) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$
$\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$

(producto vectorial) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$

longitud de $\mathbf{u} = |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\right)$

identidades de productos triples $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \bullet (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})\mathbf{w}$

IDENTIDADES CON GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROT Y LAPLACIANA

$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ (operador «del» o «nabla»)

$\nabla\phi(x, y, z) = \mathbf{grad}\ \phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$

$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$

$\nabla \bullet \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{div}\ \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{rot}\ \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

$\nabla \bullet (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi)\bullet\mathbf{F} + \phi(\nabla\bullet\mathbf{F})$

$\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{F} + \phi(\nabla\times\mathbf{F})$

$\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$ $\quad$ (**rot grad** $= \mathbf{0}$)

$\nabla^2\phi(x, y, z) = \nabla\bullet\nabla\phi(x, y, z) = \mathbf{div\ grad}\ \phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

$\nabla \bullet (\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{G} - \mathbf{F}\bullet(\nabla\times\mathbf{G})$

$\nabla \times (\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla\bullet\mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla\bullet\mathbf{F}) - (\mathbf{F}\bullet\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\bullet\nabla)\mathbf{F}$

$\nabla(\mathbf{F}\bullet\mathbf{G}) = \mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G}) + \mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F}) + (\mathbf{F}\bullet\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\bullet\nabla)\mathbf{F}$

$\nabla \bullet (\nabla\times\mathbf{F}) = 0$ $\quad$ (**div rot** $= 0$)

$\nabla \times (\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\bullet\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$ (**rot rot** $=$ **grad div** $-$ laplaciana)

VERSIONES DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$ (**Teorema Fundamental** de una dimensión)

$\displaystyle\int_C \mathbf{grad}\,\phi\bullet d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a))$ si C es la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$.

$\displaystyle\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \oint_C F_1(x, y)\,dx + F_2(x, y)\,dy$ siendo C la frontera orientada positivamente de R (**Teorema de Green**)

$\displaystyle\iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = \oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_C F1^1(x, y, z)\,dx + F_2(x, y, z)\,dy + F_3(x, y, z)\,dz$ siendo C la frontera orientada de S (**Teorema de Stoke**)

Versiones tridimensionales: S es la frontera cerrada de D, con normal hacia afuera $\hat{\mathbf{N}}$

$\displaystyle\iiint_D \mathbf{div}\ \mathbf{F}\,dV = \oiint_S \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS$ $\quad$ **Teorema de la Divergencia**

$\displaystyle\iiint_D \mathbf{rot}\ \mathbf{F}\,dV = -\oiint_S \mathbf{F}\times\hat{\mathbf{N}}\,dS$

$\displaystyle\iiint_D \mathbf{grad}\,\phi\,dV = \oiint_S \phi\hat{\mathbf{N}}\,dS$

FÓRMULAS RELATIVAS A CURVAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Curva: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

Vector velocidad: $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = v\hat{\mathbf{T}}$

Velocidad: $v = |\mathbf{v}| = \dfrac{ds}{dt}$

Longitud de arco: $s = \displaystyle\int_{t_0}^{t} v\,dt$

Aceleración: $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{t}}{dt^2}$

Componentes tangencial y normal: $\mathbf{a} = \dfrac{dv}{dt}\hat{\mathbf{T}} + v^2\kappa\hat{\mathbf{N}}$

Tangente unitaria: $\hat{\mathbf{T}} = \dfrac{\mathbf{v}}{v}$

Binormal: $\hat{\mathbf{B}} = \dfrac{\mathbf{v}\times\mathbf{a}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}$

Normal: $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{B}}\times\hat{\mathbf{T}} = \dfrac{d\hat{\mathbf{T}}/dt}{|d\hat{\mathbf{T}}/dt|}$

Curvatura: $\kappa = \dfrac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{v^3}$

Radio de curvatura: $\rho = \dfrac{1}{\kappa}$

Torsión: $\tau = \dfrac{(\mathbf{v}\times\mathbf{a})\bullet(d\mathbf{a}/dt)}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}^2|}$

Fórmulas de Frente-Serret: $\dfrac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{N}},\quad \dfrac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = -\kappa\hat{\mathbf{T}} + \tau\hat{\mathbf{B}},\quad \dfrac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{N}}$

COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES

transformación: $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$

vector de posición: $\mathbf{r} = x(u, v, w)\mathbf{i} + y(u, v, w)\mathbf{j} + z(u, v, w)\mathbf{k}$

factores de escala: $h_u = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right|$, $h_v = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|$, $h_w = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}\right|$

base local: $\hat{\mathbf{u}} = \dfrac{1}{h_u}\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}$, $\hat{\mathbf{v}} = \dfrac{1}{h_v}\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$, $\hat{\mathbf{w}} = \dfrac{1}{h_w}\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}$

elemento de volumen: $dV = h_u h_v h_w\,du\,dv\,dw$

campo escalar: $f(u, v, w)$

campo vectorial: $\mathbf{F}(u, v, w) = F_u(u, v, w)\hat{\mathbf{u}} + F_v(u, v, w)\hat{\mathbf{v}} + F_w(u, v, w)\hat{\mathbf{w}}$

gradiente: $\nabla f = \dfrac{1}{h_u}\dfrac{\partial f}{\partial u}\hat{\mathbf{u}} + \dfrac{1}{h_v}\dfrac{\partial f}{\partial v}\hat{\mathbf{v}} + \dfrac{1}{h_w}\dfrac{\partial f}{\partial w}\hat{\mathbf{w}}$

divergencia: $\nabla\bullet\mathbf{F} = \dfrac{1}{h_u h_v h_w}\left[\dfrac{\partial}{\partial u}(h_v h_w F_u) + \dfrac{\partial}{\partial v}(h_u h_w F_v) + \dfrac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right]$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$$

$$\text{rot: } \nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{\mathbf{u}} & h_v\hat{\mathbf{v}} & h_w\hat{\mathbf{w}} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

COORDENADAS POLARES DEL PLANO

transformación: $x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

vector de posición: $\mathbf{r} = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$

factores de escala: $h_r = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\right| = 1,\ h_\theta = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right| = r$

base local: $\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j},\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$

elemento del área: $dA = r\,dr\,d\theta$

campo escalar: $f(r,\ \theta)$

campo vectorial: $\mathbf{F}(r,\ \theta) = F_r(r,\ \theta)\hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r,\ \theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}$

gradiente: $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$

divergencia: $\nabla\bullet\mathbf{F} = \dfrac{\partial F_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}F_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_\theta}{\partial\theta}$

laplaciana: $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$

rot: $\nabla\times\mathbf{F} = \left[\dfrac{\partial F_\theta}{\partial r} + \dfrac{F_\theta}{r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{k}$

COORDENADAS CILÍNDRICAS

transformación: $x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = z$

vector de posición: $\mathbf{r} = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

factores de escala: $h_r = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\right| = 1,\ h_\theta = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right| = r,\ h_z = \left|\partial\mathbf{r}\partial z\right| = 1$

base local: $\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j},\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j},\ \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{k}$

elemento de volumen: $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$

elemento de área de superficie (en $r = a$): $dS = a\,d\theta\,dz$

campo escalar: $f(r,\ \theta,\ z)$

campo vectorial: $\mathbf{F}(r,\ \theta,\ z) = F_r(r,\ \theta,\ z)\hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r,\ \theta,\ z)\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_z(r,\ \theta,\ z)\mathbf{k}$

gradiente: $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$

divergencia: $\nabla\bullet\mathbf{F} = \dfrac{\partial F_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}F_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$

laplaciana: $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

rot: $\nabla\times\mathbf{F} = \dfrac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_r & rF_\theta & F_z\end{vmatrix}$

COORDENADAS ESFÉRICAS

transformación: $x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = \rho\cos\phi$

vector de posición: $\mathbf{r} = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \rho\cos\phi\,\mathbf{k}$

factores de escala: $h_\rho = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}\right| = 1,\ h_\phi = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}\right| = \rho,\ h_\theta = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right| = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi$

base local: $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \mathrm{sen}\,\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k},\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = \cos\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j} - \mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{k},\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$

elemento de volumen: $dV = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

elemento de área de superficie (en $\rho = a$): $dS = a^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\theta\,d\phi$

campo escalar: $f(\rho,\ \phi,\ \theta)$

campo vectorial: $\mathbf{F}(\rho,\ \phi,\ \theta) = F_\rho(\rho,\ \phi,\ \theta)\hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\phi(\rho,\ \phi,\ \theta)\hat{\boldsymbol{\phi}} + F_\theta(\rho,\ \phi,\ \theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}$

gradiente: $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dfrac{1}{\rho\,\mathrm{sen}\,\phi}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$

divergencia: $\nabla\bullet\mathbf{F} = \dfrac{\partial F_\rho}{\partial\rho} + \dfrac{2}{\rho}F_\rho + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial F_\phi}{\partial\phi} + \dfrac{\cot\phi}{\rho}F_\phi + \dfrac{1}{\rho\,\mathrm{sen}\,\phi}\dfrac{\partial F_\theta}{\partial\theta}$

laplaciana: $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \dfrac{2}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \dfrac{\mathrm{rot}\,\phi}{\rho^2}\dfrac{\partial f}{\partial\phi} + \dfrac{1}{\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$

rot: $\nabla\times\mathbf{F} = \dfrac{1}{\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi}\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{\rho}} & \rho\hat{\boldsymbol{\phi}} & \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial\theta}\\ F_\rho & \rho F_\phi & \rho\,\mathrm{sen}\,\phi F_\theta\end{vmatrix}$

REGLAS DE INTEGRACIÓN

$$\int (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int f(x)\,dx + B\int g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$\int U(x)\,dV(x) = U(x)V(x) - \int V(x)\,dU(x)$$

INTEGRALES ELEMENTALES

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}\,x^{r+1} + C \text{ si } r \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = -\operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C\ (a > 0,\ |x| < a)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C\ (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C\ (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C\ (a > 0,\ |x| > a)$$

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + C$$

$$\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + C$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\csc x \cot x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C \text{ si } a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C \text{ si } a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\,dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + C \text{ si } a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\,dx \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \cot^n x\,dx = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x\,dx \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \csc^n x\,dx = \frac{-1}{n-1}\csc^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x\,dx \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^m x\,dx \text{ si } n \neq -m$$

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n x \cos^{m-2} x\,dx \text{ si } m \neq -n$$

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C$$

$$\int x \cos x\,dx = \cos x + x \operatorname{sen} x + C$$

$$\int x^n \operatorname{sen} x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$$

$$\int x^n \cos x\,dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1}\operatorname{sen} x\,dx$$

INTEGRALES EN LAS QUE INTERVIENE $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ $(a > 0)$

(Si $\sqrt{x^2 - a^2}$, supóngase que $x > a > 0$).

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2 \pm a^2)\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} + C$$

$$\int (x^2 \pm a^2)^{3/2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2 \pm 5a^2)\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

INTEGRALES EN LAS QUE INTERVIENE $\sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0,\ |x| < a)$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

$$\int (a^2 - x^2)^{3/2}\, dx = \frac{x}{8}(5a^2 - 2x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$$

INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$$\int \operatorname{sen}^{-1} x\, dx = x\operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

$$\int \tan^{-1} x\, dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$

$$\int \sec^{-1} x\, dx = x\sec^{-1} x - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C \quad (x > 1)$$

$$\int x\operatorname{sen}^{-1} x\, dx = \frac{1}{4}(2x^2 - 1)\operatorname{sen}^{-1} x + \frac{x}{4}\sqrt{1 - x^2} + C$$

$$\int x\tan^{-1} x\, dx = \frac{1}{2}(x^2 + 1)\tan^{-1} x - \frac{x}{2} + C$$

$$\int x\sec^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2}\sec^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1} + C \quad (x > 1)$$

$$\int x^n\operatorname{sen}^{-1} x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx + C \text{ si } n \neq -1$$

$$\int x^n\tan^{-1} x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{1 + x^2}\, dx + C \text{ si } n \neq -1$$

$$\int x^n\sec^{-1} x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sec^{-1} x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx + C\ (n \neq -1,\ x)$$

INTEGRALES EXPONENCIALES Y LOGARÍCMICAS

$$\int xe^x\, dx = (x - 1)e^x + C$$

$$\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\, dx$$

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$$

$$\int x^n\ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \ (n \neq -1)$$

$$\int x^n(\ln x)^m\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln x)^{m-1}\, dx \ (n \neq -1)$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx) + C$$

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx) + C$$

INTEGRALES DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \tanh x\, dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$\int \coth x\, dx = \ln|\operatorname{senh} x| + C$$

$$\int \operatorname{sech} x\, dx = 2\tan^{-1}(e^x) + C$$

$$\int \operatorname{csch} x\, dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \operatorname{senh}^2 x\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x + \frac{x}{2} + C$$

$$\int \cosh^2 x\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x + \frac{x}{2} + C$$

$$\int \tanh^2 x\, dx = x - \tanh x + C$$

$$\int \coth^2 x\, dx = x - \coth x + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \tanh x + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x\, dx = -\coth x + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x\, dx = -\operatorname{sech} x + C$$

$$\int \operatorname{csch} x \coth x\, dx = -\operatorname{csch} x + C$$

DIVERSAS INTEGRALES ALGREBRAICAS

$$\int x(ax+b)^{-1}\, dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$$

$$\int x(ax+b)^{-2}\, dx = \frac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right] + C$$

$$\int x(ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left(\frac{ax+b}{n+2} - \frac{b}{n+1}\right) + C \text{ si } n \neq -1,\ -2$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{x}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}}\right) \text{ si } n \neq 1$$

$$\int x\sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{15a^2}(3ax-2b)(ax+b)^{3/2} + C$$

$$\int x^n\sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{a(2n+3)}\left(x^n(ax+b)^{3/2} - nb\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\, dx\right)$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b} + C$$

$$\int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a(2n+1)}\left(x^n\sqrt{ax+b} - nb\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}\, dx\right)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C \text{ si } b > 0$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C \text{ si } b < 0$$

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{b(n-1)x^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}} \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \sqrt{2ax-x^2}\, dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x-a}{a} + C\ (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x-a}{a} + C\ (a > 0)$$

$$\int x^n\sqrt{2ax-x^2}\, dx = \frac{x^{n-1}(2ax-x^2)^{3/2}}{n+2} + \frac{(2n+1)a}{n+2}\int x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}\, dx$$

$$\int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{(2n-1)}{a^n}\int \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2ax - x^2} + a\,\text{sen}^{-1}\,\frac{x - a}{a} + C\ (a > 0)$$

$$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^n}\,dx = \frac{(2ax - x^2)^{3/2}}{(3 - 2n)ax^n} + \frac{n - 3}{(2n - 3)a}\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^{n-1}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a(1 - 2n)x^n} + \frac{n - 1}{(2n - 1)a}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{2ax - x^2}}$$

$$\int (\sqrt{2ax - x^2})^n\,dx = \frac{x - a}{n + 1}(\sqrt{2ax - x^2})^n + \frac{na^2}{n + 1}\int (\sqrt{2ax - x^2})^{n-2}\,dx \text{ si } n = -1$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{2ax - x^2})^n} = \frac{x - a}{(n - 2)a^2}(\sqrt{2ax - x^2})^{2-n} + \frac{n - 3}{(n - 2)a^2}\int \frac{dx}{(\sqrt{2ax - x^2})^{n-2}} \text{ si } n \neq 2$$

INTEGRALES DEFINIDAS

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!(n \geqslant 0)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ a > 0$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a} \text{ si } a > 0$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,dx = \frac{n - 1}{2a}\int_0^\infty x^{n-2}e^{-ax^2}\,dx \text{ si } a > 0,\ n \geqslant 2$$

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{1 \bullet 3 \bullet 5 \cdots (n - 1)}{2 \bullet 4 \bullet 6 \cdots n}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es un entero par y } n \geqslant 2 \\ \dfrac{2 \bullet 4 \bullet 6 \cdots (n - 1)}{3 \bullet 5 \bullet 7 \cdots n} & \text{si } n \text{ es un entero impar y } n \geqslant 3 \end{cases}$$